12. Přednáška: Opakování

H. Kopincová

2018/19

Vektorové funkce
- Skalární pole
- Vektorové pole
- Křivky
- Plochy

Integrály

Integrální věty

Vektorové funkce

Definice:

Reálnou m-rozměrnou vektorovou funkci n reálných proměnných rozumíme každé zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, kdy každému* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ *je přiřazena právě jedna hodnota* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \in H_f \subset \mathbb{R}^m$.

Vektorové funkce

Definice:

Reálnou m-rozměrnou vektorovou funkci n reálných proměnných rozumíme každé zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, kdy každému* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ *je přiřazena právě jedna hodnota* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \in H_f \subset \mathbb{R}^m$.

- Skalární pole: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nebo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Vektorové funkce

Definice:

Reálnou m-rozměrnou vektorovou funkci n reálných proměnných rozumíme každé zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *kdy každému* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ *je přiřazena právě jedna hodnota* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \in H_f \subset \mathbb{R}^m$.

- Skalární pole: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nebo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- Vektorové pole: $\mathbf{a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nebo $\mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Vektorové funkce

Definice:

Reálnou m-rozměrnou vektorovou funkci n reálných proměnných rozumíme každé zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, kdy každému* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ *je přiřazena právě jedna hodnota* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \in H_f \subset \mathbb{R}^m$.

- Skalární pole: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nebo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- Vektorové pole: $\mathbf{a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nebo $\mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
- Křivka $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ nebo $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a vektorová funkce je spojitá.

Vektorové funkce

Definice:

Reálnou m-rozměrnou vektorovou funkci n reálných proměnných rozumíme každé zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *kdy každému* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ *je přiřazena právě jedna hodnota* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \in H_f \subset \mathbb{R}^m$.

- Skalární pole: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nebo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- Vektorové pole: $\mathbf{a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nebo $\mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
- Křivka $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ nebo $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a vektorová funkce je spojitá.
- Plocha $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a vektorová funkce je spojitá.

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Definiční obor: $D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n ; \exists\, y \in \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) = y\}$.

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Definiční obor: $D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \exists\, y \in \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) = y\}$.
- Obor hodnot: $H_f = \{y \in \mathbb{R}; \exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = y\}$.

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Definiční obor: $D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \exists\, y \in \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) = y\}$.
- Obor hodnot: $H_f = \{y \in \mathbb{R}; \exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = y\}$.
- Graf funkce: $G = \left\{[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in D_f\right\}$.

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Definiční obor: $D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \exists\, y \in \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) = y\}$.
- Obor hodnot: $H_f = \{y \in \mathbb{R}; \exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = y\}$.
- Graf funkce: $G = \left\{[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in D_f\right\}$.
- Hladina funkce (vrstevnice):
  $H_c = \{\mathbf{x} \in D_f : f(\mathbf{x}) = c, c = \text{konst.}\}$.

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Definiční obor: $D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \exists\, y \in \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) = y\}$.
- Obor hodnot: $H_f = \{y \in \mathbb{R}; \exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = y\}$.
- Graf funkce: $G = \left\{[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in D_f\right\}$.
- Hladina funkce (vrstevnice):
  $H_c = \{\mathbf{x} \in D_f : f(\mathbf{x}) = c, c = \text{konst.}\}$.
- Parciální derivace:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x} = f'_x(P) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{\partial f(P)}{\partial y} = f'_y(P) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0},$$

$$\frac{\partial f(P)}{\partial z} = f'_z(P) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0}.$$

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Gradient:

$$\nabla f(P) = \operatorname{grad} f(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}, \frac{\partial f(P)}{\partial z} \right)$$

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Gradient:

$$\nabla f(P) = \operatorname{grad} f(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}, \frac{\partial f(P)}{\partial z} \right)$$

- Derivace ve směru (podle vektoru):

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{s}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(P + t\mathbf{s}) - f(P)}{t}, \qquad ||\mathbf{s}|| = 1$$

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{s}} = \operatorname{grad} f(P) \cdot \mathbf{s}$$

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Lokální extrémy

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Lokální extrémy
  - Podezřelé body

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Lokální extrémy
  - Podezřelé body
    1. Stacionární body (nutná podmínka lokálního extrému)

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Lokální extrémy
  - Podezřelé body
    1. Stacionární body (nutná podmínka lokálního extrému)
    2. Neexistuje aspoň jedna první derivace

Nástroje k prozkoumání skalárních funkcí (polí)

- Lokální extrémy
  - Podezřelé body
    1. Stacionární body (nutná podmínka lokálního extrému)
    2. Neexistuje aspoň jedna první derivace
  - Vybrat ze stacionárních bodů lokální extrémy (postačující podmínka lokálního extrému)

Nástroje k prozkoumání vektorových funkcí (polí)

- Parciální derivace:

$$\frac{\partial \vec{a}(P)}{\partial x} = \left(\frac{\partial a_1(P)}{\partial x}, \frac{\partial a_2(P)}{\partial x}, \frac{\partial a_3(P)}{\partial x} \right)$$

Nástroje k prozkoumání vektorových funkcí (polí)

- Parciální derivace:

$$\frac{\partial \vec{a}(P)}{\partial y} = \left(\frac{\partial a_1(P)}{\partial y}, \frac{\partial a_2(P)}{\partial y}, \frac{\partial a_3(P)}{\partial y} \right)$$

Nástroje k prozkoumání vektorových funkcí (polí)

- Parciální derivace:

$$\frac{\partial \vec{a}(P)}{\partial z} = \left(\frac{\partial a_1(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_2(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_3(P)}{\partial z} \right)$$

Nástroje k prozkoumání vektorových funkcí (polí)

- Parciální derivace:

$$\frac{\partial \vec{a}(P)}{\partial z} = \left(\frac{\partial a_1(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_2(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_3(P)}{\partial z} \right)$$

- Vektorové čáry: $\vec{r}\,'(t) = \vec{a}(\vec{r}(t))$

Nástroje k prozkoumání vektorových funkcí (polí)

- Parciální derivace:

$$\frac{\partial \vec{a}(P)}{\partial z} = \left(\frac{\partial a_1(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_2(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_3(P)}{\partial z} \right)$$

- Vektorové čáry: $\vec{r}\,'(t) = \vec{a}(\vec{r}(t))$
- Divergence: $div\, \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$

Nástroje k prozkoumání vektorových funkcí (polí)

- Parciální derivace:

$$\frac{\partial \vec{a}(P)}{\partial z} = \left(\frac{\partial a_1(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_2(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_3(P)}{\partial z} \right)$$

- Vektorové čáry: $\vec{r}\,'(t) = \vec{a}(\vec{r}(t))$
- Divergence: $div\ \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$
- Rotace: $rot\ \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$

Nástroje k prozkoumání vektorových funkcí (polí)

- Parciální derivace:

$$\frac{\partial \vec{a}(P)}{\partial z} = \left(\frac{\partial a_1(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_2(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_3(P)}{\partial z} \right)$$

- Vektorové čáry: $\vec{r}\,'(t) = \vec{a}(\vec{r}(t))$
- Divergence: $div\ \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$
- Rotace: $rot\ \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$
- Potenciál:

Nástroje k prozkoumání vektorových funkcí (polí)

- Parciální derivace:

$$\frac{\partial \vec{a}(P)}{\partial z} = \left(\frac{\partial a_1(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_2(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_3(P)}{\partial z} \right)$$

- Vektorové čáry: $\vec{r}\,'(t) = \vec{a}(\vec{r}(t))$
- Divergence: $div\, \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$
- Rotace: $rot\, \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$
- Potenciál:
  - Potenciálové pole (nevírové na jednoduše souvislé oblasti)

Nástroje k prozkoumání vektorových funkcí (polí)

- Parciální derivace:

$$\frac{\partial \vec{a}(P)}{\partial z} = \left(\frac{\partial a_1(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_2(P)}{\partial z}, \frac{\partial a_3(P)}{\partial z} \right)$$

- Vektorové čáry: $\vec{r}\,'(t) = \vec{a}(\vec{r}(t))$
- Divergence: $div\, \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$
- Rotace: $rot\, \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$
- Potenciál:
  - Potenciálové pole (nevírové na jednoduše souvislé oblasti)
  - $\vec{a} = grad\, \varphi$

Křivky, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojitou funkci: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in \langle a, b\rangle$

Křivky, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojitou funkci: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in \langle a, b \rangle$
- Tečný vektor $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$

Křivky, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojitou funkci: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$
- Tečný vektor $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$
- Hladká křivka, po částech hladká křivka

Křivky, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojitou funkci: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in \langle a, b \rangle$
- Tečný vektor $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$
- Hladká křivka, po částech hladká křivka
- Jednoduchá křivka

Křivky, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojitou funkci: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$
- Tečný vektor $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$
- Hladká křivka, po částech hladká křivka
- Jednoduchá křivka
- Uzavřená křivka

Křivky, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojitou funkci: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in \langle a, b \rangle$
- Tečný vektor $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$
- Hladká křivka, po částech hladká křivka
- Jednoduchá křivka
- Uzavřená křivka
- Orientovaná křivka, souhlasná $\times$ nesouhlasná parametrizace

Plochy, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojistou funkci: $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $[u,v] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (jednoduše souvislá oblast)

Plochy, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojistou funkci: $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $[u,v] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (jednoduše souvislá oblast)
- Jednoduchá plocha

Plochy, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojistou funkci: $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $[u,v] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (jednoduše souvislá oblast)
- Jednoduchá plocha
- Plocha třídy $\mathbb{C}^1$

Plochy, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojistou funkci: $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $[u, v] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (jednoduše souvislá oblast)
- Jednoduchá plocha
- Plocha třídy $\mathbb{C}^1$
- Hladká plocha, po částech hladká plocha

Plochy, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojistou funkci: $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $[u, v] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (jednoduše souvislá oblast)
- Jednoduchá plocha
- Plocha třídy $\mathbb{C}^1$
- Hladká plocha, po částech hladká plocha
- Uzavřená plocha

Plochy, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojistou funkci: $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $[u,v] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (jednoduše souvislá oblast)
- Jednoduchá plocha
- Plocha třídy $\mathbb{C}^1$
- Hladká plocha, po částech hladká plocha
- Uzavřená plocha
- u-křivky $\vec{r}(u, konst.)$ a v-křivky $\vec{r}(konst, v)$, tečné vektory $\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u}$ a $\vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$, normálový vektor $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$

Plochy, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojistou funkci: $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $[u,v] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (jednoduše souvislá oblast)
- Jednoduchá plocha
- Plocha třídy $\mathbb{C}^1$
- Hladká plocha, po částech hladká plocha
- Uzavřená plocha
- u-křivky $\vec{r}(u, konst.)$ a v-křivky $\vec{r}(konst, v)$, tečné vektory $\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u}$ a $\vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$, normálový vektor $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$
- Orientovatelnost plochy

Plochy, parametrizace, vlastnosti

- Najít spojistou funkci: $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $[u,v] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (jednoduše souvislá oblast)
- Jednoduchá plocha
- Plocha třídy $\mathbb{C}^1$
- Hladká plocha, po částech hladká plocha
- Uzavřená plocha
- u-křivky $\vec{r}(u, konst.)$ a v-křivky $\vec{r}(konst, v)$, tečné vektory $\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u}$ a $\vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$, normálový vektor $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$
- Orientovatelnost plochy
- Orientovaná plocha, souhlasná $\times$ nesouhlasná parametrizace

- Dvojný integrál

$$\iint\limits_M f(x, y)\, dx\, dy$$

- Dvojný integrál

$$\iint\limits_{M} f(x, y)\, dx\, dy$$

- Trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

- Křivkové integrály

- Křivkové integrály
  - 1. druh (skalární pole)

$$\int_{\mathcal{K}} f(x, y, z)\, ds$$

- Křivkové integrály
  - 1. druh (skalární pole)

$$\int_{\mathcal{K}} f(x, y, z)\, ds$$

  - 2. druh (vektorové pole)

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f}(x, y, z)\, \vec{dr} = \int_{\mathcal{K}} f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz$$

- Křivkové integrály
  - 1. druh (skalární pole)

$$\int_{\mathcal{K}} f(x, y, z)\, ds$$

  - 2. druh (vektorové pole)

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f}(x, y, z)\, d\vec{r} = \int_{\mathcal{K}} f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz$$

- Plošné integrály

- Křivkové integrály
  - 1. druh (skalární pole)

$$\int_{\mathcal{K}} f(x, y, z)\, ds$$

  - 2. druh (vektorové pole)

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f}(x, y, z)\, d\vec{r} = \int_{\mathcal{K}} f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz$$

- Plošné integrály
  - 1. druh (skalární pole)

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\, dS$$

- Křivkové integrály
  - 1. druh (skalární pole)

$$\int_{\mathcal{K}} f(x,y,z)\,ds$$

  - 2. druh (vektorové pole)

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f}(x,y,z)\,d\vec{r} = \int_{\mathcal{K}} f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$$

- Plošné integrály
  - 1. druh (skalární pole)

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS$$

  - 2. druh (vektorové pole)

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x,y,z)\,d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x,y,z)\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\mathcal{S}} f_1\,dy\,dz+f_2\,dx\,dz+f_3\,dx\,dy$$

Významy integrálů

- Dvojný integrál: obsah 2D plochy, objem, hmotnost desky, ...

Významy integrálů

- Dvojný integrál: obsah 2D plochy, objem, hmotnost desky, ...
- Trojný integrál: objem, hmotnost tělesa, ...

Významy integrálů

- Dvojný integrál: obsah 2D plochy, objem, hmotnost desky, ...
- Trojný integrál: objem, hmotnost tělesa, ...
- Křivkové integrály

Významy integrálů

- Dvojný integrál: obsah 2D plochy, objem, hmotnost desky, ...
- Trojný integrál: objem, hmotnost tělesa, ...
- Křivkové integrály
  - 1. druh (skalární pole): délka křivky, hmotnost křivky, ...

Významy integrálů

- Dvojný integrál: obsah 2D plochy, objem, hmotnost desky, ...
- Trojný integrál: objem, hmotnost tělesa, ...
- Křivkové integrály
  - 1. druh (skalární pole): délka křivky, hmotnost křivky, ...
  - 2. druh (vektorové pole): práce vektorového pole po křivce

Významy integrálů

- Dvojný integrál: obsah 2D plochy, objem, hmotnost desky, ...
- Trojný integrál: objem, hmotnost tělesa, ...
- Křivkové integrály
  - 1. druh (skalární pole): délka křivky, hmotnost křivky, ...
  - 2. druh (vektorové pole): práce vektorového pole po křivce
- Plošné integrály

Významy integrálů

- Dvojný integrál: obsah 2D plochy, objem, hmotnost desky, ...
- Trojný integrál: objem, hmotnost tělesa, ...
- Křivkové integrály
    - 1. druh (skalární pole): délka křivky, hmotnost křivky, ...
    - 2. druh (vektorové pole): práce vektorového pole po křivce
- Plošné integrály
    - 1. druh (skalární pole): obsah plochy, hmotost plochy, ...

Významy integrálů

- Dvojný integrál: obsah 2D plochy, objem, hmotnost desky, ...
- Trojný integrál: objem, hmotnost tělesa, ...
- Křivkové integrály
  - 1. druh (skalární pole): délka křivky, hmotnost křivky, ...
  - 2. druh (vektorové pole): práce vektorového pole po křivce
- Plošné integrály
  - 1. druh (skalární pole): obsah plochy, hmotost plochy, ...
  - 2. druh (vektorové pole): tok vektorového pole plochou

Vlastnosti - linearita

Věta:

Jsou-li funkce $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$ integrovatelné na $M \subset \mathbb{R}^2$, potom je na M integrovatelná i funkce $c_1 f_1 + c_2 f_2$, kde c_1, c_2 jsou konstanty a platí:

$$\iint\limits_M (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, dx\, dy = c_1 \iint\limits_M f_1\, dx\, dy + c_2 \iint\limits_M f_2\, dx\, dy.$$

Vlastnosti - linearita

Věta:

Jsou-li funkce $f_1(x, y, z)$ *a* $f_2(x, y, z)$ *integrovatelné na* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*, potom je na* Ω *integrovatelná i funkce* $c_1 f_1 + c_2 f_2$*, kde* c_1*,* c_2 *jsou konstanty a platí:*

$$\iiint\limits_{\Omega} (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, dxdydz = c_1 \iiint\limits_{\Omega} f_1\, dxdydz + c_2 \iiint\limits_{\Omega} f_2 dxdydz.$$

Vlastnosti - linearita

Věta:

Nechť existují integrály $\int\limits_{\mathcal{K}} f\, ds$, $\int\limits_{\mathcal{K}} g\, ds$, *potom existuje i integrál z funkce* $k_1 f + k_2 g$, *kde* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *a platí*

$$\int\limits_{\mathcal{K}} (k_1 f + k_2 g)\, ds = k_1 \int\limits_{\mathcal{K}} f\, ds + k_2 \int\limits_{\mathcal{K}} g\, ds.$$

Vlastnosti - linearita

Věta:

Nechť existují integrály $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r}$, $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{g}\, d\vec{r}$, *potom existuje i integrál z funkce* $k_1\vec{f} + k_2\vec{g}$, *kde* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *a platí*

$$\int\limits_{\mathcal{K}} (k_1\vec{f} + k_2\vec{g})\, d\vec{r} = k_1 \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} + k_2 \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{g}\, d\vec{r}.$$

Vlastnosti - linearita

Věta:

Nechť existují integrály $\iint\limits_{\mathcal{S}} f\, dS$, $\iint\limits_{\mathcal{S}} g\, dS$, *potom existuje i integrál z funkce* $k_1 f + k_2 g$, *kde* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *a platí*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (k_1 f + k_2 g)\, dS = k_1 \iint\limits_{\mathcal{S}} f\, dS + k_2 \iint\limits_{\mathcal{S}} g\, dS.$$

Vlastnosti - linearita

Věta:

Nechť existují integrály $\iint\limits_{S} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, $\iint\limits_{S} \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS$, *potom existuje i integrál z funkce* $k_1\vec{f} + k_2\vec{g}$, *kde* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *a platí*

$$\iint\limits_{S} (k_1\vec{f} + k_2\vec{g}) \cdot \vec{n}\, dS = k_1 \iint\limits_{S} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS + k_2 \iint\limits_{S} \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Vlastnosti - dělení oblasti

Věta:

Je-li funkce $f(x,y)$ integrovatelná na M_1 a M_2 a je-li $M = M_1 \cup M_2$, potom je f integrovatelná na M a platí:

$$\iint\limits_{M} f \, dx \, dy = \iint\limits_{M_1} f \, dx \, dy + \iint\limits_{M_2} f \, dx \, dy .$$

Vlastnosti - dělení oblasti

Věta:

Je-li funkce $f(x, y, z)$ integrovatelná na Ω_1 a Ω_2 a je-li $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, potom je f integrovatelná na Ω a platí:

$$\iiint\limits_{\Omega} f\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Omega_1} f\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{\Omega_2} f\,dx\,dy\,dz.$$

Vlastnosti - dělení oblasti

Věta:

Nechť křivka $\mathcal{K}$ je složená ze dvou křivek $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ tak, že koncový bod křivky $\mathcal{K}_1$ je počáteční bod $\mathcal{K}_2$. Nechť existují integrály $\int_{\mathcal{K}_1} f\, ds$, $\int_{\mathcal{K}_2} f\, ds$, potom existuje i integrál přes křivku $\mathcal{K}$ a platí

$$\int_{\mathcal{K}} f\, ds = \int_{\mathcal{K}_1} f\, ds + \int_{\mathcal{K}_2} f\, ds.$$

Vlastnosti - dělení oblasti

Věta:

Nechť křivka $\mathcal{K}$ je složená ze dvou křivek $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ tak, že koncový bod křivky $\mathcal{K}_1$ je počáteční bod $\mathcal{K}_2$. Nechť existují integrály $\int\limits_{\mathcal{K}_1} \vec{f}\, d\vec{r}$, $\int\limits_{\mathcal{K}_2} \vec{f}\, d\vec{r}$, potom existuje i integrál přes křivku $\mathcal{K}$ a platí

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{K}_1} \vec{f}\, d\vec{r} + \int\limits_{\mathcal{K}_2} \vec{f}\, d\vec{r}$$

Vlastnosti - dělení oblasti

Věta:

Nechť plocha $\mathcal{S}$ je složená ze dvou ploch $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ tak, že k sobě těsně přiléhají (nepřekrývají se). Nechť existují integrály $\iint\limits_{\mathcal{S}_1} f\, dS$, $\iint\limits_{\mathcal{S}_2} f\, dS$, potom existuje i integrál přes plochu $\mathcal{S}$ a platí

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f\, dS = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} f\, dS + \iint\limits_{\mathcal{S}_2} f\, dS.$$

Vlastnosti - dělení oblasti

Věta:

Nechť plocha $\mathcal{S}$ je složená ze dvou ploch $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ tak, že k sobě těsně přiléhají (nepřekrývají se) a jsou orientované na stejnou stranu. Nechť existují integrály $\iint\limits_{\mathcal{S}_1} \vec{f} \cdot \vec{n}_1 \, dS$, $\iint\limits_{\mathcal{S}_2} \vec{f} \cdot \vec{n}_2 \, dS$, potom existuje i integrál přes plochu $\mathcal{S}$ a platí

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} \vec{f} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint\limits_{\mathcal{S}_2} \vec{f} \cdot \vec{n}_2 \, dS.$$

Výpočet - dvojný a trojný integrál

Fubiniova věta: (dvojný integrál)

Předpokládáme, že funkce $f(x,y)$ je spojitá na M. Je-li množina M obrazec typu I určený nerovnostmi

$$a \leq x \leq b, \quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$$

potom platí

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Výpočet - dvojný a trojný integrál

Fubiniova věta: (dvojný integrál)

Předpokládáme, že funkce $f(x, y)$ je spojitá na M. Je-li množina M obrazec typu II určený nerovnostmi

$$c \leq y \leq d, \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$$

potom platí

$$\iint\limits_M f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Výpočet - dvojný a trojný integrál

Fubiniova věta: (trojný integrál)

Nechť $f(x,y,z)$ *je integrovatelná na množině* Ω, *kde* $\Omega\left\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : [x,y]\in\ \Omega_{xy}\wedge f_1(x,y)\le z\le f_2(x,y)\right\}$ *a platí:*

1. Ω_{xy} *je uzavřená množina v* $\mathbb{R}^2$.
2. *Funkce* $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *jsou na* Ω_{xy} *spojité a platí*

$$f_1(x,y)\le f_2(x,y)\quad pro\quad \forall\,[x,y]\in\Omega_{xy}.$$

Potom platí

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{\Omega_{xy}}\left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy.$$

Výpočet - dvojný a trojný integrál

Fubiniova věta: (trojný integrál)

Nechť $f(x,y,z)$ *je integrovatelná na množině* Ω*, kde*
$\Omega\,\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : [y,z]\in\ \Omega_{yz}\ \wedge\ g_1(y,z)\le x\le g_2(y,z)\}$ *a platí:*

1. Ω_{yz} *je uzavřená množina v* $\mathbb{R}^2$*.*
2. *Funkce* $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jsou na* Ω_{yz} *spojité a platí*

$$g_1(y,z) \le g_2(y,z) \quad pro \quad \forall\,[y,z]\in\Omega_{yz}.$$

Potom platí

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Omega_{yz}} \left(\int\limits_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz.$$

Výpočet - dvojný a trojný integrál

Fubiniova věta: (trojný integrál)

Nechť $f(x, y, z)$ *je integrovatelná na množině* Ω, *kde*
$\Omega \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, z] \in \ \Omega_{xz} \ \wedge \ h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\right\}$ *a platí:*

1. Ω_{xz} *je uzavřená množina v* $\mathbb{R}^2$.
2. *Funkce* $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jsou na* Ω_{xz} *spojité a platí*

$$h_1(x, z) \leq h_2(x, z) \quad pro \quad \forall [x, z] \in \Omega_{xz}.$$

Potom platí

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\Omega_{xz}} \left(\int\limits_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy \right) dx\, dz.$$

Výpočet - dvojný a trojný integrál

Věta o substituci ve dvojném integrálu

Nechť $M_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ *a* $M_{uv} \subset \mathbb{R}^2$ *jsou uzavřené omezené množiny. Nechť funkce* $x(u,v)$ *a* $y(u,v)$ *jsou na otevřené množině* M_{uv} *prosté funkce a mají v* M_{uv} *spojité 1. parciální derivace. Nechť funkce* $f(x,y)$ *je na* M_{xy} *spojitá. Potom platí*

$$\iint\limits_{M_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{M_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv,$$

kde

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

je Jacobiho matice a $|J(u,v)|$ *je Jacobián.*

Výpočet - dvojný a trojný integrál

Věta o substituci ve trojném integrálu

Nechť $\Omega_{xyz} \subset \mathbb{R}^3$ a $\Omega_{uvw} \subset \mathbb{R}^3$ jsou uzavřené omezené množiny. Nechť funkce $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ a $z(u,v,w)$ jsou na otevřené množině Ω_{uvw} prosté funkce a mají v Ω_{uvw} spojité 1. parciální derivace. Nechť funkce $f(x,y,z)$ je na Ω_{xyz} spojitá. Potom platí

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,dudvdw$$

kde

$$J(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

je Jacobiho matice a $|J(u,v,w)|$ je Jacobián.

Výpočet - dvojný a trojný integrál

Polární souřadnice

Transformační vztahy:

$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi,$$

$$y(r,\varphi) = r\sin\varphi.$$

$$|J(r,\varphi)| = r$$

Výpočet - dvojný a trojný integrál

Válcové souřadnice

Transformační vztahy:

$$
\begin{aligned}
x(r,\varphi,z) &= r\cos\varphi \\
y(r,\varphi,z) &= r\sin\varphi \\
z(r,\varphi,z) &= z
\end{aligned}
$$

$$|J(r,\varphi,z)| = r$$

Výpočet - dvojný a trojný integrál

Sférické souřadnice

Transformační vztahy:

$$
\begin{aligned}
x(r,\varphi,\vartheta) &= r\cos\varphi\cos\vartheta\\
y(r,\varphi,\vartheta) &= r\sin\varphi\cos\vartheta\\
z(r,\varphi,\vartheta) &= r\sin\vartheta
\end{aligned}
$$

$$|J(r,\varphi,z)| = r^2\cos\vartheta$$

Vlastnosti - křivkový a plošný integrál

Věta: (závislost na orientaci 1. druh)

Nechť $\mathcal{K}_+$ a $\mathcal{K}_-$ jsou stejné křivky s opačnou orientací a existuje $\int\limits_{\mathcal{K}_+} f\,ds$, potom existuje i $\int\limits_{\mathcal{K}_-} f\,ds$ a platí

$$\int\limits_{\mathcal{K}_+} f\,ds = \int\limits_{\mathcal{K}_-} f\,ds.$$

Vlastnosti - křivkový a plošný integrál

Věta: (závislost na orientaci 1. druh)

Nechť $\mathcal{S}_+$ a $\mathcal{S}_-$ jsou stejné plochy s opačnou orientací a existuje $\iint_{\mathcal{S}_+} f\, dS$, potom existuje i $\iint_{\mathcal{S}_-} f\, dS$ a platí

$$\iint_{\mathcal{S}_+} f\, dS = \iint_{\mathcal{S}_-} f\, dS.$$

Vlastnosti - křivkový a plošný integrál

Věta: (závislost na orientaci 2. druh)

Nechť $\mathcal{K}_+$ a $\mathcal{K}_-$ jsou stejné křivky s opačnou orientací a existuje $\int\limits_{\mathcal{K}_+} \vec{f}\, d\vec{r}$, potom existuje i $\int\limits_{\mathcal{K}_-} \vec{f}\, d\vec{r}$ a platí

$$\int\limits_{\mathcal{K}_+} \vec{f}\, d\vec{r} = -\int\limits_{\mathcal{K}_-} \vec{f}\, d\vec{r}.$$

Vlastnosti - křivkový a plošný integrál

Věta: (závislost na orientaci 2. druh)

Nechť $\mathcal{S}_+$ a $\mathcal{S}_-$ jsou stejné plochy s opačnou orientací , tj. $\vec{n}_+ = -\vec{n}_-$, a existuje $\iint\limits_{\mathcal{S}_+} \vec{f} \cdot \vec{n}_+ \, dS$, potom existuje i $\iint\limits_{\mathcal{S}_-} \vec{f} \cdot \vec{n}_- \, dS$ a platí

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_+} \vec{f} \cdot \vec{n}_+ \, dS = -\iint\limits_{\mathcal{S}_-} \vec{f} \cdot \vec{n}_- \, dS.$$

Výpočet křivkový a plošný integrál

Věta (1. druh)

Nechť $\vec{r}(t) : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^m$ *je parametrizace jednoduché hladké křivky* $\mathcal{K}$ *a funkce* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *je spojitá, potom platí*

$$\int\limits_{\mathcal{K}} f\,ds = \int\limits_{a}^{b} f(\vec{r}(t))||\vec{r}\,'(t)||\,dt.$$

Výpočet křivkový a plošný integrál

Věta (1. druh)

Nechť $\vec{r}(u,v) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$ *je parametrizace jednoduché hladké plochy* $\mathcal{S}$ *a funkce* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *je spojitá, potom platí*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f\, dS = \iint\limits_{\Omega} f(\vec{r}(u,v)) ||\vec{r}_u{}'(u,v) \times \vec{r}_v{}'(u,v)||\, du\, dv.$$

Výpočet křivkový a plošný integrál

Věta (2. druh)

Nechť $\vec{r}(t) : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^m$ *je souhlasná parametrizace hladké křivky* $\mathcal{K}$ *a* $\vec{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *je spojité vektorové pole, potom platí*

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt.$$

Výpočet křivkový a plošný integrál

Věta (2. druh)

Nechť $\vec{r}(u, v) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$ *je souhlasná parametrizace jednoduché hladké plochy* $\mathcal{S}$ *a funkce* $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *je spojitá, potom platí*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS = \iint\limits_{\Omega} \vec{f}(\vec{r}(u, v)) \cdot \left(\vec{r}_u^{\,\prime}(u, v) \times \vec{r}_v^{\,\prime}(u, v)\right) \, du dv.$$

Integrální věty - plošný integrál 2. druhu

Věta: (Gaussova, Gaussova-Ostrogradského)

Nechť $\mathcal{S}$ je po částech hladká, uzavřená plocha, orientovaná vně (vnější normála je kladná orientace). Nechť V je množina bodů skládající se ze všech bodů plochy $\mathcal{S}$ a jejích vnitřních bodů. Nechť vektorová funkce $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a $\operatorname{div} \vec{f}$ jsou na V spojité funkce. Potom platí

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{f} \, dx \, dy \, dz .$$

Integrální věty - křivkový integrál 2. druhu

Věta: (Stokesova)

Nechť $\mathcal{S}$ je orientovaná (jednotkovým normálovým vektorem) jednoduchá po částech hladká plocha, její okraj je orientovaná jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka $\mathcal{K}$ souhlasně orientovaná s orientací $\mathcal{S}$ (pravidlo pravé ruky). Nechť vektorové pole $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je má spojité 1. parciální derivace na množině M, která obsahuje plochu $\mathcal{S}$. Potom platí

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS,$$

tj. cirkulace přes okraj plochy $\mathcal{S}$ je tok rotace pole $\vec{f}$ plochou $\mathcal{S}$.

Integrální věty - křivkový integrál 2. druhu

Věta: (Greenova)

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina, jejíž hranici tvoří jednoduchá, uzavřená, po částech hladká, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka $\mathcal{K}$. Nechť $\vec{f}(x,y) = f_1(x,y)\vec{i} + f_2(x,y)\vec{j}$ má spojité první parciální derivace. Potom

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}(x,y) d\vec{r} = \iint_{M} \left(\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \right) dx\, dy .$$

Křivkový integrál 2. druhu - nezávislost na integrační cestě

Věta:

Nechť vektorové pole $\vec{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *je spojité na* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. *Potom jsou následující podmínky ekvivalentní*

- *Vektorové pole* $\vec{f}$ *je na* Ω *potenciálové.*
- *Pro každou uzavřenou po částech hladkou křivku* $\mathcal{K} \subset \Omega$ *platí*

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = 0.$$

$$\ldots$$

Křivkový integrál 2. druhu - nezávislost na integrační cestě

Věta:

...

- *Křivkový integrál 2. druhu vektorového pole $\vec{f}$ nezávisí v oblasti Ω na cestě, tj. pokud jsou $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ po částech hladké křivky popsané vektorovými funkcemi $\vec{r}_1(t) : \langle a, b\rangle \to \Omega$ a $\vec{r}_2(\tau) : \langle c, d\rangle \to \Omega$, že $\vec{r}_1(a) = \vec{r}_2(c)$, $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(d)$, potom*

$$\int\limits_{\mathcal{K}_1} \vec{f}\, d\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{K}_2} \vec{f}\, d\vec{r}.$$

  Je-li navíc funkce $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ potenciálem vektorového pole $\vec{f}$ na Ω, platí

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a)).$$