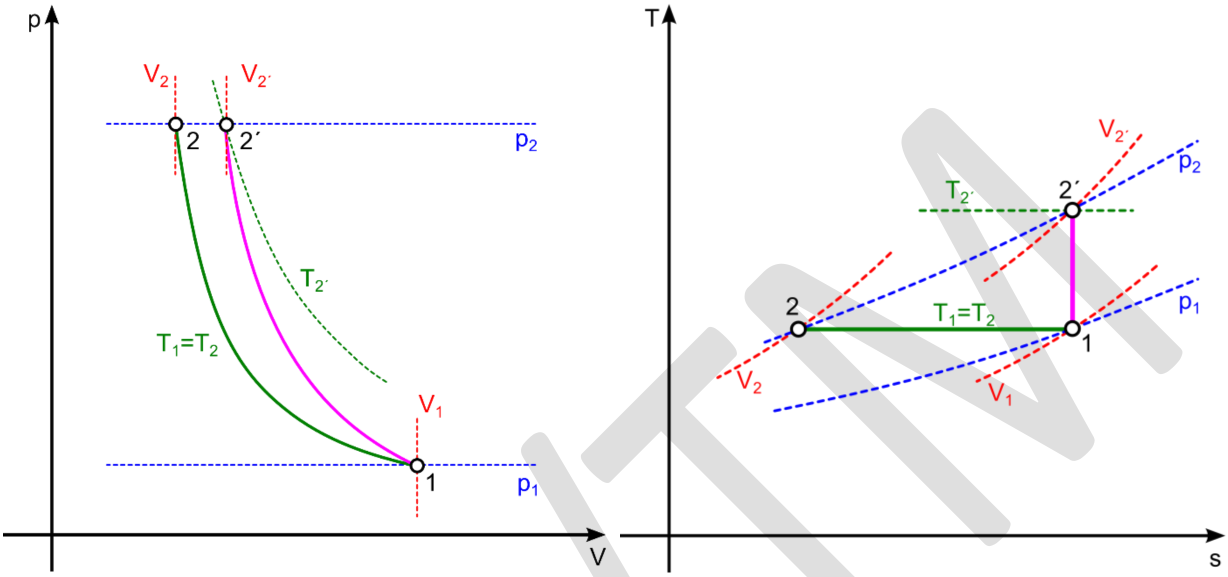
Příklad 1

V kompresoru je kontinuálně stlačován objemový tok vzduchu *1 [m^3.s^{-1}]* o teplotě *20 [°C]* a tlaku *0,1 [MPa]* na tlak *0,7 [MPa]*. Vypočtěte objemový tok vzduchu vystupujícího z kompresoru, jeho teplotu a příkon kompresoru, když komprese je: a) izotermická, b) adiabatická. Zakreslete změny v *p-v* a *T-s* diagramech.

$\dot{V}_1 = 1[m^3.s^{-1}]$; $t_1 = 20\ [°C] = 293{,}15\ [K]$; $p_1 = 0{,}1\ [MPa]$; $p_2 = 0{,}7\ [MPa]$;
$\dot{V}_2 = ?\,[m^3.s^{-1}]$; $t_2 = ?\,[K]$; $P = ?\,[W]$



a) Izotermická změna

Pro výpočet velikosti objemového toku vystupujícího z kompresoru se budeme opírat o stavovou rovnici, která je trošku upravená. Uvažujeme, že přes kompresor proudí kontinuálně stálé množství vzduchu (v čase se nemění množství vzduchu, které protéká kompresorem), tedy můžeme uvažovat, že hmotnost vzduchu v kompresoru v čase stejná. Jelikož ale, máme proudící médium, upravíme si stavovou rovnici do následujícího tvaru:

$$p.\dot{V} = \dot{m}.r.T$$

Rovnice se změnila jenom formálně a dostala časový rozměr. Její úpravou pro podmínky izotermického děje dostáváme rovnici:

$$p_1.\dot{V}_1 = p_2.\dot{V}_2$$

Jednoduchou úpravou této rovnice dostáváme velikost objemového průtoku na výstupu z kompresoru:

$$\dot{V}_2 = \frac{p_1}{p_2}.\dot{V}_1 = \frac{0,1.10^6}{0{,}7.10^6}.1 = 0{,}143\ [m^3 s^{-1}]$$

Velikost teploty při izotermické kompresi je stejná na začátku i na konci děje, tedy:

$$T_1 = T_2 = 293{,}15\ [K]$$

Tady je dobré se zastavit, výsledek porovnat z grafem a udělat některé úvahy pro další výpočty. Z grafů plynou následující předpoklady:

- Objem na konci komprese adiabatické bude vyšší než u komprese izotermické (bod 2´ leží víc vpravo od bodu 2) – očekáváme tedy vyšší hodnotu objemového průtoku na výstupu při adiabatickém ději ($\dot{V}_2 < \dot{V}_{2'}$).
- Při adiabatickém ději bude teplota na konci komprese vyšší než u komprese izotermické (bod 2´ leží víc vpravo od bodu 2), tedy se očekává výsledek, pro který bude platit $T_2 < T_{2'}$.
- Velikost práce se očekává v záporných hodnotách (kompresoru se dodává práce)
- Velikost dodávané práce v případě adiabatické komprese bude vyšší než v případě izotermické komprese (velikost plochy mezi zelenou křivkou a osou tlaku je menší než velikost plochy mezi purpurovou křivkou a osou tlaku). $|P| < |P'|$ - Pozor, výsledky se očekávají v záporných hodnotách, proto je nutné porovnávat v absolutních hodnotách!

Příkon kompresoru (velikost technické práce, která se musí dodat kompresoru za jednotku času), je možné vypočítat přímo použitím rovnice pro výpočet technické práce a veličin, které mají i časový rozměr a byly dříve použity ve stavové rovnici. Velikost technické práce, je vyjádřena v Joulech [J], použitím veličiny objemového toku $[m^3.s^{-1}]$ místo veličiny objemu $[m^3]$ v rovnici pro výpočet technické práce dostáváme namísto rovnice…

$$A_{12} = -\int_{p_1}^{p_2} V.dp$$

…rovnici

$$\dot{A}_{12} = -\int_{p_1}^{p_2} \dot{V}.dp$$

Tím, že na pravé straně přibyl časový rozměr, musel přibýt i na levé straně. Tedy původní rozměr obou stran, který byl v $[J]$, má nyní rozměry $[J.s^{-1}]$, což je rozměr výkonu $[W]$. Proto můžeme napsat, že velikost dodávané práce:

$$P = \dot{A}_{t12} == -\int_{p_1}^{p_2} \dot{V}.dp = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{\dot{m}.r.T}{p} dp = \dot{m}.r.T \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} dv = \dot{m}.r.T[\ln\ p]_{p_1}^{p_2} = -\dot{m}.r.T.\ln\frac{p_2}{p_1} ==$$
$$\dot{m}.r.T.\ln\frac{p_1}{p_2} = p_1.\dot{V}_1.\ln\frac{p_1}{p_2} = 0{,}1.10^6.1.\ln\frac{0{,}1.10^6}{0{,}7.10^6} = -194\,591{,}0149\ [W]$$

b) Adiabatická změna

V případě adiabatické změny je také udělána formální změna a přidán časový rozměr, tedy rovnice popisující rovnováhu mezi počátečním a koncovým dějem má tvar:

$$p_1 . \dot{V}_1^{\kappa} = p_2 . \dot{V}_2^{\kappa}$$

Separováním proměnných se lze dopracovat k rovnici:

$$\left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

Odkud je jednoduché vyjádřit velikost objemového průtoku vzduchu na výstupu z kompresoru:

$$\dot{V}_{2'} = \dot{V}_1 . \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 1 . \left(\frac{0{,}1.10^6}{0{,}7.10^6}\right)^{\frac{1}{1{,}4}} = 0{,}249\ [m^3 s^{-1}]$$

Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem (viz úvahy výše a graf) - $\dot{V}_2 < \dot{V}_{2'}$ $\checkmark$

Výpočet teploty se bude odvíjet také od úprav rovnice pro adiabatický děj (viz rovnice (6) a (7) Cvičení 4.). Využijeme tvar rovnice, která se musí minimálně upravovat:

$$\frac{T_{2'}}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

A tedy je jednoduché vyjádřit velikost teploty na konci adiabatické komprese:

$$T_{2'} = T_1 . \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 293{,}15 . \left(\frac{0{,}7.10^6}{0{,}1.10^6}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} = 511{,}15\ [K]$$

Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem (viz úvahy výše a graf) - $T_2 < T_{2'}$ $\checkmark$

V případě adiabatické změny není nutné použít integrální tvar výpočtu, ale lze využít toho, že při adiabatickém ději je pravá strana rovnice pro první zákon termodynamiky rovna nule (viz rovnice (2) - cvičení 4). Tedy úpravou rovnice (2) a její rozšířením o časový rozměr (rovnici nevynásobím hmotností „*m*“ ale hmotnostním tokem „$\dot{m}$“) můžeme napsat, že velikost dodávané práce v případě adiabatického děje:

$$P' = \dot{A}_{t12'} = -\dot{m} . \frac{\kappa . r}{\kappa - 1} (T_2 - T_1)$$

$$P' = \frac{p_1 . \dot{V}_1}{r . T_1} . c_p . (T_1 - T_2) = \frac{0{,}1.10^6 . 1}{287{,}04.293{,}15} . \frac{1{,}4 . 287{,}04}{1{,}4 - 1} . (293{,}15 - 511{,}15) = -260\ 276{,}3\ [W]$$

Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem (viz úvahy výše a graf) - $|P| < |P'|$ $\checkmark$

Příklad 2

Ve válci je vzduch o hmotnosti *0,25 [kg]* při tlaku *1 [bar] a teplotě 15 [°C].* Vzduch je adiabaticky stlačen na tlak *0,8 [MPa].*

Stanovte:

1) Absolutní práci
2) Technickou práci
3) Koncový objem
4) Koncovou teplotu
5) Změnu vnitřní energie
6) Změnu entalpie
7) Změnu entropie

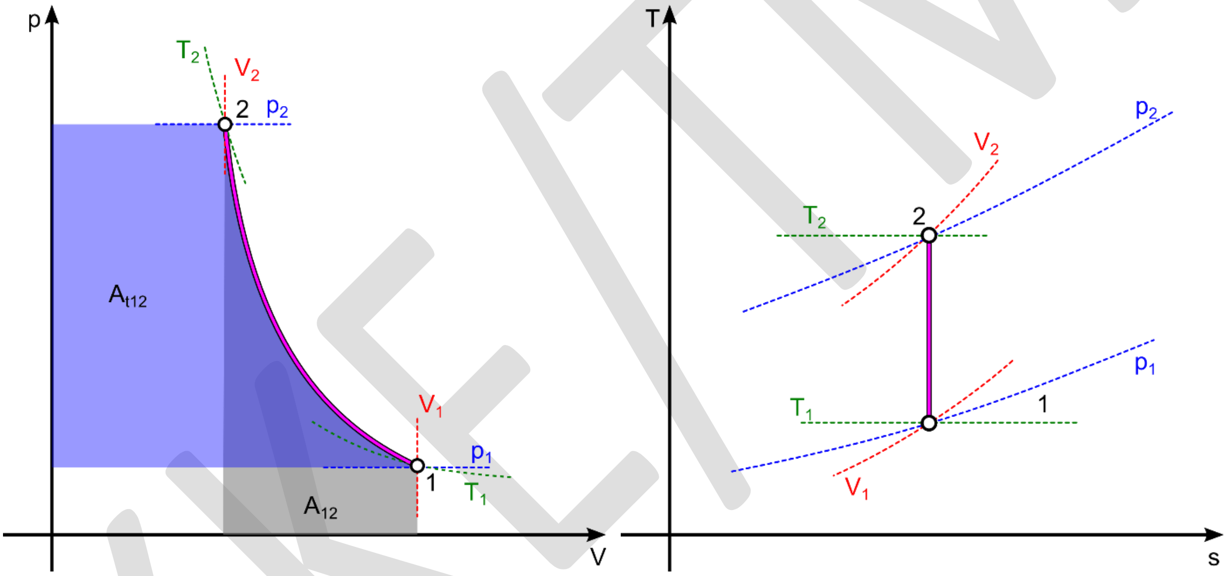
Dáno:

$m = 0{,}25\ [kg$

$p_1 = 1[bar] = 1.10^5[Pa]$

$T_1 = 15\ [°C] = 288{,}15\ [K]$

$p_2 = 0{,}8\ [MPa] = 0{,}8.10^6[Pa]$



Pro výpočet je možno použít množství zkratek, které plynou z rovnic pro adiabatický děj. Tady bude ukázaný podrobný postup a pak následně budou ukázány jednolité spojitosti. Na začátku je ale nutné jsi uvědomit pár skutečností, které plynou již grafů:

- Velikost technické i absolutní práce se očekává z záporných hodnotách (kompresoru se dodává práce)
- Objem na konci děje bude nižší jako na začátku $V_2 < V_1$
- Teplota na konci děje bude vyšší než na začátku děje $T_2 > T_1$
- Při adiabatickém ději je pravá strana rovnice pro první zákon termodynamiky rovna nule (viz rovnice (2) - cvičení 4). Tedy platí, že $-\Delta U = A_{12}$ a $-\Delta H = A_{t12}$

1) Absolutní práce

Výpočet měrné absolutní práce se řídí dle známé rovnice a integrací se dostaneme ke konečnému tvaru (viz úpravy rovnice (8) Poznámky ke cvičení 4)…

$$a_{12} = p_1 . v_1^{\kappa} \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{v^{\kappa}} . dv = p_1 . v_1^{\kappa} . \left[\frac{v^{-\kappa+1}}{-\kappa+1} \right]_{v_1}^{v_2} = p_1 . v_1^{\kappa} . \left[\frac{v_2^{-\kappa+1}}{-\kappa+1} - \frac{v_1^{-\kappa+1}}{-\kappa+1} \right] =$$

$$= p_1 . v_1^{\kappa} . \left[\frac{v_2^{1-\kappa}}{1-\kappa} - \frac{v_1^{1-\kappa}}{1-\kappa} \right] = \frac{p_1 . v_1^{\kappa}}{1-\kappa} . \left[v_2^{1-\kappa} - v_1^{1-\kappa} \right] =$$

$$= \frac{1}{1-\kappa} . p_1 . v_1^{\kappa} . v_1^{1-\kappa} . \left[\frac{v_2^{1-\kappa}}{v_1^{1-\kappa}} - \frac{v_1^{1-\kappa}}{v_1^{1-\kappa}} \right] = \frac{1}{1-\kappa} . p_1 . v_1 . \left[\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{1-\kappa} - 1 \right] =$$

Konečný tvar rovnice je možné upravit za pomoci stavové rovnice a rovnice adiabaty (viz úpravy rovnice (8) Poznámky ke cvičení 4):

$$a_{12} = \frac{p_1 . v_1}{1-\kappa} . \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \frac{r . T_1}{1-\kappa} . \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] =$$

$$\frac{287{,}04 . 288{,}15}{1-1{,}4} . \left[\left(\frac{0{,}8 . 10^6}{0{,}1 . 10^6} \right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} - 1 \right] = -167\,896{,}4\ [J . kg^{-1}]$$

<u>Výsledek je záporný, což se dalo očekávat. Je třeba si ale dát pozor, že výsledek je nutné násobit hmotností!!! Teprve tento výsledek je správným výsledkem. Toto je častá chyba u zápočtů!!!!</u>

$$A_{12} = m . a_{12} = 0{,}25 . (-167\,896{,}4) = -41\,974{,}1\ [J]$$

2) Technická práce

Velikost technické práce je možné také odvodit a vypočítat klasickým způsobem (viz úpravy rovnice (9) Poznámky ke cvičení 4). Využitím závislosti (4) (poznámky ke cvičení 4) se rovnou dopracujeme k výsledku:

$$\kappa . A_{12} = A_{t12}$$

$$1{,}4 . (-41947{,}1) = -58725{,}7\ [J]$$

3) Koncový objem

Pro výpočet koncového objemu je nutnost znát velikost objemu na začátku, nebo znát dostatečné množství parametrů, aby se mohl koncový objem vypočítat v jednom kroku. V tomhle případě je ale zapotřebí nejprve vypočítat velikost objemu na počátku, což je možné za pomoci stavové rovnice:

$$p_1 . V_1 = m . r . T_1$$

$$V_1 = \frac{m . r . T_1}{p_1} = \frac{0{,}25 . 287{,}04 . 288{,}15}{0{,}1 . 10^6} = 0{,}21\ [m^3]$$

Pak za pomoci rovnice adiabaty a jejich úprav (viz poznámky ke cvičení 4) je pak možné vypočítat koncový objem:

$$V_2 = V_1 . \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 0{,}21 . \left(\frac{0{,}1.10^6}{0{,}8.10^6} \right)^{\frac{1}{1{,}4}} = 0{,}084\ [m^3]$$

Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem (viz úvahy výše a graf) - $V_2 < V_1$ ✓

4) Koncová teplota

Za pomoci rovnice adiabaty a jejich úprav (viz poznámky ke cvičení 4) je možné vypočítat koncovou:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$T_2 = T_1.\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 288{,}15.\left(\frac{0{,}8\,.\,10^6}{0{,}1\,.\,10^6}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} = 521{,}97\ [K]$$

Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem (viz úvahy výše a graf) - $T_2 > T_1$ ✓

5) Změna vnitřní energie

Při výpočtu „změny velikosti“ se myslí číslo, které je dáno rozdílem mezi koncovým a počátečním stavem. V případě adiabatické změny stavu je tady ještě podmínka, které musí býti splněna aby výsledek korespondoval s prvním zákonem termodynamiky. První rovnicí pro výpočet velikosti změny vnitřní energie, je:

$$m.c_v.dT = dU$$

Podmínka, která plyne z první věty termodynamické má tvar (viz poznámky ke cvičení 4 – rovnice (2)):

$$dA = -dU$$

Tedy velikost změny vnitřní energie, musí mít opačný znaménko jako velikost změny absolutní práce. Dle předchozího jsme si určili, že velikost dodávané práce kompresoru značíme záporným znaménkem, tedy změna vnitřní energie při kompresi bude mít kladné znaménko, tudíž velikost změny vnitřní energie závisí pouze na rozdílu teplot:

$$\Delta U = \left(m.\frac{r}{\kappa-1}(T_2 - T_1)\right) = \left(0{,}25.\frac{287{,}04}{1{,}4-1}.(521{,}97 - 288{,}15)\right) = 41\,947\ [J]$$

Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem (viz úvahy výše a graf) – $-dU = dA$ ✓

6) Změna entalpie

Při výpočtu velikosti změny entalpie jsme omezeni stejnými podmínkami jako v případě výpočtu velikosti změny vnitřní energie. Tedy rovnice pro výpočet velikosti změny entalpie:

$$m.c_p.dT = dH$$

Podmínka, která plyne z první věty termodynamické má tvar (*viz poznámky ke cvičení 4 – rovnice (3)*):

$$-\Delta H = dA_t$$

Tedy velikost změny entalpie bude dána rovnicí:

$$\Delta H = \left(m.\frac{\kappa.r}{\kappa-1}(T_2 - T_1)\right) = \left(0{,}25.\frac{1{,}4\,.287{,}04}{1{,}4-1}(521{,}97 - 288{,}15)\right) = 58726{,}2\ [J]$$

Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem (viz úvahy výše a graf) – $-dH = dA_t$ ✓

V tomhle případě je tu opět možnost využít vlastností, které plynou z Mayerovy rovnice (viz poznámky ke cvičení 2 – rovnice (7), (8)) ale i ze zavilostí absolutní a technické práce, pro adiabatické děje (*popsané výše, nebo viz poznámky ke cvičení 4 – rovnice (3)*):

$$\Delta U.\kappa = \Delta H = 58726{,}2$$ ✓

7) Změna entropie

V případě změny velikosti entropie je odpověď jasná. U vratné adiabatické komprese, která probíhá s ideálním plynem, nedochází k výměně tepla s okolím a ani se neprodukuje žádné teplo uvnitř systému, tedy velikost změny entropie je rovna nule.

$$dS = \frac{dQ}{T}[J.K^{-1}] \rightarrow dQ = 0 \rightarrow dS = 0$$