3 Relace a zobrazení

V tomto oddílu se zaměříme na pojmy relace a zobrazení, zavedeme pro práci s nimi pomocný aparát a nakonec o zobrazeních dokážeme netriviální tvrzení: Banachovu větu. Nejprve je třeba definovat kartézský součin.

Definice 3.1 *Kartézským součinem* množin a a b je množina

$$a \times b = \{ \langle x, y \rangle : x \in a \wedge y \in b \}.$$

Musíme ovšem dokázat, že uvedená množina skutečně množinou je. K tomu stačí použít schéma vydělení pro množinu $\mathcal{P}\mathcal{P}(a \cup b)$, kde prvky $\langle x, y \rangle = \{ \{ x \}, \{ x, y \} \}$ 'žijí'. Konkrétně řečeno, podle schématu vydělení je soubor

$$\{ z \in \mathcal{P}\mathcal{P}(a \cup b) : (\exists x \in a)\ (\exists y \in b)\ z = \langle a, b \rangle \}$$

množinou.

Podobně v následujících definicích se sice zdá, že používáme neomezenou kvantifikaci a neomezené vydělení, ale při bližším pohledu zjistíme, že se vše odehrává v rámci pevně dané množiny (totiž $\bigcup(\bigcup R)$). Definice jsou tedy korektní.

Definice 3.2 Množina R je *relací*, jsou-li všechny její prvky uspořádanými dvojicemi, tedy platí-li

$$(\forall z \in R)\ (\exists x)\ (\exists y)\ z = \langle x, y \rangle.$$

Definiční obor relace R je množina

$$\mathrm{dom}\,(\mathrm{R}) = \{ \mathrm{x} : (\exists \mathrm{y})\ \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{R} \}.$$

Obor hodnot relace R je množina

$$\mathrm{rng}\,(\mathrm{R}) = \{ \mathrm{y} : (\exists \mathrm{x})\ \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{R} \}.$$

Jak jsme naznačili výše, jsou množiny $\mathrm{dom}\,(\mathrm{R})$ a $\mathrm{rng}\,(\mathrm{R})$ částmi množiny $\bigcup(\bigcup R)$. Všimněme si, že pro každou relaci R platí

$$R \subseteq \mathrm{dom}\,(\mathrm{R}) \times \mathrm{rng}\,(\mathrm{R}).$$

Definice 3.3 Nechť R je relace a z je množina. *Zúžení (parcializace)* R na z je relace

$$R \,|\, z = \{ \langle x, y \rangle : x \in z \wedge \langle x, y \rangle \in R \}.$$

Obraz množiny z přes R je množina

$$R[z] = \mathrm{rng}\,(\mathrm{R} \,|\, \mathrm{z}).$$

Definice 3.4 *Složení relací* R a S je relace $R \circ S \subseteq \mathrm{dom}\,(\mathrm{R}) \times \mathrm{rng}\,(\mathrm{S})$, definovaná jako

$$R \circ S = \{ \langle x, y \rangle : (\exists w \in \mathrm{rng}\,(\mathrm{R}))\ (\langle x, w \rangle \in R \wedge \langle w, y \rangle \in S). \}$$

Relací *inverzní* k relaci R je relace

$$R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in R \}.$$

Zobrazení

Definice 3.5 Relace f je *zobrazení (funkce)*, platí-li

$$(\forall x \in \mathrm{dom}\,(\mathrm{f}))\ (\forall v, w \in \mathrm{rng}\,(\mathrm{f}))\ \Big(\langle x, v\rangle \in f \wedge \langle x, w\rangle \in f \to v = w\Big).$$

Zobrazení je *prosté (vzájemně jednoznačné)*, je-li zobrazením i jeho inverzní relace.

Složení dvou zobrazení f, g je jejich složení jakožto relací. Je to opět zobrazení. Místo $f \circ g$ budeme psát gf, takže $(gf)(z) = g(f(z))$.

Zápis $f : a \to b$ označuje fakt, že f je zobrazení množiny a do množiny b. Pojem zobrazení *na* je definován obvyklým způsobem. *Bijekce* je zobrazení, které je prosté a na.

Před následující větou zobecníme operaci průniku zavedenou dříve. *Průnik množiny* a je množina

$$\bigcap a = \{\, x : (\forall w \in a)\ x \in w \,\}.$$

Věta 3.6 (Banach) *Nechť a, b jsou množiny a nechť*

$$f : a \to b, \qquad g : b \to a$$

jsou prostá zobrazení. Potom existují množiny $a' \subseteq a$, $b' \subseteq b$ takové, že

$$b' = f[a'], \qquad a - a' = g[b - b'].$$

Důkaz. Nechť M je množina všech podmnožin x množiny a, které mají následující dvě vlastnosti: (1) x obsahuje všechny prvky nemající vzor při zobrazení g, (2) zobrazení gf zobrazuje x do sebe. Tedy:

$$M = \{\, u : a - g[b] \subseteq u \subseteq a \quad \text{a} \quad gf[u] \subseteq u \,\}.$$

Víme, že M je neprázdná, neboť přinejmenším $a \in M$. Můžeme tedy položit

$$a' = \bigcap M.$$

Není těžké nahlédnout, že $a' \in M$. (Vlastnost (1) je jasná, (2) plyne z toho, že je-li $x \in a'$, pak pro každé $u \in M$ je $x \in u$ a tedy $gf(x) \in u$; to ale znamená $gf(x) \in a'$.)

Položme teď

$$b' = f[a'].$$

Důkaz bude hotov, pokud ukážeme, že

$$a - a' = g[b - b'].$$

Rovnost rozdělíme na 2 inkluze.

(i) Důkaz, že $a - a' \subseteq g[b - b']$. Vezměme libovolné $x \in a - a'$. Z vlastnosti (1) plyne, že x má vzor při zobrazení g, tedy $x = g(y)$ pro nějaké $y \in b$. Zbývá ukázat, že $y \notin b'$.

Kdyby $y \in b'$, pak $y = f(w)$ pro nějaké $w \in a'$. Podle vlastnosti (2) by bylo $gf(w) \in a'$. Jenže $gf(w) = g(y) = x$, o kterém víme, že $x \in a - a'$. To je spor, takže část (i) je dokázána.

(ii) Důkaz, že $g[b - b'] \subseteq a - a'$. Vezměme libovolné $p \in g[b - b']$. Platí $p = g(r)$ pro jisté $r \notin b'$. Chceme dokázat, že $p \notin a'$.

Předpokládejme, že $p \in a'$. Tvrdíme, že $a' - \{ p \}$ má vlastnosti (1) a (2) a patří tedy do M (což bude samozřejmě spor). Vlastnost (1) plyne z toho, že p vzor *má*, takže se nic nestane, když ho vyhodíme. Problém by nastal u vlastnosti (2), kdyby $gf(s) = p$ pro nějaké $s \in a' - \{ p \}$. Jenže z prostoty g plyne, že pokud

$$gf(s) = p = g(r),$$

pak $f(s) = r$. Na to by ale r muselo ležet v b', což není pravda. Tedy skutečně $p \notin a'$ a důkaz věty je u konce. $\square$