Příklady k opakování před 1. zápočtovým testem
(4 příklady po 2 bodech na 40 minut)

Níže jsou uvedeny **základní pojmy** z předchozích Cv. PSE, následované **ukázkou** několika jednoduchých příkladů. [Lze očekávat, že většina testu bude tvořena analogií k uvedeným příkladům, resp. jejich spojením nebo mírným rozšířením .]

Elementární počet ppsti (ppst opačného jevu, ppst sjednocení jevů, nezávislost jevů, podmíněná ppst, věta o úplné ppsti, Bayesova věta,...)

Náhodná veličina diskrétního typu (ppstní funkce, distribuční funkce, střední hodnota, rozptyl, binomické a hypergeometrické rozdělení, Poissonovo rozdělení, aproximace binom. rozdělení Poissonovým, použití tabulek,...)

Náhodná veličina spojitého typu - hustota ppsti, distribuční funkce, střední hodnota, rozptyl, kvantily, rovnoměrné, exponenciální a normální rozdělení,...

Ukázka - tucet jednoduchých příkladů k samostatnému procvičení:

1. Nechť platí $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.8$. Spočítejte ppst $P(A \cap B)$ a podmíněnou ppst $P(A|B)$. Rozhoděte, zda náh. jevy A a B jsou závislé či nezávislé.

2. Nechť 65% produkce je vyráběno na lince L_1 s 2%-ní zmetkovitostí, zbytek produkce na lince L_2 s 3%-ní zmetkovitostí.
Je-li náhodně vybraný výrobek zmetek, s jakou ppstí byl vyroben na lince L_2?

3. Průměrně 97% výrobků je standardních (tj. odpovídá určité normě).
Požadavkům zjednodušené zkoušky vyhoví standardní výrobek s ppstí 0.9, nestandardní výrobek vyhoví s ppstí 0.2.
Jestliže daný výrobek úspěšně prošel zkouškou, s jakou ppstí je skutečně standardní?

4. Ppst poruchy i-té součástky během určité doby Δt označme p_i.
Dvě součástky (kde $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.05$) jsou zapojeny paralelně do bloku.
K tomuto bloku je sériově připojen blok složený ze tří paralelně zapojených součástek (kde $p_3 = p_4 = p_5 = 0.2$).
Načrtněte schema tohoto zařízení a spočtěte ppst p poruchy celého zařízení během doby Δt (za předpokladu, že poruchy jednotlivých součástek jsou nezávislé jevy).

5. Hodíme sedmi hracími kostkami. S jakou ppstí padnou nejvýše dvě šestky?

6. Náhodná veličina X je dána ppstní funkcí: $P(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x\,!} & \text{pro } x = 0, 1, 2, 3. \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$

a) Určete konstantu c a načtrněte graf ppstní funkce $P(x)$.

b) Spočtěte střední hodnotu $E(X)$ a rozptyl $D(X)$.

c) Načtrněte graf distribuční funkce $F(x)$ a napište hodnoty $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$.

7. S přesností na tři desetinná místa spočtěte ppsti $P(X = 3)$, resp. $P(X < 3\,)$, víte-li, že náhodná veličina X má postupně:

a) **binomické** rozdělení s parametry $n = 10$, $p = 0.4\,$,

b) **Poissonovo** rozdělení se střední hodnotou $\lambda = 4\,$.

8. Náhodná veličina X je dána hustotou

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{4} + c & \text{pro } x \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

a) Určete konstantu c a načtrněte graf hustoty $f(x)$ do kartézských souřadnic.

b) Určete distribuční funkci $F(x)$ a načrněte její graf.

c) Spočtěte střední hodnotu $E(X)$.

d) Spočtěte ppst $P(X < 0.5)$ a graficky ji znázorněte (plocha pod grafem hustoty).

9. Náhodná veličina X je dána distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le 1 \\ \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{3} & \text{pro } 0 \le x \le 2 \\ \\ 1 & \text{pro } x \ge 2 \end{cases}$$

a) Určete hustotu ppsti $f(x)$, načrtněte grafy funkcí $F(x)$, $f(x)$ do **různých** kart. souřadnic.

b) Spočtěte ppst $P(1 < X < 2)$ a graficky ji znázorněte (plocha pod grafem hustoty).

c) Spočtěte střední hodnotu $E(X)$.

d) Spočtěte medián $x_{0.5}$.

10. Předpokládejme, že životnost výrobku je náhodná veličina X s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{pro } x > 0 \\ \\ 0 & \text{pro } x \le 0 \end{cases}$$

a) Určete hustotu ppsti $f(x)$ a načrtněte její graf.

b) Spočtěte ppst $P(0.5 < X < 1)$ a podmíněnou ppst $P(X < 1 |\, X > 0.5)$.

c) Určete číslo a, pro které platí: $P(X < a) = 0.9$.

11. Hmotnost výrobku je náhodná veličina X s normálním rozdělením ppsti se střední hodnotou $\mu = 15\,[kg]$ a rozptylem $\sigma^2 = 0.01\,[kg^2]$.

a) Spočtěte ppst $P(14.9 < X < 15.2)$ a podmíněnou ppst $P(X > 15.1|X > 15)$.

b) Určete čísla c_1, c_2, pro která platí: $P(X < c_1) = 0.05$, $P(X < c_2) = 0.95$.

c) Načrtněte graf hustoty $f(x)$, na ose x vyznačte μ a čísla c_1, c_2.

d) Spočtěte ppst, že součet hmotností 200 výrobků bude větší než $3\,003\,kg$.

12. Nechť náhodná veličina X s normálním rozdělením ppsti, tj. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, má kvantily $x_{0.1} = 2$ a $x_{0.9} = 7$.

a) Určete parametry μ a σ^2.

b) Spočtěte ppst $P(2 < X < 4.5)$ a podmíněnou ppst $P(X < 7|X > 2)$

c) Načrtněte graf hustoty $f(x)$, na ose x vyznačte μ a čísla $x_{0.1}$, $x_{0.9}$.

Numerické výsledky příkladů: [*nezapomeňte na pečlivé náčrtky grafů*]

1. $P(A \cap B) = 0.1$, $P(A|B) = \frac{1}{6}$, závislé **2.** 0.447 **3.** 0.993 **4.** 0.013 **5.** 0.904

6. a) $c = \frac{3}{8}$, b) $E(X) = \frac{15}{16}$, $D(X) = \frac{207}{256}$, c) $F(0) = \frac{3}{8}$, $F(1) = \frac{3}{4}$, $F(2) = \frac{15}{16}$, $F(3) = 1$

7. a) 0.215, resp. 0,167, b) 0.195, resp. 0.238,

8. a) $c = \frac{9}{8}$, b) $F(x) = 0$ pro $x \leq 0$, $F(x) = -\frac{x^2}{8} + \frac{9}{8}x$ pro $0 \leq x \leq 1$, $F(x) = 1$ pro $x \geq 1$,

c) $E(X) = \frac{25}{48} \doteq 0.5210$, d) $\frac{17}{32} \doteq 0.531$.

9. a) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$, b)$E(X) = \frac{55}{36} \doteq 1.528$, c) 1, d) $\frac{-3+\sqrt{37}}{2} \doteq 1.541$.

10. a) $f(x) = 0$ pro $x \leq 0$, $f(x) = 2\,e^{-2x}$ pro $x > 0$, b) $P(0.5 < X < 1) = e^{-1} - e^{-2} \doteq 0.233$,

$P(X < 1|\,X > 0.5) = \dfrac{P(0.5 < X < 1)}{P(X > 0.5)} \doteq 0.632$, c) $a = x_{0.9} = \dfrac{\ln 0.1}{-2} \doteq 1.151$.

11. a) $P(14.9 < X < 15.2) \doteq 0.818$, $P(X > 15.1|X > 15) = \dfrac{P(X > 15.1)}{P(X > 1)} = 0.318$,

b) $c_1 = x_{0.05} \doteq 14.835, c_2 = x_{0.95} \doteq 15.165$, c) (graf), d) $Y = 100\,X \sim N(3\,000, 2)$,

$P(Y > 3\,003) \doteq 0.017$.

12. a) $\mu = 4.5\,, \sigma^2 = \left(\dfrac{7-4.5}{1.282}\right)^2 \doteq 3.80$, b) $P(2 < X < 4.5) = 0.4$,

$P(X < 7|X > 2) = \dfrac{0.8}{0.9} \doteq 0.889$, c) (graf).

(Z.K.)