1 Úvod

1.1 Různě velká nekonečna?

Dokažme si pro začátek větu, která byla jedním z prvních výsledků Cantorovy teorie množin a říká vlastně to, že přirozených čísel je v jistém smyslu 'méně' než reálných.

Věta 1.1 (Cantor) *Neexistuje zobrazení množiny všech přirozených čísel* $\mathbf{N}$ *na množinu všech reálných čísel* $\mathbf{R}$.

Důkaz. Dokážeme dokonce, že neexistuje zobrazení $\mathbf{N}$ na otevřený interval $I = (0, 1)$. Nejprve si všimněme, že každé $z \in I$ má nekonečný desetinný rozvoj ve tvaru

$$z = 0, z_1 z_2 z_3 \dots, \tag{1}$$

kde pro každé i je $0 \le z_i \le 9$. U takových z, která mají i konečný rozvoj $z = 0, z_1 \dots z_m$, není zápis (1) jednoznačný. Pro ně vezmeme nekonečný rozvoj $z = 0, z_1 \dots z_m 000 \dots$.

Nyní předpokládejme, že f je zobrazení splňující podmínku dokazované věty. Označme reálné číslo $f(n)$ jako a_n (pro každé celé $n \ge 1$). Každé z čísel a_n má výše uvedeným postupem jednoznačně přiřazen nekonečný zápis; můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \mathbf{a_{11}} a_{12} a_{13} \dots \\ a_2 &= 0, a_{21} \mathbf{a_{22}} a_{23} \dots \\ a_3 &= 0, a_{31} a_{32} \mathbf{a_{33}} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nyní uvidíme, proč jsou v našem obrázku číslice 'na diagonále' zobrazeny tučně a proč se tomuto typu důkazu říká 'diagonální metoda'. Uvažme číslo y dané desetinným zápisem $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$, kde pro každé i je $y_i = 1$, pokud $a_{ii} \ne 1$, a v opačném případě je $y_i = 2$. Vidíme, že $y \in I$ a liší se od každého a_i (v i-té cifře za desetinnou čárkou, tedy na diagonále). Toto y ovšem dokazuje, že zobrazení f není na, což je spor s předpokladem. □

1.2 Množinové paradoxy

Cantorovým intuitivním pojetím množin otřásl koncem minulého století objev několika paradoxů, se kterými se seznámíme v pozdějších přednáškách. Nejznámějším je patrně Russellův paradox: Nechť m je množina definovaná předpisem

$$m = \{\, x : x \text{ je množina a } x \notin x \,\}.$$

Otázka dne: je $m \in m$?

Podobné obtíže ukázaly nutnost dalšího zpřesnění základů teorie množin.

1.3 Jazyk

Základní pojmy teorie množin jsou: množina, rovnost a náležení. Přitom množiny jsou základními objekty, zbylé dva pojmy se týkají vztahů mezi nimi.

Definice 1.2 Symboly jazyka teorie množin:

1. proměnné pro množiny: $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$,
2. predikátové symboly: $=$ (rovnost), $\in$ (náležení),
3. logické spojky: $\neg$ (negace), $\wedge$ (konjunkce), $\vee$ (disjunkce), $\rightarrow$ (implikace), $\leftrightarrow$ (ekvivalence),
4. kvantifikátory: $\forall$ (obecný), $\exists$ (existenční),
5. pomocné symboly: (,).

Symboly jsou 'písmena' formálního jazyka. Slova z nich vytvářená nazýváme *formule.*

Definice 1.3 Konečná posloupnost symbolů jazyka teorie množin je formulí, jestliže má některý z následujících tvarů:

(i) $x = y$ nebo $x \in y$, kde x, y jsou proměnné pro množiny (uvedené formule se nazývají *atomické),*

(ii) $(\neg\varphi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$, *kde φ, ψ jsou formule,*

(iii) $(\forall x)\varphi, (\exists x)\varphi$, *kde x je proměnná a φ je formule.*

Příklad formule. Jeden z axiomů ZF teorie množin, axiom extenzionality:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ ((\forall u)\ (u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y).$$

Se všemi axiomy se seznámíme v příští přednášce. Ještě k axiomům predikátu rovnosti, které jsou společné různým matematickým teoriím (a nejsou tedy specialitou teorie množin):

1.4 Axiomy rovnosti

1. Rovnost je reflexivní, symetrická a tranzitivní, tedy např. $(\forall x)\ (x = x)$ atd.
2. Prvky navzájem rovné mají stejné vlastnosti vzhledem k predikátům. Tedy v případě teorie množin, kde jediným predikátem kromě rovnosti je náležení:

$$(\forall x_1)\ (\forall y_1)\ (\forall x_2)\ (\forall y_2)\ ((x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2) \rightarrow (x_1 \in y_1 \leftrightarrow x_2 \in y_2)).$$