# 1. Přednáška: Funkce více proměnných

## Základní pojmy:

- $\mathbb{R}^n$: Značí množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel, tj.

$$\mathbb{R}^n = \{x : x = [x_1, x_2, \dots, x_n],\, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\},$$

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),\, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}.$$

- **Geometricky:** $\mathbb{R}^n$ chápeme buď jako množinu bodů:

  $\mathbb{R}^2$ jsou body v rovině, tj. $x = [x_1, x_2]$,
  $\mathbb{R}^3$ jsou body v prostoru, tj. $x = [x_1, x_2, x_3]$,

  nebo jako vektorový prostor, pokud na této množině zavedeme algebraické operace splňující axiómy vektorového prostoru (strukturu):

  $\mathbb{R}^2$ jsou vektory v rovině, tj. $\mathbf{x} = \vec{x} = (x_1, x_2)$,
  $\mathbb{R}^3$ jsou vektory v prostoru, tj. $\mathbf{x} = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

**Poznámka:** Axiómy vektorového prostoru:

Pro $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ a pro $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (komutativita pro součet vektorů),
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (asociativita pro součet vektorů),
3. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (existence nulového vektoru),
4. $\exists (-\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (existence opačného vektoru),
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x})$ (asociativita pro násobení vektoru),
6. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (invariance při násobení jedničkou),
7. $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$ (distributivita násobení vektoru vzhledem ke sčítání vektorů),
8. $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$ (distributivita násobení vektoru vzhledem ke sčítání čísel).

**Definice:** *Nechť* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, *potom definujeme:*

- *(Euklidovský) Skalární součin vektorů* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$*:* $\quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$
- *(Euklidovskou) Normu vektoru* $\mathbf{x}$*:* $\quad ||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$
- *Vzdálenost vektorů* $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{y}$ *(délka vektoru* $\mathbf{x} - \mathbf{y}$*):* $\quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$

**Definice:** *Reálná funkce n reálných proměnných* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je zobrazení, které každému* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *přiřadí nejvýše jedno* $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

*Definiční obor:* $D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \exists\, y \in \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) = y\}$.

*Obor hodnot:* $H_f = \{y \in \mathbb{R}; \exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = y\}$.

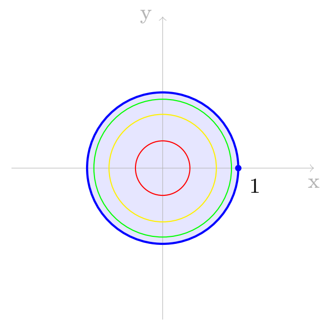
*Graf funkce:* $G = \{[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in D_f\}$.

*Hladina funkce:* $H_c = \{\mathbf{x} \in D_f : f(\mathbf{x}) = c, c = konst.\}$.

**Poznámka:** Hladiny funkce: vrstevnice, ekvipotenciální plochy, izotermy, izobary.

**Příklad:** Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána vztahem $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Určete a načrtněte definiční obor a hladiny (vrstevnice) funkce, dále určete obor hodnot a načrtněte graf.

**Řešení:**




Definiční obor:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ 1 &\geq x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\to \quad D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

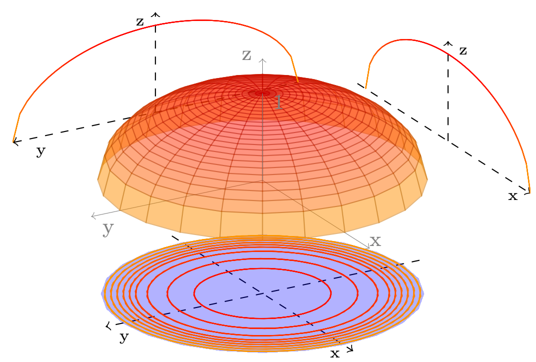
Hladiny funkce:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2 - y^2} &= K, \quad K = konst. \\ 1 - x^2 - y^2 &= K^2 \\ x^2 + y^2 &= 1 - K^2, \quad K^2 \in \langle 0, 1 \rangle \end{aligned}$$

$$K = 0,\ K = 0.3,\ K = 0.7,\ K = 0.8$$

Obor hodnot: $H_f = \langle 0, 1 \rangle$

Graf funkce: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

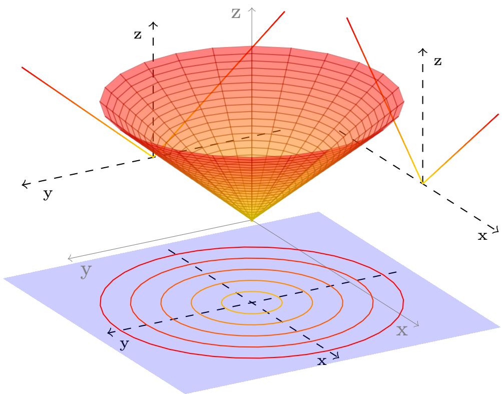


**Příklad:** Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána vztahem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Určete a načrtněte definiční obor a hladiny (vrstevnice) funkce, dále určete obor hodnot a načrtněte graf.

**Řešení:**

Definiční obor:

$$x^2 + y^2 \geq 0 \qquad \to \qquad D_f = \mathbb{R}^2$$




Hladiny funkce:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= K, \quad K = konst. \\ x^2 + y^2 &= K^2, \quad K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

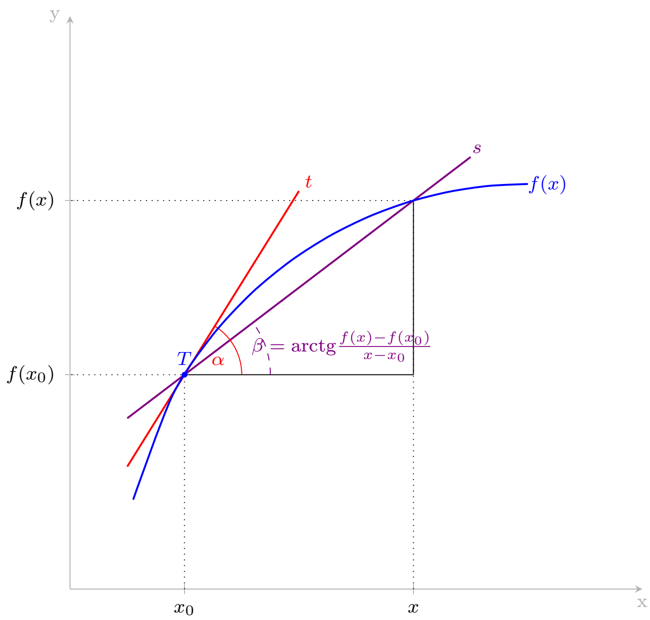
Obor hodnot: $H_f = \langle 0, \infty \rangle$
Graf funkce: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

## Parciální derivace funkce více proměnných:

**Opakování:** Reálná funkce jedné reálné proměnné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Derivace funkce $f$ v bodě $x_0$ je vlastní limita (pokud existuje):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Geometricky: Směrnice tečny ke grafu funkce $f$ v bodě $T = [x_0, f(x_0)]$, tj. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.



**Definice:** *Parciální derivaci funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^3)$ podle $x$, resp. podle $y$, resp. podle $z$, v bodě $P = [x_0, y_0, z_0]$ označuje konečnou limitu (pokud existuje):*

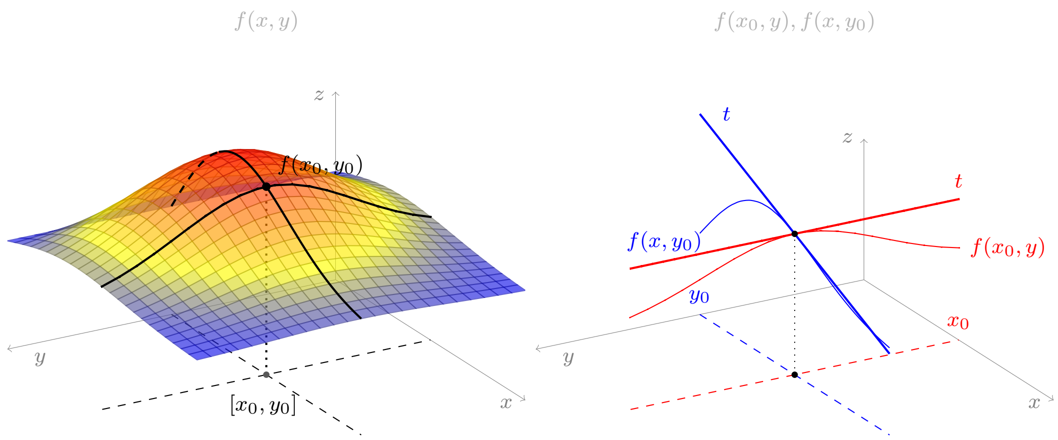
$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0},$$

*resp.*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0},$$

*resp.*

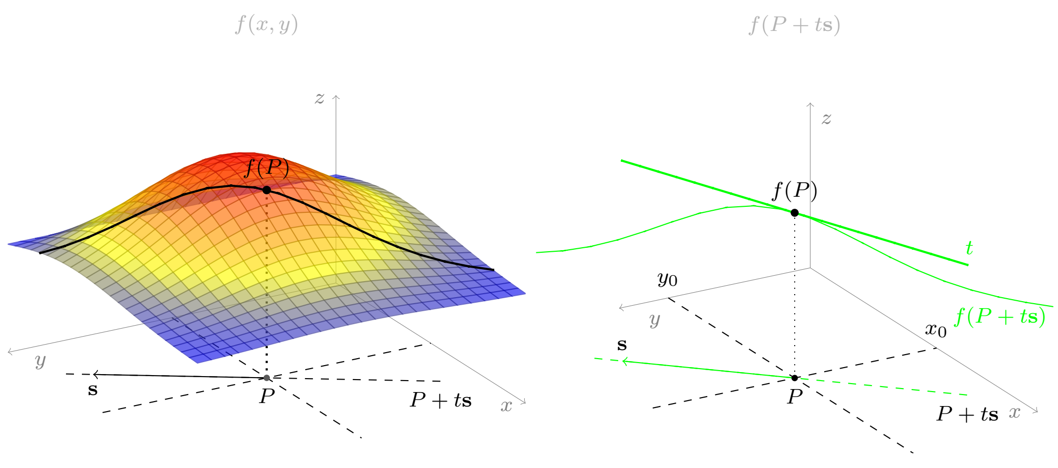
$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} = f'_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0}.$$




**Definice:** *Mějme funkci $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, resp. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3)$ bod $P = [x_0, y_0]$, resp. $P = [x_0, y_0, z_0]$ a vektor (pevně zvolený) $\mathbf{s}$, $(\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, resp. $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3))$. Derivací funkce $f$ v bodě $P$ podle vektoru $\mathbf{s}$ nazýváme konečnou limitu (pokud existuje):*

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{s}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(P + t\mathbf{s}) - f(P)}{t}.$$

*Je-li $\mathbf{s}$ jednotkový vektor, tj. $||\mathbf{s}|| = 1$, pak se tato limita nazývá derivace funkce $f$ v bodě $P$ ve směru vektoru $\mathbf{s}$.*



**Poznámka:** Pokud zvolíme směr $\mathbf{s} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$, tj. jednotkový vektor osy $x$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

**Příklad:** Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána vztahem $f(x, y) = x + y$. Je dán bod $P = [1, 0]$ a vektor $\mathbf{s} = (1, 1)$. Určete obě parciální derivace v bodě P, tj. $f'_x(P)$ a $f'_y(P)$, derivaci funkce $f$ v bodě $P$ podle vektoru $\mathbf{s}$ a derivaci funkce $f$ v bodě $P$ ve směru vektoru $\mathbf{s}$.

**Řešení:**

$$f'_x(x, y) = 1, \quad f'_x(P) = 1$$

$$f'_y(x, y) = 1, \quad f'_y(P) = 1$$

$$f(P + t\mathbf{s}) = f(1 + t, 0 + t) = 1 + 2t, \quad f(P) = f(1, 0) = 1$$

derivace podle vektoru:

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{s}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(P + t\mathbf{s}) - f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + 2t - 1}{t} = 2$$

derivace ve směru vektoru: $\mathbf{s} := \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$f(P + t\mathbf{s}) = f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t, 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}t\right) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}}t, \quad f(P) = f(1, 0) = 1$$

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{s}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(P + t\mathbf{s}) - f(P)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{2}}t - 1}{t} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

**Definice:** *Je dán bod $P \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Vektor $\mathbf{dx} = (dx, dy, dz)$ nazveme diferencí (argumentu). Mějme diferencovatelnou funkci $f(\mathbf{x})$, potom vektor*

$$grad\, f(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}, \frac{\partial f(P)}{\partial z}\right)$$

*nazýváme gradient funkce $f$ v bodě $P$ a lineární formu*

$$df(P, \mathbf{dx}) = grad\, f(P) \cdot \mathbf{dx}$$

*totálním diferenciálem funkce $f$ v bodě $P$.*

**Poznámky:**

$$\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{s}} = \mathrm{grad} f(P) \cdot \mathbf{s} = |\mathrm{grad} f(P)||\mathbf{s}| \cos\varphi.$$

Kdy bude derivace maximální? Pokud $\cos\varphi = 1 \to \varphi = 0$.
$\to$ derivace ve směru je nejvyšší, pokud zderivujeme funkci $f(P)$ ve směru gradientu, tj.

$$\max_{\mathbf{s}} \frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{s}} = |\mathrm{grad}\, f(P)|,$$

$\to$ gradient udává směr největší změny (největšího růstu) funkce $f$ v bodě $P$.

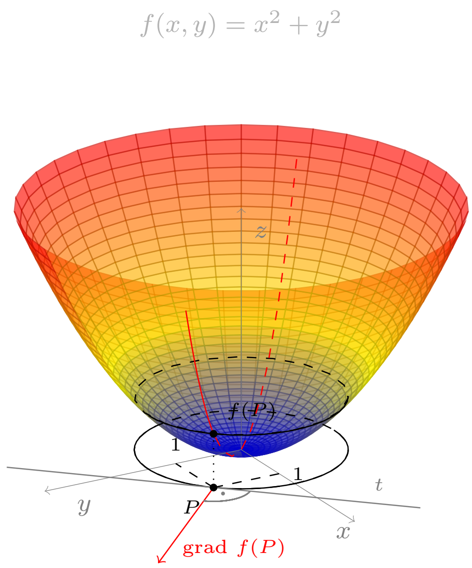
**Příklad:** Určete gradient funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $P = [1,1]$.

**Řešení:**

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (f'_x, f'_y) = (2x, 2y)$$

$$\operatorname{grad} f(P) = (2,2)$$

- $\operatorname{grad} f(P) \neq \mathbf{0}$ je ortogonální k hladině funkce $f$, která prochází bodem $P$.
- $\frac{\partial f(P)}{\partial \mathbf{s}} = 0$, jestliže $\mathbf{s}$ má směr tečny k hladině v bodě $P$.




**Věta:** (algebra gradientu a diferenciálu)
*Nechť jsou $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ diferencovatelné na $\Omega$ a označme $df = grad\, f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx}$, $dg = grad\, g(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx}$, pro $\mathbf{x} \in \Omega$. Potom na $\Omega$ platí:*

$$\begin{array}{rl}
d(c \cdot f) = c \cdot df & grad(c \cdot f) = c \cdot grad(f) \quad c \in \mathbb{R} \\
d(f \pm g) = df \pm dg & grad\,(f \pm g) = grad\, f \pm grad\, g \\
d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg & grad\,(f \cdot g) = g \cdot grad\, f + f \cdot grad\, g \\
d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2} & grad\,\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot grad\, f - f \cdot grad\, g}{g^2}, \quad g(\mathbf{x}) \neq 0
\end{array}$$

**Věta:** (diferenciál a derivace složené funkce)
*Nechť funkce $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ jsou diferencovatelné v bodě $P = [x_0, y_0]$ a $f(u,v)$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, kde $u_0 = u(P)$, $v_0 = v(P)$. Potom složená funkce $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ je diferencovatelná v bodě $P$ a v tomto bodě pro parciální derivace platí (řetězové pravidlo):*

$$\frac{\partial F(P)}{\partial x} = \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\frac{\partial u(P)}{\partial x} + \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\frac{\partial v(P)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F(P)}{\partial y} = \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}\frac{\partial u(P)}{\partial y} + \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}\frac{\partial v(P)}{\partial y}$$

*a pro totální diferenciál*

$$dF(P, \mathbf{dx}) = \frac{\partial F(P)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(P)}{\partial y}dy.$$

**Poznámka:**

$$dF = grad\, f(u,v)\cdot(du,dv) = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial u} grad\, u(x,y)\cdot(dx,dy) + \frac{\partial f}{\partial v} grad\, v(x,y)\cdot(dx,dy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy =$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

**Příklad:** Určete totální diferenciál funkce $f(u,v) = u + v^2$, kde $u(x,y) = -2xy$, $v(x,y) = x + y$.

**Řešení:** Funkce $u(x,y) = -2xy$, $v(x,y) = x + y$ a $f(u,v) = u + v^2$ jsou diferencovatelné na $\mathbb{R}^2$.

$$dF = 1\cdot du + 2v\cdot dv = 1\cdot(-2y\,dx - 2x\,dy) + 2(x+y)\cdot(1\,dx + 1\,dy) =$$
$$-2y\,dx - 2x\,dy + 2x\,dx + 2y\,dx + 2y\,dx + 2y\,dy = 2x\,dx + 2y\,dy$$

$$F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) = -2xy + (x+y)^2 = x^2 + y^2$$

$$dF = 2x\,dx + 2y\,dy$$

## Parciální derivace vyšších řádů

Označme derivace druhého řádu:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy},$$

a smíšené derivace

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}.$$

**Věta:** (Záměnnost smíšených derivací)
*Je-li funkce $f(x,y)$ dvakrát spojitě diferencovatelná v bodě $P = [x_0, y_0]$, potom $f''_{yx}(P) = f''_{xy}(P)$.*

**Příklad:** Je dána funkce $f(x,y) = x^2y$, ukažte, že smíšené derivace jsou záměnné pro všechna $P \in D_f$.

**Řešení:**

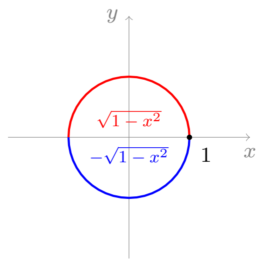
$$f'_x = 2xy, \quad f''_{yx} = 2x$$

$$f'_y = x^2, \quad f''_{xy} = 2x$$

$\rightarrow$ pro všechny body platí $f''_{yx} = f''_{xy}$.

**Funkce zadané implicitně:** $F(x, y(x)) = 0$

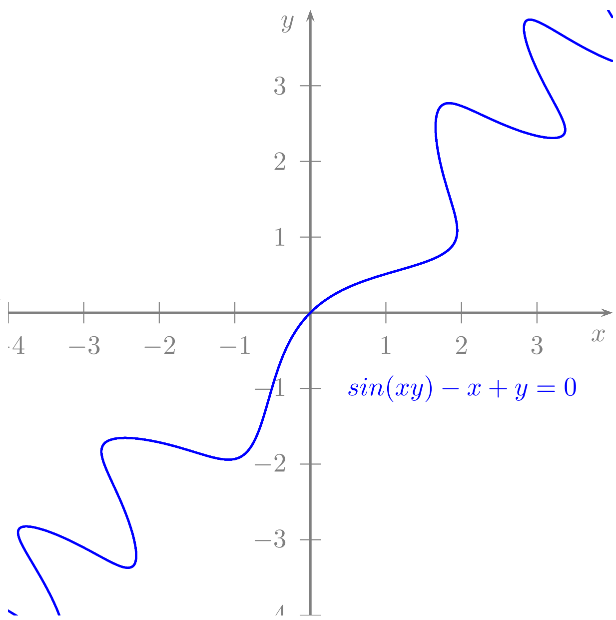
- $x^2 + y^2 - 1 = 0$ tato rovnice popisuje křivku, kterou si nelze představit jako graf funkce. Nicméně lze najít úseky, které grafem jsou a jsou grafem diferencovatelné funkce: $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, $y(x) = -\sqrt{1-x^2}$.




- $(x+1)^2+(y-2)^2 = 0$ tato rovnice nepopisuje ani funkci, ani křivku, jen jeden bod $[-1, 2]$.

- $x^2 + y^2 + 1 = 0$ je prázdná množina.

- $\sin xy - x + y = 0$ v okolí některých bodů (například P=[0,0]) popisuje funkci $y(x)$.




**Věta:** (o implicitní funkci)
*Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *je otevřená množina a* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *je diferencovatelná na* $\Omega$. *Je-li bod* $P = [x_0, y_0] \in \Omega$ *takový, že* $F(P) = 0$ *a* $\frac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0$, *pak existuje okolí* $I \subset \mathbb{R}$ *bodu* $x_0$ *a diferencovatelná funkce* $y : I \to \mathbb{R}$, *že*

$$y(x_0) = y_0 \quad a \quad F(x, y(x)) = 0 \quad pro \quad \forall x \in I.$$

*Pro derivaci navíc platí:*

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}.$$

**Příklad:** Najděte derivaci implicitně zadané funkce $\sin xy - x + y = 0$, $P = [0, 0]$.

**Řešení:**

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x \cos xy + 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 1 \neq 0$$

$\to$ v okolí bodu $x_0 = 0$ rovnice $\sin xy - x + y = 0$ zadává funkci $y = y(x)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos xy - 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(P) = -1$$

$\to y'(x_0) = -\frac{-1}{1} = 1$

# 2. Přednáška: Lokální extrémy funkcí více proměnných

**Definice:** (minimum, maximum)
*Funkce* $f(x, y, z)$ *má v bodě* $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$

1. *lokální maximum, jestliže existuje okolí bodu* $P_0$ *tak, že pro všechny body* $[x, y, z]$ *z tohoto okolí platí* $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$.
2. *lokální minimum, jestliže existuje okolí bodu* $P_0$ *tak, že pro všechny body* $[x, y, z]$ *z tohoto okolí platí* $f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$.

*V případě ostrých nerovností mluvíme o ostrých lokálních extrémech.*

**Věta:** (Nutná podmínka existence lokálního extrému)
*Jestliže má funkce* $f(x, y, z)$ *v bodě* $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ *lokální extrém a je v tomto bodě diferencovatelná, potom*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathit{grad}\, f(P_0) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad df(P_0) = 0.$$

**Poznámka:** Body, ve kterých je splněna nutná podmínka se nazývají stacionární body.

**Příklad:** Najděte stacionární body funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$.

**Řešení:**

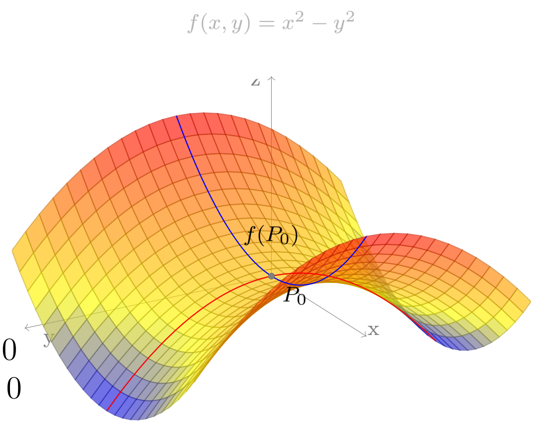
$$D_f = \mathbb{R}^2$$

Aplikace nutné podmínky:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$$

$\rightarrow$ stacionární bod $P_0 = [0, 0]$

V okolí stacionárního bodu platí:

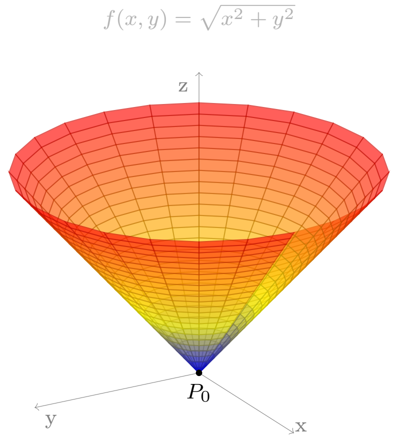



pro body typu $[a, 0]$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$: $f(a, 0) = a^2 > 0$
pro body typu $[0, b]$, kde $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$: $f(0, b) = -b^2 < 0$
pro bod $[0, 0]$: $f(0, 0) = 0$

$\rightarrow$ není lokální extrém.

**Příklad:** Najděte stacionární body funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

**Řešení:**




$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Derivace nejsou definovány v bodě $[0,0]$, tedy není stacionárním bodem, přesto je v tomto bodě lokální minimum.

**Věta:** *Funkce $f$ může mít lokální extrém pouze ve stacionárních bodech nebo v bodech, v nichž neexistuje alespoň 1 parciální derivace 1. řádu.*

**Poznámka:** Zavedeme následující značení:

Hessova matice: $$\mathbf{H}(x,y,z) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y,z) & f''_{xy}(x,y,z) & f''_{xz}(x,y,z) \\ f''_{yx}(x,y,z) & f''_{yy}(x,y,z) & f''_{yz}(x,y,z) \\ f''_{zx}(x,y,z) & f''_{zy}(x,y,z) & f''_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix}.$$

Hessián: $\det \mathbf{H}(x,y,z)$

subdeterminanty a Hessián v bodě:

$$D_1(P_0) = f''_{xx}(P_0).$$

$$D_2(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}.$$

$$D_3(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) & f''_{xz}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) & f''_{yz}(P_0) \\ f''_{zx}(P_0) & f''_{zy}(P_0) & f''_{zz}(P_0) \end{vmatrix}.$$

**Věta:** (Postačující podmínka lokálního extrému)
*Nechť $P_0$ je stacionární bod funkce $f(x,y,z)$, která má v okolí bodu $P_0$ spojité parciální derivace 2. řádu.*

*a) Je-li $D_1(P_0) > 0$, $D_2(P_0) > 0$, $D_3(P_0) > 0$, pak v bodě $P_0$ nastane lokální minimum.*
*Je-li $D_1(P_0) < 0$, $D_2(P_0) > 0$, $D_3(P_0) < 0$, pak v bodě $P_0$ nastane lokální maximum.*

*b) Pokud není splněna ani jedna z výše uvedených podmínek a $D_i(P_0) \neq 0$, $i = 1,2,3$, potom v bodě $P_0$ lokální extrém nenastane.*

*c) Pokud je jeden z determinantů nulový, nelze pomocí této věty rozhodnout.*

**Příklad:** Určete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$.

**Řešení:**

1. $D_f = \mathbb{R}^3$
2. $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= z - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$

   $y = 1$
   $z = x^2 \to z - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \to x_1 = 1,\ x_2 = 2$
   $z_1 = 1,\ z_2 = 4$

   Stacionární body: $P_1[1,1,1]$, $P_2[2,1,4]$.

3. $$H = \begin{bmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$H(P_1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} D_1(P_1) &= 6 \\ D_2(P_1) &= 12 \\ D_3(P_1) &= -6 \end{aligned}$$

   $\to$ v bodě $P_1$ nenastává lokální extrém.

   $$H(P_2) = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} D_1(P_1) &= 12 \\ D_2(P_1) &= 24 \\ D_3(P_1) &= 6 \end{aligned}$$

   $\to$ v bodě $P_2$ nastává lokální minimum, $f(P_2) = -1$.

**Příklad:** Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

**Řešení:**

1. $D_f = \mathbb{R}^2$
2. $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xy + 2y = 0 \end{aligned}$$

   $y(x+1) = 0 \to y = 0,\ x = -1$
   $y = 0 : 6x^2 + 10x = 0 \to x = 0,\ x = -\frac{5}{3}$
   $x = -1 : y^2 - 4 = 0 \to y = \pm 2$

   Stacionární body: $P_1[0,0]$, $P_2[-\frac{5}{3},0]$, $P_3[-1,2]$, $P_4[-1,-2]$.

3.

$$H = \begin{bmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{bmatrix}$$

$$H(P_1) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{rcl} D_1(P_1) & = & 10 \\ D_2(P_1) & = & 20 \end{array}$$

$\rightarrow$ v bodě $P_1$ nastává lokální minimum, $f(P_1) = 0$.

$$H(P_2) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{rcl} D_1(P_2) & = & -10 \\ D_2(P_2) & = & \frac{40}{3} \end{array}$$

$\rightarrow$ v bodě $P_2$ nastává lokální maximum, $f(P_2) = \frac{125}{27}$.

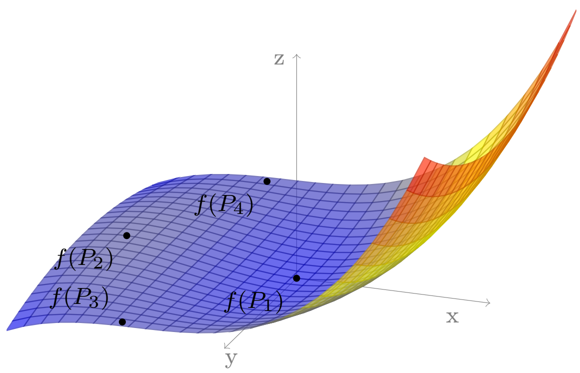
$$H(P_3) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{rcl} D_1(P_3) & = & -2 \\ D_2(P_3) & = & -16 \end{array}$$

$\rightarrow$ v bodě $P_3$ nenastává lokální extrém.

$$H(P_4) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{rcl} D_1(P_4) & = & -2 \\ D_2(P_4) & = & -16 \end{array}$$

$\rightarrow$ v bodě $P_4$ nenastává lokální extrém.

$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$



# 3. Přednáška: Integrální počet funkcí více proměnných

## Dvojný integrál

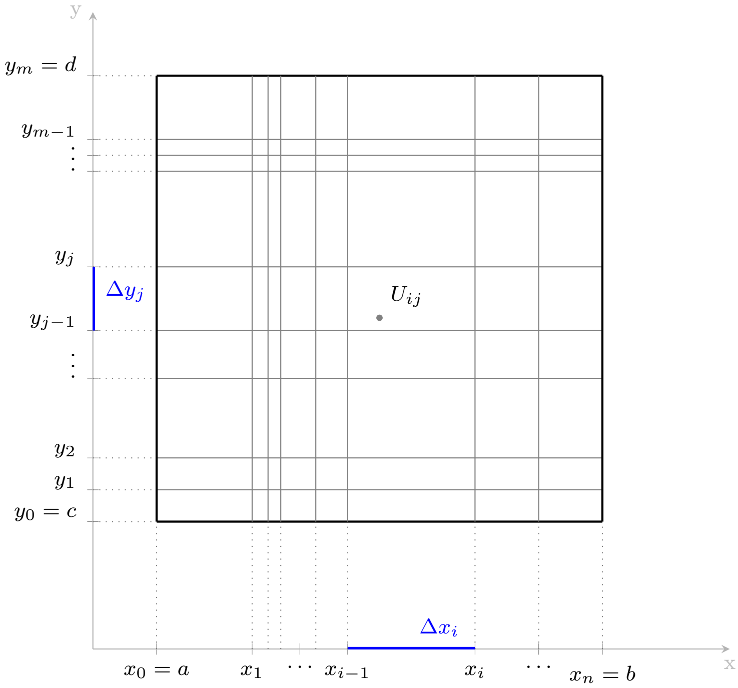
Označme obdélník $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}^2$.
Definujeme dělení obdelníku $I$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

a označíme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$,
$D_k \ldots$ posloupnost dělení intervalu $I$ taková, že $\Delta x_i$ a $\Delta y_j$ jsou stále menší.

Dělení obdelníku $I$



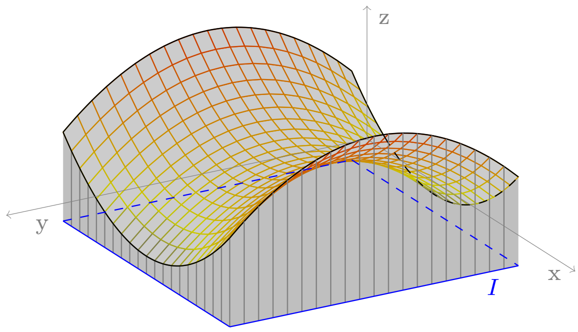

$f(x, y) \ldots$ funkce definovaná a omezená na $I$.
Integrální součet pro jedno dělení: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(U_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$, pro $U_{ij} \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle$.

**Definice:** (Dvojný integrál)
*Jestliže posloupnost integrálních součtů pro libovolnou volbu bodů $U_{ij}$ a pro libovolnou posloupnost dělení $D_k$ má vlastní limitu, nazývá se tato limita dvojný integrál funkce $f$ přes obdelník $I$ a značí se:*

$$\iint_I f(x, y)\,dxdy.$$

*O funkci $f$ říkáme, že je integrovatelná na obdelníku $I$.*

**Poznámka:** Integrální součet přibližně vyjadřuje hodnotu integrálu. Čím je dělení jemnější, tím přesněji integrální součet vyjadřuje skutečnou hodnotu integrálu.
Geometricky: po limitním přechodu jde o objem tělesa s podstavou $I$ zhora ohraničeném grafem funkce $f(x, y)$.

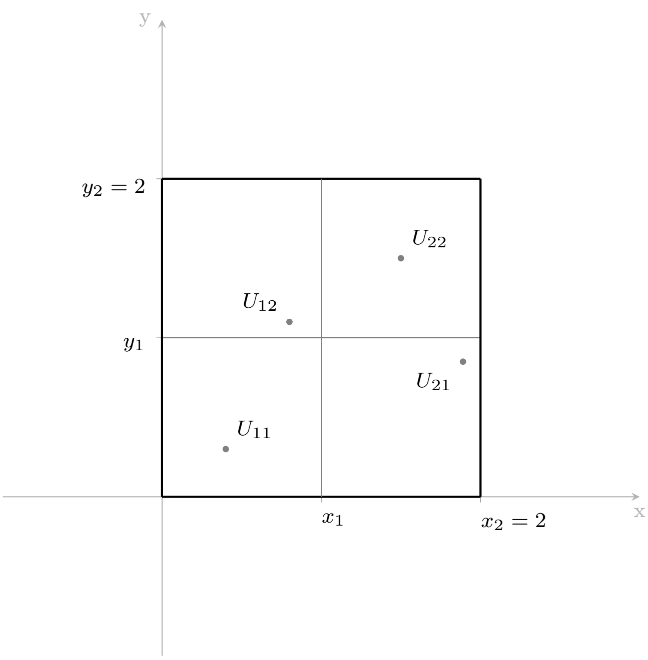



**Příklad:** Vypočtěte dvojný integrál z konstanty 5 přes interval $I = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.

**Řešení:**

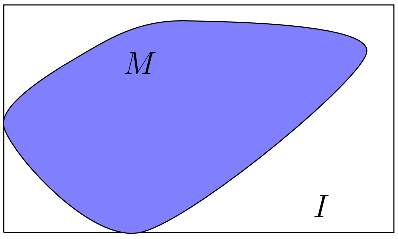
$$\iint_I K\,dxdy = 5(x_1-x_0)(y_1-y_0)+5(x_2-x_1)(y_1-y_0)+5(x_1-x_0)(y_2-y_1)+5(x_2-x_1)(y_2-y_1) =$$

$$= 5(y_1 - y_0)(x_1 - x_0 + x_2 - x_1) + 5(y_2 - y_1)(x_1 - x_0 + x_2 - x_1) = 5(x_2 - x_0)(y_1 - y_0 + y_2 - y_1) =$$
$$= 5(x_2 - x_0)(y_2 - y_0) = 5(2 - 0)(2 - 0) = 20$$



**Definice:** (Dvojný integrál na omezené množině $M$)
*Zvolme obdelník $I$ tak, aby $M \subset I$, funkce $f(x,y)$ je definovaná a omezená na $M$ a na $I$ definujeme $f^*(x,y)$ následujícím způsobem:*

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & na \quad M, \\ 0 & na \quad I - M. \end{cases}$$




*Řekneme, že funkce f je integrovatelná na M, jestliže fce $f^*$ je integrovatelná na $I$ a platí:*

$$\iint\limits_M f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_I f^*(x,y)\, dxdy.$$

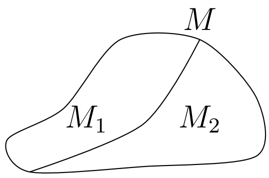
**Věta:** (Vlastnosti dvojného integrálu)

1. *Jsou-li funkce $f_1(x,y)$ a $f_2(x,y)$ integrovatelné na $M \subset \mathbb{R}^2$, potom je na $M$ integrovatelná i funkce $c_1 f_1 + c_2 f_2$, kde $c_1$, $c_2$ jsou konstanty a platí:*

$$\iint\limits_M (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, dxdy = c_1 \iint\limits_M f_1\, dxdy + c_2 \iint\limits_M f_2\, dxdy.$$

2 *Je-li funkce $f(x,y)$ integrovatelná na $M_1$ a $M_2$ a je-li $M = M_1 \cup M_2$, potom je $f$ integrovatelná na $M$ a platí:*

$$\iint\limits_M f\, dxdy = \iint\limits_{M_1} f\, dxdy + \iint\limits_{M_2} f\, dxdy.$$



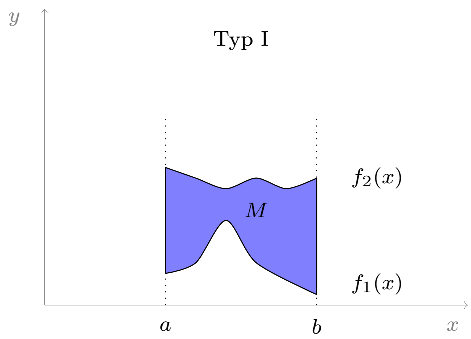

**Fubiniova věta:** (Výpočet dvojného integrálu)
*Předpokládáme, že funkce $f(x,y)$ je integrovatelná na $M$.*

1. *Je-li množina $M$ obrazec typu I určený nerovnostmi*

$$a \le x \le b, \quad f_1(x) \le y \le f_2(x)$$

*kde $f_1(x)$ a $f_2(x)$ jsou spojité funkce, potom platí*

$$\iint\limits_M f(x,y)\, dxdy = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

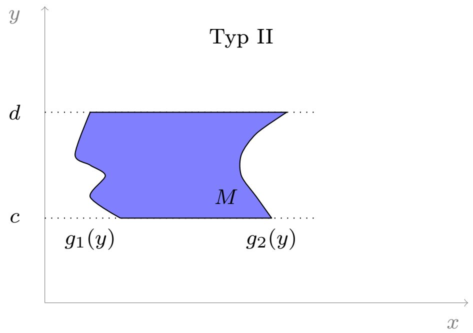


2. *Je-li množina $M$ obrazec typu II určený nerovnostmi*

$$c \le y \le d, \quad g_1(y) \le x \le g_2(y)$$

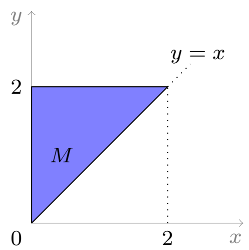
*kde $g_1(y)$, $g_2(y)$ jsou spojité funkce, potom platí*

$$\iint\limits_M f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left( \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$




**1. Příklad** Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M (2x+3)\,dxdy$, kde množina $M$ je trojúhelník s vrcholy $A = [0,0]$, $B = [0,2]$, $C = [2,2]$.

**Řešení:**




1. $0 \le x \le 2, \quad x \le y \le 2.$

$$\iint\limits_M (2x+3)\,dxdy = \int\limits_0^2 \left( \int\limits_x^2 (2x+3)\,dy \right) dx = \int\limits_0^2 \left[2xy+3y\right]_x^2\,dx = \int\limits_0^2 (4x+6-2x^2-3x)\,dx =$$

$$\int\limits_0^2 (-2x^2+x+6)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_0^2 = \frac{26}{3}.$$

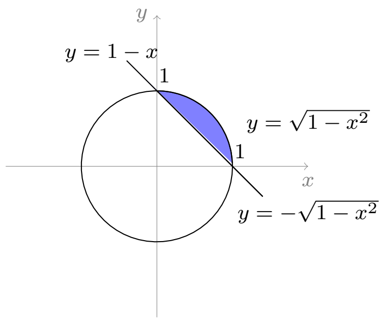
2. $0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le y.$

$$\iint\limits_M (2x+3)\,dxdy = \int\limits_0^2 \left( \int\limits_0^y (2x+3)\,dx \right) dy = \int\limits_0^2 \left[x^2+3x\right]_0^y\,dy = \int\limits_0^2 (y^2+3y)\,dy =$$

$$= \left[\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{2}y^2\right]_0^2 = \frac{26}{3}.$$

**2. Příklad** Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M xy\,dxdy$, kde množina $M$ je množina určena vztahy $x^2+y^2-1\leq 0$, $x+y-1\geq 0$.

**Řešení:**




1. $0\leq x\leq 1, \quad 1-x\leq y\leq \sqrt{1-x^2}$.

$$\iint\limits_M xy\,dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\right)dx=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$\int\limits_0^1\frac{1}{2}x\left(1-x^2-(1-x)^2\right)\,dx=\int\limits_0^1(x^2-x^3)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{12}.$$

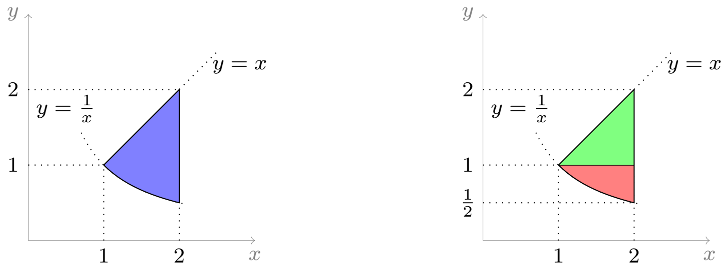
2. $0\leq y\leq 1, \quad 1-y\leq x\leq \sqrt{1-y^2}$.

$$\iint\limits_M xy\,dxdy=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\right)dy=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{2}x^2y\right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}}dy=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{1}{2}y\left(1-y^2-(1-y)^2\right)\,dy=\int\limits_0^1(y^2-y^3)\,dy=\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4\right]_0^1=\frac{1}{12}.$$

**3. Příklad** Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_M \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, kde množina $M$ je množina určena vztahy $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$.

**Řešení:**




1. $1 \le x \le 2, \quad \frac{1}{x} \le y \le x.$

$$\iint\limits_M \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int\limits_1^2 \left( \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy \right) dx = \int\limits_1^2 \left[ -\frac{x^2}{y} \right]_{1/x}^{x} dx = \int\limits_1^2 \left( -x + x^3 \right) \,dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$

2.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} \le y \le 1, & \frac{1}{y} \le x \le 2, \\ 1 \le y \le 2, & y \le x \le 2. \end{array}$$

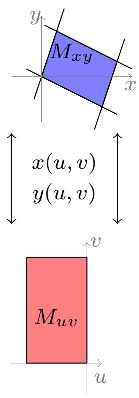
$$\iint\limits_M \frac{x^2}{y^2}\,dxdy = \int\limits_{1/2}^{1} \left( \int\limits_{1/y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx \right) dy + \int\limits_1^2 \left( \int\limits_y^2 \frac{x^2}{y^2}\,dx \right) dy.$$

# 4. Přednáška: Integrální počet funkcí více proměnných

## Substituce ve dvojném integrálu

**Věta:** (o substituci ve dvojném integrálu)

*Nechť $M_{uv} \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená omezená množina a nechť funkce $x(u,v)$ a $y(u,v)$ jsou prosté zobrazení množiny $M_{uv}$ na omeznou množinu $M_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ a mají v $M_{uv}$ spojité 1. parciální derivace. Nechť funkce $f(x,y)$ je na $M_{xy}$ spojitá. Potom platí*




$$\iint\limits_{M_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{M_{uv}} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv,$$

*kde*

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{bmatrix}$$

*je Jacobiho matice a $|J(u,v)|$ je determinant z Jacobiho matice (Jacobián).*

**Příklad:** Vypočtěte dvojný integrál $\iint\limits_{M_{xy}} (x+y)\,dxdy$, kde $M$ je určena následujícími rovnostmi: $y = 3x$, $y = 3x - 14$, $y = -\frac{x}{2}$, $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$.

**Řešení:**
Provedeme transformaci:

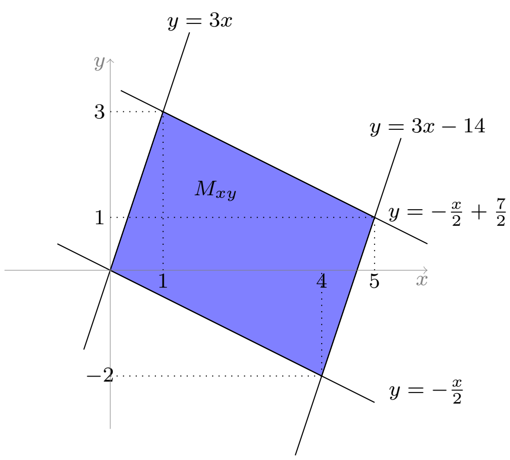
$$u = u(x,y): \quad u = y - 3x$$

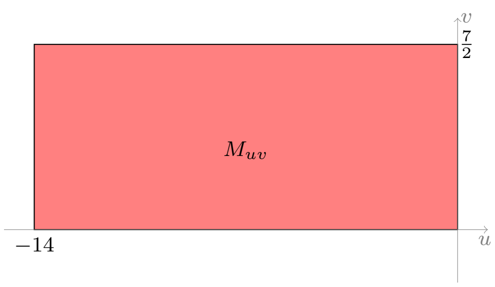
$$v = v(x,y): \quad v = y + \frac{x}{2}$$

$$\rightarrow \quad u - v = -3x - \frac{x}{2} = -\frac{7}{2}x, \quad \rightarrow \quad x = x(u,v): \quad x = -\frac{2}{7}u + \frac{2}{7}v$$

$$y = u + 3x \quad \rightarrow \qquad y = u - \frac{6}{7}u + \frac{6}{7}v \quad \rightarrow \quad y = y(u,v): \quad y = \frac{1}{7}u + \frac{6}{7}v$$

$$M_{uv}: \quad -14 \leq u \leq 0, \quad 0 \leq v \leq \frac{7}{2}.$$



$$f(x(u,v),y(x,y)) = -\frac{2}{7}u + \frac{2}{7}v + \frac{1}{7}u + \frac{6}{7}v = -\frac{1}{7}u + \frac{8}{7}v$$

$$|J(u,v)| = \begin{vmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{vmatrix} = -\frac{14}{49}$$

$$\iint\limits_{M_{xy}} (x+y)\,dxdy = \iint\limits_{M_{uv}} \left(-\frac{1}{7}u + \frac{8}{7}v\right)\left(-\frac{14}{49}\right) dudv = -\frac{2}{49}\int\limits_{0}^{7/2}\int\limits_{-14}^{0} (-u+8v)\; du\,dv =$$

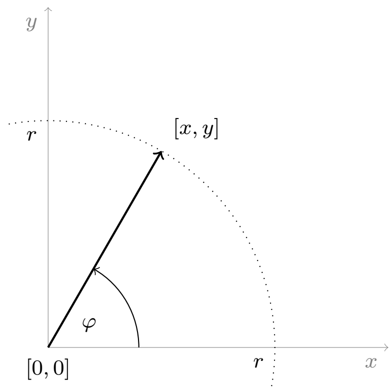
$$= -\frac{2}{49}\int\limits_{0}^{7/2}\left[-\frac{u^2}{2} + 8uv\right]_{-14}^{0} dv = -\frac{2}{49}\int\limits_{0}^{7/2}[98+112v]\,dv = -\frac{2}{49}[98v+56v^2]_0^{7/2} = -42.$$

## Substituce do polárních souřadnic:

Polární souřadnice: $r \in \langle 0, \infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.
Transformační vztahy:

$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi,$$

$$y(r,\varphi) = r\sin\varphi.$$



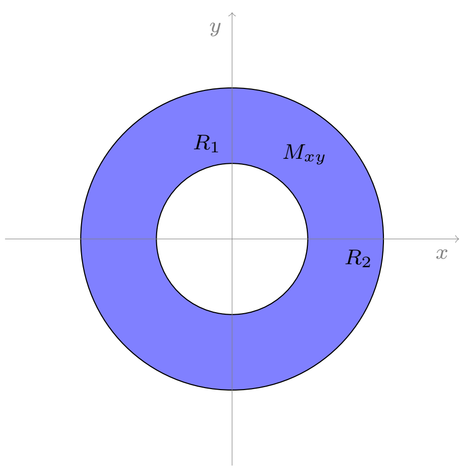

Jacobián:

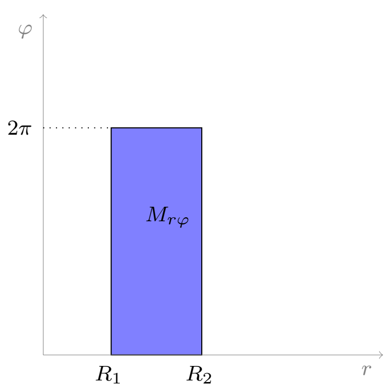
$$|J(r,\varphi)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

**Příklad:** Vypočtěte integrál $\iint\limits_{M_{xy}} dxdy$, kde množina $M_{xy}$ je mezikruží ohraničené kružnicemi o poloměrech $0 < R_1 < R_2$.

**Řešení:**



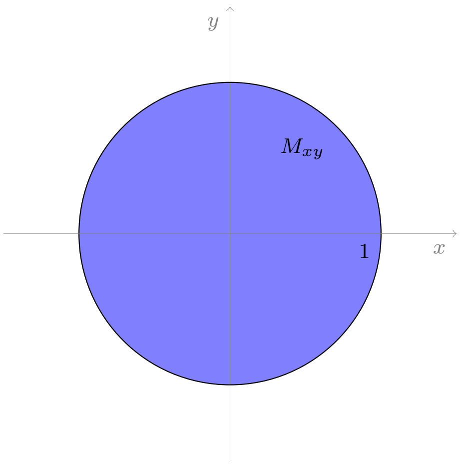



Množina $M_{r\varphi}$: $r \in \langle R_1, R_2 \rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi )$

$$\iint\limits_{M_{xy}} dxdy = \iint\limits_{M_{r\varphi}} r\, dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{R_1}^{R_2} r\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left( R_2^2 - R_1^2 \right) \, d\varphi = \pi \left( R_2^2 - R_1^2 \right)$$

**Příklad:** Vypočtěte integrál $\iint\limits_{M_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$, kde množina $M_{xy} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

**Řešení:**




$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & r &\in \langle 0, 1 \rangle, \\ y &= r \sin \varphi, & \varphi &\in \langle 0, 2\pi ). \end{aligned}$$

$$f(r, \varphi) = \sqrt{1 - (r \cos \varphi)^2 - (r \sin \varphi)^2} = \sqrt{1 - r^2}$$

$$\iint\limits_{M_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy = \iint\limits_{M_{r\varphi}} r\sqrt{1 - r^2}\, dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, dr\, d\varphi = \dots$$

$$\int r\sqrt{1 - r^2}\, dr = \left| \begin{array}{c} t = 1 - r^2 \\ dt = -2r\, dr \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{3} t^{3/2} + C = -\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2} + C$$

$$\dots = -\frac{1}{3} \int\limits_0^{2\pi} \left[ (1 - r^2)^{3/2}\, dr \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}$$

## Použití dvojných integrálů:

Obsah oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$:

$$S = \iint\limits_M 1\, dxdy.$$

Objem tělesa s podstavou $M \subset \mathbb{R}^2$ a shora ohraničenou nezápornou funkcí $f(x, y)$:

$$V = \iint\limits_M f(x, y)\, dxdy.$$

Hmotnost rovinné oblasti, $\rho(x,y)$ je hustota:

$$m = \iint\limits_M \rho(x,y)\,dxdy.$$

Souřadnice těžiště rovinné destičky:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_M x\rho(x,y)\,dxdy,$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_M y\rho(x,y)\,dxdy.$$

Momenty setrvačnosti vzledem k osám $x$ a $y$:

$$I_x = \iint\limits_M y^2\rho(x,y)\,dxdy,$$

$$I_y = \iint\limits_M x^2\rho(x,y)\,dxdy.$$

Moment setrvačnosti vzledem k počátku:

$$I_P = \iint\limits_M (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dxdy.$$

# 5. Přednáška: Integrální počet funkcí více proměnných

## Trojný integrál

Označme kvádr $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle e, g\rangle \subset \mathbb{R}^3$.
Definujeme libovolné dělení kvádru $J$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d,$$

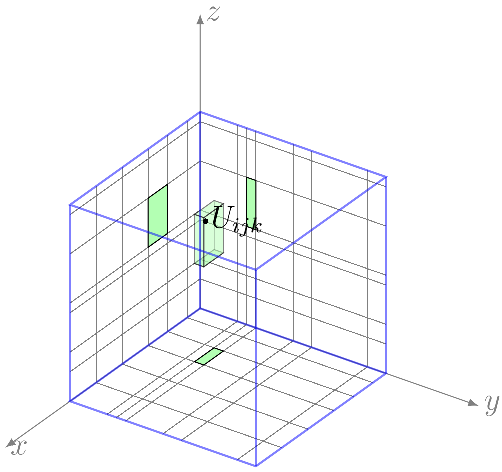
$$e = z_0 < z_1 < \cdots < z_{l-1} < z_l = g$$

a označíme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

$D_p$ ... posloupnost dělení $J$ taková, že $\Delta x_i$, $\Delta y_j$ a $\Delta z_k$ jsou stále menší.

$f(x, y, z)$ ... funkce definovaná a omezená na $J$.

Integrální součet pro jedno dělení: $\sum\limits_{k=1}^{l}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} f(U_{ijk})\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, pro $U_{ijk} \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle \times \langle z_{k-1}, z_k\rangle$.




**Definice:** (Trojný integrál)
*Jestliže posloupnost integrálních součtů pro libovolnou volbu bodů $U_{ijk}$ a pro libovolnou posloupnost dělení $D_p$ má vlastní limitu, nazývá se tato limita trojný integrál funkce $f$ přes kvádr $J$ a značí se:*

$$\iiint\limits_J f(x, y, z)\, dxdydz.$$

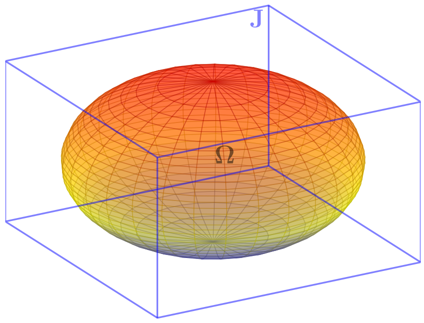
*O funkci $f$ říkáme, že je integrovatelná na kvádr $J$.*

**Definice:** (Trojný integrál na množině $\Omega$)
*Zvolme kvádr $J$ tak, aby $\Omega \subset J$. Funkce $f(x,y,z)$ je definovaná a omezená na $\Omega$ a na $J$ definujeme $f^*(x,y,z)$ následujícím způsobem:*

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{na} \quad \Omega, \\ 0 & \text{na} \quad J - \Omega. \end{cases}$$

*Řekneme, že funkce $f$ je* ***integrovatelná na $\Omega$****, jestliže fce $f^*$ je integrovatelná na $J$ a platí:*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{J} f^*(x,y)\,dxdydz.$$




**Věta:** (Vlastnosti trojného integrálu)

1. *Jsou-li funkce $f_1(x,y,z)$ a $f_2(x,y,z)$ integrovatelné na $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, potom je na $\Omega$ integrovatelná i funkce $c_1 f_1 + c_2 f_2$, kde $c_1$, $c_2$ jsou konstanty a platí:*

$$\iiint\limits_{\Omega} (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,dxdydz = c_1 \iiint\limits_{\Omega} f_1\,dxdydz + c_2 \iiint\limits_{\Omega} f_2\,dxdydz.$$

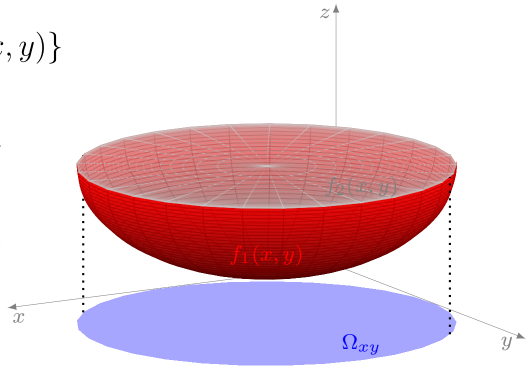
2. *Je-li funkce $f(x,y,z)$ integrovatelná na $\Omega_1$ a $\Omega_2$ a je-li $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, potom je $f$ integrovatelná na $\Omega$ a platí:*

$$\iiint\limits_{\Omega} f\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_1} f\,dxdydz + \iiint\limits_{\Omega_2} f\,dxdydz.$$

**Fubiniova věta:** (Výpočet trojného integrálu)
*Nechť $f(x,y,z)$ je integrovatelná na množině $\Omega$, kde*

1. $\Omega\,\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : [x,y] \in \Omega_{xy} \wedge f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$ *a platí:*
   (a) *$\Omega_{xy}$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}^2$ (průmět množiny $\Omega$ do roviny $(x,y)$).*
   (b) *Funkce $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou na $\Omega_{xy}$ spojité a platí*

$$f_1(x,y) \le f_2(x,y) \quad \text{pro} \quad \forall\,[x,y] \in \Omega_{xy}.$$



*Potom platí*

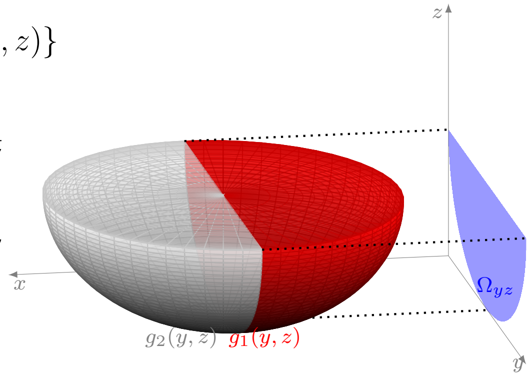
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left( \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

2. $\Omega\,\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : [y,z] \in \Omega_{yz} \wedge g_1(y,z) \le x \le g_2(y,z)\}$ *a platí:*

   (a) $\Omega_{yz}$ *je uzavřená množina v* $\mathbb{R}^2$ *(průmět množiny* $\Omega$ *do roviny (y,z)).*

   (b) *Funkce* $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jsou na* $\Omega_{yz}$ *spojité a platí*

   $$g_1(y,z) \le g_2(y,z) \quad \textit{pro} \quad \forall\,[y,z] \in \Omega_{yz}.$$




*Potom platí*

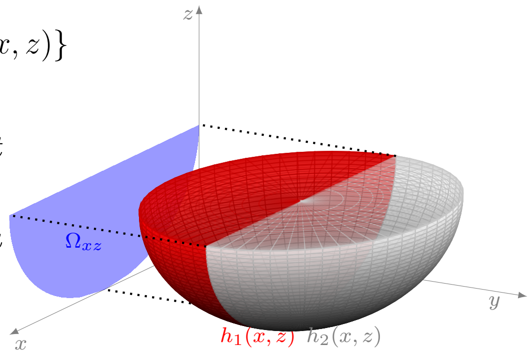
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\Omega_{yz}} \left( \int\limits_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dydz.$$

3. $\Omega\,\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : [x,z] \in \Omega_{xz} \wedge h_1(x,z) \le y \le h_2(x,z)\}$ *a platí:*

   (a) $\Omega_{xz}$ *je uzavřená množina v* $\mathbb{R}^2$ *(průmět množiny* $\Omega$ *do roviny (x,z)).*

   (b) *Funkce* $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *jsou na* $\Omega_{xz}$ *spojité a platí*

   $$h_1(x,z) \le h_2(x,z) \quad \textit{pro} \quad \forall\,[x,z] \in \Omega_{xz}.$$




*Potom platí*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\Omega_{xz}} \left( \int\limits_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dxdz.$$

**Příklad:** Vypočtěte integrál $\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz$, kde $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,2\rangle \times \langle 2,4\rangle$.

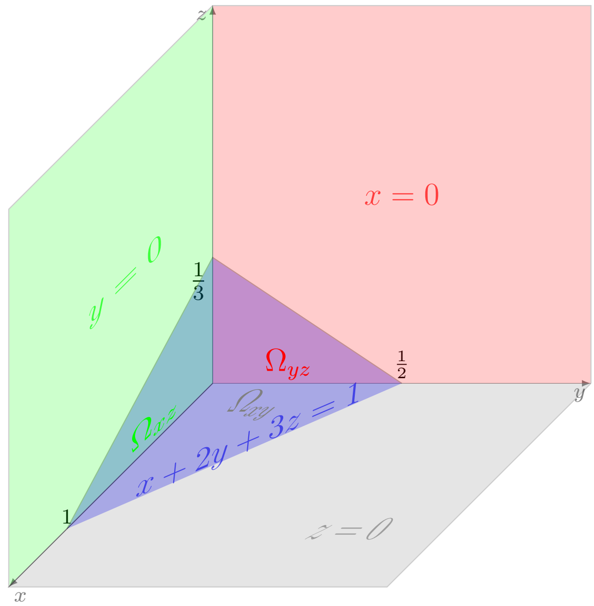
**Řešení:**

$$\iint\limits_{\Omega_{xy}} \left( \int\limits_{2}^{4} xyz\,dz \right) dxdy = \iint\limits_{\Omega_{xy}} xy \left[\frac{z^2}{2}\right]_2^4 dxdy = 6\int\limits_0^1 \left( \int\limits_1^2 xy\,dy \right) dx =$$

$$= 6\int\limits_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx = 9\int\limits_0^1 x\,dx = 9\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{9}{2}.$$

**Příklad:** Vypočtěte integrál $\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$, kde $\Omega$ je těleso ohraničené rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+2y+3z=1$.

**Řešení:**



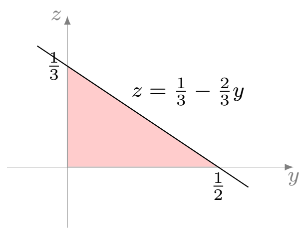

$$\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left( \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}x} dz \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{xz}} \left( \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}x} dy \right) dxdz =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{yz}} \left( \int\limits_{0}^{1-3z-2y} dx \right) dydz =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_{yz}} (1-3z-2y)\, dydz =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \left( \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y} (1-3z-2y)\, dz \right) dy = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \left[ z - \frac{3}{2}z^2 - 2yz \right]_0^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y} dy =$$




$$= \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y\right)^2 - 2y\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y\right) \right) dy =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \left(4y^2 - 4y + 1\right) dy = \frac{1}{6}\left[\frac{4}{3}y^3 - 2y^2 + y\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{36}.$$

## Substituce v trojném integrálu:

**Věta:** (O substituci v trojném integrálu)
*Nechť $\Omega_{uvw} \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená omezená množina. Nechť funkce $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ a $z(u,v,w)$ jsou prosté zobrazení množiny $\Omega_{uvw}$ na omezenou množinu $\Omega_{xyz}$ a mají v $\Omega_{uvw}$ spojité 1. parciální derivace. Nechť funkce $f(x,y,z)$ je na $\Omega_{xyz}$ spojitá. Potom platí*

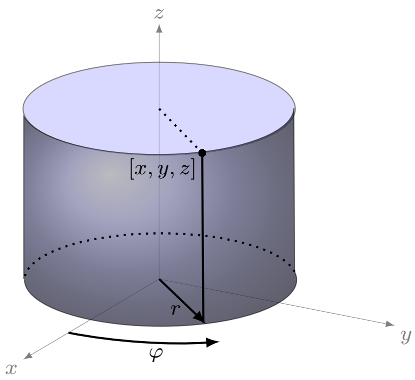
$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\, |J(u,v,w)|\, dudvdw$$

*kde*

$$J(u,v,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(u,v,w)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v,w)}{\partial v} & \frac{\partial x(u,v,w)}{\partial w} \\ \frac{\partial y(u,v,w)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v,w)}{\partial v} & \frac{\partial y(u,v,w)}{\partial w} \\ \frac{\partial z(u,v,w)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,v,w)}{\partial v} & \frac{\partial z(u,v,w)}{\partial w} \end{bmatrix}$$

*je Jacobiho matice a $|J(u,v,w)|$ je determinant z Jacobiho matice (Jacobián).*

# Substituce do válcových (cylindrických) souřadnic:




Válcové souřadnice: $r \in \langle 0, \infty), \; \varphi \in \langle 0, 2\pi), \; z \in \mathbb{R}$.
Transformační vztahy:

$$\begin{aligned} x(r,\varphi,z) &= r\cos\varphi, \\ y(r,\varphi,z) &= r\sin\varphi, \\ z(r,\varphi,z) &= z. \end{aligned}$$

Jacobián:

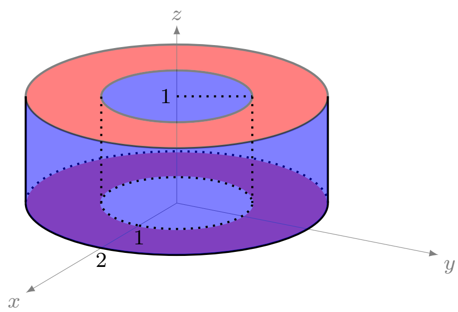
$$|J(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

**Příklad:** Vypočtěte integrál $\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, kde množina $\Omega_{xyz}$ je určena vztahy: $1 \le x^2+y^2 \le 4, \; 0 \le z \le 1$.

**Řešení:**

$$\begin{gathered} r \in \langle 1, 2 \rangle, \\ \varphi \in \langle 0, 2\pi), \\ z \in \langle 0, 1 \rangle. \end{gathered}$$

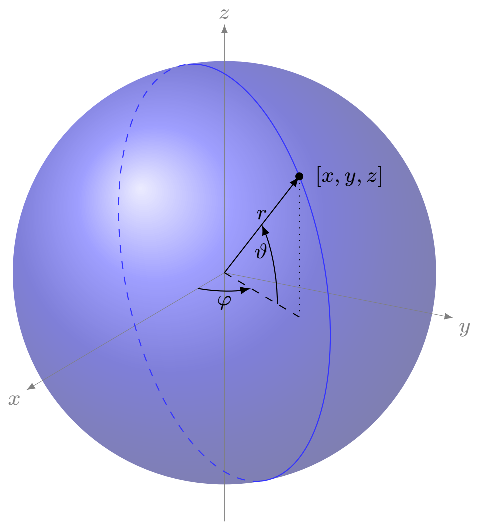



$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi z}} ((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 + z^2)\,r\,drd\varphi dz =$$

$$= \int\limits_1^2 \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (r^3 + rz^2)\,d\varphi\,dz\,dr = 2\pi \int\limits_1^2 \int\limits_0^1 (r^3 + rz^2)\,dz\,dr = 2\pi \int\limits_1^2 \left[ zr^3 + r\frac{z^3}{3} \right]_0^1 dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_1^2 \left( r^3 + \frac{r}{3} \right) dr = 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{6} \right]_1^2 = \frac{17}{2}\pi.$$

## Substituce do sférických souřadnic:




Sférické souřadnice:

$$r \in \langle 0, \infty), \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi), \quad \vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Transformační vztahy:

$$\begin{aligned} x(r,\varphi,\vartheta) &= r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y(r,\varphi,\vartheta) &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z(r,\varphi,\vartheta) &= r\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Jacobián:

$$|J(r,\varphi,\vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos^2\varphi\cos^3\vartheta + r^2\sin^2\varphi\cos\vartheta\sin^2\vartheta + r^2\cos^2\varphi\cos\vartheta\sin^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\cos^3\vartheta =$$

$$r^2\left(\cos^3\vartheta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) + \cos\vartheta\sin^2\vartheta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\right) = r^2\cos\vartheta\left(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right) =$$

$$= r^2\cos\vartheta.$$

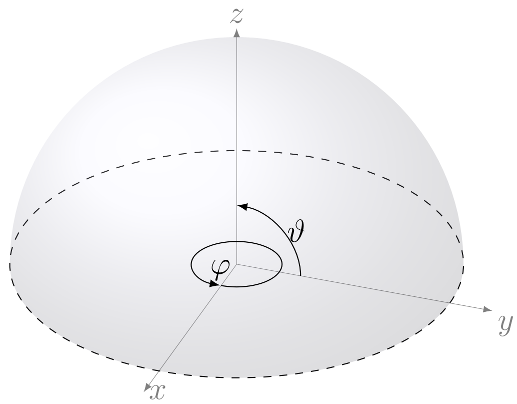
**Příklad:** Vypočtěte integrál $\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, kde množina $\Omega_{xyz}$ je určena vztahy: $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$.

**Řešení:**

$$r \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$




$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi\vartheta}} (r^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\vartheta) r^2\cos\vartheta\,drd\varphi d\vartheta =$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{r\varphi\vartheta}} r^4\cos\vartheta\,drd\varphi d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\cos\vartheta d\varphi\,d\vartheta = \frac{2\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= \frac{2\pi}{5}\left[\sin\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{5}.$$

## Použití trojných integrálů:

Objem tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$V = \iiint\limits_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Celková hmotnost tělesa, $\rho(x, y, z)$ je hustota:

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Celkový náboj tělesa, $q(x, y, z)$ je hustota rozložení náboje:

$$Q = \iiint\limits_{\Omega} q(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Souřadnice těžiště tělesa:

$$x_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\Omega} x\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\Omega} y\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{\Omega} z\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Momenty setrvačnosti vzledem k osám $x$, $y$ a $z$:

$$I_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

# 6. Přednáška: Vektorová analýza

## Křivky - opakování

**Definice:** (Vektorová funkce)
*Reálnou m-rozměrnou vektorovou funkci n reálných proměnných* rozumíme každé zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *kdy každému* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ *je přiřazena právě jedna hodnota* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \in H_f \subset \mathbb{R}^m$.

**Poznámka:**

- Je-li $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nebo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, potom $f(\mathbf{x})$ nazýváme skalární pole (například hustota materiálu, teplota).
- Je-li $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nebo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, potom $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ nazýváme vektorové pole (například okamžité rychlosti).
- Je-li $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ nebo $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a vektorová funkce je spojitá, potom funkci $\vec{r}(t)$ nazýváme křivkou v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{R}^3$.
- Je-li $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a vektorová funkce je spojitá, potom funkci $\vec{r}(u,v)$ nazýváme plochou v $\mathbb{R}^3$.

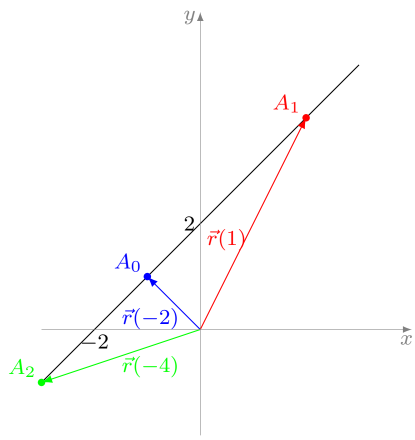
**Příklad:**

Obecná rovnice přímky: $y = 2 + x$ (křivka zadaná funkcí $y = f(x)$, pouze v $\mathbb{R}^2$).

Parametrická rovnice přímky:

$$x(t) = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = 3 + t$$

Vektorová funkce: $\vec{r}(t) = (1 + t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$

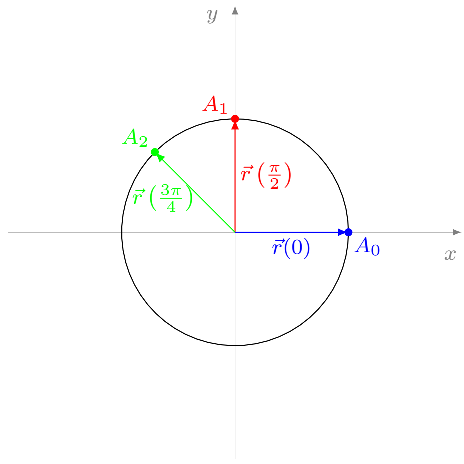



$A_0 = [-1, 1] \quad \leftrightarrow \quad \vec{r}(-2) = (-1, 1)$
$A_1 = [2, 4] \quad \leftrightarrow \quad \vec{r}(1) = (2, 4)$
$A_2 = [-3, -1] \quad \leftrightarrow \quad \vec{r}(-4) = (-3, -1)$

Výhodou je snadná orientace křivky.
Úsečka $A_2A_1 \quad \leftrightarrow \quad t \in \langle -4, 1 \rangle$.

**Příklad:**

Obecná rovnice kružnice se středem v $S = [0,0]$ a poloměrem $r = 1$: $x^2 + y^2 = 1$ (křivka zadaná implicitní funkcí $F(x, y(x)) = 0$, pouze v $\mathbb{R}^2$).




Parametrická rovnice kružnice:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y(t) &= \sin t. \end{aligned}$$

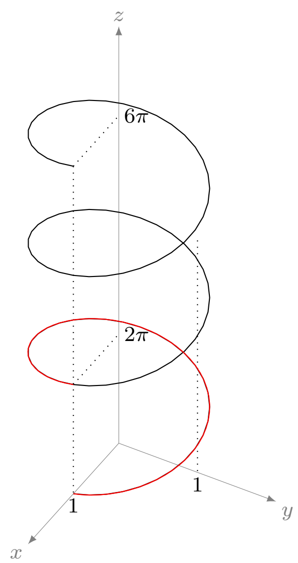
Vektorová funkce: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$A_0 = [1, 0] \quad \leftrightarrow \quad \vec{r}(0) = (1, 0)$
$A_1 = [0, 1] \quad \leftrightarrow \quad \vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 0)$
$A_2 = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \quad \leftrightarrow \quad \vec{r}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Oblouk $A_0A_2 \quad \leftrightarrow \quad t \in \langle 0, \frac{3\pi}{4} \rangle$.

**Příklad:**

Parametrická rovnice spirály v prostoru:




$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t, \\ y(t) &= \sin t, \quad t \in \langle 0, 6\pi \rangle \\ z(t) &= t. \end{aligned}$$

Vektorová funkce: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \langle 0, 6\pi \rangle$

Vektorová funkce: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

**Definice:** (derivace vektorové funkce, tečna)
*Nechť křivka $\mathcal{C}$ je parametrizována vektorovou funkcí $\vec{r}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Vektor derivace v bodě $t_0$ je konečná limita (pokud existuje)*

$$\frac{d\vec{r}(t_0)}{dt} = \vec{r}\,'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

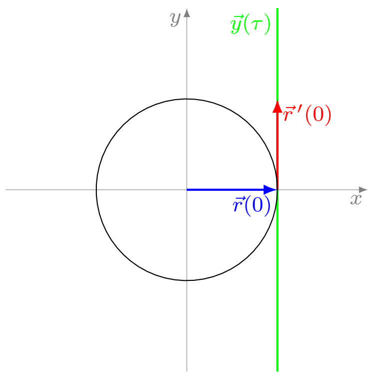
*a nazýváme jej tečný vektor křivky $\mathcal{C}$ v bodě $t_0$. Tečnou křivky $\mathcal{C}$ v bodě $t_0$ rozumíme přímku $\vec{y}(\tau) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.*

**Příklad:** Určete tečnu ke kružnici $x^2 + y^2 = 1$ v bodě $A = [1, 0]$.

Kružnice: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
Bod $A$: $\vec{r}(0) = (1, 0)$.

Tečný vektor: $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
Tečný vektor v bodě $A$: $\vec{r}\,'(0) = (0, 1)$

Rovnice tečny v bodě $t_0 = 0$:




$$
\begin{aligned}
& \vec{y}(\tau) = (y_1(\tau), y_2(\tau)) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\tau \\
& y_1(\tau) = 1 + 0\tau \\
& y_2(\tau) = 0 + 1\tau \\
\Rightarrow \quad & \vec{y}(\tau) = (1, \tau), \quad \tau \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

**Příklad:** Pokud $\vec{r}(t)$ představuje dráhu částice v závislosti na čase, potom $\vec{r}\,'(t)$ je okamžitá rychlost (je ve směru tečném na dráhu). A dále $\vec{r}\,''(t)$ je zrychlení.

**Definice:**
*Křivka $\mathcal{C}$ popsaná vektorovou funkcí (parametrizací) $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$ se nazývá <u>hladká</u>, jestliže:*

*a) existují spojité derivace $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ pro $t \in \langle a, b \rangle$,*

*b) alespoň jedna z funkcí $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ je nenulová pro $t \in \langle a, b \rangle$.*

*Křivka $\mathcal{C}$ se nazývá po částech hladká, jestliže není hladká v konečně mnoha bodech.*

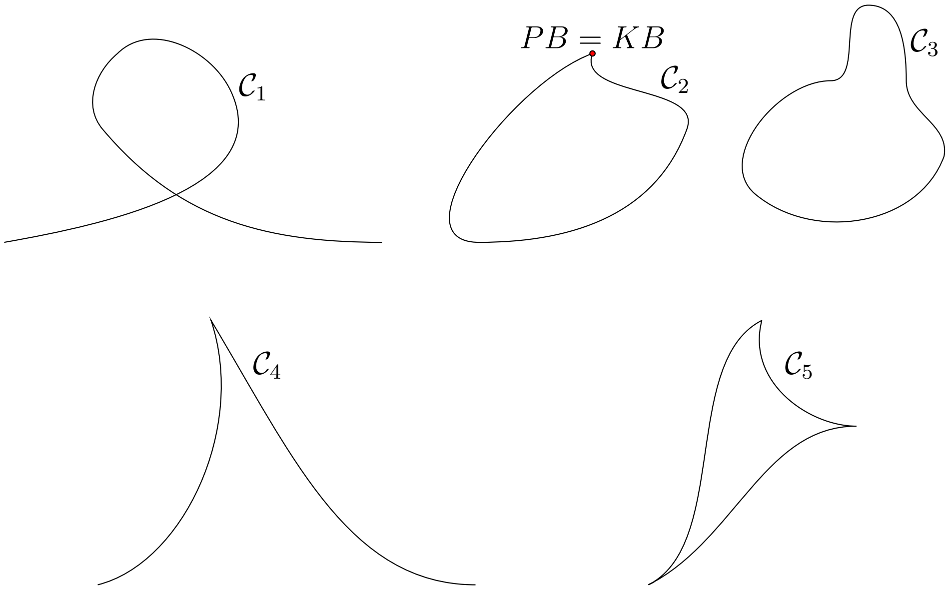
**Definice:**
*Křivka $\mathcal{C}$ popsaná vektorovou funkcí (parametrizací) $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$ se nazývá <u>jednoduchá</u>, jestliže*

$$\forall\, t_1,\, t_2 \in \langle a, b \rangle, \quad t_1 \neq t_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$$

*Křivka $\mathcal{C}$ se nazývá <u>uzavřená</u>, jestliže $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.*

**Příklad:**

Určete vlastnosti následujích křivek.




**Poznámka:** Orientace křivky vyplývá z parametrizace: bod $\vec{r}(t_1)$ leží před bodem $\vec{r}(t_2)$, jestliže $t_1 < t_2$.

## Vektorové pole

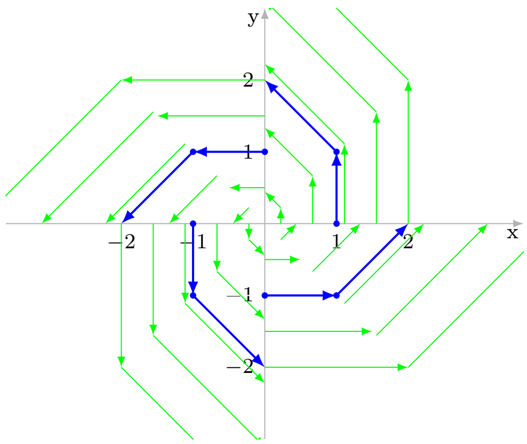
Vektorové pole je vektorová funkce, která každému bodu roviny (prostoru) přiřazuje vektor $\vec{a}$:

$$\vec{a}(x,y) = (a_1(x,y), a_2(x,y)) = a_1(x,y)\vec{i} + a_2(x,y)\vec{j},$$
$$\vec{a}(x,y,z) = (a_1(x,y,z), a_2(x,y,z), a_3(x,y,z)) = a_1(x,y,z)\vec{i} + a_2(x,y,z)\vec{j} + a_3(x,y,z)\vec{k},$$

kde $a_{1,2}(x,y)$ jsou skalární funkce 2 proměnných (skalární pole) a $a_{1,2,3}(x,y,z)$ jsou skalární funkce 3 proměnných (skalární pole).

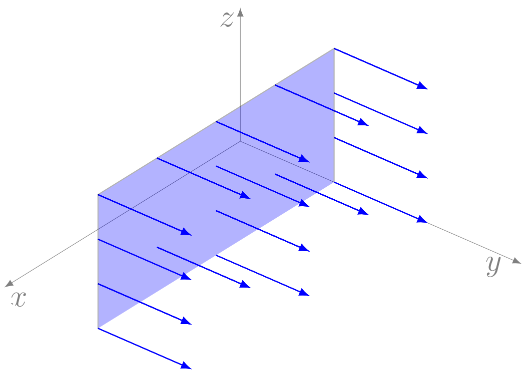
**Příklad:** $\vec{a}(x,y) = (-y, x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$,

$\vec{a}(1,0) = (0,1)$ $\quad$ $\vec{a}(1,1) = (-1,1)$
$\vec{a}(0,1) = (-1,0)$ $\quad$ $\vec{a}(-1,1) = (-1,-1)$
$\vec{a}(-1,0) = (0,-1)$ $\quad$ $\vec{a}(-1,-1) = (1,-1)$
$\vec{a}(0,-1) = (1,0)$ $\quad$ $\vec{a}(1,-1) = (1,1)$



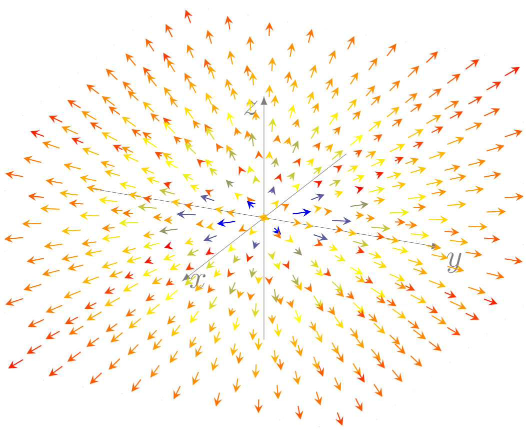
**Příklad:** $\vec{a}(x,y,z) = (0,y,0) = y\vec{j}$,

$\vec{a}(0,0,1) = (0,0,0)$
$\vec{a}(1,0,1) = (0,0,0)$
$\vec{a}(0,1,1) = (0,1,0)$
$\vec{a}(x,1,z) = (0,1,0), \quad x,z \in \mathbb{R}$,




**Příklad:** $\vec{a}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{||\vec{r}||}$, kde $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ polohový vektor.

$||\vec{r}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$




$$\vec{a}(x,y,z) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

**Definice:** (Parciální derivace)
*Parciální derivace vektorového pole $\vec{a}(x,y,z) = (a_1(x,y,z), a_2(x,y,z), a_3(x,y,z))$ podle $x$, resp. $y$, resp. $z$, je konečná limita (pokud existuje)*

$$\frac{\partial \vec{a}(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{a}(x+\Delta x,y,z) - \vec{a}(x,y,z)}{\Delta x} =$$

$$= \left( \frac{\partial a_1(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial a_2(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial a_3(x,y,z)}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{\partial a_1(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a_2(x,y,z)}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial a_3(x,y,z)}{\partial x}\vec{k},$$

$$\textit{resp.} \quad \frac{\partial \vec{a}(x,y,z)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{a}(x,y+\Delta y,z) - \vec{a}(x,y,z)}{\Delta y} =$$

$$= \left( \frac{\partial a_1(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial a_2(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial a_3(x,y,z)}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial a_1(x,y,z)}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial a_2(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a_3(x,y,z)}{\partial y}\vec{k},$$

$$resp. \quad \frac{\partial \vec{a}(x,y,z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{a}(x,y,z+\Delta z) - \vec{a}(x,y,z)}{\Delta z} =$$

$$= \left( \frac{\partial a_1(x,y,z)}{\partial z}, \frac{\partial a_2(x,y,z)}{\partial z}, \frac{\partial a_3(x,y,z)}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial a_1(x,y,z)}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial a_2(x,y,z)}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial a_3(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}.$$

**Definice:** (Vektorová čára)
*<u>Vektorová čára</u> vektorového pole $\vec{a}(x,y,z)$ je křivka $\vec{r}(t)$, pro níž platí:*

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{a}(\vec{r}(t)).$$

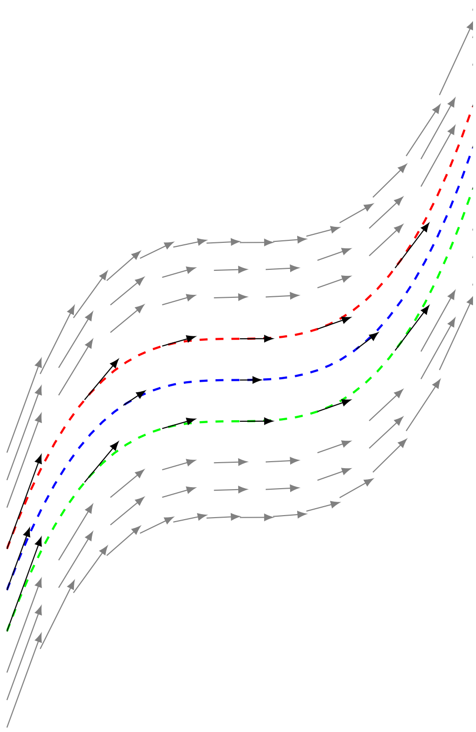
**Poznámky:**

- Vektorová čára je křivka, v jejímž každém bodě má tečna směr daný vektorem $\vec{a}$.
- Siločára, proudnice.
- v $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a_1(x,y) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= a_2(x,y) \end{aligned}\right\} \frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2}$$

- v $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= a_1(x,y,z) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= a_2(x,y,z) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= a_3(x,y,z) \end{aligned}\right\} \frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3}$$



**Příklad:** Najděte rovnici vektorových čar vektorového pole $\vec{a}(x, y) = (x, y)$.

**Řešení:**

1.

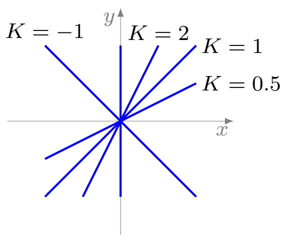
$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= x(t) \\ \int \frac{dx}{x} &= \int dt, x \neq 0 \\ \ln|x| &= t + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \\ |x| &= e^{C_1} e^t \\ x(t) &= K_1 e^t, K_1 \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= y(t) \\ \int \frac{dy}{y} &= \int dt, y \neq 0 \\ \ln|y| &= t + C_2, C_2 \in \mathbb{R} \\ |y| &= e^{C_2} e^t \\ y(t) &= K_2 e^t, K_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\vec{r}(t) = (K_1 e^t, K_2 e^t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} t &= \ln \frac{x}{K_1}, \quad \frac{x}{K_1} > 0, \quad K_1 \neq 0. \\ y &= K_2 e^{\ln \frac{x}{K_1}} = \frac{K_2}{K_1} x = Kx, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{dy}{y}, x \neq 0, y \neq 0 \\ \ln|x| &= \ln|y| + C, C \in \mathbb{R} \\ y &= Kx, K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$




**Definice:** (Nabla operátor)
*Nabla operátor je symbolický operátor, který se zavádí následovně:*

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

**Poznámka:** (Charakteristika skalárního pole)
Pokud $\varphi(x, y, z)$ reprezentuje skalární pole, potom $\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$.

**Charakteristiky vektorového pole:**

**Definice:** (Divergence)
*Divergencí vektorového pole $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ nazýváme skalár*

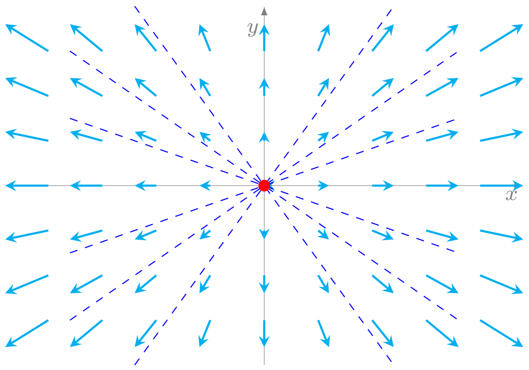
$$div\, \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

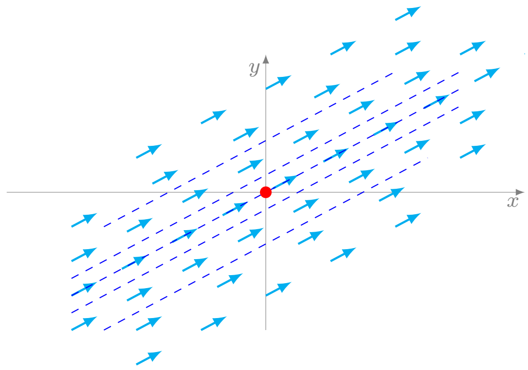
**Poznámka:** (Vlastnosti divergence)
Nechť $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou vektorová pole a $\varphi = \varphi(x, y, z)$ je skalární pole, potom platí:

$$\begin{aligned} div\,(\vec{a}+\vec{b}) &= div\,(\vec{a}) + div\,(\vec{b}), \\ div\,(\varphi\,\vec{a}) &= \varphi\, div\,(\vec{a}) + \vec{a}\, grad\,\varphi, \\ div\,(k\,\vec{a}) &= k\, div\,(\vec{a}), \quad \text{kde} \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pokud $div\,(\vec{a}) = 0$, vektorové pole se nazývá nezřídlové.
Pokud $div\,(\vec{a}) \neq 0$, vektorové pole se nazývá zřídlové.

**Příklad:** Určete, které z následujících polí je zřídlové.




**Příklad:** Najděte divergenci vektorového pole $\vec{a}(x, y, z) = x^3yz\vec{i} + xy^3z\vec{j} + xyz^3\vec{k}$ v bodě $P = [1, 1, 1]$.

**Řešení:**

$$\begin{aligned} div\,\vec{a} &= \nabla\vec{a} = 3x^2yz + 3xy^2z + 3xyz^2 \\ div\,\vec{a}\,(P) &= 9 \end{aligned}$$

**Definice:** (Rotace)
*Rotací vektorového pole* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *nazýváme vektor*

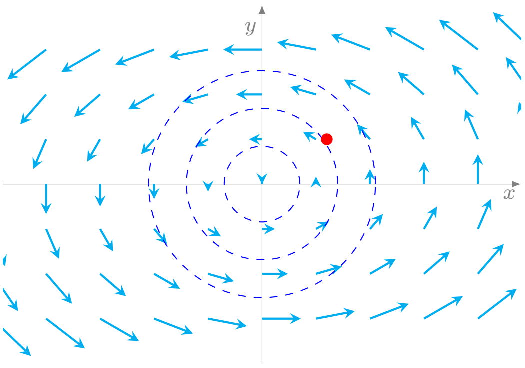
$$rot\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right).$$

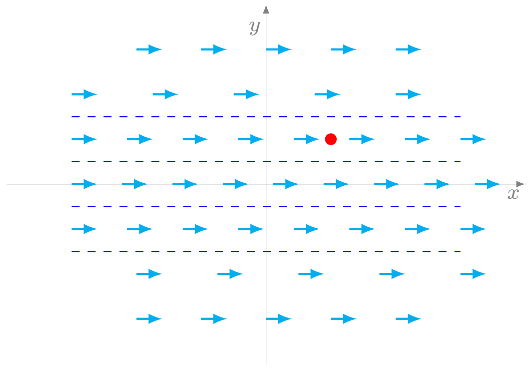
**Poznámka:** (Vlastnosti rotace)
Nechť $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou vektorová pole a $\varphi = \varphi(x, y, z)$ je skalární pole, potom platí:

$$\begin{aligned} rot\,(\vec{a} \pm \vec{b}) &= rot\,\vec{a} \pm rot\,\vec{b}, \\ rot\,(k\,\vec{a}) &= k\, rot\,(\vec{a}), \quad \text{kde} \quad k \in \mathbb{R}, \\ rot\,(\varphi\,\vec{a}) &= \varphi\, rot\,\vec{a} + grad\,\varphi \times \vec{a}, \\ div\,(\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b}\, rot\,\vec{a} - \vec{a}\, rot\,\vec{b}, \\ div\,(rot\,\vec{a}) &= 0, \\ rot\,(grad\,\varphi) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Pokud $rot\,(\vec{a}) = \vec{0}$, vektorové pole se nazývá nevírové.
Pokud $rot\,(\vec{a}) \neq \vec{0}$, vektorové pole se nazývá vírové.

**Příklad:** Určete, které z následujících polí je vírové.




**Poznámka:**
Je-li $\vec{a}$ rychlost proudění kapaliny, potom divergence charakterizuje zdroje (přítok, odtok). $rot\,\vec{a}$ je směr osy, kolem které se kapalina otáčí (v okolí uvažovaného bodu) jako celek.

**Definice:** (Potenciál)
*Vektorové pole $\vec{a}(x,y,z) = (a_1(x,y,z), a_2(x,y,z), a_3(x,y,z))$ se nazývá potenciálové na množině $M \subseteq \mathbb{R}^3$, jestliže existuje funkce $\varphi(x,y,z)$ mající spojité všechny první parciální derivace na $M$, taková, že*

$$\vec{a} = grad\,\varphi.$$

*Funkce $\varphi(x,y,z)$ se nazývá potenciál.*

**Věta:** (Postačující podmínka potenciálového pole)
*Nechť funkce $a_1$, $a_2$, $a_3$ mají spojité první parciální derivace na oblasti $M$. Potom je vektorové pole potenciálové na $M$ právě tehdy, když $rot\,\vec{a} = \vec{0}$ a oblast $M$ je jednoduše souvislá.*

**Poznámka:**
Oblast $M$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže každou uzavřenou křivku ležící v $M$ lze 'stáhnout' do jednoho bodu, aniž by opustila oblast $M$.

**Příklad:** Je dáno vektorové pole $\vec{a}(x,y) = (x(1+y^2), x^2y)$.

1. Rozhodněte, zda je pole potenciálové.
2. Najděte potenciál $\varphi(x,y)$.

**Řešení:**

1. Vektorové pole je definováno na $\mathbb{R}^2$ (je jednoduše souvislá oblast).

$$rot\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x(1+y^2) & x^2y & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2xy - 2xy) = \vec{0},$$

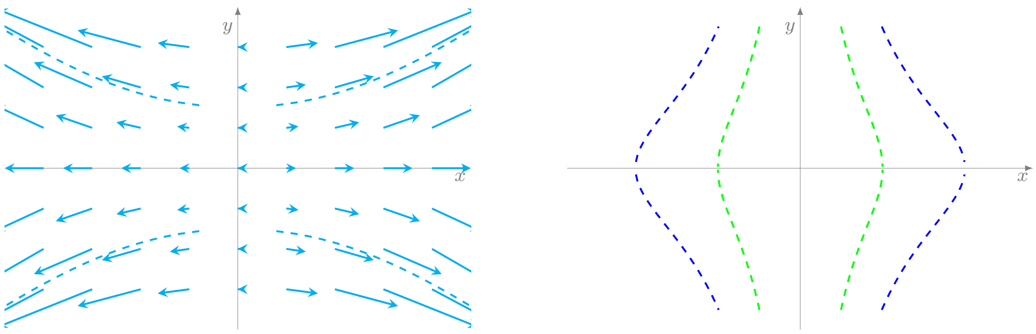
$\rightarrow$ pole je potenciálové.

2.

$$\vec{a} = grad\,\varphi$$
$$(x(1+y^2), x^2y) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x(1+y^2) \quad \rightarrow \quad \varphi(x,y) = \int (x + xy^2)\,dx \quad \rightarrow \quad \varphi(x,y) = \frac{x^2}{2}(1+y^2) + f_1(y)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2y + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2y \quad \rightarrow \quad x^2y = x^2y + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad f_1(y) = \int 0\,dy$$
$$\Rightarrow \quad f_1(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad \varphi(x,y) = \frac{x^2}{2}(1+y^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$




**Příklad:** Je dáno vektorové pole $\vec{a}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

1. Rozhodněte, zda je pole potenciálové.
2. Najděte potenciál $\varphi(x,y)$.

**Řešení:**

1. Vektorové pole je definováno na $\mathbb{R}^2 - \{[0,0]\}$.

$$rot\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \vec{0},$$

$\rightarrow$ ačkoliv je $rot\,\vec{a} = \vec{0}$ pole není potenciálové, protože oblast není jednoduše souvislá.

Pokud definujeme vektorové pole $\vec{a}(x,y)$ na $D = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$, která je jednoduše souvislá, pak je pole na $D$ i potenciálové.

2.

$$\vec{a} = grad\,\varphi$$

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad \varphi(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx = -\frac{y}{y^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\,dx$$

$$\rightarrow \quad \varphi(x,y) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + f_1(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\frac{x}{y^2} + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f_1(y)}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad f_1(y) = \int 0\,dy$$

$$\Rightarrow \quad f_1(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x,y) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Příklad:** Je dáno vektorové pole $\vec{a}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$.

1. Rozhodněte, zda je pole potenciálové.
2. Najděte potenciál $\varphi(x,y,z)$.

**Řešení:**

1. Vektorové pole je definováno na $\mathbb{R}^3$.

$$rot\,\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1, 1-1, 1-1) = \vec{0},$$

$\rightarrow$ pole je potenciálové.

2.

$$\vec{a} = grad\,\varphi$$
$$(y+z, x+z, x+y) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y+z \quad\rightarrow\quad \varphi(x,y,z) = \int (y+z)\,dx \quad\rightarrow\quad \varphi(x,y,z) = xy + xz + f_1(y,z)$$
$$\Rightarrow\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x + \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x+z \quad\rightarrow\quad x+z = x + \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} \quad\rightarrow\quad \frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y} = z \quad\rightarrow\quad f_1(y,z) = \int z\,dy$$
$$\Rightarrow\quad f_1(y,z) = yz + f_2(z),$$
$$\Rightarrow\quad \varphi(x,y,z) = xy + xz + yz + f_2(z) \quad\rightarrow\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = x + y + \frac{\partial f_2(z)}{\partial z}$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = x+y \quad\rightarrow\quad x+y = x+y+\frac{\partial f_2(z)}{\partial z} \quad\rightarrow\quad \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} = 0 \quad\rightarrow\quad f_2(z) = \int 0\,dz$$
$$\Rightarrow\quad f_2(z) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\quad \varphi(x,y,z) = xy + xz + yz + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Definice:**
*Laplaceův operátor je symbolický operátor, který se zavádí následovně:*

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

*Laplaceovu rovnici nazýváme parciální diferenciální rovnici:*

$$\Delta f = 0, \quad tj. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

*Poissonovu rovnici nazýváme parciální diferenciální rovnici:*

$$\Delta f = u, \quad tj. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = u,$$

*kde $u = u(x,y,z)$ je pravá strana rovnice.*

*Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1,2,3$, skalární funkci (pole) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme harmonickou funkcí v $\Omega$, pokud splňuje Laplaceovu rovnici, tj. $\Delta f = 0$, v $\Omega$.*

**Poznámka:**
Laplaceova a Poissonova rovnice obvykle popisují systémy v rovnovážném stavu, do kterých nezasahujeme (Laplaceova rovnice) nebo existuje vnější zásah nebo síla do systému (Poissonova

rovnice s nenulovou pravou stranou).

Abychom získali jednoznačné řešení, je potřeba stanovit okrajové podmínky.

**Příklady:**

Oblast $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je čtverec o straně 1 m (popisuje desku), u níž se okraj udržuje na hodnotě 10 °C. Pokud bude deska tepelně izolovaná od okolí (žádný vnější vliv neuvažujeme), tak po určité době dojde k rovnovážnému stavu určenému právě teplotami na okraji, tj. rozložení teploty $f(x,y)$ splňuje Laplaceovu rovnici s okrajovou podmínkou $g = 10$.

Oblast $\Omega \in \mathbb{R}^2$ je kruh o poloměru 1cm (kroužek z drátu). Když tento kroužek projedeme mýdlovou vodou, vytvoří se bublina. Pokud zanedbáme gravitační síly je tvar bubliny řešení Laplaceovy rovnice nad $\Omega$ s okrajovou podmínkou $g = 0$ (bublina je v kroužku napevno zafixovaná). Když připustíme vnější síly (gravitaci), dostaneme Poissonovu rovnici.

**Příklad:** Ukažte, že funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ je harmonická.

**Řešení:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2 \end{aligned}$$

Laplaceova rovnice $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ je splněna, tj. funkce $f$ je harmonická.

**Příklad:** Nalezněte řešení $f(x)$ následující okrajové úlohy:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} &= 0,\ x \in (0,1), \\ f(0) &= 5, \\ f(1) &= 10. \end{aligned}$$

**Řešení:**

Jde o Laplaceovu rovnici v jedné dimenzi s okrajovými podmínkami. Daná úloha může popisovat rozložení teploty v tenkém drátu o délce 1 m. Drát je tepelně izolovaný od okolí. Na levém konci drátu (pozice $x = 0$) je udržována teplota 5 °C a na pravém konci drátu (pozice $x = 1$) je udržována teplota 10 °C.

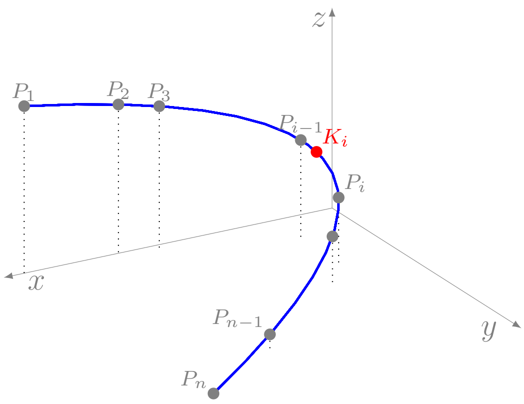
$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}, & f(0) &= C_2 = 5 \\ f(x) &= C_1 x + C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}, & f(1) &= C_1 + 5 = 10 \to C_1 = 5 \end{aligned}$$

Řešení: $f(x) = 5x + 5$.

# 7. Přednáška: Křivkové integrály

## Křivkové integrály 1. druhu

- Označme $\mathcal{K}$ hladkou křivku.
- Definujeme dělení křivky body $P_1, \dots, P_n$.
- $D_k$ značí posloupnost dělení křivky $\mathcal{K}$ takové, že $\max\limits_{i \in \mathbb{N}} |P_{i-1} - P_i| \to 0$ (tzv. normální posloupnost).




- Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n = 2, 3)$ je definovaná a spojitá na množině $M$, která obsahuje křivku $\mathcal{K}$.
- Integrální součet pro jedno dělení: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(K_i)|P_{i-1} - P_i|$, kde $K_i$ bod, leží na křivce $\mathcal{K}$ mezi body $P_{i-1}$ a $P_i$.

**Definice:** (Křivkový integrál 1. druhu)
*Jestliže posloupnost integrálních součtů pro libovolnou volbu bodů $K_i$ a pro každou normální posloupnost $D_k$ má vlastní limitu, nazývá se křivkový integrál 1. druhu funkce $f$ po křivce $\mathcal{K}$ a značí se*

$$\int_{\mathcal{K}} f(x, y, z)\, ds.$$

**Věta:** (Vlastnosti křivkového integrálu 1. druhu)

1. *Nechť existují integrály $\int_{\mathcal{K}} f\, ds$, $\int_{\mathcal{K}} g\, ds$, potom existuje i integrál z funkce $k_1 f + k_2 g$, kde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ a platí*

$$\int_{\mathcal{K}} (k_1 f + k_2 g)\, ds = k_1 \int_{\mathcal{K}} f\, ds + k_2 \int_{\mathcal{K}} g\, ds.$$

2. *Nechť křivka $\mathcal{K}$ je složená ze dvou křivek $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ tak, že koncový bod křivky $\mathcal{K}_1$ je počáteční bod $\mathcal{K}_2$. Nechť existují integrály $\int\limits_{\mathcal{K}_1} f\,ds$, $\int\limits_{\mathcal{K}_2} f\,ds$, potom existuje i integrál přes křivku $\mathcal{K}$ a platí*

$$\int\limits_{\mathcal{K}} f\,ds = \int\limits_{\mathcal{K}_1} f\,ds + \int\limits_{\mathcal{K}_2} f\,ds.$$

3. *Nechť $\mathcal{K}_+$ a $\mathcal{K}_-$ jsou stejné křivky s opačnou orientací a existuje $\int\limits_{\mathcal{K}_+} f\,ds$, potom existuje i $\int\limits_{\mathcal{K}_-} f\,ds$ a platí*

$$\int\limits_{\mathcal{K}_+} f\,ds = \int\limits_{\mathcal{K}_-} f\,ds.$$

**Věta:** (Výpočet křivkového integrálu 1. druhu)
*Nechť $\vec{r}(t) : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}^m$ je parametrizace hladké křivky $\mathcal{K}$ a funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je spojitá, potom platí*

$$\int\limits_{\mathcal{K}} f\,ds = \int\limits_a^b f(\vec{r}(t))||\vec{r}\,'(t)||\,dt.$$

*Nechť křivka $\mathcal{K}$ je po částech hladká, potom existuje dělení $D : a = t_0, \dots, t_n = b$ takové, že pro všechna $i = \{1,\dots,n\}$ je křivka $\vec{r_i}(t) : \langle t_{i-1}, t_i\rangle \to \mathbb{R}^m$ hladká a platí*

$$\int\limits_{\mathcal{K}} f\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\vec{r_i}(t))||\vec{r_i}\,'(t)||\,dt.$$

**Věta:** (Vlastnosti křivkového integrálu 1. druhu)

4. *Nechť jednoduchá a hladká křivka $\mathcal{K}$ je popsána dvěma parametrizacemi $\vec{r}_1(t)$, $t \in \langle a,b\rangle$ a $\vec{r}_2(\tau)$, $\tau \in \langle c,d\rangle$ potom*

$$\int\limits_{\mathcal{K}} f\,ds = \int\limits_a^b f(\vec{r}_1(t))||\vec{r}_1'(t)||\,dt = \int\limits_c^d f(\vec{r}_2(\tau))||\vec{r}_2'(\tau)||\,d\tau,$$

*tj. křivkový integrál 1. druhu je nezávislý na zvolené parametrizaci.*

**Příklad:** Vypočtěte integrál $\int\limits_{\mathcal{K}} (x^2+y^2)\, ds$, kde křivka $\mathcal{K}$ je úsečka $AB$, kde $A = [1, 0]$, $B = [0, 1]$.

**Řešení:**

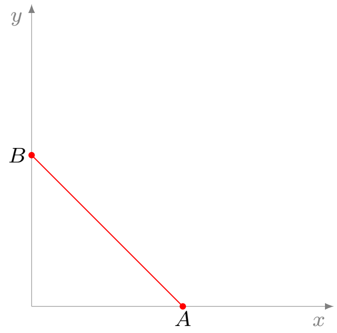
$$\vec{r}(t) = A + \vec{s}\,t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{s} = B - A = (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = (1-t, t), \quad t \in \langle 0, 1\rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-1, 1),$$

$$||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{2}$$




$$\int\limits_{\mathcal{K}} (x^2+y^2)\, ds = \int\limits_0^1 \left((1-t)^2 + t^2\right) \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2} \int\limits_0^1 (1 - 2t + 2t^2)\, dt = \sqrt{2} \left[t - t^2 + \frac{2}{3} t^3\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

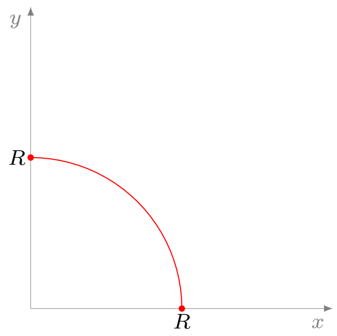
**Příklad:** Vypočtěte integrál $\int\limits_{\mathcal{K}} y\, ds$, kde křivka $\mathcal{K}$ je čtvrtina kružnice $x^2 + y^2 = R^2$ v $I$. kvadrantu.

**Řešení:**

$$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t), \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-R\sin t, R\cos t),$$

$$||\vec{r}\,'(t)|| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R$$




$$\int\limits_{\mathcal{K}} y\, ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin t\, R\, dt = R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = R^2 \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2.$$

## Použití křivkových integrálů 1. druhu:

Délka křivky $\mathcal{K}$:

$$l = \int_{\mathcal{K}} 1\, ds.$$

Hmotnost křivky, $\rho(x,y,z)$ je rozložení hustoty

$$m = \int_{\mathcal{K}} \rho(x,y,z)\, ds.$$

Souřadnice těžiště křivky $T = [x_0, y_0, z_0]$:

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{K}} x\rho(x,y,z)\, ds,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{K}} y\rho(x,y,z)\, ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{K}} z\rho(x,y,z)\, ds.$$

Momenty setrvačnosti vzledem k osám $x$, $y$ a $z$:

$$I_x = \int_{\mathcal{K}} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\, ds,$$

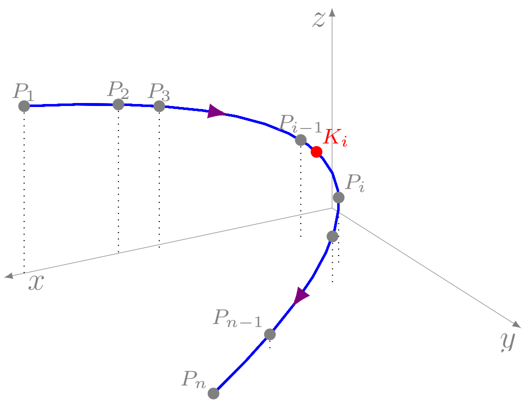
$$I_y = \int_{\mathcal{K}} (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)\, ds,$$

$$I_z = \int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\, ds.$$

# 8. Přednáška: Křivkové integrály

## Křivkové integrály 2. druhu

- Označme $\mathcal{K}$ hladkou orientovanou křivku.
- Definujeme dělení křivky body $P_1, \ldots, P_n$.
- $D_k$ značí posloupnost dělení křivky $\mathcal{K}$ takové, že $\max\limits_{i\in\mathbb{N}} |P_{i-1} - P_i| \to 0$ (tzv. normální posloupnost).




- Funkce $\vec{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ je vektorové pole spojité na množině $M$, která obsahuje křivku $\mathcal{K}$.
- Integrální součet pro jedno dělení: $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{f}(K_i) \cdot \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$, kde $K_i$ bod, leží na křivce $\mathcal{K}$ mezi body $P_{i-1}$ a $P_i$.

**Definice:** (Křivkový integrál 2. druhu)
*Jestliže posloupnost integrálních součtů pro libovolnou volbu bodů $K_i$ a pro každou normální posloupnost $D_k$ má vlastní limitu, nazývá se* *křivkový integrál 2. druhu funkce $\vec{f}$ po křivce $\mathcal{K}$* *a značí se*

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}(x, y, z)\, d\vec{r}.$$

**Poznámka:** (Jiný zápis křivkového integrálu 2. druhu)
V $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \vec{f}(x, y) &= f_1(x, y)\,\vec{i} + f_2(x, y)\,\vec{j} = (f_1(x, y), f_2(x, y))\,, \\ d\vec{r} &= dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} = (dx, dy)\,, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}(x, y)\, d\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{K}} f_1\, dx + f_2\, dy.$$

V $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\,\vec{i} + f_2(x,y,z)\,\vec{j} + f_3(x,y,z)\,\vec{k} = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))\,,$$
$$\vec{dr} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} = (dx, dy, dz)\,,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\mathcal{K}} \vec{f}(x,y,z)\,\vec{dr} = \int_{\mathcal{K}} f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz.$$

Pokud $\mathcal{K}$ je uzavřená křivka, lze integrál značit následujícím způsobem:

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}(x,y,z)\,\vec{dr}.$$

**Věta:** (Vlastnosti křivkového integrálu 2. druhu)

1. *Nechť existují integrály* $\int_{\mathcal{K}} \vec{f}\,\vec{dr}$, $\int_{\mathcal{K}} \vec{g}\,\vec{dr}$, *potom existuje i integrál z funkce* $k_1\vec{f} + k_2\vec{g}$, *kde* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *a platí*
$$\int_{\mathcal{K}} (k_1\vec{f} + k_2\vec{g})\,\vec{dr} = k_1 \int_{\mathcal{K}} \vec{f}\,\vec{dr} + k_2 \int_{\mathcal{K}} \vec{g}\,\vec{dr}.$$
2. *Nechť křivka* $\mathcal{K}$ *je složená ze dvou křivek* $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ *tak, že koncový bod křivky* $\mathcal{K}_1$ *je počáteční bod* $\mathcal{K}_2$. *Nechť existují integrály* $\int_{\mathcal{K}_1} \vec{f}\,\vec{dr}$, $\int_{\mathcal{K}_2} \vec{f}\,\vec{dr}$, *potom existuje i integrál přes křivku* $\mathcal{K}$ *a platí*
$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f}\,\vec{dr} = \int_{\mathcal{K}_1} \vec{f}\,\vec{dr} + \int_{\mathcal{K}_2} \vec{f}\,\vec{dr}.$$
3. *Nechť* $\mathcal{K}_+$ *a* $\mathcal{K}_-$ *jsou stejné křivky s opačnou orientací a existuje* $\int_{\mathcal{K}_+} \vec{f}\,\vec{dr}$, *potom existuje i* $\int_{\mathcal{K}_-} \vec{f}\,\vec{dr}$ *a platí*
$$\int_{\mathcal{K}_+} \vec{f}\,\vec{dr} = -\int_{\mathcal{K}_-} \vec{f}\,\vec{dr}.$$

**Věta:** (Výpočet křivkového integrálu 2. druhu)
*Nechť* $\vec{r}(t) : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^m$ *je souhlasná parametrizace hladké křivky* $\mathcal{K}$ *a* $\vec{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *je spojité vektorové pole, potom platí*

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f}\,\vec{dr} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt.$$

*Nechť křivka* $\mathcal{K}$ *je po částech hladká, potom existuje dělení* $D : a = t_0, \ldots, t_n = b$ *takové, že pro všechna* $i = \{1, \ldots, n\}$ *je křivka (se souhlasnou parametrizací)* $\vec{r_i}(t) : \langle t_{i-1}, t_i\rangle \to \mathbb{R}^m$ *hladká a platí*

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{f}\,\vec{dr} = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{f}(\vec{r_i}(t)) \cdot \vec{r_i}\,'(t)\,dt.$$

**Věta:** (Vlastnosti křivkového integrálu 2. druhu)

4. *Nechť jednoduchá hladká křivka $\mathcal{K}$ je popsána dvěma souhlasnými parametrizacemi $\vec{r}_1(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ a $\vec{r}_2(\tau)$, $\tau \in \langle c, d\rangle$,*

   *tj. existují reálná čísla $t \in \langle a, b\rangle$, $\tau \in \langle c, d\rangle$ a $k > 0$ taková, že $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\tau)$ a $\vec{r}_1'(t) = k\vec{r}_2'(\tau)$,*

   *potom*

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \int\limits_a^b \vec{f}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1'(t)\, dt = \int\limits_c^d \vec{f}(\vec{r}_2(\tau)) \cdot \vec{r}_2'(\tau)\, d\tau.$$

   *Nechť jednoduchá hladká křivka $\mathcal{K}$ je popsána dvěma nesouhlasnými parametrizacemi $\vec{r}_1(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ a $\vec{r}_2(\tau)$, $\tau \in \langle c, d\rangle$,*

   *tj. existují reálná čísla $t \in \langle a, b\rangle$, $\tau \in \langle c, d\rangle$ a $k < 0$ taková, že $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\tau)$ a $\vec{r}_1'(t) = k\vec{r}_2'(\tau)$,*

   *potom*

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \int\limits_a^b \vec{f}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1'(t)\, dt = -\int\limits_c^d \vec{f}(\vec{r}_2(\tau)) \cdot \vec{r}_2'(\tau)\, d\tau.$$

**Příklad:** Vypočtěte křivkový integrál 2. druhu z vektorového pole $\vec{f}$, přes kružnici $x^2 + y^2 = 1$ orientovanou v kladném směru.

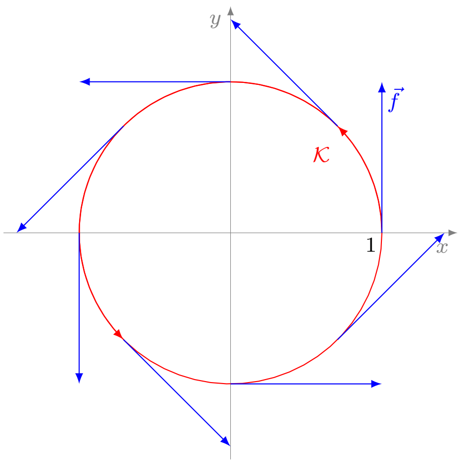
**Řešení:**

a) $\vec{f} = (-y, x)$

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

$\rightarrow$ souhlasná parametrizace.



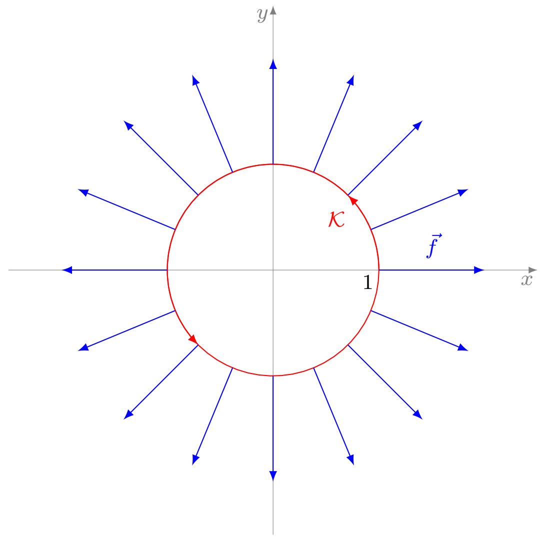

$$\oint\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \int\limits_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\ dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

b) $\vec{f} = (x, y)$

$$\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = (\cos t, -\sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$\rightarrow$ nesouhlasná parametrizace.



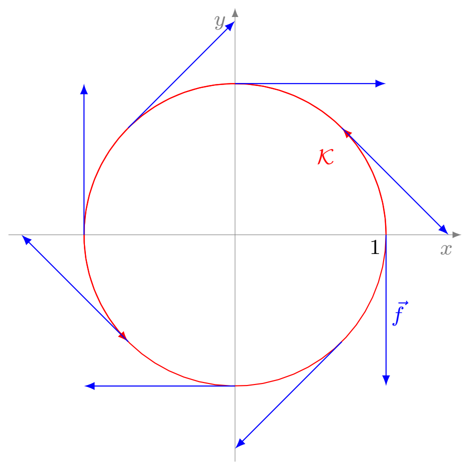

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t) \cdot (\cos t, -\sin t)\ dt = -\int_0^{2\pi} 0\, dt = 0.$$

c) $\vec{f} = (y, -x)$

$$\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\vec{r}'(t) = (\cos t, -\sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$\rightarrow$ nesouhlasná parametrizace.




$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} (\cos t, -\sin t) \cdot (\cos t, -\sin t)\ dt = \int_0^{2\pi} -1\, dt = -2\pi.$$

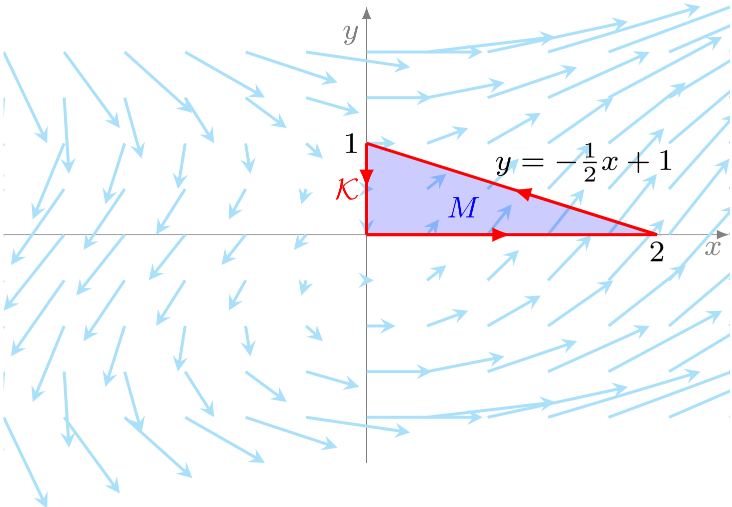
**Věta:** (Greenova věta) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina, jejíž hranici tvoří jednoduchá, uzavřená, po částech hladká, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka $\mathcal{K}$. Nechť $\vec{f}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ má spojité první parciální derivace. Potom*

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}(x, y) d\vec{r} = \iint_M \left( \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \right)\, dx dy.$$

**Příklad:** Vypočtěte $\oint\limits_{\mathcal{K}} \vec{f} d\vec{r}$, kde $\vec{f} = (x + y^2)\vec{i} + 2x\vec{j}$, přes kladně orientovaný trojúhelník s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [2, 0]$, $C = [0, 1]$.

**Řešení:**

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y.$$




$$\oint\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \oint\limits_{\mathcal{K}} (x + y^2)\, dx + 2x\, dy = \iint\limits_{M} (2 - 2y)\, dxdy = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{-\frac{x}{2}+1} 2(1 - y)\, dy\, dx =$$

$$= \int\limits_0^2 2\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{-\frac{x}{2}+1} dx = \int\limits_0^2 \left(-x + 2 - (-\frac{x}{2} + 1)^2\right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x + 2\frac{(-\frac{x}{2} + 1)^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{4}{3}.$$

**Věta:** (Nezávislost KI 2. druhu na integrační cestě)
*Nechť vektorové pole $\vec{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ je spojité na $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m = 2, 3)$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní*

- *Vektorové pole $\vec{f}$ je na $\Omega$ potenciálové.*
- *Pro každou uzavřenou po částech hladkou křivku $\mathcal{K} \subset \Omega$ platí*

$$\oint\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = 0.$$

- *Křivkový integrál 2. druhu vektorového pole $\vec{f}$ nezávisí v oblasti $\Omega$ na cestě, tj. pokud jsou $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ po částech hladké křivky popsané vektorovými funkcemi $\vec{r}_1(t) : \langle a, b\rangle \to \Omega$ a $\vec{r}_2(\tau) : \langle c, d\rangle \to \Omega$, že $\vec{r}_1(a) = \vec{r}_2(c)$, $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(d)$, potom*

$$\int\limits_{\mathcal{K}_1} \vec{f}\, d\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{K}_2} \vec{f}\, d\vec{r}.$$

*Je-li navíc funkce $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ potenciálem vektorového pole $\vec{f}$ na $\Omega$, platí*

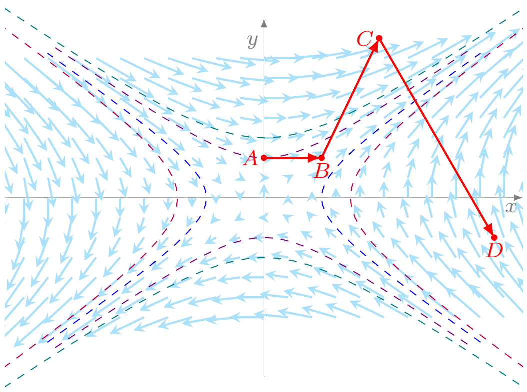
$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a)).$$

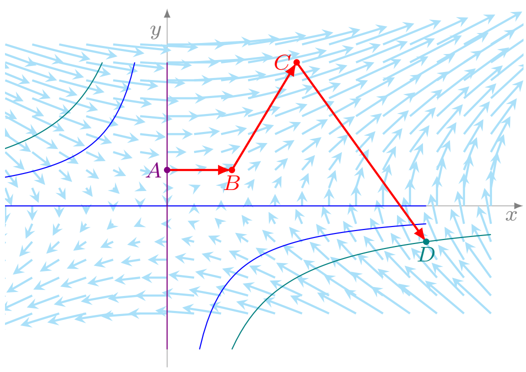
**Poznámka:**

Hodnota integrálu $\int\limits_{\mathcal{K}} \operatorname{grad} \varphi\, d\vec{r}$ nezávisí na tvaru křivky, jen na krajních bodech křivky.

**Příklad:** Vypočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f} d\vec{r}$, kde $\vec{f} = y\vec{i} + x\vec{j}$, přes lomenou čáru spojující body $A = [0, 1]$, $B = [1, 1]$, $C = [2, 4]$, $D = [4, -1]$.

**Řešení:**




$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1.$$

$\to$ pole je potenciálové.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y \;\to \varphi = xy + f_1(y)$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x \;\to x = x + \frac{\partial f_1(y)}{\partial y}$$
$$\to f_1(y) = C \to \varphi(x, y) = xy + C$$

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \varphi(D) - \varphi(A) = -4$$

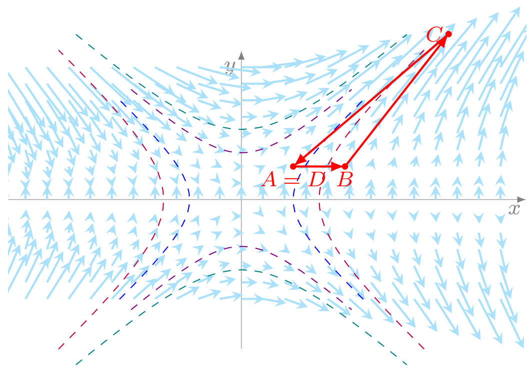
**Příklad:** Vypočtěte $\int\limits_{\mathcal{K}} y^2\,dx + 2xy\,dy$, přes lomenou čáru spojující body $A = [1,1]$, $B = [2,1]$, $C = [4,5]$, $D = [1,1]$.

**Řešení:**

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y.$$

$\rightarrow$ pole je potenciálové.

$$\oint\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\,\vec{dr} = 0.$$




## Použití křivkových integrálů 2. druhu:

Práce vektorového pole $\vec{f}$ po orientované křivce $\mathcal{K}$:

$$W = \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\,\vec{dr}.$$

Cirkulace vektorového pole $\vec{f}$ po orientované uzavřené křivce $\mathcal{K}$:

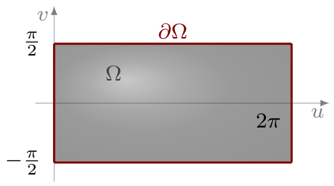
$$C = \oint\limits_{\mathcal{K}} \vec{f}\,\vec{dr}.$$

# 9. Přednáška: Plošné integrály 1. druhu

## Plochy

**Definice:** (Vektorová rovnice plochy, parametrizace plochy)
*Je-li $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a vektorová funkce je spojitá, potom funkci $\vec{r}(u,v)$ nazýváme vektorovou rovnicí plochy (parametrizací plochy, plochou) v $\mathbb{R}^3$.*

*Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast, jejíž hranice $\partial\Omega$ je tvořena křivkou konečné délky. Množina $\mathcal{S}$ se nazývá vektorovou rovnicí (parametrizací) plochy, je-li obrazem spojité vektorové funkce $\vec{r}(u,v)$ zobrazující množinu $\Omega$ na množinu $\mathcal{S} = \{\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : [u,v] \in \Omega\}$.*

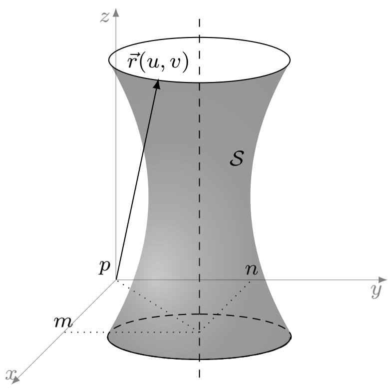



Jednodílný rotační hyperboloid:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(z-p)^2}{b^2} = 1,$$

$$\vec{r}(u,v) = \left(m + a\frac{\cos u}{\cos v}, n + a\frac{\sin u}{\cos v}, p + b\,\mathrm{tg}\, v\right),$$

$$u \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad v \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$




**Definice:**
*Je-li navíc zobrazení $\vec{r}(u,v)$ prosté na vnitřku $\Omega$, množina $\mathcal{S}$ se nazývá jednoduchá plocha.*

*Je-li navíc zobrazení $\vec{r}(u,v) \in \mathbb{C}^1$, tj. má spojité první parciální derivace, tj. složky $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ mají spojité první parciální derivace, potom se množina $\mathcal{S}$ se nazývá jednoduchá plocha třídy $\mathbb{C}^1$.*

*Jestliže $\forall [u,v] \in \Omega$ platí $\frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v} \neq \vec{0}$, pak se $\mathcal{S}$ nazývá jednoduchá hladká plocha.*

*Jestliže plochu $\mathcal{S}$ lze rozdělit na konečný počet jednoduchých hladkých ploch třídy $\mathbb{C}^1$, pak $\mathcal{S}$ nazýváme po částech hladkou plochou.*

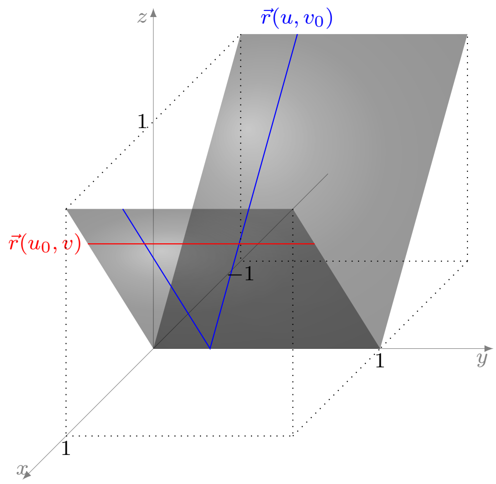
**Definice:**
*Nechť $\mathcal{S} = \{\vec{r}(u,v) : [u,v] \in \Omega\}$ je jednoduchá po částech hladká plocha. Potom křivku $\mathcal{K}_u = \{\vec{r}(u,v_0) : [u,v_0] \in \Omega, v_0 = konst.\}$ nazýváme u-křivka na ploše $\mathcal{S}$ a křivku $\mathcal{K}_v = \{\vec{r}(u_0,v) : [u_0,v] \in \Omega, u_0 = konst.\}$ nazýváme v-křivka na ploše $\mathcal{S}$.*

**Poznámka:**
Tečný vektor k u-křivce $\mathcal{K}_u$ označíme $\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u}$, tečný vektor k v-křivce $\mathcal{K}_v$ označíme $\vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v}$ a jednotkový normálový vektor $\vec{n} = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{||\vec{t}_u \times \vec{t}_v||}$.

**Definice:**
*Plochu $\mathcal{S}$ nazveme orientovatelnou, jestliže u ní rozlišujeme dvě strany, obvykle vnitřní a vnější (horní, dolní). V každém bodě plochy zvolíme jednotkový normálový vektor $\vec{n}$ tak, že směřuje stále na stejnou stranu plochy. Jestliže $\vec{n} = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{||\vec{t}_u \times \vec{t}_v||}$, pak je plocha orientovaná souhlasně s parametrizací, pokud $\vec{n} = -\frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{||\vec{t}_u \times \vec{t}_v||}$, pak je plocha orientovaná nesouhlasně s parametrizací.*

**Příklad:**

$\vec{r}(u,v) = (u, v, |u|), \quad u \in \langle -1, 1\rangle, \quad v \in \langle 0, 1\rangle$
$\vec{r}(u,v_0) = (u, v_0, |u|), \quad u \in \langle -1, 1\rangle$
$\vec{r}(u_0,v) = (u_0, v, |u_0|), \quad v \in \langle 0, 1\rangle$
$\vec{t}_u = (1,0,1), \quad u \in (0,1\rangle$
$\vec{t}_u = (1,0,-1), \quad u \in \langle -1,0)$
$\vec{t}_v = (0,1,0), \quad v \in \langle 0,1\rangle$
$\vec{n} = (-1,0,1), \quad u \in (0,1\rangle, \quad v \in \langle 0,1\rangle$
$\vec{n} = (1,0,1), \quad u \in \langle -1,0), \quad v \in \langle 0,1\rangle$

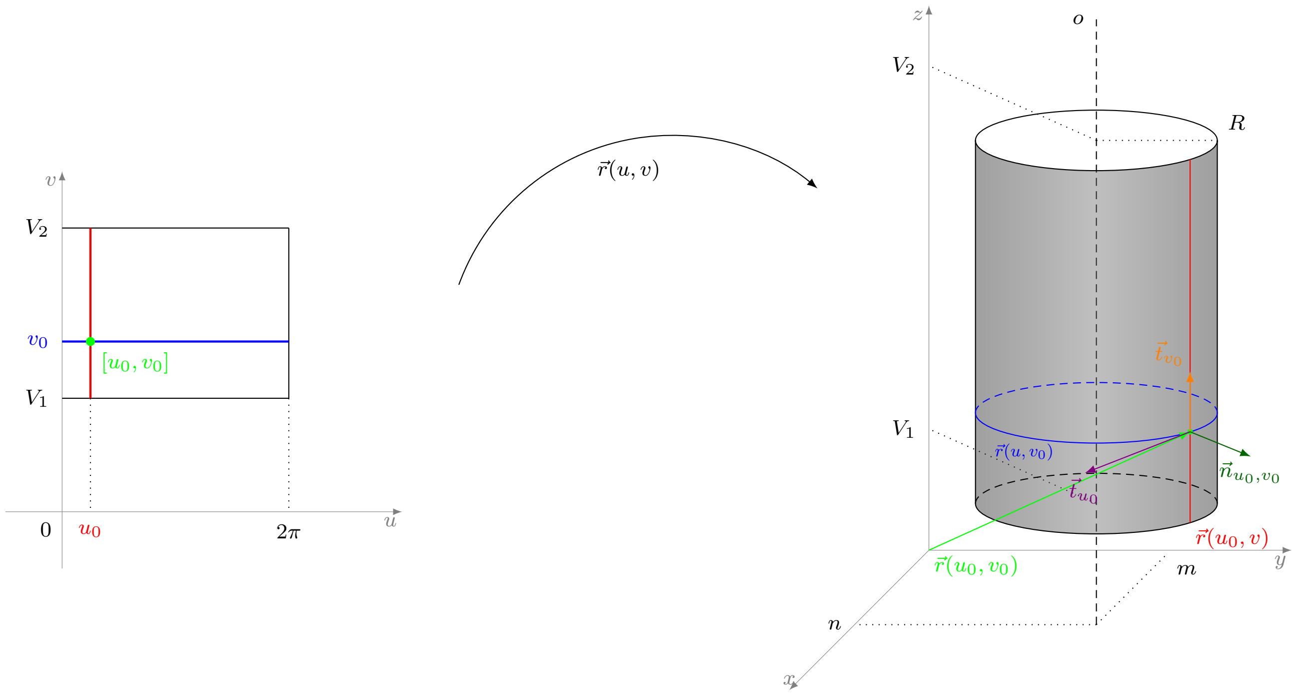



**Příklad:** Určete parametrizaci $\vec{r}(u,v)$, tečné vektory $\vec{t}_u$, $\vec{t}_v$ a normálový vektor $\vec{n}$ rotační válcové plochy s osou otáčení $o = [m, n, 0]$, poloměrem $R$ o výšce $V_2 - V_1$.

**Řešení:**

$$\vec{r}(u,v) = (m + R\cos u, n + R\sin u, v), \quad u \in \langle 0, 2\pi\rangle, \, v \in \langle V_1, V_2\rangle$$

$$\frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} = \vec{r}_u'(u,v) = \vec{t}_u = (-R\sin u, R\cos u, 0), \quad \vec{t}_{u_0} = (-R\sin u_0, R\cos u_0, 0),$$
$$\frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v} = \vec{r}_v'(u,v) = \vec{t}_v = (0,0,1), \quad \vec{t}_{v_0} = (0,0,1),$$
$$\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin u & R\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R\cos u, R\sin u, 0), \quad \vec{n}_{u_0,v_0} = (R\cos u_0, R\sin u_0, 0)$$




**Příklad:** Určete parametrizaci $\vec{r}(u,v)$, tečné vektory $\vec{t}_u$, $\vec{t}_v$ a normálový vektor $\vec{n}$ kulové plochy (sféry) se středem $S = [m, n, p]$ a poloměrem $R$.

**Řešení:**

$$\vec{r}(u,v) = (m + R\cos u \cos v, n + R\sin u \cos v, p + R\sin v), \quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ v \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$

$$\frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} = \vec{r}\,'_u(u,v) = \vec{t}_u = (-R\sin u \cos v, R\cos u \cos v, 0),$$

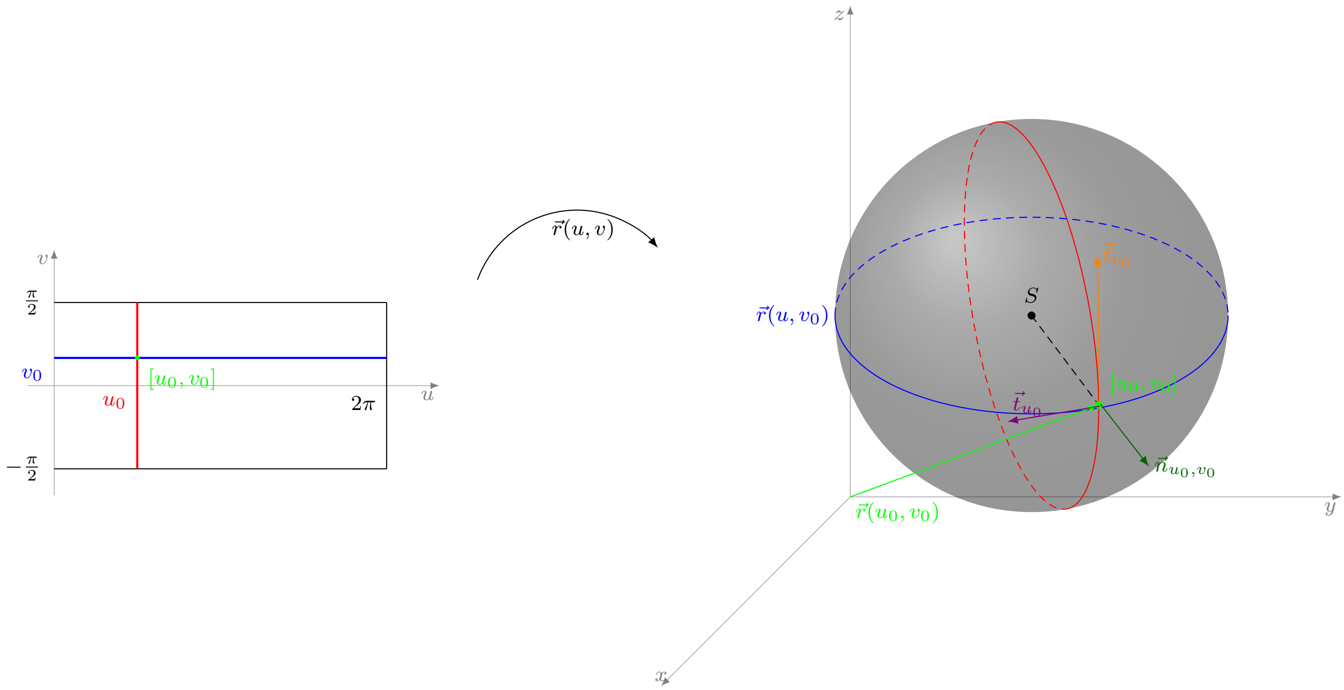
$$\vec{t}_{u_0} = (-R\sin u_0 \cos v_0, R\cos u_0 \cos v_0, 0),$$

$$\frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v} = \vec{r}\,'_v(u,v) = \vec{t}_v = (-R\cos u \sin v, -R\sin u \sin v, R\cos v),$$

$$\vec{t}_{v_0} = (-R\cos u_0 \sin v_0, -R\sin u_0 \sin v_0, R\cos v_0),$$

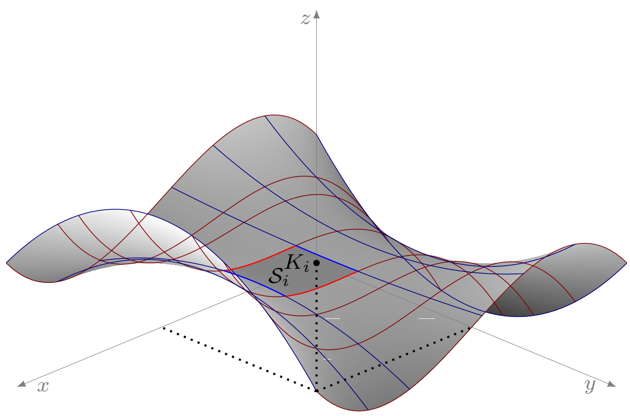
$$\begin{aligned}
\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin u \cos v & R\cos u \cos v & 0 \\ -R\cos u \sin v & -R\sin u \sin v & R\cos v \end{vmatrix} = \\
&= (R^2 \cos u \cos^2 v, R^2 \sin u \cos^2 v, R^2 \sin^2 u \sin v \cos v + R^2 \cos^2 u \sin v \cos v), \\
&= (R^2 \cos u \cos^2 v, R^2 \sin u \cos^2 v, R^2 \sin v \cos v),
\end{aligned}$$

$$\vec{n}_{u_0,v_0} = (R^2 \cos u_0 \cos^2 v_0, R^2 \sin u_0 \cos^2 v_0, R^2 \sin v_0 \cos v_0)$$




## Plošné integrály 1. druhu

- Označme $\mathcal{S}$ hladkou neorientovanou plochu.
- Definujeme dělení plochy na části $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$.
- $D_k$ značí posloupnost dělení plochy $\mathcal{S}$ takové, že $\max\limits_i |\mathcal{S}_i| \to 0$.




- Funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je definovaná a spojitá na množině $M$, která obsahuje plochu $\mathcal{S}$.
- Integrální součet pro jedno dělení: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(K_i)|\mathcal{S}_i|$, kde $K_i$ je bod ležící na ploše $\mathcal{S}_i$.

**Definice:** (Plošný integrál 1. druhu)
*Jestliže posloupnost integrálních součtů pro libovolnou volbu bodů $K_i$ a pro každou normální posloupnost $D_k$ má vlastní limitu, nazývá se* <u>*plošný integrál 1. druhu funkce $f$ po ploše $\mathcal{S}$*</u> *a značí se*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dS.$$

**Věta:** (Vlastnosti plošného integrálu 1. druhu)

1. *Nechť existují integrály $\iint\limits_{\mathcal{S}} f\,dS$, $\iint\limits_{\mathcal{S}} g\,dS$, potom existuje i integrál z funkce $k_1 f + k_2 g$, kde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ a platí*
$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (k_1 f + k_2 g)\,dS = k_1 \iint\limits_{\mathcal{S}} f\,dS + k_2 \iint\limits_{\mathcal{S}} g\,dS.$$

2. *Nechť plocha $\mathcal{S}$ je složená ze dvou ploch $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ tak, že k sobě těsně přiléhají (nepřekrývají se). Nechť existují integrály $\iint\limits_{\mathcal{S}_1} f\,dS$, $\iint\limits_{\mathcal{S}_2} f\,dS$, potom existuje i integrál přes plochu $\mathcal{S}$ a platí*
$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f\,dS = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} f\,dS + \iint\limits_{\mathcal{S}_2} f\,dS.$$

3. *Nechť $\mathcal{S}_+$ a $\mathcal{S}_-$ jsou stejné plochy s opačnou orientací a existuje $\iint\limits_{\mathcal{S}_+} f\,dS$, potom existuje i $\iint\limits_{\mathcal{S}_-} f\,dS$ a platí*
$$\iint\limits_{\mathcal{S}_+} f\,dS = \iint\limits_{\mathcal{S}_-} f\,dS.$$

**Věta:** (Výpočet plošného integrálu 1. druhu)

*Nechť $\vec{r}(u,v) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$ je parametrizace jednoduché hladké plochy $\mathcal{S}$ a funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitá, potom platí*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f\,dS = \iint\limits_{\Omega} f(\vec{r}(u,v))||\vec{r}_u{}'(u,v) \times \vec{r}_v{}'(u,v)||\,du\,dv.$$

*Nechť je plocha $\mathcal{S}$ po částech hladká a lze ji rozdělit na konečný počet hladkých ploch $\mathcal{S}_i$ (přiléhají k sobě, nepřekrývají se) s parametrizací $\vec{r}_i(u,v)$, $[u,v] \in \Omega_i$, potom*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f\,dS = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_i} f(\vec{r}_i(u,v))||(\vec{r}_i)_u'(u,v) \times (\vec{r}_i)_v'(u,v)||\,du\,dv.$$

**Věta:** (Vlastnosti plošného integrálu 1. druhu)

*4. Nechť jednoduchá, po částech hladká plocha $\mathcal{S}$ je popsáná dvěma parametrizacemi $\vec{r}_1(u,v)$, $[u,v] \in \Omega_1$ a $\vec{r}_2(\tilde{u},\tilde{v})$, $[\tilde{u},\tilde{v}] \in \Omega_2$ potom*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f\, dS = \iint\limits_{\Omega_1} f(\vec{r}_1(u,v))||(\vec{r}_1)'_u(u,v) \times (\vec{r}_1)'_v(u,v)||\, du\, dv =$$
$$= \iint\limits_{\Omega_2} f(\vec{r}_2(\tilde{u},\tilde{v}))||(\vec{r}_1)'_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times (\vec{r}_1)'_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v})||\, d\tilde{u} d\tilde{v},$$

*tj. plošný integrál 1. druhu je nezávislý na zvolené parametrizaci.*

**Poznámka:**

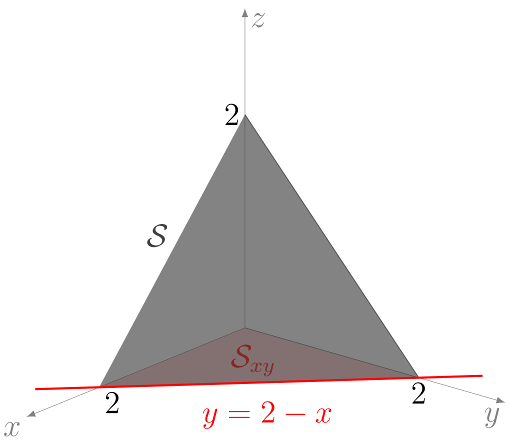
V případě, že plochu $\mathcal{S}$ lze popsat funkcí $z = g(x,y)$, potom platí

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f\, dS = \iint\limits_{\mathcal{S}_{xy}} f(x,y,g(x,y))\sqrt{(g'_x)^2 + (g'_y)^2 + 1}\, dxdy,$$

kde $\mathcal{S}_{xy}$ je průmět plochy $\mathcal{S}$ do roviny $xy$.

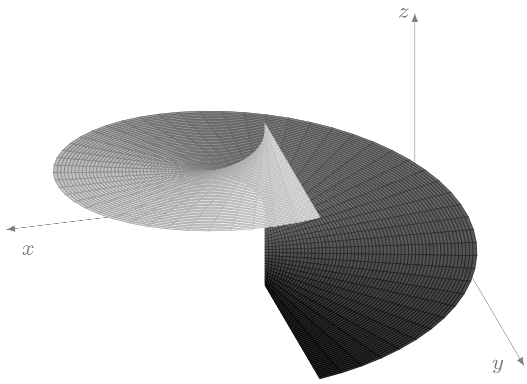
**Příklad:** Vypočtěte $\iint\limits_{\mathcal{S}} xy\, dS$, kde $\mathcal{S}$ je část roviny $x + y + z = 2$ v prvním oktantu.

$$g(x,y) = z = 2 - x - y$$
$$g'_x(x,y) = -1, \quad g'_y(x,y) = -1$$
$$||\vec{n}|| = \sqrt{(g'_x)^2 + (g'_y)^2 + 1} = \sqrt{3}$$




$$\iint\limits_{\mathcal{S}} xy\, dS = \sqrt{3}\iint\limits_{\mathcal{S}_{xy}} xy\, dxdy = \sqrt{3}\int_0^2\int_0^{2-x} xy\, dy\, dx = \sqrt{3}\int_0^2 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 x(2-x)^2\, dx =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 (4x - 4x^2 + x^3)\, dx = \sqrt{3}\left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{8}\right]_0^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**Příklad:** Vypočtěte $\iint\limits_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2+1}\,dS$, kde $\mathcal{S}$ je helicoid.




$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v), \quad u \in \langle 0,1\rangle, \quad v \in \langle 0, 2\pi\rangle$
$\vec{r}'_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 0)$
$\vec{r}'_v(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, 1)$

$$\vec{n} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u),$$

$||\vec{n}|| = \sqrt{u^2+1}$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \sqrt{x^2+y^2+1}\,dS = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v + 1}\sqrt{u^2+1}\,dudv = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (u^2+1)\,du\,dv =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{u^3}{3} + u\right]_0^1 dv = \frac{4}{3}\int\limits_0^{2\pi} dv = \frac{8\pi}{3}.$$

## Použití plošných integrálů 1. druhu:

Obsah plochy $\mathcal{S}$:

$$S = \iint\limits_{\mathcal{S}} 1\,dS.$$

Hmotnost plochy, $\rho(x,y,z)$ je rozložení hustoty

$$m = \iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)\,dS.$$

Souřadnice těžiště plochy $T = [x_0, y_0, z_0]$:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_{\mathcal{S}} x\rho\,dS,$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_{\mathcal{S}} y\rho\,dS,$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_{\mathcal{S}} z\rho\,dS.$$

Momenty setrvačnosti vzledem k osám $x$, $y$ a $z$:

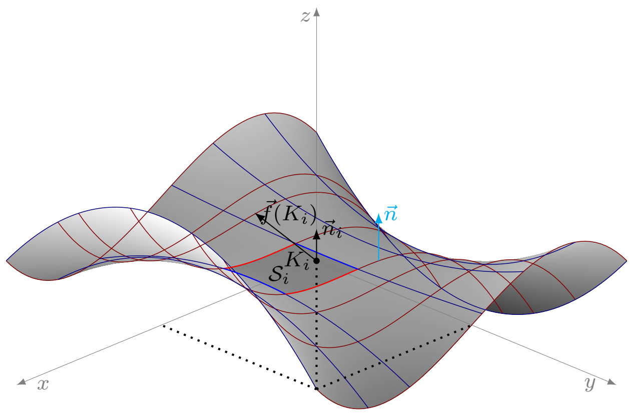
$$I_x = \iint\limits_{\mathcal{S}} (y^2+z^2)\rho\,dS,$$

$$I_y = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2+z^2)\rho\,dS,$$

$$I_z = \iint\limits_{\mathcal{S}} (x^2+y^2)\rho\,dS.$$

# 10. Přednáška: Plošné integrály 2. druhu

- Označme $\mathcal{S}$ hladkou orientovanou plochu (je známa orientace jednotkového normálového vektoru).
- Definujeme dělení plochy na části $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$.
- $D_k$ značí posloupnost dělení plochy $\mathcal{S}$ takové, že $\max_i |\mathcal{S}_i| \to 0$.




- Funkce $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je vektorové pole definované a spojité na množině $M$, která obsahuje plochu $\mathcal{S}$.
- Integrální součet pro jedno dělení: $\sum_{i=1}^{n} \vec{f}(K_i) \cdot \vec{n}_i \, \mathcal{S}_i$, kde $K_i$ je bod ležící na ploše $\mathcal{S}_i$ a $\vec{n}_i$ je jednotkový normálový vektor v bodě $K_i$.

**Definice:** (Plošný integrál 2. druhu)

*Jestliže posloupnost integrálních součtů pro libovolnou volbu bodů $K_i$ a pro každou normální posloupnost $D_k$ má vlastní limitu, nazývá se plošný integrál 2. druhu funkce $\vec{f}$ po orientované ploše $\mathcal{S}$ (orientace dána jednotkovým normálovým vektorem $\vec{n}$) a značí se*

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x,y,z)\, \overrightarrow{dS} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x,y,z) \cdot \vec{n} \, dS.$$

**Poznámka:** (Jiný zápis plošného integrálu 2. druhu)

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x,y,z)\, d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x,y,z) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\mathcal{S}} f_1 \, dydz + f_2 \, dxdz + f_3 \, dxdy.$$

Je-li plocha uzavřená (například sféra), lze plošný integrál 2. druhu značit následovně:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{f}(x,y,z) \cdot \vec{n} \, dS.$$

**Věta:** (Vlastnosti plošného integrálu 2. druhu)

1. *Nechť existují integrály* $\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS$, $\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS$, *potom existuje i integrál z funkce* $k_1\vec{f} + k_2\vec{g}$, *kde* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ *a platí*
$$\iint\limits_{\mathcal{S}} (k_1\vec{f} + k_2\vec{g}) \cdot \vec{n}\, dS = k_1 \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS + k_2 \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{g} \cdot \vec{n}\, dS.$$

2. *Nechť plocha* $\mathcal{S}$ *je složená ze dvou ploch* $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ *tak, že k sobě těsně přiléhají (nepřekrývají se) a jsou orientované na stejnou stranu. Nechť existují integrály* $\iint\limits_{\mathcal{S}_1} \vec{f} \cdot \vec{n}_1\, dS$, $\iint\limits_{\mathcal{S}_2} \vec{f} \cdot \vec{n}_2\, dS$, *potom existuje i integrál přes plochu* $\mathcal{S}$ *a platí*
$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} \vec{f} \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint\limits_{\mathcal{S}_2} \vec{f} \cdot \vec{n}_2\, dS.$$

3. *Nechť* $\mathcal{S}_+$ *a* $\mathcal{S}_-$ *jsou stejné plochy s opačnou orientací , tj.* $\vec{n}_+ = -\vec{n}_-$, *a existuje* $\iint\limits_{\mathcal{S}_+} \vec{f} \cdot \vec{n}_+\, dS$, *potom existuje i* $\iint\limits_{\mathcal{S}_-} \vec{f} \cdot \vec{n}_-\, dS$ *a platí*
$$\iint\limits_{\mathcal{S}_+} \vec{f} \cdot \vec{n}_+\, dS = - \iint\limits_{\mathcal{S}_-} \vec{f} \cdot \vec{n}_-\, dS.$$

**Věta:** (Výpočet plošného integrálu 2. druhu)
*Nechť* $\vec{r}(u,v) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$ *je souhlasná parametrizace jednoduché hladké plochy* $\mathcal{S}$ *a funkce* $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *je spojitá, potom platí*
$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_{\Omega} \vec{f}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}\,'_u(u,v) \times \vec{r}\,'_v(u,v))\, dudv.$$

*Nechť je plocha* $\mathcal{S}$ *po částech hladká a lze ji rozdělit na konečný počet hladkých ploch* $\mathcal{S}_i$*(přiléhají k sobě, nepřekrývají se) se souhlasnou parametrizací* $\vec{r}_i(u,v)$, $[u,v] \in \Omega_i$, *potom*
$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_i} \vec{f}(\vec{r}_i(u,v)) \cdot ((\vec{r}_i)'_u(u,v) \times (\vec{r}_i)'_v(u,v))\, dudv.$$

**Věta:** (Vlastnosti plošného integrálu 2. druhu)

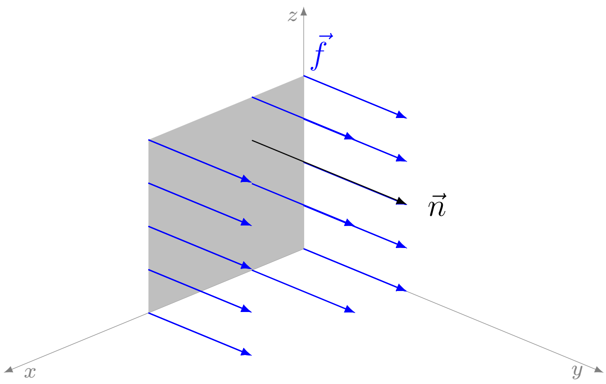
4. *Nechť jednoduchá hladká plocha* $\mathcal{S}$ *je popsána dvěma souhlasnými parametrizacemi* $\vec{r}_1(u,v)$, $[u,v] \in \Omega_1$ *a* $\vec{r}_2(\tilde{u},\tilde{v})$, $[\tilde{u},\tilde{v}] \in \Omega_2$, *tj.* $(\vec{r}_1)'_u(u,v) \times (\vec{r}_1)'_v(u,v)$ *a* $(\vec{r}_2)'_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times (\vec{r}_2)'_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v})$ *míří na stejnou stranu, potom*
$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f\, dS = \iint\limits_{\Omega_1} f(\vec{r}_1(u,v)) \cdot ((\vec{r}_1)'_u(u,v) \times (\vec{r}_1)'_v(u,v))\, dudv =$$
$$= \iint\limits_{\Omega_2} f(\vec{r}_2(\tilde{u},\tilde{v})) \cdot ((\vec{r}_2)'_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times (\vec{r}_2)'_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}))\, d\tilde{u}d\tilde{v}.$$

*Nechť jednoduchá hladká plocha $\mathcal{S}$ je popsána dvěma nesouhlasnými parametrizacemi $\vec{r}_1(u,v)$, $[u,v] \in \Omega_1$ a $\vec{r}_2(\tilde{u},\tilde{v})$, $[\tilde{u},\tilde{v}] \in \Omega_2$, tj. $(\vec{r}_1)'_u(u,v) \times (\vec{r}_1)'_v(u,v)$ a $(\vec{r}_2)'_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times (\vec{r}_2)'_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v})$ míří na opačnou stranu, potom*

$$\iint_{\mathcal{S}} f\,dS = \iint_{\Omega_1} f(\vec{r}_1(u,v)) \cdot ((\vec{r}_1)'_u(u,v) \times (\vec{r}_1)'_v(u,v))\,dudv =$$
$$= -\iint_{\Omega_2} f(\vec{r}_2(\tilde{u},\tilde{v})) \cdot ((\vec{r}_2)'_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times (\vec{r}_2)'_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}))\,d\tilde{u}d\tilde{v}.$$

**Příklad:** Vypočtěte $\iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}\,dS$, kde $\vec{f}(x,y,z) = (0,1,0)$ a plocha $\mathcal{S} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3; x \in \langle 0,1\rangle, y = 0, z \in \langle 0,1\rangle\}$ orientovaná ve kladném směru osy $y$.

$$\vec{n} = (0,1,0)$$
$$\vec{f} \cdot \vec{n} = (0,1,0) \cdot (0,1,0) = 1$$
$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}\,dS = \iint_{\mathcal{S}} 1\,dS = \iint_{\mathcal{S}_{xz}} 1\,dx\,dz = 1.$$




Parametrizace roviny: $\vec{r}(u,v) = A + \vec{s}_1 u + \vec{s}_2 v$

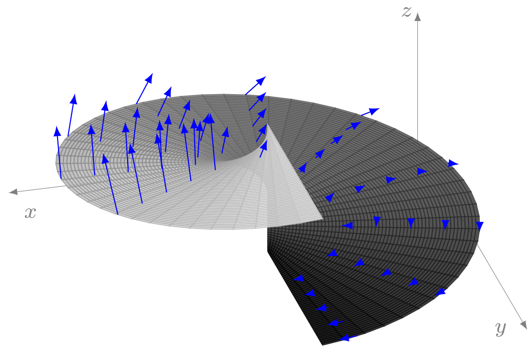
$$\left.\begin{array}{l} A = [0,0,0] \\ \vec{s}_1 = (1,0,0) \\ \vec{s}_2 = (0,0,1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{r}(u,v) = (u,0,v),\ u \in \langle 0,1\rangle,\ v \in \langle 0,1\rangle \\ \vec{r}'_u(u,v) = (1,0,0) \\ \vec{r}'_v(u,v) = (0,0,1) \end{array}$$

$$\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,0) \quad \rightarrow \quad \text{nesouhlasná orientace}$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}\,dS = -\iint_{\Omega} (0,1,0)(0,-1,0)\,du\,dv = \int_0^1 \int_0^1 1\,du\,dv = 1$$

**Příklad:** Vypočtěte $\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{f}\, d\vec{S}$, kde $\vec{f}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$ a $\mathcal{S}$ je helicoid orientovaný nahoru.

$$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v), \quad u \in \langle 0,1\rangle, \quad v \in \langle 0, 2\pi\rangle$$
$$\vec{r}_u'(u,v) = (\cos v, \sin v, 0)$$
$$\vec{r}_v'(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, 1)$$
$$\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u),$$




$\to$ souhlasná parametrizace.

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{f}\, d\vec{S} = \iint\limits_{\Omega} (u\sin v, -u\cos v, v^2)(\sin v, -\cos v, u)\, du\, dv = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (u + uv^2)\, du\, dv =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{u^2}{2} + \frac{u^2}{2}v^2\right]_0^1 dv = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1+v^2)\, dv = \frac{1}{2}\left[v + \frac{v^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \pi + \frac{4}{3}\pi^3.$$

## Použití plošných integrálů 2. druhu:

Tok vektorového pole $\vec{f}(x,y,z)$ plochou $\mathcal{S}$:

$$T = \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \vec{n}\, dS.$$

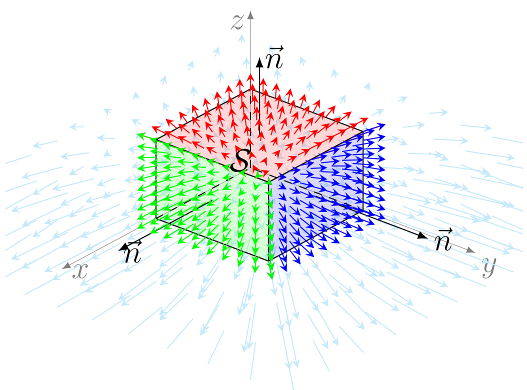
# 11. Přednáška: Integrální věty

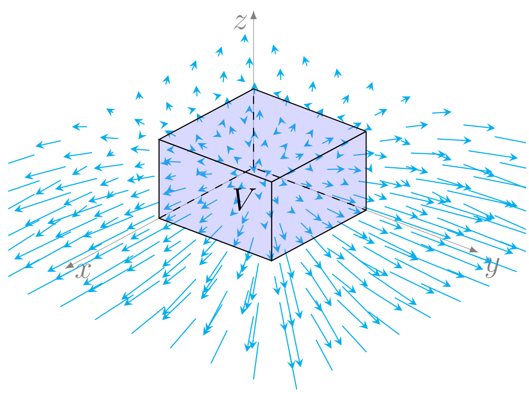
**Věta:** (Gaussova, Gaussova-Ostrogradského)
*Nechť $\mathcal{S}$ je po částech hladká, uzavřená plocha, orientovaná vně (vnější normála je kladná orientace). Nechť $V$ je množina bodů skládající se ze všech bodů plochy $\mathcal{S}$ a jejích vnitřních bodů. Nechť vektorová funkce $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a $div\,\vec{f}$ jsou na $V$ spojité funkce. Potom platí*

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V div\,\vec{f}\,dxdydz.$$

**Příklad:** Pomocí Gaussovy věty vypočtěte tok vektorového pole $\vec{f}=(x^2,y^2,z^2)$ vně orientovaným povrchem krychle $\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$.

**Řešení:**




$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V (2x+2y+2z)\,dxdydz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+2z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left[x^2+2xy+2xz\right]_0^1 dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 (1+2y+2z)\,dy\,dz = \int_0^1 [y+y^2+2yz]_0^1\,dz =$$

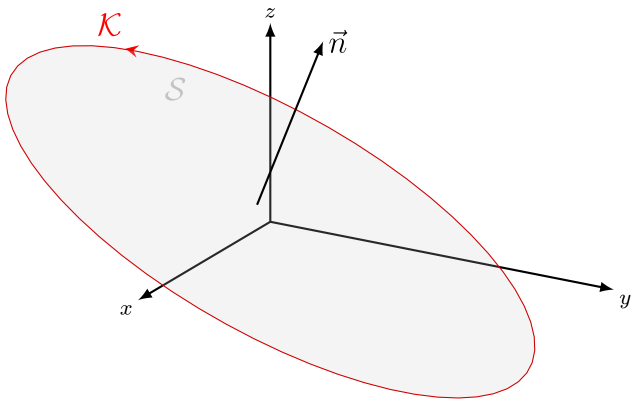
$$= \int_0^1 (2+2z)\,dz = [2z+z^2]_0^1 = 3.$$

**Věta:** (Stokesova)
*Nechť $\mathcal{S}$ je orientovaná (jednotkovým normálovým vektorem) jednoduchá po částech hladká plocha, její okraj je orientovaná jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka $\mathcal{K}$ souhlasně orientovaná s orientací $\mathcal{S}$ (viz. pravidlo pravé ruky). Nechť vektorové pole $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ má spojité 1. parciální derivace na množině $M$, která obsahuje plochu $\mathcal{S}$. Potom platí*

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}\,d\vec{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\,dS,$$

*tj. cirkulace přes okraj plochy $\mathcal{S}$ je tok rotace pole $\vec{f}$ plochou $\mathcal{S}$.*

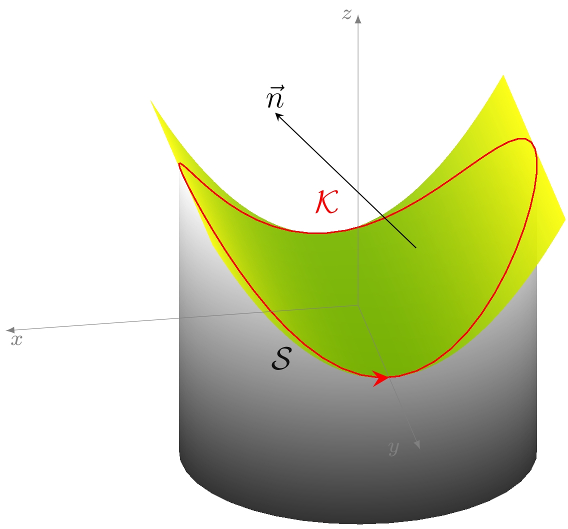
**Poznámka:** (Pravidlo pravé ruky)




**Příklad:** Vypočtěte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ po křivkce $\mathcal{K}$, která je průsečíkem válcové plochy $x^2 + y^2 = 1$ a parabolické plochy $z = x^2$ s orientací nahoru.

**Řešení:**

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & xz & xy \end{vmatrix}$$
$$= (x - x, 2y - y, z - 2z)$$
$$= (0, y, -z).$$




Parametrizace: $\vec{r} = (u, v, u^2)$
$\Omega = \{[u, v] \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$.

$$\vec{r}_u' = (1, 0, 2u),$$
$$\vec{r}_v' = (0, 1, 0),$$

$$\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2u, 0, 1) \quad \Rightarrow \quad \text{souhlasná parametrizace}$$

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{f}\,d\vec{r} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n}\,dS = \iint_{\Omega} (0, v, -u^2) \cdot (-2u, 0, 1)\,dudv = \iint_{\Omega} -u^2\,dudv = \dots$$

Polární souřadnice: $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$, $|J| = r$, $r = \langle 0, 1\rangle$, $\varphi = \langle 0, 2\pi\rangle$

$$\ldots = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 -r^2\cos^2\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi = -\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\cos^2\varphi\right]_0^1 d\varphi = -\frac{1}{4}\int \underbrace{\cos^2\varphi}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{8}\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi}{4}.$$