7 Ordinální čísla II

Zavedli jsme pojem ordinálního čísla a všimli jsme si, že jak každé přirozené číslo, tak množina ω jsou ordinály. Prozkoumejme nyní vlastnosti ordinálních čísel podrobněji.

Uvidíme, že třída On všech ordinálních čísel není množinou a je to tedy vlastní třída. Několik následujících tvrzení lze parafrázovat slovy "kdyby On množinou byla, pak by sama byla ordinálem". Výklad zjednoduší rozšíření pojmu relace na třídy.

Definice 7.1 Třída R je *třídová relace*, je-li podtřídou třídy $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, kde $\mathbf{V}$ je *univerzální třída* (tj. třída všech množin). Pojem podtřída a kartézský součin tříd jsou definovány přirozeným způsobem.

Je zřejmé, že každá relace je třídovou relací. Na druhou stranu u třídových relací, které nejsou množinami, je třeba zachovat stejnou opatrnost jako u tříd obecně (speciálně nemohou být prvky žádné množiny).

Rozšíření pojmů uspořádání, lineární uspořádání apod. na třídové relace je nasnadě. Pozor: třídová relace R je dobré uspořádání na třídě A, pokud každá neprázdná *podmnožina* (nikoli podtřída!) má nejmenší prvek. V našem případě to ale vyjde nastejno.

Tvrzení 7.2 *Každý prvek ordinálu α je ordinálem.*

Důkaz. Nechť $x \in \alpha$. Potom $x \subset \alpha$, takže $\in$ je nutně i na x dobrým uspořádáním.

Dokážeme, že x je tranzitivní množina. Pokud $w \in y \in x$, pak z tranzitivity $\in$ na α je $w \in x$. Tím pádem $y \in x$ implikuje $y \subseteq x$. $\square$

Lemma 7.3 *Pro ordinály α, β platí*

$$\alpha \in \beta \quad \leftrightarrow \quad \alpha \subset \beta.$$

Důkaz. Nechť $\alpha \in \beta$. Pak (z tranzitivity β) $\alpha \subseteq \beta$. Určitě ale $\alpha \neq \beta$, jinak by bylo $\alpha \in \alpha$, což je ve sporu s antireflexivitou $\in$.

Opačný směr je těžší. Nechť $\alpha \subset \beta$. Buď m nejmenší prvek množiny $\beta - \alpha$. Tvrdíme, že $m = \alpha$. Důkaz rozdělíme na dvě inkluze.

Je-li u takové, že $u \in m$, pak $u \in \beta$, protože β je tranzitivní. Kdyby neplatilo $u \in \alpha$, bylo by $u \in \beta - \alpha$ a tedy $m \in u$ — spor s předpokladem $u \in m$. Tedy $u \in \alpha$. Dokázali jsme inkluzi $m \subseteq \alpha$.

Nechť naopak $u \in \alpha$. u je jistě porovnatelné s m (neboť $\in$ je lineární na β). Která ze tří možností nastává? Možnosti $m \in u$ a $m = u$ implikují $m \in \alpha$ (první z nich s použitím tranzitivity), což je spor s $m \in \beta - \alpha$. Zbývá pouze možnost $u \in m$. Celkem vzato je $\alpha \subseteq m$.

Platí tedy rovnost $m = \alpha$. Odtud plyne $\alpha \in \beta$ a lemma je dokázáno. $\square$

Věta 7.4 *Třídová relace $\in$ je dobré uspořádání na třídě On .*

Důkaz. (i) $\in$ je antireflexivní na On . Kdyby pro $\alpha \in$ On platilo $\alpha \in \alpha$, pak α jakožto prvek množiny α dosvědčuje, že $\in$ není antireflexivní na α. To nejde, protože α je ordinál.

(ii) $\in$ je tranzitivní na On . Nechť pro ordinály α, β, γ platí $\alpha \in \beta \in \gamma$. Z tranzitivity množiny γ plyne, že $\beta \subseteq \gamma$ a tedy $\alpha \in \gamma$.

(iii) Ostré uspořádání $\in$ na On je lineární. Mějme ordinály α, β. Z definice snadno plyne, že $\alpha \cap \beta$ je rovněž ordinál. Přitom máme

$$\alpha \cap \beta \subseteq \alpha \quad \text{a} \quad \alpha \cap \beta \subseteq \beta.$$

Kdyby obě inkluze platily jako ostré, pak podle lemmatu 7.3 by $\alpha \cap \beta$ bylo prvkem množiny α i β, tedy $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$, což nejde.

Platí-li místo obou inkluzí rovnosti, dostáváme $\alpha = \beta$. Pokud je $\alpha = \alpha \cap \beta \subset \alpha \cap \beta$, je podle lemmatu 7.3 $\alpha \in \beta$. V jediném zbylém případě symetricky platí $\beta \in \alpha$. Linearita je tedy dokázána.

(iv) Lineární uspořádání $\in$ na On je dobré. Stačí ukázat, že každá neprádná množina a ordinálních čísel má *minimální* prvek (podle (iii) je totiž nejmenší). Zvolme $\alpha \in a$. Nechť $b = \alpha \cap a$. Je-li $b = \emptyset$, pak α je minimální v a. V opačném případě nechť μ je *nejmenší* prvek množiny b (který existuje, protože α je ordinál). Tvrdíme, že μ je minimální v a. Pokud totiž pro $x \in a$ je $x \in \mu$, pak také $x \in \alpha$ (protože $\mu \in \alpha$) a tedy $x \in b = a \cap \alpha$. Ovšem μ je nejmenší v b, takže $\mu \in x$, což je spor. $\square$

Důsledek 7.5 *Každá tranzitivní množina a ordinálních čísel je ordinál.*

Důkaz. Stačí ověřit, že $\in$ je na a dobré ostré uspořádání. To ale plyne z předchozí věty, která říká, že je to dobré uspořádání dokonce na celé třídě On . $\square$

Důsledek 7.6 *Třída On není množinou.*

Důkaz. Kdyby On byla množina, šlo by podle tvrzení 7.2 o tranzitivní množinu. Podle důsledku 7.5 by On byl ordinál. To znamená, že by platilo

$$\mathrm{On} \in \mathrm{On}\,,$$

což se ale u ordinálu nemůže stát, protože $\in$ je na něm antireflexívní. $\square$

Teprve teď, když víme, že On je vlastní třída, náležitě oceníme následující poznámku. Všimněme si, že v bodu (iv) důkazu věty 7.4 jsme nepoužili předpoklad, že a je množina. Dokázali jsme vlastně následující silnější tvrzení:

> **Tvrzení 7.7** *Nechť A je třída sestávající z ordinálních čísel, tedy $A \subseteq On$. Pak A má nejmenší prvek.*

Tvrzení 7.8 *Je-li a množina ordinálních čísel, pak $\bigcup a$ je ordinál.*

Důkaz. Především $\bigcup a$ je množina ordinálů, neboť z definice sumy pro každé $x \in \bigcup a$ existuje y tak, že $x \in y \in a$. Ovšem y sestává pouze z ordinálů.

Navíc $\bigcup a$ je tranzitivní množina: Nechť $\beta \in \bigcup a$. To znamená, že existuje $\gamma \in a$ tak, že $\beta \in \gamma$. Tím pádem $\beta \subset \gamma$. Dostáváme

$$\alpha \in \beta \to \alpha \in \gamma \in a \to \alpha \in \bigcup a,$$

tj. $\beta \subseteq \bigcup a$.

Podle důsledku 7.5 je $\bigcup a$ ordinálem. $\square$

Tvrzení 7.9 *Pro každý ordinál α je množina*

$$s(\alpha) = \alpha \cup \{\, \alpha \,\}$$

ordinálem.

Důkaz. Stačí dokázat, že $s(\alpha)$ je tranzitivní množina. Nechť $\beta \in \alpha \cup \{\, \alpha \,\}$. Je-li $\beta \in \alpha$, pak $\beta \subset \alpha$ (protože α je ordinál). Pokud naopak $\beta = \alpha$, pak rovněž $\beta \subseteq \alpha$. V obou případech platí, že $\beta \subset s(\alpha)$. Množina $s(\alpha)$ je tedy tranzitivní. $\square$

Platí-li pro ordinály vztah $\alpha \in \beta$, řekneme, že α je *menší* než β (psáno $\alpha < \beta$).

Tvrzení 7.10 *Ordinál $s(\alpha)$ je nejmenší ordinál větší než α. Jinými slovy: neexistuje ordinál β takový, že*

$$\alpha < \beta < \alpha \cup \{\, \alpha \,\}.$$

Důkaz. Je vyloučeno, aby $\beta = \alpha$, protože v tom případě bychom měli $\alpha \in \alpha$. Takže pokud $\beta \in s(\alpha)$, musíme mít $\beta \in \alpha$. To je spor s předpokladem $\alpha \in \beta$. $\square$

Místo $s(\alpha)$ také píšeme $\alpha + 1$.

Definice 7.11 Ordinální číslo α je *limitní*, pokud neexistuje β tak, že $\alpha = \beta + 1$. V opačném případě jej nazýváme *nelimitní* nebo *izolované*.