10 Kardinální čísla

10.1 Základní pojmy

Víme, jak porovnávat velikost dvou množin. Zatím nám však chybí absolutní měřítko, škála, na kterou by bylo možné každou množinu podle velikosti zařadit. Takové měřítko představují kardinální čísla.

Dvě různá přirozená čísla mají vždy různou mohutnost. Pro ordinály obecně to ale neplatí: například ordinály ω a $\omega + 1$ mají stejnou mohutnost (jak vypadá příslušné zobrazení?). Přitom je ale třeba zdůraznit, že tyto ordinály *nejsou isomorfní*, jako ostatně žádné dva různé ordinály.

Definice 10.1 Ordinál κ je *kardinálním číslem (kardinálem)*, pokud žádný menší ordinál nemá s ním stejnou mohutnost. Třídu všech kardinálů označujeme Cn.

Všechna přirozená čísla i ordinál ω jsou tedy kardinální čísla, ordinál $\omega + 1$ však nikoli.

Pro konečnou množinu a je zvykem psát $|a| = n$, pokud a je n-prvková. Kardinály dovolují rozšířit tento zápis i na nekonečné množiny.

Definice 10.2 Kardinál κ je *mohutnost* množiny a, pokud existuje bijekce a na κ. Píšeme

$$|a| = \kappa.$$

Přímo z definice plyne, že kardinál $|a|$ (pokud existuje) je určen jednoznačně. S existencí se to má následovně. Bijekce množiny a na nějaký kardinál existuje právě když množinu a lze dobře uspořádat. (Důkaz je snadný.) Mohutnost je tedy definována právě pro všechny takové množiny.

Axiom výběru (který jsme neprobírali a není ani součástí ZF teorie) nicméně implikuje, že každou množinu lze dobře uspořádat. Pokud jej přijmeme, bude tedy mít každá množina nějakou mohutnost.

Je jasné, že množina je spočetná, právě když její mohutnost je nejvýše ω. V opačném případě je nespočetná.

Problém 10.3 Ukažte, že každý kardinál $\kappa \geq \omega$ je limitním ordinálem.

Problém 10.4 Dokažte následující tvrzení:

(i) $\omega + \omega \approx \omega$,

(ii) $\omega \cdot n \approx \omega \quad \text{pro } n \in \omega$,

(iii) $\omega^n \approx \omega \quad \text{pro } n \in \omega$,

(iv) $\omega^\omega \approx \omega$.

Indukcí se dá dokonce ukázat, že i supremum čísel

$$\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots,$$

označované ε_0, je ještě spočetné.

10.2 Vlastnosti Cn

Tvrzení 10.5 *Supremum (v On) každé množiny kardinálů je kardinál.*

Důkaz. Nechť X je množina kardinálů. Víme, že $\sup X = \bigcup X$. Chceme ukázat, že $\sup X$ je kardinál. Nechť $\alpha < \kappa$. Pak také $\alpha \in \kappa = \bigcup X$ a tedy $\alpha \in \lambda$ pro nějaké $\lambda \in X$. Prvek λ je kardinál, takže $\alpha \prec \lambda$ a tím pádem $\alpha \prec \kappa$. Dokázali jsme, že κ je kardinál. $\square$

Tvrzení 10.6 *Neexistuje největší kardinál.*

Důkaz. Idea: Nechť μ je největší kardinál. Pak pro každý ordinál $\alpha > \kappa$ existuje bijekce α na μ, která na μ indukuje nějaké dobré uspořádání R_α (prostě podle té bijekce napodobíme uspořádání na ordinálu α). Pro $\alpha \neq \beta > \mu$ je $R_\alpha \neq R_\beta$, jinak by α bylo isomorfní s β (a to žádné 2 různé ordinály nejsou). Teď jde o to, že těch $\alpha > \mu$ je "hodně", zatímco těch uspořádání R_α je "málo". Přesněji: dostali bychom prosté 'zobrazení' *vlastní třídy* všech $\alpha > \mu$ do *množiny* U všech uspořádání na μ. Proč je ale U množina? Protože každé uspořádání množiny μ je podmnožinou $\mu \times \mu$, a tedy

$$U \subseteq \mathcal{P}(\mu \times \mu).$$

Zmíněné prosté 'zobrazení' vlastní třídy do množiny nemůže existovat. Tím jsme došli ke sporu. $\square$

Otázka: proč v tomto nástinu důkazu píšeme 'zobrazení' v uvozovkách? Jak se dá tato nepřesnost odstranit? (Použijte axiom nahrazení.)

Důsledek 10.7 *Třída* Cn *je vlastní.*

Důkaz. Kdyby byla množinou, měla by podle tvrzení 10.5 supremum κ, kde $\kappa \in \mathrm{Cn}$. Ovšem pro toto κ existuje $\lambda > \kappa$ ($\lambda \in \mathrm{Cn}$), takže κ není supremum. To je spor. $\square$

10.3 Zobrazení $\aleph$

Definice 10.8 *Následník* kardinálu κ je nejmenší kardinál, který je větší než κ. Označujeme jej κ^+. Kardinál je *limitní*, není-li následníkem žádného kardinálu.

K popisu hierarchie nekonečných kardinálů slouží třídové zobrazení $\aleph$ (alef), které každému ordinálu α přiřazuje "α-tý nekonečný kardinál" $\aleph_\alpha$. Je definováno takto:

$$\aleph_\alpha = \begin{cases} \omega & \text{pro } \alpha = 0 \\ (\aleph_\beta)^+ & \text{pro } \alpha = \beta + 1 \\ \sup\{\, \aleph_\beta : \beta < \alpha \,\} & \text{pro } \alpha > 0 \text{ limitní} \end{cases}$$

Z věty o transfinitní rekurzi plyne, že toto přiřazení je definováno jednoznačně.

Například $\aleph_1$ je první nespočetný kardinál ω^+.

Problém 10.9 Dokažte:

(i) $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha$,

(ii) mohutnost množiny všech konečných podmnožin množiny $\aleph_\alpha$ je $\aleph_\alpha$.

10.4 Kardinální aritmetika

Každé kardinální číslo je zároveň ordinál, takže na Cn je definován ordinální součet a součin. Existuje však také *kardinální* součet a součin, definovaný pouze v rámci Cn a odlišný od ordinálního.

Definice 10.10 Nechť κ, λ jsou kardinály. Jejich kardinální *součet* $\kappa+\lambda$ a *součin* $\kappa \cdot \lambda$ jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &= |(\{\,0\,\} \times \kappa) \cup (\{\,1\,\} \times \lambda)|, \\ \kappa \cdot \lambda &= |\lambda \times \kappa|. \end{aligned}$$

Tyto operace jsou asociativní, komutativní a distributivní. Na ω se shodují s ordinálním součinem.

Tvrzení 10.11 *Nechť κ, λ jsou nenulové kardinály a alespoň jeden z nich je nekonečný. Pak*

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\,\kappa, \lambda\,\}.$$

Důkaz. Označme $\mu = \max\{\,\kappa, \lambda\,\}$. Za daných předpokladů lze snadno nalézt zobrazení, která ukazují, že

$$\mu \preceq (\{\,0\,\} \times \kappa) \cup (\{\,1\,\} \times \lambda) \preceq \lambda \times \kappa \preceq \mu \times \mu \approx \mu.$$

Pro poslední vztah jsme použili problém 10.9 (i). Z Cantor-Bernsteinovy věty přímo plyne dokazovaný fakt. □