5 Konečné množiny a přirozená čísla

5.1 Uspořádání

Připomeňme si základní definice se vztahem k uspořádání.

Definice 5.1 *(Částečné) uspořádání* na množině a je binární relace $\leq$ na a, která je:

- reflexívní ($x \leq x$),
- slabě antisymetrická ($x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$), a
- tranzitivní ($x \leq y \leq z \rightarrow x \leq z$).

Definice 5.2 Nechť $\leq$ je částečné uspořádání na a. Prvek $m \in a$ je:

- *maximální*, pokud $(\forall x \in a)\ m \not\lneq x$,
- *největší*, pokud $(\forall x \in a)\ x \leq m$,
- *minimální*, pokud $(\forall x \in a)\ x \not\lneq m$,
- *nejmenší*, pokud $(\forall x \in a)\ m \leq x$,

Všimněme si, že nejmenší prvek je vždy minimální, ale ne naopak. V částečném uspořádání existuje nejvýše jeden nejmenší prvek.

Definice 5.3 Částečné uspořádání $\leq$ na množině a je *lineární*, pokud pro každé $x, y \in a$ platí některá z následujících možností:

$$x \leq y, \qquad x = y, \qquad x \geq y,$$

tj. pokud každé dva prvky jsou *porovnatelné*.

Definice 5.4 Částečně uspořádané množiny $(a_1, \leq_1)$ a $(a_2, \leq_2)$ jsou *isomorfní*, pokud existuje bijekce $f : a_1 \rightarrow a_2$ tak, že

$$x \leq_1 y \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq_2 f(y)$$

pro každé $x, y \in a_1$.

5.2 Konečné množiny

Definice 5.5 [Tarski] Množina a je *konečná* (psáno $\mathrm{Fin}\,(\mathrm{a})$), pokud každá neprázdná množina $b \subseteq \mathcal{P}(a)$ má maximální prvek vzhledem k uspořádání inkluzí.

Místo 'maximální' můžeme zrovna tak říci 'minimální' a smysl se nezmění. Množina $b \subseteq \mathcal{P}(a)$ má totiž maximální prvek, právě když množina $b' = \{\, a - x : x \in b \,\}$ má minimální prvek.

Tvrzení 5.6 *Každá konečná uspořádaná množina má nějaký minimální a nějaký maximální prvek.*

Důkaz. Stačí minimální. Nechť $(a, \leq)$ je uspořádaná množina. Uvažme všechny *dolní množiny* na a, tj. množiny tvaru

$$\downarrow x = \{\, y : y \leq x \,\},$$

kde $x \in a$. Z definice konečnosti množiny a má množina všech dolních množin minimální prvek, dejme tomu $\downarrow z$. Pak je ale z minimální v a. □

Tvrzení 5.7 *Je-li* $\mathrm{Fin}\,(\mathrm{b})$ *a* $c \subset b$ *(vlastní!), pak* $c \prec b$.

Důkaz. Stačí $c \not\approx b$. Sporem. Nechť q je neprázdná množina všech $c' \subset b$, že $c' \approx b$. Pak $q \subseteq \mathcal{P}(b)$, takže q musí mít minimální prvek m. Toto m je ekvivalentní b a je jeho vlastní podmnožinou. Uvažme tedy bijekci $f : b \to m$. Obraz $f[m]$ množiny m je rovněž ekvivalentní b (složení bijekcí!) a je *vlastní* podmnožinou m, protože f je prosté a tudíž $f[m]$ neobsahuje obrazy prvků neprázdné množiny $b - m$. To je spor s minimalitou m. □

Tvrzení 5.8 *Nechť* $\mathrm{Fin}\,(\mathrm{x})$.

(i) Je-li $y \subseteq x$*, pak* $\mathrm{Fin}\,(\mathrm{y})$.

(ii) Je-li $y \approx x$*, pak* $\mathrm{Fin}\,(\mathrm{y})$.

(iii) Je-li $y \preceq x$*, pak* $\mathrm{Fin}\,(\mathrm{y})$.

Důkaz. (i) plyne přímo z definice. (ii): bijekce $f : x \to y$ určuje isomorfismus částečně uspořádaných množin $\mathcal{P}(x)$ a $\mathcal{P}(y)$ (kde uspořádání je v obou případech inkluze). Tedy y je také konečná. (iii) plyne z (i) a (ii). □

Tvrzení 5.9 *(i) Sjednocení dvou konečných množin je konečná množina.*

(ii) Pro konečnou množinu x *a libovolnou* y *je* $\mathrm{Fin}\,(\mathrm{x} \cup \{\, \mathrm{y} \,\})$.

Důkaz. (i) Nechť a a b jsou konečné. Pro danou $w \subseteq \mathcal{P}(a \cup b)$ potřebujeme najít maximální prvek. Množina

$$w_1 = \{ x \cap a : x \in w \}$$

má z konečnosti a maximální prvek m_1. Nechť

$$w_2 = \{ y \cap b : (y \in w) \wedge (y \cap a = m_1) \}.$$

Pak w_2 má rovněž maximální prvek, řekněme m_2. Pak $m_1 \cup m_2$ je prvkem w, a to maximálním.

(ii) plyne z (i) a z faktu, že jednoprvková množina $\{ y \}$ je konečná. $\square$

Věta 5.10 (Princip indukce pro konečné množiny) *Nechť $\varphi(x)$ je formule, pro kterou platí:*

(1) $\varphi(\emptyset)$,

(2) $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x \cup \{ y \})$ *pro všechny množiny x, y.*

Pak pro každou konečnou množinu a je $\varphi(a)$.

Důkaz. Sporem: nechť $\mathrm{Fin}\,(\mathrm{a})$, ale $\neg\varphi(a)$. Vezmeme

$$q = \{ x : x \subseteq a \wedge \varphi(x) \}.$$

Podle (1) platí $\varphi(\emptyset)$, takže q je neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(a)$. Označme její maximální prvek m a zvolme $z \in a - m$ (jistě $m \neq a$, protože m splňuje formuli φ, kdežto a ne). Množina

$$m' = m \cup \{ z \}$$

je podmnožinou a, pro kterou podle (2) platí $\varphi(m')$. To je spor s maximalitou m. $\square$

Tvrzení 5.11 *Nechť a, b jsou konečné množiny. Pak:*

(i) $\mathrm{Fin}\,(\mathcal{P}(\mathrm{a}))$,

(ii) $\mathrm{Fin}\,(\mathrm{a} \times \mathrm{b})$.

Důkaz. (i) Použijeme princip indukce pro konečné množiny. Položme

$$\varphi(x) \equiv \mathrm{Fin}\,(\mathcal{P}(\mathrm{x})).$$

Zjevně platí $\varphi(\emptyset)$. Zbývá ověřit podmínku (2) věty 5.10. Předpokládejme tedy, že tedy $\varphi(x)$ a dokažme $\varphi(x \cup \{ y \})$.

Jak vypadá množina

$$q = \mathcal{P}(x \cup \{ y \}) - \mathcal{P}(x)?$$

Její mohutnost je stejná jako mohutnost množiny $\mathcal{P}(x)$ (bijekce mezi nimi je 'odebrání prvku y'). O $\mathcal{P}(x)$ však předpokládáme, že je konečná. Podle bodu (ii) tvrzení 5.8 je konečná i q. Ovšem sjednocení dvou konečných množin je konečné (podle bodu (ii) tvrzení 5.9), čímž jsme dokázali, že skutečně platí $\varphi(x \cup \{ y \})$.

(ii) Už dříve jsme viděli, že

$$a \times b \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)).$$

Tato část je tedy důsledkem části (i). □

Tvrzení 5.12 *Sjednocení konečně mnoha konečných množin je konečné. Jinými slovy, je-li b konečná množina a pro každé $z \in b$ je* $\mathrm{Fin}\,(\mathrm{z})$, *pak* $\mathrm{Fin}\,(\bigcup \mathrm{b})$.

Důkaz. Opět použijeme indukci pro konečné množiny. Nechť

$$\varphi(x) \equiv ((\forall z \in x)\ \mathrm{Fin}\,(\mathrm{z})) \to \mathrm{Fin}\,(\bigcup \mathrm{x}).$$

Jistě $\varphi(\emptyset)$. Nechť platí $\varphi(x)$ a y je libovolná množina. Pokud y nebo některý prvek x není konečný, pak $\varphi(x \cup \{ y \})$ platí triviálně. V opačném případě si všimneme, že

$$\bigcup (x \cup \{ y \}) = y \cup \bigcup x$$

je podle indukčního předpokladu sjednocení dvou konečných množin. To je, jak víme, konečné. Zbytek za nás zařídí princip indukce pro konečné množiny. □

5.3 Přirozená čísla

Jak reprezentovat přirozená čísla v teorii množin? Motivací našeho přístupu bude von Neumannova konstrukce přirozených čísel. Pro každé přirozené číslo n zkonstruujeme množinu (označenou rovněž n), která jej bude zastupovat.

Položíme

$$0 \equiv \emptyset$$

a pro každé přirozené n rekurzívně definujeme

$$n + 1 \equiv n \cup \{ n \}.$$

Takto dokážeme zkonstruovat 'zástupce' libovolně velkého čísla. Můžeme však mluvit například o množině *všech* přirozených čísel?

Definice 5.13 Množina a je *induktivní*, pokud $\emptyset \in a$ a pro každé $x \in a$ je také $x \cup \{ x \} \in a$.

Existenci alespoň jedné induktivní množiny nám zaručuje axiom nekonečna. To ospravedlňuje následující definici.

Definice 5.14 *Množina všech přirozených čísel* je určena vztahem

$$\omega = \bigcap \{\, a : \; a \text{ je induktivní} \,\}.$$

Její prvky nazýváme *přirozená čísla.*

Korektnost následující definice se snadno ověří:

Definice 5.15 *Následníkem* prvku $n \in \omega$ je přirozené číslo

$$s(n) = n \cup \{\, n \,\}.$$

Věta 5.16 (Princip indukce pro přirozená čísla) *Nechť a je množina přirozených čísel, pro kterou platí:*

(1) $0 \in a$,

(2) $x \in a \to s(x) \in a$.

Pak $a = \omega$.

Důkaz. Podmínky (1) a (2) neříkají nic jiného, než že a je induktivní množina. Pak ale z definice $\omega \subseteq a$ a věta je dokázána. □

Lemma 5.17 *Nechť n je přirozené číslo. Pak*

(i) $n \subseteq \omega$,

(ii) $m \in n \to m \subseteq n$,

(iii) $n \notin n$.

Důkaz. Důkaz je ve všech případech snadná indukce podle n. □

Věta 5.18 *(i) Každé přirozené číslo je konečná množina.*

(ii) Množina je konečná, právě když má stejnou mohutnost jako nějaké přirozené číslo.

(iii) Množina ω je nekonečná.

Důkaz. (i) Indukce. Nechť z je množina všech konečných přirozených čísel. Zjevně $0 \in z$. Pokud $n \in z$, pak $s(n) = n \cup \{ n \}$ je sjednocení dvou konečných množin a je tedy prvkem z.

(ii) Indukce *pro konečné množiny* s využitím formule

$$\varphi(x) \equiv (\exists n \in \omega)\; x \approx n.$$

Očividně $\varphi(\emptyset)$. Nechť $x \approx n$ a mějme dánu množinu y. Dokazujeme $\varphi(x \cup \{ y \})$. To je snadné, protože $x \cup \{ y \}$ má stejnou mohutnost jako n nebo $s(n)$ podle toho, zda $y \in x$ nebo ne.

(iii) Víme, že každé přirozené n je nejen prvkem, ale také *podmnožinou* ω. Proto $\omega \subset \mathcal{P}(\omega)$. Množina ω ale nemá maximální prvek vzhledem k inkluzi, neboť každé přirozené číslo má následníka. $\square$