6 Ordinální čísla — úvod

Zaměříme se na vlastnosti relace $\in$ na množině všech přirozených čísel a rovněž na každém přirozeném čísle jako takovém. Uvidíme, že oba tyto případy jsou do značné míry podobné. Abstrahujeme-li jejich společné rysy, dostaneme se k zobecnění přirozených čísel, kterým jsou čísla ordinální.

Nejprve pojem dobrého uspořádání.

Definice 6.1 Uspořádání R na množině a je *dobré*, má-li každá neprázdná množina $b \subseteq a$ nejmenší prvek.

Připomeňme, že relace je ostrým uspořádáním, je-li antireflexívní a tranzitivní. Všimněte si, že tyto dvě vlastnosti implikují antisymetričnost. Další pozorování je, že dobré uspořádání je automaticky lineární. Skutečně: každá dvouprvková podmnožina v něm má nejmenší prvek, takže kažé dva prvky jsou porovnatelné.

Chtěli bychom ukázat, že relace náležení je ostrým uspořádáním jak na každém přirozeném čísle, tak na ω. To je vlastně obsahem lemmatu 5.17 v textu minulé přednášky. Pro přehlednost si jej tady ocitujme:

Lemma 6.2 (vlastně 5.17) *Nechť n je přirozené číslo. Pak*

(i) $n \subseteq \omega$,

(ii) $m \in n \to m \subseteq n$,

(iii) $n \notin n$.

Je vidět, že bod (iii) tvrdí, že $\in$ jako relace na ω je antireflexívní. Bod (ii) doplňuje, že je to relace tranzitivní. Je to tedy ostré uspořádání na ω. Podle bodu (i) je každé přirozené číslo n podmnožinou ω, proto je $\in$ ostré uspořádání i na n.

Věta 6.3 *Relace $\in$ je lineární uspořádání na množině ω.*

Důkaz. Chceme ukázat, že pro každé $m, n \in \omega$ platí:

$$m \in n \quad \text{nebo} \quad m = n \quad \text{nebo} \quad m \ni n. \tag{1}$$

Použijeme následující lemma:

Lemma 6.4 *Pro každé $m, n \in \omega$ je*

$$m \in n \leftrightarrow m \subset n.$$

Důkaz. Novinkou je pouze implikace zprava doleva. Ať tedy

$$A = \{\, n : \ (\forall m \in \omega)\ (m \subset n \to m \in n) \,\}.$$

Zjevně $0 \in A$. Předpokládejme, že $n \in A$ a $m \subset n \cup \{ n \}$. Především $m \subseteq n$. Kdyby totiž $n \in m$, pak (jak víme) $n \subseteq m$ a (jak je vidět) také $n \cup \{ n \} \subseteq m$, což je spor.

Ale $m \subseteq n$ znamená, že buď $m = n$, a pak skutečně $m \in n \cup \{ n \}$, nebo $m \subset n$, a pak podle indukčního předpokladu dokonce $m \in n$ (a tedy i $m \in n \cup \{ n \}$). Tím jsme s důkazem lemmatu hotovi. □

Zpět k důkazu lineárnosti uspořádání $\in$. Nechť n je pevné a nechť M je množina všech m, pro něž platí (1). Podle lemmatu je $0 \in M$, protože pro nenulová n máme $0 \subset n$ a tedy $0 \in n$.

Předpokládejme, že $m \in M$ a dokažme, že $m \cup \{ m \} \in M$. Stačí rozebrat tři případy: pokud $n = m$ nebo $n \in m$, je jasné, že $n \in m \cup \{ m \}$. Ve zbylém případě je $m \in n$, podle lemmatu $m \subset n$, tím pádem $m \cup \{ m \} \subseteq n$ a tedy buď $m = n$ nebo (zase podle lemmatu) $m \cup \{ m \} \in n$. □

To není celé — relace náležení má ještě silnější vlastnost.

Věta 6.5 *Relace $\in$ je dobrým ostrým uspořádáním na ω.*

Důkaz. Nechť a je množina přirozených čísel, která nemá nejmenší prvek vzhledem k relaci $\in$. Zvolme $x \in a$ a položme $b = x \cap a$. Množina b je neprázdná. Kdyby nebyla, pak by žádný prvek množiny a nepatřil do x, tj. x by byl minimální prvek množiny a, což je ale v lineárním uspořádání totéž co prvek nejmenší.

Kromě toho je množina b také konečná, protože je částí konečné množiny a. Podle prvního tvrzení v textu minulé přednášky má každá konečná neprázdná uspořádaná množina minimální prvek. Nechť m je minimální (tj. nejmenší) prvek *lineárně* uspořádané množiny b.

Zbývá si všimnout, že m je nejmenší v rámci celého a. Nechť $y \in a$ a $y \in m \in x$. Dostáváme $y \in a \cap x = b$ a tím $m \in y$, což je spor. □

Dostáváme se k následující definici.

Definice 6.6 Množina a je *ordinální číslo (ordinál)*, pokud platí:

(1) pro každé $x \in a$ je $x \subseteq a$ ('a je *tranzitivní* množina'),

(2) relace $\in$ je dobrým ostrým uspořádáním na a.

Píšeme

$$On = \{ \alpha : \alpha \text{ je ordinál} \}.$$

Podle toho, co už jsme dokázali, je ω i každé přirozené číslo ordinálem.