3. Přednáška: Metody sdružených směrů:

Odstranění nevýhod metody největšího spádu × Newtonovy metody.
Strategie volby "vhodných" směrů:

Definice (sdružené směry): *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická, pozitivně definitní matice. Nenulové vektory x, y nazveme sdružené vzhledem k A (A-ortogonální), pokud platí $y^T Ax = 0$.*

Lemma: *Je-li A symetrická pozitivně definitní a jsou-li nenulové vektory $p_0, p_1, \ldots, p_k$ A-ortogonální, pak jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz:
Pokud jsou směry lineárně závislé, potom $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i p_i = 0$ a alespoň jedno α_i musí být nenulové.

$$\Rightarrow \quad \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_j p_j + \cdots + \alpha_k p_k = 0 \quad /p_j^T A \quad \forall j$$

$$\alpha_0 p_j^T A p_0 + \alpha_1 p_j^T A p_1 + \cdots + \alpha_j p_j^T A p_j + \cdots + \alpha_k p_j^T A p_k = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j p_j^T A p_j = 0 \quad \forall j$$

$$A \text{ je symetrická pozitivně definitní, tj. } p_j^T A p_j > 0, \forall j.$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j = 0, \forall j \ \rightarrow \text{spor}$$

- Mohu minimalizovat v jednotlivých směrech.
- Nechť $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ je n nenulových A-ortogonálních vektorů, potom

  $$x^* = \alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_{n-1} p_{n-1},$$

  n A-ortogonálních vektorů $\rightarrow$ n lineárně nezávislých vektorů $\rightarrow$ báze prostoru $\mathbb{R}^n$ $\rightarrow$ každý prvek prostoru lze napsat jako lineární kombinaci báze

  $$\alpha_i = \frac{p_i^T A x^*}{p_i^T A p_i} = \frac{p_i^T b}{p_i^T A p_i},$$

  $$x^* = \alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_{n-1} p_{n-1} \ /p_0^T A \,\text{zleva}$$

  $$p_0^T A x^* = \alpha_0 p_0^T A p_0 + \alpha_0 p_0^T A p_0 + \cdots + \alpha_{n-1} p_0^T A p_{n-1}$$

  $$\alpha_0 = \frac{p_0^T A x^*}{p_0^T A p_0} = \frac{p_0^T b}{p_0^T A p_0}$$

  $$\vdots$$

$$\alpha_i = \frac{p_i^T b}{p_i^T A p_i}$$

$$x^* = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{p_i^T b}{p_i^T A p_i} \right) p_i.$$

Metody sdružených směrů:

Úloha:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b,$$

kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická pozitivně definitní matice.

Úloha: $Ax = b$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická pozitivně definitní matice.

Věta: *Nechť $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ je n nenulových A-ortogonálních vektorů. Pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^n$, posloupnost $\{x_k\}$, definovanou*

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

s volbou

$$\alpha_k = -\frac{g_k^T p_k}{p_k^T A p_k},$$

kde

$$g_k = A x_k - b$$

konverguje k jednoznačnému řešení x^*. Řešení nalezne po nejvýše n krocích, tj. $x_n = x^*$.

Důkaz:

- $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ je n A-ortogonálních vektorů, tj. jsou lineárně nezávislé a tedy tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$. Tedy existuje $\tilde{\alpha_i}$ tak, že platí

$$x^* - x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\alpha_i} p_i$$

$$p_k^T A(x^* - x_0) = \tilde{\alpha_0} p_k^T A p_0 + \tilde{\alpha_1} p_k^T A p_1 + \cdots + \tilde{\alpha_k} p_k^T A p_k + \cdots + \tilde{\alpha_{n-1}} p_k^T A p_{n-1}$$

$$\tilde{\alpha_k} = \frac{p_k^T A (x^* - x_0)}{p_k^T A p_k}$$

- Metoda splňující předpoklady věty generuje následující posloupnost:

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_{k-1} p_{k-1} = x_{k-2} + \alpha_{k-2} p_{k-2} + \alpha_{k-1} p_{k-1} = \cdots = x_0 + \alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_{k-1} p_{k-1}$$

$$x_k - x_0 = \alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_{k-1} p_{k-1} \,/ p_k^T A \,\text{zleva}$$

$$p_k^T A(x_k - x_0) = \alpha_0 p_k^T A p_0 + \cdots + \alpha_{k-1} p_k^T A p_{k-1} = 0 \,\rightarrow\, p_k^T A x_k = p_k^T A x_0$$

$$\Rightarrow p_k^T A(x^* - x_0) = p_k^T A(x^* - x_k) = p_k^T (b - A x_k) = -p_k^T g_k$$

- Pro koeficienty α_k platí:

$$\Rightarrow \alpha_k = -\frac{p_k^T g_k}{p_k^T A p_k} = \frac{p_k^T A(x^* - x_0)}{p_k^T A p_k} = \tilde{\alpha}_k$$

- Metoda spočítá rozklad:

$$x_n - x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i p_i = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\alpha}_i p_i = x^* - x_0 \,\rightarrow x_n = x^*$$

Priklady5.m

1. Úloha pro diagonální matici A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}[x, y] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + 2y^2$$

   Minimalizujeme ve směru souřadných os, tj. $d = e$, najdeme odpovídající složku minima a po n-krocích získáme přesné řešení.

2. Úloha pro symetrickou pozitivně definitní matici A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}[x, y] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + xy + 2y^2$$

   Minimalizace ve směru os nebude fungovat.

Myšlenka: Převést úlohu se symetrickou pozitivně definitní maticí A na diagonální matici.

$$\hat{A} = S^T A S, \quad S = [p_0 | p_1 | \ldots | p_{n-1}]$$

S je množina A-ortogonálních vektorů $\rightarrow$ lineárně nezávislé vektory $\rightarrow$ báze, regulární matice $\rightarrow$ $\hat{A}$ bude diagonální matice.

Označíme $S\hat{x} = x$, tj. $\hat{x}$ souřadnice vektoru x v nové bázi.
Dále označíme $\hat{b} = S^T b$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x$$

$$\Rightarrow f(S\hat{x}) = \frac{1}{2}(S\hat{x})^T A (S\hat{x}) - b^T (S\hat{x}) = \frac{1}{2}\hat{x}^T S^T A S \hat{x} - (S^T b)^T \hat{x}$$

$$\hat{f}(\hat{x}) = \frac{1}{2}\hat{x}^T \hat{A} \hat{x} - \hat{b}^T \hat{x}$$

Tj. mohu hledat minimum n po sobě jdoucích minimalizací ve směrech e_i, které odpovídají minimalizaci ve směrech p_i v původní úloze, $p_i = Se_i$.

Věta: *Nechť $p_0, \ldots, p_{n-1}$ je n nenulových A-ortogonálních vektorů. Pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}^n$, posloupnost $\{x_k\}$, definovanou*

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

s volbou

$$\alpha_k = -\frac{g_k^T p_k}{p_k^T A p_k},$$

kde

$$g_k = Ax_k - b$$

minimalizuje $f(x)$ přes lineární varietu $x_0 + \mathcal{S}_k$, kde

$$\mathcal{S}_k \equiv span\{p_0, \ldots, p_{k-1}\},$$

tj.

$$f(x_k) = \min_{x \in x_0 + \mathcal{S}_k} f(x).$$

Důkaz:

Minimum $f(x)$ a $||x^* - x||_A^2$ je ve stejném bodě, tj. x_k minimalizuje $f(x)$ přes lineární varietu $x_0 + S_k \Leftrightarrow x_k$ minimalizuje $||x^* - x||_A^2$ přes lineární varietu $x_0 + S_k$.

$||x^* - x_k||_A$ je minimální $\Leftrightarrow x^* - x_k \perp_A S_k \Leftrightarrow A(x^* - x_k) \perp S_k \Leftrightarrow g_k \perp S_k \rightarrow$ stačí dokázat, že příslušné gradienty jsou kolmé k S_k (indukcí).

1. k = 1:

$$g_1 = Ax_1 - b$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0$$

$$S_1 = \text{span}\{p_0\}$$

$$g_1^T p_0 = (A(x_0 + \alpha_0 p_0) - b)^T p_0 = (Ax_0 + \alpha_0 A p_0 - b)^T p_0 = x_0^T A^T p_0 + \alpha_0 p_0^T A p_0 - b^T p_0 =$$

$$= (Ax_0 - b)^T p_0 - \frac{g_0^T p_0}{p_0^T A p_0} p_0^T A p_0 = 0$$

$$\Rightarrow g_1 \perp S_1$$

2. Předpokladáme, že platí $g_k \perp S_k$ a dokazujeme platnost $g_{k+1} \perp S_{k+1}$.

$$g_{k+1} = Ax_{k+1} - b = A(x_k + \alpha_k p_k) - b = Ax_k - b + \alpha_k A p_k = g_k + \alpha_k A p_k$$

$$S_k = \text{span}\{p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}\}, \quad S_{k+1} = \text{span}\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$$

$$g_{k+1} = g_k + \alpha_k A p_k \,/\, p_i^T \quad i < k \quad \rightarrow \quad g_{k+1} \perp S_k\,?$$

$$p_i^T g_{k+1} = p_i^T g_k + \alpha_k p_i^T A p_k = 0 \rightarrow \quad g_{k+1} \perp S_k\,!$$

$$g_{k+1} = g_k + \alpha_k A p_k \,/\, p_k^T \quad \rightarrow \quad g_{k+1} \perp S_{k+1}\,?$$

$$p_k^T g_{k+1} = p_k^T g_k + \alpha_k p_k^T A p_k = p_k^T g_k - \frac{g_k^T p_k}{p_k^T A p_k} p_k^T A p_k = 0 \rightarrow \quad g_{k+1} \perp S_{k+1}\,!$$

Metoda sdružených gradientů:

- Kontrétní volba směrových vektorů:
- krok k:
  - $p_0, \ldots, p_k$ jsou A-ortogonální,
  - $x_0, \ldots, x_k$,
  - gradienty (rezidua) $g_0, \ldots, g_k$,
- krok $k+1$:
  - $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $\alpha_k = -\frac{g_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$,
  - $g_{k+1} = g_k + \alpha_k A p_k$,
  - jak sestrojit p_{k+1}? Použijeme $-g_{k+1}$, tj. směr největšího spádu, a jeho A-ortogonální projekci na S_k, tj.

    $$p_{k+1} = -g_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} c_j p_j,$$

    kde c_j určíme tak, aby vektor p_{k+1} byl A-ortogonální ke všem předchozím, tj.

    $$c_j = \frac{g_{k+1}^T A p_j}{p_j^T A p_j}, \quad j = 0, \ldots, k.$$

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces:

$g_0, \dots, g_n$ jsou lineárně nezávislé
hledám $p_0, \dots, p_n$ tak, aby byly A-ortogonální

$$p_0 = -g_0$$
$$p_{k+1} = -g_{k+1} + c_0 p_0 + \dots + c_k p_k \quad /p_0^T A \quad /p_1^T A \quad \dots$$
$$p_0^T A p_{k+1} = -p_0^T A g_{k+1} + c_0 p_0^T A p_0 + \dots + c_k p_0^T A p_k$$
$$c_0 = \frac{p_0^T A g_{k+1}}{p_0^T A p_0}, \quad c_1 = \frac{p_1^T A g_{k+1}}{p_1^T A p_1}, \quad \dots \quad c_k = \frac{p_k^T A g_{k+1}}{p_k^T A p_k}$$

Algoritmus (základní):

- Dáno A, b, x_0,
- $g_0 = Ax_0 - b$, $p_0 = -g_0$,
- Pro $k = 0, \dots, n$:

$$\alpha_k = -\frac{g_k^T p_k}{p_k^T A p_k} = \frac{g_k^T g_k}{p_k^T A p_k},$$
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$
$$g_{k+1} = g_k + \alpha_k A p_k,$$
$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k} = \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{g_k^T g_k},$$
$$p_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k p_k.$$

Poznámky:

- Probíhá minimalizace v jednotlivých směrech a zároveň A-ortogonalizace dalšího směru vůči všem předchozím.
- Pokud nejsme v řešení, platí $g_{k+1} \neq 0$, dále platí $g_{k+1} \perp S_{k+1}$ a tedy vektory $g_{k+1}, p_0, p_1, \dots, p_k$ jsou lineárně nezávislé $\Rightarrow p_{k+1} \neq 0 \Rightarrow$ lze pokračovat v algoritmu.
- Díky volbě p_k a g_k platí, že g_k je lineární kombinací $p_0, \dots, p_k$ a tedy $g_k \in S_{k+1}$
  Protože $g_{k+1} \perp S_{k+1}$ potom je g_{k+1} kolmý na všechny $g_0, \dots, g_k$, tj. gradienty jsou vzájemně ortogonální.
- $g_{j+1} = g_j + \alpha_j A p_j$, $g_{j+1} \in S_{j+2}$, $g_j \in S_{j+1} \subseteq S_{j+2} \Rightarrow A p_j \in S_{j+2} \Rightarrow$ platí, že $c_j = \frac{g_{k+1}^T A p_j}{p_j^T A p_j} = 0$ pro $j < k$ tj. $c_k = \beta_k = \frac{g_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k} \neq 0$.
- $g_k^T p_k = g_k^T(-g_k + \beta_{k-1} p_{k-1}) = -||g_k||^2 < 0 \rightarrow p_k$ je spádový směr.

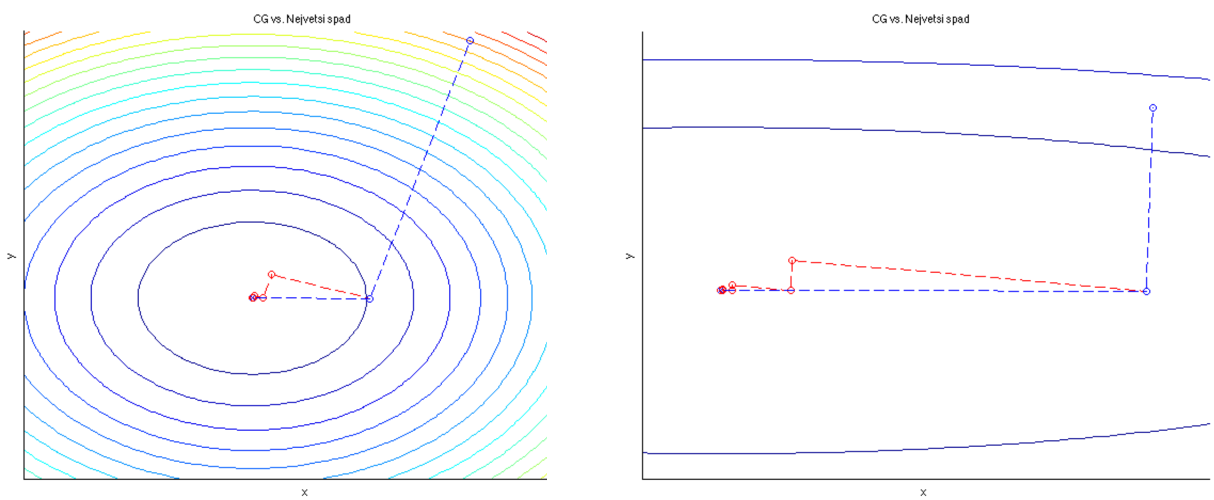
- $$\alpha_k = -\frac{g_k^T p_k}{p_k^T A p_k} = -\frac{g_k^T(-g_k + \beta_{k-1}p_{k-1})}{p_k^T A p_k} = \frac{g_k^T g_k}{p_k^T A p_k}, \qquad g_k \perp S_k$$

- $$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k} = \frac{g_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}\frac{g_k^T g_k}{g_k^T g_k} = \frac{g_k^T g_k}{p_k^T A p_k}\frac{g_{k+1}^T A p_k}{g_k^T g_k} = \frac{\alpha_k}{\alpha_k}\frac{g_{k+1}^T(g_{k+1} - g_k)}{g_k^T g_k} = \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{g_k^T g_k}$$

$$g_{k+1} = g_k + \alpha_k A p_k \to A p_k = \frac{g_{k+1} - g_k}{\alpha_k}$$

$$g_{k+1}^T g_k = 0$$

Priklady5_CG.m



Konvergence:

- Konvergence pro kvadratickou funkci $f(x)$ v n krocích (v exaktní aritmetice).

$$\begin{aligned}
p_0 &= -g_0,\\
p_1 &= -g_1 + c_0 p_0 = -g_1 - c_0 g_0,\\
p_2 &= -g_2 + c_1 p_1 = -g_2 - c_1(g_1 + c_0 g_0),\\
&\dots\\
p_{k-1} &= -g_{k-1} + c_{k-1}p_{k-1} = -g_{k-1} - c_{k-1}(c_{k-1}g_{k-2} + C_{k-3}g_{k-3} + \cdots + C_0 g_0),\\
p_k &= -g_k + c_k p_k = g_k + C^{k-1}g_{k-1} + C^{k-2}g_{k-2} + C^{k-3}g_{k-3} + \cdots + C^0 g_0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& g_0, \\
& g_1 = g_0 + \alpha_0 A p_0 = g_0 - \alpha_0 A g_0, \\
& g_2 = g_1 + \alpha_1 A p_1 = g_0 - \alpha_0 A g_0 - \alpha_1 A(g_1 - c_1 g_0) = g_0 - \alpha_0 A g_0 - \alpha_1 A((g_0 - \alpha_0 A g_0) - c_1 g_0) = \\
& \quad = a_0 g_0 + a_1 A g_0 + a_2 A^2 g_0, \\
& \quad \dots \\
& g_{k-1} = -g_{k-1} + \alpha_{k-1} A p_{k-1} = -g_{k-1} - c_{k-1}(c_{k-1} g_{k-2} + C_{k-3} g_{k-3} + \dots + C_0 g_0) = \\
& \quad = b_0 g_0 + b_1 A g_0 + \dots + b_{k-2} A^{k-2} g_0, \\
& g_k = -g_k + \alpha_k A p_k = d_0 g_0 + d_1 A g_0 + \dots + d_{k-1} A^{k-1} g_0 + d_k A^k g_0
\end{aligned}
$$

-
$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + \alpha_k p_k = x_{k-1} + \alpha_{k-1} p_{k-1} + \alpha_k p_k = \dots = x_0 + \alpha_0 p_0 + \dots + \alpha_{k-1} p_{k-1} + \alpha_k p_k \\
&= x_0 + f_0 g_0 + f_1 g_1 + \dots + f_{k-1} g_{k-1} + f_k g_k \\
&= x_0 + \gamma_0 g_0 + \gamma_1 A g_0 + \dots + \gamma_{k-1} A^{k-1} g_0 + \gamma_k A^k g_0 = x_0 + q(A) g_0.
\end{aligned}
$$

- $q(A)$ je polynom stupně nejvýše k.

$$
\begin{aligned}
g_0 &= A x_0 - b = A x_0 - A x^* = A(x_0 - x^*) = A e_0, \\
e_{k+1} &\equiv (x^* - x_{k+1}) = (x^* - x_0) - (x_{k+1} - x_0) = e_0 - q(A) g_0 = e_0 - A q(A) e_0 = \\
&= p(A) e_0.
\end{aligned}
$$

- $p(A) = 1 - Aq(A)$ je polynom stupně nejvýše $k+1$.
- Polynomy třídy π_k: $p(z) = 1 - zq(z)$.
- Polynom $p(A)$ generovaný metodou sdruženým směrů minimalizuje A-normu chyby:

$$||e_{k+1}||_A = \min_{p \in \pi_k} ||p(A) e_0||_A \le \min_{p \in \pi_k} p(A) ||e_0||_A.$$

$$\frac{||e_{k+1}||_A}{||e_0||_A} \le \min_{p \in \pi_k} ||p(A)||.$$

- Spektrální rozklad matice A: $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda_n)$ je matice z vlastních čísel, $V = [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$ matice vlastních vektorů (je ortogonální: $V^T V = I$).

$$
\begin{aligned}
A &= V^T \Lambda V, \\
A^2 &= (V^T \Lambda V)(V^T \Lambda V) = V^T \Lambda^2 V, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(A) &= 1 - Aq(A) = 1 - \gamma_0 A + \gamma_1 A^2 + \dots + \gamma_{k-1} A^{k-1} + \gamma_k A^k = \\
&= V^T V - \gamma_0 V^T \Lambda V - \gamma_0 V^T \Lambda^2 V + \dots + \gamma_{k-1} V^T \Lambda^{k-1} V + \gamma_k V^T \Lambda^k V \\
&= V^T (1 - \gamma_0 \Lambda - \gamma_0 \Lambda^2 + \dots + \gamma_{k-1} \Lambda^{k-1} + \gamma_k \Lambda^k) V = V^T p(\Lambda) V.
\end{aligned}
$$

$$||p(A)|| = ||V^T p(\Lambda) V|| \leq ||V^T|| ||p(\Lambda)|| ||V|| = ||p(\Lambda)||,$$

$$\min_{p \in \pi_k} ||p(A)|| = \min_{p \in \pi_k} ||p(\Lambda)|| = \min_{p \in \pi_k} \max_{i=1,\dots,n} |p(\lambda_i)| \leq \min_{p \in \pi_k} \max_{\lambda \in \langle \lambda_1, \lambda_n \rangle} |p(\lambda)|.$$

- Min-max úloha na diskrétní množině bodů - spektra matice A, převedeme na spojitou úlohu
- Řešení pomocí vhodných Čebyševových polynomů (posunuté a normované).
- $$\frac{||e_{k+1}||_A}{||e_0||_A} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa(A)} - 1}{\sqrt{\kappa(A)} + 1} \right)^k,$$

  kde $\kappa(A) = ||A|| \, ||A^{-1}|| = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ je číslo podmíněnosti.

Obecná úloha:

- Pro nekvadratickou funkci $f(x)$: $g_k \leftrightarrow \nabla f(x)$, $A \leftrightarrow H(x_k)$ a využijeme stejné vztahy jako u kvadratické funkce.
- Numerický výpočet $\nabla f(x_k)$, obecně nekonverguje v n krocích.
- Výpočet $H(x_k)$ problematický v každém kroku.
- Problematické jsou koeficienty

  $$\alpha_k = \frac{g_k^T p_k}{p_k^T H(x_k) p_k}, \quad \beta_k = \frac{g_{k+1}^T H(x_k) p_k}{p_k^T H(x_k) p_k}.$$

- α_k pomocí Line search
  - **Fletcher-Reevesova varianta:** $\beta_k = \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{g_k^T g_k}$.
  - **Polak-Ribiereova varianta:** $\beta_k = \frac{(g_{k+1} - g_k)^T g_{k+1}}{g_k^T g_k}$, $\beta_k^+ = \max\{\beta_k, 0\}$.
  - **Hestenes-Stiefelova varianta:** $\beta_k = \frac{(g_{k+1} - g_k)^T g_{k+1}}{(g_{k+1} - g_k)^T p_k}$.
  - Doporučen restart směrů: 1 krok ve směru největšího spádu.
  - Směry nemusí být spádové.
- Musí být vazba na kvadratické úlohy: pro kvadratickou funkci $f(x)$ a exaktní Line search se všechny obecné metody musí redukovat na metodu sdružených směrů.
- Priklady5_CGnelin.m

- Priklady5_CGnelin2.m

Konvergence:

Věta: *Uvažujme CG algoritmus (Fletcher-Reevesova varianta) s volbou kroku* α, *která splňuje silné wolfeho podmínky s* $0 < c_1 < c_2 < \frac{1}{2}$. *Nechť* $f \in \mathbb{C}(\Omega)$ *je otevřená množina obsahující vrtevnicovou oblast* $\Gamma_{f(x_0)} \equiv \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ *a* $\nabla f(x)$ *je Lipschitzovsky spojitý na* Ω. *Potom platí*

$$\lim_{k\to\infty} \inf ||\nabla f(x_k)|| = 0.$$

- Podobná věta není pro Polak-Ribierovu variantu sdružených směrů.
- V praxi je PR varianta lepší než FR.
- PR varianta se může cyklit a řešení nenalézt i za použití ideálního Line-search.