Matematická analýza 1.

Kubr Milan

6. ledna 2008

Obsah

Kapitola 1

Základní matematické pojmy.

1.1 Logické pojmy.

Výrokem budeme rozumět vyslovené nebo napsané tvrzení, u nějž má smysl hovořit o pravdivosti nebo nepravdivosti. Výroky budeme značit velkými písmeny A, B, C, $V, \ldots$ a podobně.
Je-li V výrok, pak výrok non$V$, který dostaneme formulací není pravda, že platí V, nazýváme logickou negací výroku V.

Příklady: 1. $A-$ Praha je hlavní město České republiky. non$A-$ není pravda, že Praha je hlavní město České republiky. V tomto případě je výrok A pravdivý.
2. $B-$ všichni studenti složili zkoušku z matematiky.
non$B-$ není pravda, že všichni studenti složili zkoušku z matematiky. Můžeme tedy nalézt alespoň jednoho studenta, který zkoušku z matematiky nesložil. K této formulaci se vrátíme později, až se budeme zabývat obecným a existenčním kvantifikátorem.

Spojování výroků. Jednotlivé výroky lze mezi sebou spojovat a vznikají tím další výroky. Všimneme si stručně nejobvyklejších způsobů spojování výroků.

Jsou-li A, B dva výroky, pak výrok, který dostaneme pomocí spojky a nebo a zároveň nazýváme konjunkcí těchto výroků a značíme $A \wedge B$.

Výrok, který získáme pomocí spojky nebo značíme $A \vee B$ a nazýváme disjunkcí daných výroků.

Spojení výroků A, B ve formě jestliže platí A, pak platí B nazýváme implikací a značíme $A \implies B$. Čteme též z A plyne B, A implikuje B, B je důsledkem A a podobně.

Spojení výroků A, B pomocí slov A platí tehdy a jen tehdy, jestliže platí B nebo A platí když a jen když platí B nebo A platí právě když platí B nazýváme ekvivalencí aznačíme $A \iff B$. Další možná formulace je A je nutnou a postačující podmínkou B.

Příklad: A, B, C, D jsou postupně výroky: je horko, svítí slunce, prší, fouká vítr. Potom třeba
$A \wedge B$ - Je horko a svítí slunce.
$A \vee$ non$B$ - Je horko nebo nesvítí slunce.
$A \vee C$ - Je horko nebo prší.
$B \Rightarrow A$ - Jestliže svítí slunce, pak je horko.
$C \Rightarrow D$ - Jestliže prší, pak fouká vítr.
$A \Leftrightarrow B$ - Je horko právě když svítí slunce.

Je zřejmé, že o pravdivosti celé řady složených výroků nemůžeme rozhodnout bez znalosti dalších skutečností. Na příklad o jakou zeměpisnou polohu se jedná, jaká byla roční doba a podobně.

V matematice bývá situace jednodušší v tom smyslu, že podmínky, za kterých tvrzení platí, jsou většinou přesně formulovány.

Značení: Při spojování výroků budeme používat velmi často t.zv. kvantifikátorů, obecného a existenčního, jinými slovy zkrácené vyjádření velmi často používaných formulací.

Symbol $\forall$ značí t.zv. obecný kvantifikátor a čte se pro všechna.

Symbol $\exists$ značí t.zv. existenční kvantifikátor a čte se existuje.

Je-li $V(x)$ nějaký výrok, týkající se veličiny x, pak zápis $\forall x;\, V(x)$ znamená pro všechna x platí $V(x)$. Analogicky $\exists x;\, V(x)$ znamená, že existuje x tak, že platí $V(x)$.

Příklady: a) Buď $V(x)$ tvrzení $x < 2$. Potom výrok $\forall x;\, x < 2$ (pro všechna x platí $x < 2$) je zřejmě nepravdivé tvrzení, zatímco $\exists x; x < 2$ je tvrzení pravdivé (existuje x takové, že $x < 2$).

b) Pro vyjádření složených výroků je možno použít více kvantifikátorů, je však třeba dát pozor na jejich pořadí. Na příklad $\forall x\ \exists y\,; x + y = 0$ je pravdivý výrok, zatímco $\exists x\ \forall y\,; x + y = 0$ je výrok nepravdivý. Tento příklad zároveň ukazuje, jakým způsobem vyjádříme negaci složeného výroku, obsahujícího několik kvantifikátorů. Každý obecný kvantifikátor nahradíme existenčním a opačně. V dalším výkladu, až budeme negovat některé matematické věty, na tuto skutečnost znovu upozorníme.

Při zkoumání matematické teorie je vidět, že se její výstavba řídí přísnými pravidly, která je možno charakterizovat následovně. Teorie vychází z několika základních pojmů, t.zv. axiomů, které jsou přijímány bez důkazu. Vše ostatní je odvozeno z těchto základních axiomů formou definic a vět.

Definicí rozumíme úmluvu, pomocí níž je zaveden nový pojem. Definice mívá zpravidla tvar ekvivalence, při čemž nový pojem objasňujeme pomocí pojmů již známých a zavedených.

Větou (nebo matematickou větou) rozumíme výrok (většinou složený), jehož pravdivost je třeba ověřit. Ověření se provádí pomocí důkazu. Matematická věta se skládá ze dvou částí: předpokladu a tvrzení. Řada vět bývá formulována ve tvaru ekvivalence dvou výroků $A \Leftrightarrow B$. Důkaz takového tvrzení je třeba provádět ve dvou krocích, tedy dokázat implikace $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

Důkazem rozumíme soustavu logicky správných kroků, pomocí níž se od předpokladu věty dostaneme k jejímu tvrzení. Velmi častou formou důkazu je důkaz nepřímý. Nepřímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$ provedeme tak, že dokážeme implikaci $\mathrm{non}B \Rightarrow \mathrm{non}A$.

Dalším důležitým typem důkazu je důkaz úplnou indukcí. Bývá používán většinou při důkazech tvrzení, závislých na přirozeném čislu n. Buď $V(n)$ příslušné tvrzení, pak důkaz provádíme ve dvou krocích.

α) Ukážeme, že $V(k)$ platí, kde k je nějaké přirozené číslo (většinou nejmenší možné).

β) Jestliže $V(n)$ platí (indukční předpoklad) $(n \geq k)$, pak dokážeme, že platí i $V(n+1)$. Odtud plyne, že $V(n)$ platí pro všechna přirozená čísla $n \geq k$.

Příklady:

a) Jsou-li a, b odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, c jeho přepona, potom $a^2 + b^2 = c^2$. Známá Pythagorova věta je příkladem matematické věty ve formě implikace, kde předpoklad je výrok a, b jsou odvěsny, c přepona pravoúhlého trojúhelníka, tvrzení je výrok $a^2 + b^2 = c^2$. Důkaz tohoto tvrzení je typický přímý důkaz. Skutečně, jsou-li c_a, c_b úseky přepony, příslušné odvěsnám a a b, pak podle Eukleidovy věty $a^2 = c \cdot c_a$, $b^2 = c \cdot c_b$ neboli $a^2 + b^2 = c(c_a + c_b) = c^2$.

b) Číslo $\sqrt{2}$ není racionální. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\sqrt{2}$ je racionální; potom $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá nesoudělná. Odtud $p^2 = 2q^2$, tedy p^2 je sudé a i p musí být sudé (dokažte si). Lze je tedy vyjádřit ve tvaru $p = 2m$ a po dosazení dostaneme, že $q^2 = 2m^2$, tedy i číslo q je sudé. Tím dostáváme spor s nesoudělností čísel p a q.

c) Ukažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Důkaz provedeme úplnou indukcí. Je zřejmé, že pro $n = 1$ je tvrzení správné. Nechť platí pro jisté n; zbývá ukázat, že

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Využitím indukčního předpokladu ale dostaneme

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

což je dané tvrzení.

1.2 Množiny a operace s nimi.

Definice: Množinou rozumíme souhrn nebo soubor nějakých objektů, které mají jistou společnou vlastnost. Množiny budeme většinou značit velkými písmeny A, B, M, N, X, Y, Ω, Γ a podobně.
Řekneme, že x je prvkem (nebo elementem) množiny A a značíme $x \in A$, jestliže objekt x náleží do množiny A. Není-li x prvkem množiny B, pak tuto skutečnost zapisujeme $x \notin B$.
Množinu, která neobsahuje žádný prvek, nazveme prázdnou a označíme $\emptyset$.

Příklady: 1. Jestliže se množina A skládá z prvků a_1, a_2, $\ldots$, a_n, pak tuto skutečnost budeme zapisovat

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

2. Pro některé množiny budeme užívat standardního označení. Jsou to
R – množina všech reálných čísel, jinak též $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.
Q – množina všech racionálních čísel - zlomky nebo kvocienty.
N – množina všech přirozených čísel; $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Z – množina všech celých čísel ; $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.
C – množina všech komplexních čísel.

3. Množiny budeme dělit na konečné a nekonečné. V dalším se sejdeme s oběma případy. Třeba označme M množinu všech přirozených čísel menších než 5. Potom je $M = \{1, 2, 3, 4\}$ konečná množina. Buď P množina všech reálných čísel x, pro něž je $1 \leq x < 5$. Potom je $P = \langle 1, 5)$ nekonečná množina.

4. Buď X množina všech reálných čísel x takových, že $0 \cdot x = 1$. Poněvadž žádné takové číslo neexistuje, je $X = \emptyset$. Užitečnost pojmu prázdné množiny se ukáže později.

Značení: Je-li $V(x)$ nějaká vlastnost prvku x, pak množinu všech x, která mají vlastnost $V(x)$ budeme značit $\{x \in X;\ V(x)\}$.

Příklad: $\langle -1, 1\rangle = \{x \in \mathbf{R};\ x^2 \leq 1\}$.

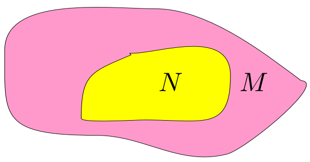
Definice: Řekneme, že množina M je podmnožinou množiny N a označíme $M \subset N$, jestliže pro každé $x \in M$ platí $x \in N$. Jestliže pro dvě množiny A, B platí $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$, pak řekneme, že jsou si množiny A a B rovny a značíme $A = B$. Je-li $M \subset N$, ale $M \neq N$, řekneme, že M je vlastní podmnožinou N.

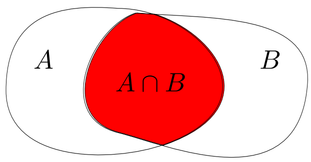
Sjednocením množin M a N, které označíme $M \cup N$ rozumíme množinu všech prvků x, pro něž $x \in M$ nebo $x \in N$.

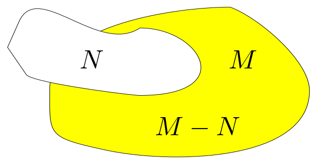
Průnikem množin A a B, který značíme $A \cap B$ rozumíme množinu všech prvků x, pro něž $x \in A$ a zároveň $x \in B$. Řekneme, že množiny A a B jsou disjunktní, jestliže $A \cap B = \emptyset$.

Rozdílem množin X a Y, které značíme $X - Y$ rozumíme množinu všech prvků x, pro něž platí $x \in X$ a zároveň $x \notin Y$. Symetrickou diferencí množin X a Y, kterou značíme $X \triangle Y$ rozumíme množinu $X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

Poznámky: 1. Uvedené pojmy mají velmi názornou geometrickou interpretaci, jak je vidět z následujících obrázků.







$N \subset M$ $\qquad$ $A \cup B\,;\ A \cap B$ $\qquad$ $M - N$

2. Pojmy sjednocení a průniku se velmi snadno rozšíří na libovolný počet množin (konečný nebo nekonečný).

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

je množina prvků x, které leží alespoň v jedné z množin $A_1, A_2, \dots, A_n$.

$$B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$$

značí množinu všech prvků x, které patří zároveň do všech množin $B_1, B_2, \dots, B_n$. Analogicky můžeme definovat

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k; \qquad B_1 \cap B_2 \cap \dots = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$$

pro libovolnou posloupnost množin nebo i pro libovolný systém množin. Buď Λ libovolná množina, kterou budeme nazývat indexovou množinou. Potom jsou symboly

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \ \text{ a } \ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$$

definovány analogicky. Je-li na příklad $M_\lambda = (0, \lambda)$, $N_\lambda = \langle 0, \lambda)$, potom

$$\bigcup_{\lambda > 0} M_\lambda = (0, +\infty), \quad \bigcup_{\lambda > 0} N_\lambda = \langle 0, +\infty), \quad \bigcap_{\lambda > 0} M_\lambda = \emptyset, \quad \bigcap_{\lambda > 0} N_\lambda = \{0\}.$$

Věta: (De Morganova pravidla)
Buďte X, A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ množiny. Potom platí

$$X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda); \qquad X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda).$$

Důkaz: a) Nechť $x \in X - \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Potom je $x \in X, x \notin \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, tedy $x \notin A_\lambda \, \forall \, \lambda \in \Lambda$. Odtud plyne, že $x \in X - A_\lambda \;\; \forall \lambda \in \Lambda$, tedy $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda)$. Tím jsme ukázali, že

$$X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda).$$

Obráceně, buď $x \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda)$. Potom je $x \in X - A_\lambda \;\; \forall \, \lambda \in \Lambda$, tedy $x \notin A_\lambda \;\; \forall \, \lambda \in \Lambda$ a také $x \notin \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Neboli $x \in X - \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ a platí, že

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda) \subset X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$

b) Buď nyní $x \in X - \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Potom je $x \in X$, ale $x \notin \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Existuje tedy index $\lambda_0 \in \Lambda$ tak, že $x \notin A_{\lambda_0}$, neboli $x \in X - A_{\lambda_0}$ a následně $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda)$, neboli

$$X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda).$$

Obráceně, je-li $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda)$, potom existuje alespoň jeden index $\lambda_1 \in \Lambda$ tak, že $x \in X - A_{\lambda_1}$ a tedy $x \notin A_{\lambda_1}$, následně $x \notin \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ a dostaneme druhou inklusi

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X - A_\lambda) \subset X - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda.$$

Definice: Buďte $A_1,\, A_2, \ldots, A_n$ množiny. Potom kartézským součinem těchto množin, který budeme značit

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \bigtimes_{k=1}^{n} A_k$$

rozumíme množinu všech uspořádaných $n-$tic tvaru

$$x = (x_1,\, x_2, \ldots, x_n), \;\text{ kde }\; x_1 \in A_1,\, x_2 \in A_2, \ldots,\, x_n \in A_n.$$

Poznámky: 1. Kartézský součin není komutativní, tedy obecně platí $A \times B \neq B \times A$.

2. Jsou-li $x = (x_1,\, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1,\, y_2, \ldots, y_n)$ dva prvky kartézského součinu $\bigtimes\limits_{k=1}^{n} A_k$, pak rovnost $x = y$ znamená, že $x_1 = y_1,\, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$. Této vlastnosti bude později využíváno často.

3. Jestliže označíme $\mathbf{R}$ množinu všech reálných čísel, pak množinu

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \bigtimes_{k=1}^{n} \mathbf{R},$$

kde v součinu figuruje n faktorů $\mathbf{R}$, nazýváme $n-$rozměrným eukleidovským prostorem. Tedy $\mathbf{R}^n$ je množina všech uspořádaných $n-$tic reálných čísel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Specielní případy $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ budou obzvlášť důležité. Jedná se o rovinu a prostor, známé z elementární geometrie ze základní a střední školy.

4. Pro další výklad bude důležitý kartézský součin dvou množin $X \times Y$, kterého využijeme při definici zobrazení.

1.3 Zobrazení množin.

! Definice: Buďte X, Y dvě množiny, $D \subset X$ podmnožina. Podmnožinu f kartézského součinu $X \times Y$ nazveme zobrazením množiny D do Y, jestliže každému $x \in D$ odpovídá právě jedno $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f$. Tuto skutečnost zapisujeme $y = f(x)$. Množinu D nazýváme definičním oborem zobrazení f a množinu $f(D) = \{f(x);\, x \in D\}$ obrazem množiny D. Je-li $f(D) = Y$, řekneme, že f je zobrazení D na Y nebo zobrazení surjektivní. Množinu $\{\,(x, f(x)\,)\,; x \in D\}$ nazveme grafem zobrazení f.

Poznámky: 1. Předchozí definice říká, že každému $x \in D$ je přiřazen právě jeden prvek $y \in Y$ předpisem $y = f(x)$. Tuto skutečnost budeme značit též

$$f : X \longrightarrow Y; \quad f : D \longrightarrow Y,\ D \subset X; \quad f : x \longmapsto y,\ x \in D; \quad y = f(x),\ x \in D.$$

Jestliže $X = Y$, pak hovoříme o zobrazení na X nebo o transformaci množiny X.

2. Ve stejném významu jako pojem zobrazení budeme v dalším používat též pojmu funkce, operátor, funkcionál, transformace.

Příklady: 1. Buď $X = \langle -1, 1\rangle$, $Y = \mathbf{R}$, $y = f(x)$ zobrazení X do Y dané předpisem $y = x^2$. Potom je $f(X) = \langle 0, 1\rangle$ a f je zobrazení X na interval $\langle 0, 1\rangle$. Grafem f je samozřejmě část paraboly v intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

2. Buď $\mathbf{N}$ množina všech přirozených čísel, $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ zobrazení. Pak f není nic jiného než posloupnost reálných čísel, jestliže označíme $f(n) = a_n$. Blíže se s těmito zobrazeními seznámíme v kapitole 2.

3. Buď $X = Y = \mathbf{R}^2$, $f : X \longrightarrow Y$ zobrazení, dané předpisem $y = f(x)$, kde $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2)$. Je-li $y = (y_1, y_2)$, pak tedy $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_2$. Dále platí $f(X) = Y$. Skutečně, je-li $y = (y_1, y_2) \in Y$ libovolný bod, pak $x = (y_1 + y_2, y_2) \in Y$ je bod, pro nějž $f(x) = y$. Podrobněji se s těmito zobrazeními setkáte v lineární algebře.

Definice: Buď $f : X \longrightarrow Y$ zobrazení, $B \subset Y$ podmnožina. Potom podmnožinu X, definovanou předpisem $f^{-1}(B) = \{x \in X;\, f(x) \in B\}$ nazýváme vzorem množiny B.
Řekneme, že zobrazení f je prosté nebo injektivní, jestliže platí: je-li $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Prosté zobrazení X na Y nazýváme vzájemně jednoznačné nebo bijektivní.

Poznámka: Je-li $f : X \longrightarrow Y$ prosté zobrazení X na Y, pak zřejmě ke každému $y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$ tak, že $y = f(x)$. Existuje tedy zobrazení $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ pro něž platí $f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$. Toto zobrazení nazýváme inversním k f.

Definice: Buď $f : X \longrightarrow Y$ prosté zobrazení množiny X na množinu Y. Zobrazení $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, pro něž platí $f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$ nazýváme inversním zobrazením k zobrazení f.

Poznámka: Je-li $f : X \longrightarrow Y$ bijektivní zobrazení, pak $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ je také bijektivní a tedy k němu existuje zobrazení inversní $(f^{-1})^{-1}$. Je však zřejmé, že $(f^{-1})^{-1} = f$ a o dvojici f, f^{-1} můžeme hovořit jako o navzájem inversních zobrazeních.

Definice: Buďte $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ zobrazení. Potom zobrazení $h : X \longrightarrow Z$, definované pro $x \in X$ předpisem $h(x) = g(f(x))$ nazýváme složeným zobrazením a značíme $h = g \circ f$.

Poznámky: 1. Analogicky lze definovat zobrazení, složené z více než dvou zobrazení.

2. Jsou-li $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$ obě prostá zobrazení na, neboli bijekce, pak i zobrazení $h = g \circ f$ je bijektivní a platí $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ neboli schematicky.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[rr, bend right=50, "h"'] & Y \arrow[l, shift right, "f^{-1}"'] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \arrow[l, shift right, "g^{-1}"'] \arrow[ll, bend right=50, "h^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

1.4 Spočetné a nespočetné množiny.

Definice: Řekneme, že množiny A, B jsou ekvivalentní nebo že mají stejnou mohutnost, jestliže existuje bijektivní (tedy vzájemně jednoznačné) zobrazení $f : A \longrightarrow B$. Značíme

$$A \sim B \ \text{ nebo } \ m(A) = m(B) \ \text{ nebo } \ |A| = |B|.$$

Poznámka: Je zřejmé, že $A \sim A$; $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$. Je-li $A \sim B,\ B \sim C \Longrightarrow A \sim C$.

Příklad: Množiny $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}$ jsou ekvivalentní.
Skutečně stačí definovat zobrazení

$$1 \to 0,\ 2 \to 1,\ 3 \to -1,\ 4 \to 2,\ 5 \to -2, \ldots,$$

neboli $f(n) = \frac{n}{2}$ pro $n = 2k$ (sudé) a $f(n) = -\frac{n-1}{2}$ pro $n = 2k + 1$ (liché). Tyto dva předpisy se dají zapsat jediným vyjádření a sice

$$f(n) = (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right], \quad n \in \mathbf{N}.$$

Značení $[x]$ znamená t.zv. celou část čísla $x \in \mathbf{R}$ neboli takové celé číslo k, že $k \le x < k + 1$.

Definice: Označme $N_n = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$ pro libovolné přirozené číslo n. Řekneme, že množina A je konečná a má n prvků, jestliže $A \sim N_n$ pro nějaké $n \in \mathbf{N}$. O množině B řekneme, že je spočetná, je-li $B \sim \mathbf{N}$. Množinu C nazveme nespočetnou, není-li ani konečná ani spočetná.

Poznámky: 1. Pro konečné množiny je charakteristické, že vlastní podmnožina nemůže mít stejnou mohutnost, jako celá množina. Pro nekonečné množiny však toto tvrzení neplatí, jak bylo vidět na předchozím příkladu $\mathbf{N} \sim \mathbf{Z}$.

2. Každou spočetnou množinu A lze zapsat ve tvaru nekonečné posloupnosti.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \text{ neboli } \{a_n\} \text{ nebo } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

3. V dalším bude ukázáno, že existují nespočetné množiny (na příklad $\mathbf{R}$).

Věta: Každá podmnožina spočetné množiny A je konečná nebo spočetná.

Důkaz: Buď $B \subset A$. Poněvadž A je spočetná, lze ji napsat ve tvaru $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Buď k_1 nejmenší index takový, že $a_{k_1} \in B$. Nechť $k_2 > k_1$ je nejmenší takový index, že $a_{k_2} \in B$. Takto budeme pokračovat dále. Buďto tento výběr skončí po konečném počtu kroků a B je konečná podmnožina A nebo pokračuje do nekonečna a dostaneme, že B je spočetná podmnožina; $B = \{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots\}$.

Věta: Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je spočetný systém spočetných množin. Potom je množina $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ spočetná.

Důkaz: Tedy spočetné sjednocení spočetných množin je množina spočetná.
Pro množiny A_n platí

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1: & a_1^{(1)}, & & a_2^{(1)}, & & a_3^{(1)}, & & a_4^{(1)}, & \dots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
A_2: & a_1^{(2)}, & & a_2^{(2)}, & & a_3^{(2)}, & & a_4^{(2)}, & \dots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
A_3: & a_1^{(3)}, & & a_2^{(3)}, & & a_3^{(3)}, & & a_4^{(3)}, & \dots \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
A_4: & a_1^{(4)}, & & a_2^{(4)}, & & a_3^{(4)}, & & a_4^{(4)}, & \dots \\
 & & & & & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Prvky množiny S sestavíme nyní následovně:

$$S = \{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, a_1^{(3)}, a_2^{(2)}, a_3^{(1)}, \dots\},$$

při čemž vynecháme ty prvky, které se již dříve vyskytly. Tím dostaneme spočetnou množinu.

Důsledky: 1. Sjednocení konečného systému spočetných množin je spočetná množina. Sjednocení spočetného systému konečných množin je množina spočetná.

2. Jsou-li $A_1, \dots, A_n$ spočetné množiny, pak $\bigtimes\limits_{k=1}^{n} A_k$ je spočetná množina.

3. Množina všech racionálních čísel je spočetná.

Důkaz: Je-li $r \in \mathbf{Q}$, pak $r = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, tedy $\mathbf{Q} \sim \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, což je spočetná množina.

Definice: Nekonečným desetinným rozvojem nazýváme výraz

$$a = a_0,\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, \ldots,$$

kde a_0 je libovolné celé číslo a každé $a_i\, (i = 1, 2, 3, \ldots)$ je jedno z čísel $0, 1, 2, \ldots, 8, 9$.

Věta: Množina všech nekonečných desetinných rozvojů je nespočetná.

Důkaz: Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že je tato množina spočetná; pak ji lze zapsat do posloupnosti $\{x_1, x_2, \ldots\}$, neboli

$$\begin{array}{llllll}
x_1; & a_0^{(1)}, & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \ldots \\
 & & \searrow & & & \\
x_2; & a_0^{(2)}, & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \ldots \\
 & & & \searrow & & \\
x_3: & a_0^{(3)}, & a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \ldots \\
 & & & & \searrow & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Vybereme nyní desetinný rozvoj $x = b_0\,,\, b_1\, b_2\, b_3\, \ldots$ následujícím způsobem: b_0 zvolíme libovolně. $b_1 \neq a_1^{(1)}$, $b_2 \neq a_2^{(2)}$, $b_3 \neq a_3^{(3)}, \ldots$. Je vidět, že x nepatří do posloupnosti $\{x_1,\, x_2,\, \ldots\}$ a tedy předpoklad spočetnosti takové množiny je nepravdivý.

1.5 Reálná čísla.

Definice: Reálným číslem nazveme každý nekonečný desetinný rozvoj. Jestliže se ve vyjádření $x = a_0,\, a_1\, a_2\, a_3\, \ldots$ od nějakého indexu členy nebo skupiny členů opakují, říkáme, že x je periodický desetinný rozvoj. Periodický desetinný rozvoj nazveme racionálním číslem, neperiodický nazveme iracionálním číslem.

Poznámka: Je-li rozvoj tvaru $x_n = a_0,\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n = a_0,\, a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\, 0\, 0\, \ldots$, pak je t.zv. konečný a samozřejmě reprezentuje racionální číslo, které je možno zapsat ve tvaru

$$x_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}.$$

Těchto vyjádření budeme používat jako aproximace reálných čísel a sice horní a dolní.

Příklad: Buď $x = \pi = 3,1415926\ldots$. Označme

$$\underline{x_1} = 3,1,\ \overline{x_1} = 3,2; \quad \underline{x_2} = 3,14,\ \overline{x_2} = 3,15;$$

$$\underline{x_3} = 3,141,\ \overline{x_3} = 3,142; \quad \underline{x_4} = 3,1415,\ \overline{x_4} = 3,1416 \ \text{ atd.}$$

Dostáváme t.zv. horní a dolní aproximace. Ty nám dávají možnost zavést mezi reálnými čísly uspořádání, t.j. rozhodnout o dvou reálných číslech x, y, které z nich je větší.

Definice: Řekneme, že reálné číslo $x = a_0,\, a_1\, a_2\, a_3\, \ldots$ je větší než reálné číslo $y = b_0,\, b_1\, b_2\, b_3\, \ldots$ a označíme $x > y$, je-li buď $a_0 > b_0$ nebo existuje index n tak, že $\underline{x_n} > \overline{y_n}$.

Řekneme, že $x = y$, jestliže neplatí ani jeden ze vztahů $x > y$, $y > x$.

Poznámky: 1. O uspořádání v množině $\mathbf{R}$ uvedeme později další podrobnosti.

2. Jedno reálné číslo může mít různá vyjádření, na příklad $x = 3,56999\ldots$, $y = 3,57000\ldots$. Je zřejmé, že $x = y$. Platí totiž

$$\underline{x_1} = 3,5,\ \overline{x_1} = 3,6; \quad \underline{x_2} = 3,56,\ \overline{x_2} = 3,57; \quad \underline{x_2} = 3,569,\ \overline{x_3} = 3,57.$$

$$\underline{y_1} = 3,5,\ \overline{y_1} = 3,5; \quad \underline{y_2} = 3,57,\ \overline{y_2} = 3,57; \quad \underline{y_3} = 3,57,\ \overline{y_3} = 3,57$$

neboli $\underline{x_n} < \overline{y_n}\ \forall n \in \mathbf{N}$ a též $\overline{x_n} \geq \underline{y_n}\ \forall n \in \mathbf{N}$.

3. Jak bylo dokázáno v předchozím paragrafu, je množina všech reálných čísel nespočetná, množina všech racionálních čísel je spočetná, tedy množina všech iracionálních čísel je nespočetná.

4. V dalším uvedeme větu o vzájemně jednoznačném vztahu mezi reálnými čísly a body přímky.

Věta: Existuje bijektivní (vzájemně jednoznačné) zobrazení oboru reálných čísel a bodů přímky. Tuto přímku nazýváme reálnou osou.

Poznámky: 1. Předchozí věta ukazuje, že množina reálných čísel nemá mezery, zatímco množina všech racionálních čísel je má, i když je t.zv. hustá. Tedy mezi dvěma různými racionálními čísly leží další (dokonce nekonečně mnoho) racionální číslo.

2. V dalším shrneme základní vlastnosti uspořádání v $\mathbf{R}$ a udáme vlastnosti algebraických operací v $\mathbf{R}$.

Uspořádání v R.

U_1 : $\forall x, y \in \mathbf{R}$ platí právě jeden ze vztahů $x < y,\ x = y,\ x > y$.
U_2 : Je-li $x < y$ a $y < z$, potom $x < z$ (transitivnost uspořádání).
U_3 : Je-li $x < y$, pak $x + z < y + z\ \forall z \in \mathbf{R}$.
U_4 : Je-li $x < y$, $z > 0$, potom $xz < yz$.
U_5 : $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists n \in \mathbf{N}$ tak, že $n > x$.

Poznámka: Místo vztahu $x < y$ píšeme též $y > x$. Zápis $x \leq y$ znamená, že $x < y$ nebo $x = y$.

Algebraické operace v R.

V množině $\mathbf{R}$ jsou definovány t.zv. algebraické operace, které budeme značit $+$ a $\cdot$ a nazývat sčítání a násobení. Základní vlastnosti těchto operací jsou shrnuty v následujících axiomech.

A_1 : $\forall x, y \in \mathbf{R}$ je $x + y \in \mathbf{R}$, M_1 : $\forall x, y \in \mathbf{R}$ je $x \cdot y \in \mathbf{R}$;
A_2 : $\forall, x\, y, z \in \mathbf{R}$ platí $(x + y) + z = x + (y + z)$, M_2 : $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ platí $(xy)z = x(yz)$;
asociativní zákon;

A_3 : $\exists\, 0 \in \mathbf{R}$ tak, že $x + 0 = x\ \forall x \in \mathbf{R}$, M_3 : $\exists\, 1 \in \mathbf{R}$ tak, že $x \cdot 1 = x\ \forall x \in \mathbf{R}$;
existence nulového prvku pro sčítání a jednotkového prvku pro násobení;

A_4 : $\forall x \in \mathbf{R}\, \exists\, -x \in \mathbf{R}$ tak, že $x + (-x) = 0$, M_4 : $\forall x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0\ \exists x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbf{R}$ tak, že $x \cdot x^{-1} = 1$;
existence opačného prvku pro sčítání a převrácené hodnoty pro násobení;

A_5 : $\forall x, y \in \mathbf{R}$ platí $x + y = y + x$, M_5 : $\forall x, y \in \mathbf{R}$ platí $x \cdot y = y \cdot x$;
komutativní zákon;

$$D: \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{R} \text{ platí } (x+y)z = xz + yz$$
distributivní zákon.

Poznámky: 1. Výše uvedeným axiomům vyhovují nejen reálná čísla, ale též racionální a komplexní čísla. Existují však ještě obecnější množiny, které těmto axiomům vyhovují. Takovým množinám říkáme tělesa.

2. V lineární algebře se seznámíte s pojmem vektorového prostoru, tedy opět jakousi množinou, která bude splňovat jistou soustavu axiomů.

1.6 Supremum a infimum číselné množiny.

Poznámky: 1. V tomto paragrafu se budeme zabývat vlastnostmi podmnožin $\mathbf{R}$. Podmnožiny, se kterými se budeme nejčastěji setkávat, budou intervaly. Zopakujme si tedy běžné označení. Jsou-li a, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$, pak
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbf{R};\ a \le x \le b\}$ uzavřený interval
$(a, b) = \{x \in \mathbf{R};\ a < x < b\}$ otevřený interval
$\langle a, b) = \{x \in \mathbf{R};\ a \le x < b\}$ polouzavřený interval
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbf{R};\ a < x \le b\}$ polouzavřený interval

$\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R};\ x \ge a\}$
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R};\ x > a\}$
$(-\infty, b\rangle = \{x \in \mathbf{R};\ x \le b\}$
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R};\ x < b\}$
$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$. Prvé čtyři intervaly jsou omezené, zbývající jsou neomezené.

2. S reálnými čísly souvisí další pojem, t.zv. absolutní hodnota.

Definice: Absolutní hodnotou reálného čísla x rozumíme číslo $|x|$, definované vztahy

$$|x| = x \iff x \ge 0, \qquad |x| = -x \iff x \le 0.$$

Poznámky: 1. Pojem absolutní hodnoty bude rozšířen i na komplexní čísla, bude však zaveden i pro značně obecnější objekty, jako norma.

2. Vlastnosti absolutní hodnoty nebudeme odvozovat, ponecháme je jako cvičení. Platí na příklad

$$|x| \ge 0 \ \forall\, x \in \mathbf{R}; \quad |x| = 0 \iff x = 0,$$

$$|x + y| \le |x| + |y| \ \forall\, x, y \in \mathbf{R}; \quad \text{(trojúhelníková nerovnost)},$$

$$|xy| = |x||y| \ \forall\, x,\, y \in \mathbf{R}.$$

Definice: Buď $A \subset \mathbf{R}$ množina. Řekneme, že A je shora omezená, jestliže existuje číslo $K \in \mathbf{R}$ tak, že $\forall\, x \in A$ platí $x \le K$.
Jestliže existuje číslo $L \in \mathbf{R}$ tak, že $L \le x \ \forall\, x \in A$, řekneme, že A je zdola omezená.
O množině $B \subset \mathbf{R}$ řekneme, že je omezená, je-li shora i zdola omezená.
Množinu, která není omezená, nazýváme neomezenou.
Číslo $a \in A$ nazveme minimem množiny A, jestliže platí $a \le x \ \forall\, x \in A$. O číslu $b \in A$ řekneme, že je maximem množiny A, jestliže $x \le b \ \forall\, x \in A$. Značíme $a = \min A$, $b = \max A$.

Poznámky: 1. Z předchozí definice je zřejmé, že $\min A$ je nejmenší a $\max A$ největší číslo množiny A. Na jednoduchých příkladech je však vidět, že daná množina nemusí mít nejmenší nebo největší číslo, i když je omezená. Buď $A = \langle 0, 1)$, $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Potom je $\min A = 0$, $\max B = 1$, ale $\max A$ ani $\min B$ neexistují. V dalším zavedeme pojmy, které nám tuto nepříjemnost odstraní.

2. Je-li $A \subset \mathbf{R}$ omezená množina, pak zřejmě existuje číslo K tak, že $|x| \leq K \ \forall x \in A$. Obráceně, jestliže platí výše uvedená nerovnost, pak je A omezená množina, poněvadž pro všechna $x \in A$ platí $-K \leq x \leq K$.

3. Užitím pojmu maxima lze definovat velmi jednoduše absolutní hodnotu. Je totiž

$$|x| = \max\{x, -x\} \ \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Definice: Buď $A \subset \mathbf{R}$ neprázdná množina. Řekneme, že číslo G je supremum množiny A a značíme $G = \sup A$, jestliže platí
1. $x \leq G \ \ \forall x \in A$,
2. Je-li $G' < G$ libovolné, potom $\exists\, x \in A$ tak, že $x > G'$.

Analogicky řekneme, že číslo g je infimum množiny A a značíme $g = \inf A$, jestliže platí
1. $x \geq g \ \ \forall x \in A$,
2. Je-li $g' > g$ libovolné, pak $\exists\, x \in A$ tak, že $x < g'$.

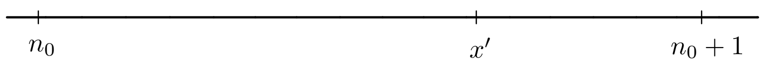
Poznámky: 1. Je zřejmé, že pokud existuje $\max A$, je $\max A = \sup A$ a analogicky pro $\min A$ a $\inf A$.
2. Je-li $B \neq \emptyset$, pak $\sup B \geq \inf B$ a je-li $A \subset B$, pak $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

3. Hlavní výhodou pojmu suprema a infima spočívá v tom, že pro omezenou množinu vždy existují.

! Věta: Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbf{R}$ má supremum. Analogicky každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbf{R}$ má infimum.

Důkaz: Je zřejmé, že pokud existuje $\sup A$, je určeno jednoznačně. Je-li A shora omezená, existuje $n_0 \in \mathbf{Z}$ tak, že

$$\forall \ x \in A \ \text{ je } \ x < n_0 + 1; \quad \exists x' \in A \ \text{ tak, že } \ x' \geq n_0.$$



Interval $\langle n_0, n_0 + 1)$ rozdělíme na 10 stejných částí délky 10^{-1}. Nyní existuje celé číslo n_1 $(0 \leq n_1 \leq 9)$ tak, že

$$\langle n_0, n_1\, ;\, n_0, n_1 + 10^{-1}) \cap A \neq \emptyset; \quad \forall x \in A: \ x < n_0, n_1 + 10^{-1}; \quad \exists x' \in A: \ x' \geq n_0, n_1.$$

V dalším kroku zvolíme n_2 tak, že

$$\langle n_0, n_1 n_2\, ;\, n_0, n_1 n_2 + 10^{-2}) \cap A \neq \emptyset; \quad \forall x \in A: \ x < n_0, n_1 n_2 + 10^{-2}; \quad \exists x' \in A: \ x' \geq n_0, n_1 n_2.$$

Takto budeme pokračovat dále, až dostaneme posloupnost do sebe vložených intervalů, jejichž průnikem je reálné číslo $n_0, n_1 n_2 \dots$, což je zřejmě $\sup A$.

Poznámky: 1. Uvedená metoda je založena na principu t.zv. vložených intervalů, která bude v dalším ještě několikrát aplikována.

2. Jestliže množina A není shora omezená, pak $\sup A = +\infty$; analogicky $\inf A = -\infty$, není-li A zdola omezená. Podle definice suprema a infima je $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$; jediný případ, kdy infimum je větší než supremum.

Definice: Množina uzavřených intervalů $\{ \langle a_n, b_n \rangle;\ n \in \mathbf{N},\ a_n, b_n \in \mathbf{R}, a_n \leq b_n\}$ se nazývá systém do sebe vnořených intervalů, jestliže $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle\ \forall n \in \mathbf{N}$.

Věta: Libovolný systém do sebe vnořených intervalů má neprázdný průnik.

Poznámka: V dalším zavedeme několik t.zv. topologických pojmů v souvislosti s vlastnostmi podmnožin $\mathbf{R}$. Jejich důležitost se ukáže až později v souvislosti s vyšetřováním podmnožin $\mathbf{R}^n$.

Definice: Buď $x_0 \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Okolím (nebo $\varepsilon-$okolím) bodu x_0 rozumíme otevřený interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ a značíme $U(x_0, \varepsilon)$.
Prstencovým okolím bodu x_0 nazveme množinu $P(x_0, \varepsilon) = U(x_0, \varepsilon) - \{x_0\}$.

Poznámky: 1. Je zřejmé, že

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R};\ |x - x_0| < \varepsilon\}; \quad P(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

2. V dalším budeme též definovat a používat t.zv. pravá a levá okolí, t.j. množiny

$$U^+(x_0, \varepsilon) = \langle x_0, x_0 + \varepsilon), \ \ U^-(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0\rangle;$$

$$P^+(x_0, \varepsilon) = (x_0, x_0 + \varepsilon), \ \ P^-(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0).$$

Definice: Buď $A \subset \mathbf{R}$ podmnožina. Bod $a \in A$ nazveme vnitřním bodem množiny A, jestliže existuje okolí $U(a, \varepsilon)$ bodu a takové, že $U(a, \varepsilon) \subset A$. Množinu všech vnitřních bodů množiny A nazveme vnitřkem a označíme $\operatorname{Int} A$.
Bod $b \in \mathbf{R}$ nazveme hraničním bodem množiny A, jestliže každé okolí bodu b obsahuje alespoň jeden bod množiny A a alespoň jeden bod, který do množiny A nepatří. Množinu všech hraničních bodů množiny A nazýváme hranicí množiny A a značíme ∂A.
Množinu $\overline{A} = A \cup \partial A$ nazýváme uzávěrem množiny A.
Množinu $G \subset \mathbf{R}$ nazveme otevřenou, jestliže jsou všechny její body vnitřní. O množině $F \subset \mathbf{R}$ řekneme, že je uzavřená, jestliže $F = \overline{F}$.
Bod $x \in \mathbf{R}$ nazveme hromadným bodem množiny A, jestliže libovolné okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A. Bod $a \in A$ nazveme izolovaným bodem A, není-li hromadným bodem A. Množinu $B \subset \mathbf{R}$ nazveme diskrétní, jestliže jsou všechny její body izolované.

Poznámky: 1. Podrobněji budou tyto pojmy rozvedeny na konkrétních příkladech.

2. Ukazuje se, že systém okolí tvaru $U(x, \varepsilon)$ pro $x \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$ hraje důležitou roli při zkoumání t.zv. topologie reálné osy.

Kapitola 2

Posloupnosti.

2.1 Limita posloupnosti.

Definice: Posloupností reálných čísel nazveme zobrazení $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$. Jestliže označíme $f(n) = a_n$, pak a_n nazýváme $n-$tým členem dané posloupnosti a zapisujeme

$$\{a_n\}, \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Poznámky: 1. Je-li $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{C}$, dostaneme posloupnost komplexních čísel. Analogicky můžeme definovat posloupnost vektorů, matic nebo jiných podobných objektů.

2. Posloupnost je jinými slovy přiřazení, pomocí něhož každému přirozenémnu číslu n přiřadíme reálné nebo komplexní číslo a_n.

Příklady: 1. Ze střední školy jsou známé příklady aritmetické a geometrické posloupnosti. Aritmetická posloupnost je definována předpisem $a_n = a + (n-1]d$, kde a, d jdou daná čísla, $n = 1, 2, \dots$. Číslo d nazýváme diferencí dané posloupnosti.
Geometrická posloupnost je definována předpisem $a_n = aq^{n-1}$, kde a, q jsou pevná čísla, $n = 1, 2, \dots$. Číslo q nazýváme kvocientem dané posloupnosti.

2. Ne každá posloupnost je však aritmetická nebo geometrická. Na příklad

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \qquad b_n = (-1)^n n, \qquad c_n = \frac{2^n}{n+1}$$

jsou posloupnosti, které nejsou ani aritmetické ani geometrické.

3. Posloupnost můžeme též zadat rekurentním vztahem, na příklad

$$a_n = 3a_{n-1} + 1,\ a_1 = 0 \quad \text{nebo} \quad a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n-1},\ a_1 = 1,\ a_2 = 0.$$

Nalézt předpis pro $n-$tý člen v tomto případě znamená řešit t.zv. diferenční rovnici.

Definice: Posloupnost $\{a_n\}$ nazveme omezenou, jestliže existuje číslo $K > 0$ tak, že

$$|a_n| \le K \ \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Řekneme, že $\{b_n\}$ je shora (resp. zdola) omezená, jestliže existuje číslo M (resp. m) tak, že

$$b_n \le M \ \ \forall n \in \mathbf{N} \quad (\text{resp. } b_n \ge m \ \ \forall n \in \mathbf{N}).$$

Poznámky: 1. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená právě když je množina členů této posloupnosti omezená.

2. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená právě když je omezená shora i zdola.

Příklady: 1. Posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ je omezená. Platí totiž $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ a stačí tedy zvolit $K = 1$.

2. Posloupnost $\{n^2\}$ je zdola omezená, ale není shora omezená. Je zřejmě $0 \leq n^2 \ \forall n \in \mathbf{N}$. Nyní $\forall K > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $n_0 > K$ (axiom) a tedy $n_0^2 \geq n_0 > K$.

3. Posloupnost $a_n = (-1)^n n^3$ není ani shora ani zdola omezená. To je zřejmé, jestliže si na příklad uvědomíme, že $a_{2n} = 8n^3 \geq n, \ \ a_{2n+1} = -(2n+1)^3 \leq -n$.

Definice: Posloupnost $\{a_n\}$ nazveme rostoucí (resp. neklesající), jestliže pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí

$$a_{n+1} > a_n \quad (\text{resp. } a_{n+1} \geq a_n).$$

Řekneme, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající (resp. nerostoucí), jestliže pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí

$$b_{n+1} < b_n \quad (\text{resp. } b_{n+1} \leq b_n).$$

Všechny tyto posloupnosti nazýváme monotonní, rostoucí a klesající posloupnosti ryze (nebo ostře) monotonní.

Příklad: Ukažte, že posloupnost $\left\{\frac{2n-1}{n+3}\right\}$ je rostoucí.

Máme dokázat, že $\forall n \in \mathbf{N}$ platí $\frac{2n-1}{n+3} < \frac{2n+1}{n+4}$. Po vynásobení výrazem $(n+3)(n+4)$ dostaneme nerovnost $-4 < 3$, což je správná nerovnost.

Poznámka: Při vyšetřování vlastností posloupnosti $\{a_n\}$ je možné zkoumat několik členů dané posloupnosti. Tím je však informace o posloupnosti značně neúplná, a proto je vhodné se zajímat o chování $\{a_n\}$ pro veliká n. Může se stát, že se členy této posloupnosti příliš neliší od nějakého čísla a. Řekneme, že daná posloupnost má za limitu číslo a. Vezmeme-li posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, je $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{9}{10}, \ldots, \frac{99}{100}, \ldots, \frac{999}{1000}, \ldots\right\}$ a zdá se, že tato posloupnost má za limitu číslo 1. Nyní tento pojem budeme precizovat.

Definice: Řekneme, že číslo a je limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ n_0 \in \mathbf{N}; \ \forall \ n \geq n_0 \ \ (n \in \mathbf{N}) \ \ \Longrightarrow \ \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

(Slovy: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$, n přirozené, platí $|a_n - a| < \varepsilon$). Tuto skutečnost zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{nebo stručně} \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{nebo} \quad a_n \longrightarrow a$$

a říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní.

Poznámky: 1. Nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ znamená, že $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ pro $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$, tedy $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ je $a_n \in U(a, \varepsilon)$.

2. Číslo ε udává, jak mnoho (nebo málo) se členy posloupnosti $\{a_n\}$ liší od své limity. Jestliže ε zmenšíme, pak se obecně index $n_0(\varepsilon)$ zvětší.

3. O posloupnosti, která nemá limitu, řekneme, že je divergentní. V dalším ukážeme, že mezi divergentními posloupnostmi lze vybrat takové, jejichž členy se neomezeně zvětšují nebo zmenšují.

Příklady: 1. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.
Máme ukázat, že $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $\forall n \geq n_0$ platí $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$, tedy $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ a stačí volit $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

2.Uvažme posloupnost $\{n^2\}$, t.j. $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$. Je vidět, že se vzrůstajícím n rostou členy dané posloupnosti nade všechny meze. Neboli předepíšeme-li si libovolné číslo $K > 0$, pak lze nalézt index $n_0(K)$ tak, že $n^2 > K$ pro $n \geq n_0$. Tím dostáváme definici nevlastní limity.

Definice: Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu $+\infty$ (resp. $-\infty$), jestliže k libovolnému číslu $K > 0$ (resp. $L < 0$) existuje index $n_0(K)$ (resp. $n_0(L)$) tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n > K$ (resp. $a_n < L$). Označujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{nebo} \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad (\text{resp.} \ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \ a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty).$$

2.2 Věty o limitách posloupností.

Věta: Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz: Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Potom k číslu $\varepsilon = 1$ existuje index n_0 tak, že pro $n \geq n_0$ je $a - 1 < a_n < a + 1$. Jestliže zvolíme

$$M = \max\{a_1, \dots, a_{n_0-1}, a+1\}, \quad m = \min\{a_1, \dots, a_{n_0-1}, a-1\},$$

platí zřejmě $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

Věta: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz: Je zřejmé, že posloupnost $\{a_n\}$ nemůže mít zároveň vlastní i nevlastní limitu. Stejně tak nemůže mít limitu $+\infty$ a zároveň $-\infty$.
Nechť tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a zároveň $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, kde $a < b$. Jestliže zvolíme $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, pak existují indexy n_1, n_2 tak, že

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq n_1; \qquad b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon \quad \forall n \geq n_2.$$

Položíme-li nyní $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, platí pro $n \geq n_0$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$$

a to je spor.

Věta: Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Jestliže existuje index n_1 tak, že pro všechna $n \geq n_1$ platí $a_n \leq b_n$, pak $a \leq b$.

Důkaz: Předpokládejme, že $a > b$ a zvolme $0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2}$. Pak existují indexy n_2, n_3 tak, že platí

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall \ n \geq n_2; \qquad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \forall \ n \geq n_3.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Potom je pro $n \geq n_0$

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \quad \text{tedy} \quad b_n < a_n \quad \forall\ n \geq n_0.$$

Tento spor ukončuje důkaz věty.

Poznámky: 1. Předchozí větu nelze vylepšit tím, že budeme předpokládat $a_n < b_n$ a očekávat, že $a < b$. Jestliže zvolíme na příklad $a_n = \frac{n}{n+1}$, $b_n = \frac{n+1}{n}$, je sice $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbf{N}$, ale $a = b = 1$.

2. Předchozí větu lze však obrátit v tom smyslu, že ze vztahu $a < b$ plyne stejný vztah pro členy posloupností, počínaje jistým indexem.

Věta: Buď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ a nechť $a < b$. Potom existuje index n_1 tak, že pro všechna $n \geq n_1$ platí $a_n < b_n$.

Důkaz: Zvolme $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$. Potom existují indexy n_2, n_3 tak, že

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall\ n \geq n_2; \qquad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \forall\ n \geq n_3.$$

Položme $n_1 = \max\{n_2, n_3\}$. Potom pro $\forall n \geq n_1$ platí $a_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b_n$, tedy $a_n < b_n$.

Věta: (O sevření.)
Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ a nechť existuje index n_1 tak, že pro všechna $n \geq n_1$ platí nerovnost $a_n \leq b_n \leq c_n$. Potom je též $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Důkaz: Z definice limity posloupnosti plyne, že ke každému $\varepsilon > 0$ existují indexy n_2, n_3 tak, že pro všechna $n \geq n_2$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$ a pro všechna $n \geq n_3$ je $|c_n - a| < \varepsilon$. Jestliže zvolíme $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, pak pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon, \quad \text{tedy} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Věta: (Bolzano-Cauchyovo kritérium.)
Nutná a postačující podmínka pro to, aby posloupnost $\{a_n\}$ byla konvergentní je, aby k libovolnému $\varepsilon > 0$ existoval index n_0 tak, že pro všechna $n, m \geq n_0$, $(n, m \in \mathbf{N})$ platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz: 1. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Je-li nyní $m, n \geq n_0$, potom $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$.

2. Obrácené tvrzení nebudeme dokazovat. Jeho úplný důkaz znamená konstrukci iracionálních čísel a je analogický důkazu věty o existenci suprema a infima číselné množiny (viz paragraf 1.6).

Definice: Posloupnost $\{a_n\}$, která splňuje podmínku předchozí věty, se nazývá <u>cauchyovská</u> nebo <u>fundamentální</u>.

Poznámka: Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy cauchyovská, jestliže

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N}; \quad \forall\ m, n \geq n_0\ \ (m, n \in \mathbf{N}); \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta: Buďte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ vlastní a nechť $\alpha \in \mathbf{R}$ je pevné. Potom platí

1. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha a$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
5. Je-li $b \neq 0$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Důkaz: 1. Poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, platí, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Je však

$$| \, |a_n| - |a| \, | \leq |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall \, n \geq n_0.$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

2. Vzhledem k tomu, že $|\alpha a_n - \alpha a| = |\alpha| \, |a_n - a|$, stačí, abychom zvolili n_0 tak, aby $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$|\alpha a_n - \alpha a| < \varepsilon, \text{ neboli } \lim_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha a.$$

Případ $\alpha = 0$ je zřejmý.

3. Z předpokladů věty dostaneme, že

$$\forall \, \varepsilon > 0 \ \exists \, n_1, n_2 \in \mathbf{N}; \ \forall \, n \geq n_1 \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ a } \forall \, n \geq n_2 \implies |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jestliže nyní zvolíme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, dostaneme že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ neboli } \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a+b.$$

4. Platí

$$| \, a_n b_n - ab \, | = | \, a_n b_n - a b_n + a b_n - ab \, | \leq | \, b_n | \, | \, a_n - a \, | + | \, a \, | \, | \, b_n - b \, |.$$

Poněvadž posloupnost $\{b_n\}$ konverguje, je omezená a tedy existuje číslo $K > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $| \, b_n| \leq K$. Buď nyní $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existují indexy n_1, n_2 tak že

$$\forall \, n \geq n_1 \text{ platí } | \, a_n - a \, | < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ a } \forall \, n \geq n_2 \text{ platí } | \, b_n - b \, | < \frac{\varepsilon}{2| \, a \, |} \ (a \neq 0).$$

Jestliže nyní zvolíme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, dostaneme

$$| \, a_n b_n - ab \, | < \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon \text{ a tedy } \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = ab.$$

Je-li $a = 0$, potom je $ab = 0$ a $| \, a_n b_n| \leq K | \, a_n|$ a tvrzení je zřejmé.

5. Je

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} \right| = \frac{| \, a_n b - ab + ab - a b_n|}{| \, b_n b \, |} \leq \frac{| \, b \, | \, | \, a_n - a \, | + | \, a \, | | \, b_n - b \, |}{| \, b_n b \, |}.$$

Poněvadž je $|b| \neq 0$, existuje index n_1 tak, že pro všechna $n \geq n_1$ platí $| \, b_n| \geq \frac{|b|}{2}$ a odtud plyne, že $\frac{1}{| \, b_n b \, |} \leq \frac{2}{| \, b \, |^2}$. Dále existují indexy n_2 a n_3 tak, že

$$\forall \, n \geq n_2 \text{ platí } | \, a_n - a \, | < \frac{\varepsilon \, | \, b \, |}{4} \text{ a } \forall \, n \geq n_3 \text{ platí } | \, b_n - b \, | < \frac{\varepsilon \, | \, b \, |^2}{4 \, | \, a \, |} \ (a \neq 0).$$

Jestliže položíme nyní $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, dostaneme pro všechna $n \geq n_0$ odhad

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{2}{|\,b\,|^2} \cdot \{\,|\,b\,|\,|\,a_n - a\,| + |\,a\,|\,|\,b_n - b\,|\,\} < 2\left\{\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right\} = \varepsilon$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Je-li $a = 0$, je tvrzení zřejmé.

Poznámky: 1. Důkaz předchozí věty (zvláště body 4 a 5) vypadá nepřirozeně a zbytečně komplikovaně. Jestliže však chceme vyhovět přesně požadavkům definice, nemáme na vybranou. To je jeden z důvodů, proč uvádíme důkaz se všemi technickými detaily. Další z důvodů je ten, že budeme později nuceni přesně formulovat a dokazovat komplikovanější tvrzení a jestliže si na tento způsob uvažování včas zvykneme, nebudeme později mít potíže. Důkazy tohoto druhu můžeme zjednodušit, jestliže si uvědomíme podstatu věci, totiž, že rozdíl $\left(\text{např. } \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right|\right)$ musíme být schopni učinit libovolně malý. Tedy formálně

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{|\,b\,|\,|\,a_n - a\,| + |\,a\,|\,|\,b_n - b\,|}{|\,b_n b\,|} < \frac{2}{|b|^2}\{|b|\varepsilon + |a|\varepsilon\} = \frac{2(\,|b| + |a|\,)}{|b|^2} \cdot \varepsilon.$$

Poněvadž $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je i $\frac{2(\,|b|+|a|\,)}{|b|^2}\varepsilon$ libovolné.

2. Tvrzení 3 a 4 z předchozí věty lze okamžitě indukcí zobecnit na libovolný konečný počet sčítanců nebo činitelů. Stejně tak z tvrzení 4 okamžitě plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k$ pro libovolné $k \in \mathbf{N}$.

3. Předchozí věta se používá často při praktickém výpočtu limit posloupností, poněvadž dává možnost výpočtu komplikovanějších limit, kde se pomocí definice nedá uspět.

Příklady: 1. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Důkaz: Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, lze ke každému $K > 0$ nalézt index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n| > K$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a zvolme $K > 0$ tak, že $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Potom pro $n \geq n_0$ platí $\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|} < \frac{1}{K} < \varepsilon$.

2. Pro libovolné $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = +\infty$.

Důkaz: Buď $K > 0$ libovolné. Máme ukázat, že existuje index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $n^r > K$, neboli $n > K^{1/r}$ a stačí zvolit $n_0 = \left[K^{1/r} + 1\right]$.

3. Pro libovolné $q \in \mathbf{R}$ takové, že $|q| < 1$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Důkaz: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Máme ukázat, že existuje index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|q^n| < \varepsilon$. Z této nerovnosti dostaneme $n \log |q| < \log \varepsilon$ a tedy $n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|}$ (je $\log |q| < 0$). Nyní stačí zvolit $n_0 = \left[\frac{\log \varepsilon}{\log |q|} + 1\right]$.

4. Je-li $a > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

Důkaz: Poněvadž je $a > 1$, existuje $h > 0$ tak, že $a = 1+h$. Odtud $a^n = (1+h)^n \geq 1+nh > nh$. Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} nh = +\infty$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$.

5. Je-li $a > 0$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Důkaz: Je-li $a = 1$, je tvrzení zřejmé.
Nechť $a > 1$ a položme $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$, kde $h_n > 0$. Odtud plyne, že $a = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n > nh_n$ a tedy $0 < h_n < \frac{a}{n}$. Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, je též $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.
Je-li nyní $0 < a < 1$, pak $\frac{1}{a} > 1$ a tedy $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Důkaz: Označme $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, kde $h_n > 0$. Potom je

$$n = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

a tedy $h_n^2 = (\sqrt[n]{n} - 1)^2 < \frac{2}{n-1}$. Odtud $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2.3 Monotonní posloupnosti.

Věta: Každá monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je vlastní právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz: Je-li $\{a_n\}$ neklesající a není shora omezená, pak je zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Analogicky pro nerostoucí posloupnost, která není zdola omezená, platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
Buď tedy $\{a_n\}$ neklesající a shora omezená. Ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, kde $a = \sup\limits_{n=1,2,\ldots} a_n$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle definice suprema existuje index n_0 tak, že $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Poněvadž je $\{a_n\}$ neklesající, platí pro všechna $n \geq n_0$ nerovnost $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$. Zřejmě je však $a_n < a + \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Analogicky pro nerostoucí zdola omezenou posloupnost $\{b_n\}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b = \inf\limits_{n=1,2,\ldots} b_n$.

Příklady: 1. Buď $a \in \mathbf{R}$. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Důkaz: Pro $0 < a \leq 1$ je tvrzení zřejmé.
Nechť tedy $a > 1$ a označme $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Potom platí $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{a}{n+1} \leq x_n$ pro všechna $n \geq a$. Podle předchozí věty existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ (daná posloupnost je nerostoucí a zdola omezená).
Ze vztahu $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{a}{n+1}$ plyne přechodem k limitě $A = A \cdot 0 = 0$.
Poněvadž pro libovolné $a \in \mathbf{R}$ platí $\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!}$, plyne odtud, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ pro všechna $a \in \mathbf{R}$ (dokonce i pro $a \in \mathbf{C}$).

2. Buď $c > 0$ a definujme posloupnost $\{a_n\}$ předpisem $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ $\forall\, n \geq 1$. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

Důkaz: Je zřejmě $a_1 = \sqrt{c}$, $a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}$, $a_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \ldots$, tedy $\{a_n\}$ je rostoucí posloupnost. Ukážeme, že je shora omezená. Je zřejmé, že $a_1 < \sqrt{c} + 1$. Předpokládáme-li nyní, že $a_n < \sqrt{c} + 1$, potom

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

Označme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Poněvadž platí $a_{n+1}^2 = c + a_n$, dostaneme limitním přechodem rovnici $a^2 = c + a$. Hledaná limita je pak rovna kladnému kořenu této rovnice, neboli $a = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

3. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Tuto limitu označíme e.

Poznámka: Tento příklad je velmi důležitý vzhledem k tomu, že zavádí Eulerovo číslo e, základ přirozených logaritmů.

Důkaz: Ukážeme, že daná posloupnost je rostoucí a shora omezená.
α) Označme

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2\,!}\,\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots\{n-(n-2)\}}{(n-1)!}\,\frac{1}{n^{n-1}} +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots\{n-(n-2)\}\{n-(n-1)\}}{n\,!}\,\frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right) +$$

$$+\frac{1}{3\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)+\frac{1}{n\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Analogicky dostaneme

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3\,!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots +$$

$$\frac{1}{n\,!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Srovnáním těchto členů dostaneme $a_n < a_{n+1}$.

β) Platí

$$a_n = 1+1+\frac{1}{2\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \le$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!} \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 3.$$

Poznámky: 1. Přibližná hodnota čísla e je $e \doteq 2,7182818284\ldots$, uvedená limita však není vhodný předpis pro výpočet čísla e. Je na příklad $a_{10\,000} = 2,7181459259\ldots$ a shoduje se s číslem e pouze na třech desetinných místech. Později si ukážeme efektivnější způsob výpočtu čísla e. Platí totiž, že

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!}\right)$$

a tato posloupnost konverguje podstatně rychleji.

2. Číslo e hraje velmi důležitou roli (hned po číslu π) v celé matematice a všech jejích aplikacích. Jak již bylo řečeno, slouží za základ t.zv. přirozených logaritmů. Tedy $\log_e x = \ln x$.

2.4 Vybrané posloupnosti.

Definice: Buď dána posloupnost $\{a_n\}$ a nechť $k_1 < k_2 < \dots < k_p < \dots$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom posloupnost

$$\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_{k_1},\, a_{k_2}, \dots\}$$

nazýváme vybranou posloupností z dané posloupnosti $\{a_n\}$.

Věta: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ platí právě když pro každou vybranou posloupnost $\{a_{k_n}\}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Důkaz: 1. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a buď $\{a_{k_n}\}$ libovolná vybraná posloupnost. Je-li $a \in \mathbf{R}$ vlastní, pak $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbf{N};\ \forall\, n \geq n_0\ (n \in \mathbf{N}) \implies |a_n - a| < \varepsilon$. Poněvadž je však $k_n \geq n$, platí $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. Analogicky se tvrzení dokáže pro případ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

2. Obráceně kdyby pro dvě posloupnosti $\{a_{k_n}\}$ a $\{a_{l_n}\}$ platilo $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}$, pak nemůže existovat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, jinak by podle prvé části důkazu muselo být $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{l_n}$.

Důsledek: jestliže je možno vybrat z posloupnosti $\{a_n\}$ dvě posloupnosti tak, že jejich limity neexistují nebo jsou od sebe různé, pak daná posloupnost nemá limitu.

Příklad: $\{\sin n\frac{\pi}{2}\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost, která nemá limitu. Označíme-li $a_n = \sin n\frac{\pi}{2}$, pak $a_{2n} = 0,\ \ a_{4n+1} = 1$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

! Věta: (Bolzano-Weierstrass)
Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Důkaz: Buď $\{a_n\}$ omezená posloupnost. Potom existuje interval $\langle\alpha, \beta\rangle$ tak, že $a_n \in \langle\alpha, \beta\rangle$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Interval $\langle\alpha, \beta\rangle$ rozdělíme na polovinu. V jednom z intervalů $\left\langle\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right\rangle$, $\left\langle\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right\rangle$ leží nekonečně mnoho členů dané posloupnosti. Označme tento interval $\langle\alpha_1, \beta_1\rangle$ a rozdělme jej opět na polovinu. Buď $\langle\alpha_2, \beta_2\rangle$ ten interval, v němž leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$. Jestliže budeme tímto způsobem pokračovat dále, dostaneme posloupnost intervalů $\langle\alpha_n, \beta_n\rangle$ takovou, že

$$\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta - \alpha}{2^n},\ \ \alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots \leq \beta_n \leq \dots \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta.$$

Poněvadž jsou obě posloupnosti $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$ monotonní a omezené, dále $\beta_n - \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = c$.

Požadovanou posloupnost nyní vybereme následujícím způsobem. Buď k_1 takový index, že $a_{k_1} \in \langle\alpha_1, \beta_1\rangle$. Buď $k_2 > k_1$ takový index, že $a_{k_2} \in \langle\alpha_2, \beta_2\rangle$. Jestliže tímto způsobem pokračujeme dále, dostaneme posloupnost $\{a_{k_n}\}$, pro niž je $a_{k_n} \in \langle\alpha_n, \beta_n\rangle$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = c$.

Definice: Buď $\{a_n\}$ libovolná posloupnost reálných čísel. Číslo $a \in \mathbf{R}$ nazveme částečnou limitou dané posloupnosti, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel n.
Řekneme, že $+\infty$ (resp. $-\infty$) je částečnou limitou dané posloupnosti, jestliže pro každé $K > 0$ (resp. každé $L < 0$) nerovnost $a_n > K$ (resp. $a_n < L$) platí pro nekonečně mnoho přirozených čísel n.

Věta: Číslo a je částečnou limitou posloupnosti $\{a_n\}$ právě když existuje vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Důkaz: 1. Předpokládejme, že existuje vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. Potom

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \forall\ n \geq n_0 \text{ platí } |a_{k_n} - a| < \varepsilon$$

a tedy nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ platí pro nekonečně mnoho přirozených čísel n. Analogicky se postupuje i v případě $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \pm\infty$.

2. Nechť pro každé $\varepsilon > 0$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel n. Potom pro $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ existuje a_{k_n} tak, že $|a_{k_n} - a| < \frac{1}{n}$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Důsledek: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ platí právě když má posloupnost $\{a_n\}$ jedinou částečnou limitu a.

Poznámka: Ukazuje se, že pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}$ existuje mezi všemi částečnými limitami jedna, která je největší a jedna, která je nejmenší. Budeme je značit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ (limes superior a limes inferior).

Věta: Buď $\{a_n\}$ libovolná posloupnost reálných čísel a označme $\alpha_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, $\beta_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Potom je $\{\alpha_n\}$ neklesající a $\{\beta_n\}$ nerostoucí posloupnost, jejich limity označíme

$$\underline{a} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{a} \quad \overline{a} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

a nazveme <u>limes inferior</u> a <u>limes superior</u> dané posloupnosti.

Důkaz: Je zřejmé, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$. Monotonnost daných posloupností je též zřejmá.

Důsledek: Pro každou posloupnost $\{a_n\}$ platí $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Daná posloupnost má limitu právě když $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Příklady: 1. Označme $a_n = \sin n\frac{\pi}{2}$. Potom je $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -1$; $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 1$. Kromě toho existuje ještě jedna částečná limita 0.

2. Je-li $\{b_n\}$ posloupnost všech racionálních čísel takových, že $0 \leq b_n \leq 1$, pak je zřejmě $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n = 1$, ale každý bod $b \in \langle 0, 1\rangle$ je částečnou limitou dané posloupnosti.

Kapitola 3

Číselné řady.

3.1 Základní vlastnosti číselných řad.

Poznámka: V dalším budeme zkoumat význam symbolu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definice konvergentní řady je stejná i pro komplexní obor, ale v této kapitole se budeme převážně zabývat řadami s reálnými členy.

Definice: Buď $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost reálných nebo komplexních čísel. Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Číslo s_n nazveme $n-$tým částečným součtem řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a a_k $k-$tým členem dané řady.

Je-li posloupnost $\{s_n\}$ konvergentní, t.j. existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, číslo s nazveme součtem dané řady a zapisujeme $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Je-li $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ (resp $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$), říkáme, že daná řada diverguje k $+\infty$ (resp. k $-\infty$).

Neexistuje-li $\lim_{n\to\infty} s_n$, říkáme, že daná řada osciluje.

Příklady: 1. Geometrická řada.
Řadu $a + aq + aq^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} aq^n$, kde a a q jsou daná čísla, nazveme geometrickou řadou. Platí $s_n = a\,\frac{1-q^n}{1-q}$ a pro $|q| < 1$ je tedy daná řada konvergentní se součtem $s = \sum_{k=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$. Pro ostatní q je řada buďto divergentní nebo osciluje. Oba tyto případy budeme zařazovat mezi divergentní řady.

2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje.
Je $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, tedy $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ a odtud $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

3. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ osciluje. Je totiž $s_1 = 1,\ \ s_2 = 0,\ \ s_3 = 1,\ \ s_4 = 0,\ \ \dots$ a posloupnost $\{s_n\}$ nemá limitu.

Poznámky: 1. Pro konečné součty platí řada zákonů, jako je asociativní, komutativní a distributivní zákon a v dalším budeme zkoumat, za jakých podmínek lze tyto zákony rozšířit na nekonečné řady.

2. Pro asociativní zákon platí $a+(b+c) = (a+b)+c$, tedy sčítance můžeme libovolně uzávorkovat a výsledek se nezmění. Kdybychom aplikovali tento zákon slepě na příklad 3, t.j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$, dostaneme $1 = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0$. Nicméně platí

Věta: Buď $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (může být po případě i $s = +\infty$ nebo $s = -\infty$). Nechť je $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom je též

$$\sum_{i=1}^{\infty} \quad \sum_{n=k_{i-1}+1}^{k_i} a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + \dots = s,$$

kde $k_0 = 0$.

Důkaz: Označíme-li $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, pak platí $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Částečné součty uzávorkované řady jsou $s_{k_1},\ \ s_{k_2},\ \ \dots$ a tvoří vybranou posloupnost z posloupnosti $\{s_n\}$. Tedy také platí $\lim\limits_{n\to\infty} s_{k_n} = s$.

Věta: Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s,\ \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$ konvergentní řady a nechť $A,\ B \in \mathbf{R}$ jsou pevná. Potom platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(Aa_n + Bb_n) = As + Bt$.

Důkaz: Jestliže označíme $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\ \ t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k,\ \ \sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(Aa_k + Bb_k)$, pak platí $\sigma_n = As_n + Bt_n$ a z příslušné věty o limitách posloupností dostaneme okamžitě tvrzení věty.

Věta: Buď k přirozené číslo. Potom řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \ \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ buďto obě konvergují nebo obě divergují. Jestliže konvergují, platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Důkaz: Doplníme řadu $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ na tvar $0 + 0 + \dots + 0 + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots$ a označme σ_n její částečné součty, $s_n = \sum\limits_{l=1}^{n} a_l$. Potom pro $n > k$ platí $\sigma_n = s_n - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ a odtud dostaneme okamžitě tvrzení věty.

Věta: Buďte $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \ t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dvě konvergentní řady a nechť $a_n \le b_n$ platí pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Potom je $s \le t$.
Jestliže alespoň pro jednu hodnotu l platí $a_l < b_l$, je dokonce $s < t$.

Důkaz: Položme $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\ \ t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Potom je $s_n \le t_n$ a tedy $s \le t$.

Jestliže pro přirozené číslo l platí $a_l < b_l$, potom je

$$a_1 + \cdots + a_{l-1} + a_l < b_1 + \cdots + b_{l-1} + b_l, \qquad \sum_{n=l+1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=l+1}^{\infty} b_n,$$

tedy podle předchozí věty platí $s < t$.

! Věta: (Nutná podmínka konvergence)
Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz: Označíme-li $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, pak existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Je však $a_n = s_n - s_{n-1}$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = 0$.

Poznámka: Předchozí věta má i velmi důležitý praktický význam. Pro řady, kde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ můžeme okamžitě říci, že divergují. Ukazuje se však, že tato podmínka nestačí k tomu, aby daná řada konvergovala.

! Příklad: Harmonická řada. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Důkaz: Tato řada je typickou ukázkou řady, která splňuje nutnou podmínku konvergence, ale diverguje. Platí $s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n} > s_{n-1}$ a tedy posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ je rostoucí. Dále platí

$$s_2 = \frac{3}{2} \ge \frac{1}{2}; \;\; s_{2^2} = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ge s_2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \ge \frac{2}{2}; \;\; s_{2^3} = s_{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \ge s_{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{8} \ge \frac{3}{2}.$$

Indukcí odtud dostaneme, že

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \ge s_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \ge \frac{n+1}{2}.$$

Poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2^n} = +\infty$, platí též, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Věta: (Bolzano-Cauchyovo kritérium)
Nutná a postačující podmínka pro to, aby řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala, je, aby k libovolnému $\varepsilon > 0$ existoval index n_0 tak, že pro všechna $n \ge n_0$ a $p \in \mathbf{N}$ platilo

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Důkaz: Označme $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Posloupnost $\{s_n\}$ je konvergentní právě když (Bolzano-Cauchyova podmínka pro posloupnosti)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \forall n \ge n_0 \text{ a } \forall p \in \mathbf{N} \text{ platí } |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon, \text{ neboli } |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Poznámka: Je-li specielně $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak pro $p \to \infty$ dostaneme, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že $\left| \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| < \varepsilon$, t.j. zbytek konvergentní řady lze udělat libovolně malý. Bývá tedy velmi často důležité rozhodnout o konvergenci nějaké řady, i když nebudeme schopni nalézt její součet. Ten se pak přibližně najde tak, že se sečte několik (? v tom je však problém) prvých členů.

Příklad: Ukažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Důkaz: Podle Bolzano-Cauchyova kritéria máme ukázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_0 \text{ a } \forall p \in \mathbf{N} \text{ platí}$$

$$\left| \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \varepsilon.$$

Je však $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, tedy

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3.2 Řady s nezápornými členy.

Poznámka: V celém tomto paragrafu budeme předpokládat, že pro libovolnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

Věta: Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy. Je-li posloupnost $\{s_n\}$, kde $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ shora omezená, je daná řada konvergentní se součtem $\sup\limits_{n=1,2,\dots} s_n$. Není-li $\{s_n\}$ omezená, řada diverguje k $+\infty$.

Důkaz: Poněvadž je $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbf{N}$, je $\{s_n\}$ neklesající posloupnost.

! Věta: (První srovnávací kritérium)
Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dvě řady s nezápornými členy. Nechť existuje přirozené číslo k tak, že pro všechna $n \geq k$ je $a_n \leq b_n$. Potom platí:

1. Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz: Poněvadž řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ konvergují nebo divergují zároveň, můžeme předpokládat, že $k = 1$. Označíme-li $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, potom platí $0 \leq s_n \leq t_n$ a odtud plynou obě tvrzení. Je-li $t_n \to t < +\infty$, pak $s_n \to s < +\infty$ a obráceně, je-li $s_n \to +\infty$, musí také $t_n \to +\infty$.

Příklady: 1. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje pro $\alpha \geq 2$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

Důkaz: Je-li $\alpha \geq 2$, potom platí $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ a o řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ víme, že konverguje.

Pro $\alpha \leq 1$ platí $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Později bude ukázáno, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje i pro $\alpha > 1$.

2. Řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverguje.

Důkaz: Pro $n \geq 2$ platí $\ln n \leq n$ a odtud $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$. O řadě $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ víme, že diverguje.

Definice: Jsou-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dvě řady s nezápornými členy takové, že $a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$, pak řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nazýváme řadou <u>majorantní</u> nebo majorantou a řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řadou <u>minorantní</u> nebo minorantou.

Věta: (Druhé srovnávací kritérium)
Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řada s kladnými členy a nechť existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha > 0$. Potom řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ zároveň konvergují nebo divergují.

Důkaz: Poněvadž je $0 < \alpha < +\infty$, existují čísla A, B a index n_0 tak, že $A \leq \frac{a_n}{b_n} \leq B \ \forall n \geq n_0$, tedy $Ab_n \leq a_n \leq Bb_n$. Tvrzení nyní plyne z prvého srovnávacího kritéria.

Příklad: Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt[3]{n}}{n^3-n}$.

Řešení: Položme $b_n = \frac{1}{n^2}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n^2\sqrt[3]{n}}{n^3 - n} = 1$$

a daná řada konverguje.

Věta: (Cauchyovo kritérium)
Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy. Potom platí:

1. Jestliže existuje číslo $q \in (0,1)$ a index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, je daná řada konvergentní.

2. Jestliže pro nekonečně mnoho indexů n platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, je řada divergentní.

Důkaz: 1. Jestliže pro $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, dostaneme $a_n \leq q^n$ a podle srovnávacího kritéria je řada konvergentní (geometrická majoranta).

2. Jestliže pro nekonečně mnoho n platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, je $a_n \geq 1$ a není splněna nutná podmínka konvergence ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).

Důsledek: (Limitní Cauchyovo kritérium)
Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy a nechť existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$. Potom platí

1. Je-li $A < 1$, je daná řada konvergentní.

2. Je-li $A > 1$, řada diverguje.

Důkaz: 1. Je-li $A < 1$, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ a zvolme ε tak, že $A+\varepsilon < 1$. Podle předchozí věty je daná řada konvergentní.

2. Je-li $A > 1$, pak existuje index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} > 1$, tedy $a_n \geq 1$ a není splněna nutná podmínka konvergence.

Příklad: Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$.

Podle limitního Cauchyova kritéria platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ a řada konverguje.

Věta: (D'Alembertovo kritérium)

Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy. Potom platí

1. Existuje-li číslo $q \in (0,1)$ a index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, je daná řada konvergentní.

2. Jestliže pro všechna $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, je řada divergentní.

Důkaz: 1. Poněvadž můžeme vynechat konečný počet členů řady, aniž by se změnila skutečnost, že řada konverguje nebo diverguje, můžeme předpokládat, že nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ platí pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Odtud dostaneme $a_2 \leq a_1 q$, $a_3 \leq a_2 q \leq a_1 q^2$ a indukcí $a_n \leq a_1 q^{n-1}$. Tím dostáváme majorantu, což je opět geometrická řada.

2. Jestliže $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro $n \geq n_0$, pak platí $a_n \geq a_{n_0} > 0$ a není splněna nutná podmínka konvergence.

Věta: (Limitní d'Alembertovo kritérium)

Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy a nechť existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$. Potom platí

1. Je-li $A < 1$, je daná řada konvergentní.

2. Je-li $A > 1$, řada diverguje.

Důkaz: Provede se analogicky jako v případu limitního Cauchyova kritéria.

Příklad: Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ $(a > 0)$.

Platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tedy řada konverguje.

Poznámky: 1. Limitní Cauchyovo ani d'Alembertovo kritérium nepraví nic v případě, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Ukazuje se, že v tomto případě také nelze o konvergenci nebo divergenci dané řady těmito kritérii rozhodnout. Vezmeme-li na příklad řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, dostaneme v obou případech $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, i když první řada diverguje a druhá řada konverguje.

2. D'Alembertovo kritérium bývá šikovnější, pokud se týče výpočtu (snáze se počítá s podíly, než s $n-$tými odmocninami), ale bývá slabší v tom smyslu, že nelze pomocí něj rozhodnout o konvergenci některých řad, zatímco Cauchyovým kritériem to udělat lze.

Příklad: Vyšetřete konvergenci řady

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{5 + (-1)^n}{2} \right\}^{-n}.$$

Řešení: Užijeme-li d'Alembertova kritéria, dostaneme

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{1}{3^{2n}}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{2} > 1; \quad \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{\frac{1}{3^{2n}}}{\frac{1}{2^{2n-1}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot \frac{1}{3} < 1$$

a d'Alembertova kritéria nelze použít, ani v jeho limitní podobě, poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje. Podle Cauchyova kritéria dostaneme

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{3}; \qquad \sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

a řada tedy konverguje.

Poznámka: Je možné dokázat, že platí

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

a daná limitní kritéria lze zobecnit v následujícím smyslu:
Je-li $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ nebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$, je daná řada konvergentní, jestliže $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$, řada diverguje.
V předchozím příkladu je $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$.

3.3 Konvergence libovolných řad.

Definice: Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$, kde $a_n \ge 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$, nazýváme alternující řadou.

Věta: (Leibnizovo kritérium)
Nechť pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n \ge a_{n+1} > 0$. Potom je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ konvergentní právě když $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz: 1. Je-li daná řada konvergentní, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (nutná podmínka konvergence).
2. Buď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a označme $s_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n$. Potom platí

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \ge s_{2n}; \quad s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \le s_{2n-1}.$$

je tedy

$$s_2 \le s_4 \le s_6 \le \cdots \le s_{2n+2} = s_{2n+1} - a_{2n+2} \le \cdots \le s_{2n+1} \le \cdots \le s_5 \le s_3 \le s_1$$

a tedy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$. Dále však platí $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = s$.

Příklad: Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in \mathbf{R}$ je pevné.

Řešení: Je-li $\alpha > 0$, potom je $n^\alpha < (n+1)^\alpha \ \forall n \in \mathbf{N}$, tedy $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ a poněvadž platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, daná řada konverguje podle Leibnizova kritéria. Pro $\alpha \le 0$ není splněna nutná podmínka konvergence a tedy řada diverguje.

Věta: Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní, je i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Důkaz: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, tedy podle Bolzano-Cauchyova kritéria platí, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_0 \text{ a } \forall p \in \mathbf{N} \text{ je } |a_n| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Poněvadž je však

$$|a_n + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_n| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon,$$

je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Definice: Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, ale řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, pak řekneme, že daná řada konverguje neabsulutně nebo relativně.

Poznámka: Pro vyšetření absolutní konvergence je možno použít kritérií, odvozených pro řady s nezápornými členy.

Příklad: Vyšetřete absolutní konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Řešení: Je $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|$, tedy daná řada konverguje absolutně pro $|x| < 1$. Pro ostatní x nevíme, není však těžké rozhodnout, že řada konverguje neabsulutně pro $x = -1$ a pro ostatní x diverguje. Pro $x = 1$ dostaneme harmonickou řadu a pro ostatní hodnoty není splněna nutná podmínka konvergence.

Definice: Buď dána řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a nechť $k_1, k_2, \ldots$ je prostá posloupnost všech přirozených čísel. Potom řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazveme řadou přerovnanou z řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta: Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní řada se součtem s a nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je řada, která vznikne z původní řady přerovnáním. Potom je i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ absolutně konvergentní a má součet s.

Důkaz: 1. Ukážeme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je absolutně konvergentní. Označme $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Potom platí $|a_1| + \cdots + |a_n| \leq S \ \forall n \in \mathbf{N}$. Nechť $\tau_n = |a_{k_1}| + \cdots + |a_{k_n}|$ a označme $p = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Potom platí $\tau_n \leq |a_1| + \cdots + |a_p| \leq S$ a tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je absolutně konvergentní.

2. Nyní ukážeme, že obě řady mají stejný součet. Buď $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $\sigma_n = a_{k_1} + \cdots + a_{k_n}$ a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Máme ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = s$ neboli $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - \sigma_n) = 0$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existuje $r \in \mathbf{N}$ tak, že je $\sum\limits_{n=r+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$ (zbytek konvergentní řady). Je-li nyní $m_1, m_2, \ldots, m_p$ libovolná skupina čísel takových, že $m_i > r$, pak $|a_{m_1}| + \cdots + |a_{m_p}| < \varepsilon$. Dále posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje všechna přirozená čísla a existuje tedy číslo $q \in \mathbf{N}$ tak, že množina $\{k_1, \ldots, k_q\}$ obsahuje čísla $1, \ldots, r$. Je-li nyní $n > q$, bude platit $|s_n - \sigma_n| \leq |a_{m_1}| + \cdots + |a_{m_p}| < \varepsilon$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n - \sigma_n) = 0$.

Věta: Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konvergentní řada s reálnými členy. Buď s libovolné reálné číslo [resp. $s = \pm\infty$]. Potom existuje řada se součtem s, která vzniká přerovnáním z řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz: Označíme-li b_n kladné a c_n záporné členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, musí platit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = -\infty$. Kdyby to tak nebylo, je daná řada absolutně konvergentní. Navíc platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

1. Nechť s je konečné a buď n_1 nejmenší přirozené číslo tak, pro něž

$$b_1 + \cdots + b_{n_1} > s.$$

Dále buď m_1 nejmenší přirozené číslo, pro něž je

$$b_1 + \cdots + b_{n_1} + c_1 + \cdots + c_{m_1} < s.$$

Dál n_2 je nejmenší přirozené číslo, pro něž

$$b_1 + \cdots + b_{n_1} + c_1 + \cdots + c_{m_1} + b_{n_1+1} + \cdots + b_{n_2} > s$$

a takto pokračujeme dále. Přerovnaná řada má součet s, poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

2. Je-li $s = +\infty$, vedeme důkaz takto. Buď n_1 nejmenší přirozené číslo tak, že

$$b_1 + \cdots + b_{n_1} > 1.$$

Utvoříme součet

$$b_1 + \cdots + b_{n_1} + c_1.$$

Nechť n_2 je nejmenší přirozené číslo, pro něž je

$$b_1 + \cdots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_+1} + \cdots + b_{n_2} > 2$$

a takto pokračujeme dále.

Analogicky postupujeme v případu $s = -\infty$.

Poznámky: 1. Analogickým způsobem je možno dokázat, že řadu lze přerovnat tak, aby oscilovala.

2. V dalším si všimneme otázky násobení nekonečných řad. Pro násobení konečných součtů platí distributivní zákon:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_1\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{[i,j]} a_i b_j,$$

kde sčítáme přes všechny uspořádané dvojice $[i,j]$, kde $i = 1, \ldots, n\,;\;\; j = 1, \ldots, m$.

Věta: Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s\,,\;\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = t$ dvě absolutně konvergentní řady. Potom je dvojná řada $\sum\limits_{n,k=1}^{\infty} a_n b_k$ absolutně konvergentní a má součet $s \cdot t$.

Důkaz: 1. Nejdříve ukážeme, že je daná dvojná řada absolutně konvergentní. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = S$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |b_k| = T$ a uvažme částečný součet příslušné dvojné řady. Buďte

$[n_1,k_1],[n_2,k_2],\dots,\ [n_p,k_p]$ navzájem různé uspořádané dvojice. Potom platí

$$\sum_{l=1}^{p}|a_{n_l}b_{k_l}|\le\sum_{l=1}^{\alpha}|a_l|\cdot\sum_{k=1}^{\beta}|b_k|\le S\cdot T,\ \text{ kde }\ \alpha=\max\{n_1,\dots,n_p\};\ \beta=\max\{k_1,\dots,k_p\}.$$

Odtud plyne, že dvojná řada $\sum\limits_{n,k=1}^{\infty}a_nb_k$ je absolutmě konvergentní. Členy dané dvojné řady zapíšeme do schematu

$$\begin{array}{llllll}
a_1b_1 & +a_1b_2 & +a_1b_3 & +\dots & +a_1b_n & +\dots\\
+a_2b_1 & +a_2b_2 & +a_2b_3 & +\dots & +a_2b_n & +\dots\\
+a_3b_1 & +a_3b_2 & +a_3b_3 & +\dots & +a_3b_n & +\dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
+a_nb_1 & +a_nb_2 & +a_nb_3 & +\dots & +a_nb_n & +\dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots.
\end{array}$$

2. Poněvadž je dvojná řada absolutně konvergentní, nezáleží na pořadí sčítanců. Součet v $n-$tém řádku je tedy

$$a_nb_1+a_nb_2+\dots+a_nb_k+\dots=a_nt$$

a součet celé řady

$$a_1t+a_2t+\dots=t(a_1+a_2+\dots)=t\cdot s.$$

Poznámka: Součet dané dvojné řady lze nyní zapsat ve tvaru

$$\sum_{n,k=1}^{\infty}a_nb_k=a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\dots=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}a_ib_{n-i}.$$

Příklad: Najděte $\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right\}^2$.

Řešení: Pro $|x|<1$ platí

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\dots$$

a vynásobením této řady samotné se sebou dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^k=(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)=1+2x+3x^2+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}.$$

Kapitola 4

Reálné funkce jedné reálné proměnné.

4.1 Základní pojmy.

Definice: Buď $D \subset \mathbf{R}$. Zobrazení $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné. Množinu D nazveme definičním oborem zobrazení f a množinu $f(D) = \{f(x);\, x \in D\}$ oborem hodnot f. Zapisujeme $y = f(x)$.

Poznámky: 1. Prvek $x \in D$ nazýváme nezávisle proměnnou, veličinu $y = f(x)$ závisle proměnnou.

2. Nejběžnější způsob zadání funkce bývá analytický t.zn. explicitní, neboli předpisem $y = f(x)$. Ve druhém semestru se seznámíme i s t.zv. implicitním vyjádřením. Další možná zadání funkční závislosti jsou grafem nebo tabulkou.

3. Abychom zadali funkci, musíme zadat funkční předpis f a definiční obor. Není-li definiční obor udán, rozumí se automaticky maximální množina, ve které má daný předpis smysl.

Příklad: Buď $y = \sqrt{1 - x^2}$. Aby tento předpis měl smysl v $\mathbf{R}$, je třeba, aby $1 - x^2 \geq 0$, tedy $x \in \langle -1, 1 \rangle$.
Jestliže však definujeme funkci předpisem $y = \sqrt{1 - x^2};\ x \in \langle 0, 1 \rangle$, dostaneme jinou funkci. Ty však spolu úzce souvisejí; druhá je zúžením prvé a prvá je rozšířením druhé.

Definice: Buď $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ reálná funkce. Funkci $g : D_1 \longrightarrow \mathbf{R}$ nazveme restrikcí (nebo zúžením) funkce f, jestliže platí

$$\text{a)}\ D_1 \subset D \qquad \text{b)}\ g(x) = f(x)\ \ \forall\, x \in D_1.$$

Funkci f nazýváme rozšířením funkce g,

Poznámka: Stejným způsobem jako u obecných zobrazení se tvoří složená funkce, na příklad $f(g(x))$ nebo $g(f(x))$. Obecně je $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Definice: Buď $y = f(x)$ funkce, definovaná na množině $D \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že f je shora omezená, jestliže existuje číslo K tak, že $f(x) \leq K$ pro všechna $x \in D$. Jestliže existuje číslo k tak, že pro všechna $x \in D$ platí $f(x) \geq k$, řekneme, že f je zdola omezená. Funkci f, která je zdola i shora omezená, nazýváme omezenou funkcí.

Poznámky: 1. Analogicky jako pro posloupnosti je funkce f omezená právě když existuje číslo $K > 0$ tak, že $|f(x)| \leq K \ \ \forall x \in D$.

2. V předchozí definici je podstatné, na jaké množině D danou funkci f uvažujeme. Je-li na příklad $f(x) = x^3$, není tato funkce omezená v $\mathbf{R}$, je však zdola omezená na příklad na intervalu $\langle 0, +\infty)$, shora omezená na $(-\infty, 0\rangle$ a omezená na libovolném intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbf{R}$.

Definice: Buď f funkce, definovaná na množině $D \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že f je rostoucí na D, jestliže platí: jsou-li $x_1, x_2 \in D$ dva libovolné body takové, že $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$. Jestliže z nerovnosti $x_1 < x_2$ plyne, že $f(x_1) \leq f(x_2)$, řekneme, že f je neklesající.

Funkci f nazveme klesající, jestliže z nerovnosti $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D)$ plyne, že $f(x_1) > f(x_2)$ a nerostoucí, jestliže nerovnost $x_1 < x_2$ implikuje $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce nazýváme ryze nebo ostře monotonní, neklesající a nerostoucí funkce monotonní.

Poznámky: 1. Je zřejmé, že každá ryze monotonní funkce je prostá, ale prostá funkce nemusí být monotonní. Na příklad

$$y = \frac{1}{x} \ \text{ pro } \ x \in \langle -2, 0); \qquad y = x^2 \ \text{ pro } \ x \in \langle 0, 2\rangle.$$

2. Je-li f prostá funkce, pak k ní existuje inversní funkce f^{-1}. Zápis $y = f(x)$ je ekvivalentní se zápisem $x = f^{-1}(y)$. Jestliže použijeme standardního označení a píšeme inversní funkci ve tvaru $y = f^{-1}(x)$, zaměníme roli x a y a dostaneme.

Lemma: Grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = f^{-1}(x)$ jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$.

Poznámky: 1. Při výpočtu inverzní funkce musíme vyřešit 2 problémy. Nejdříve zda je daná funkce f prostá a pak z rovnice $y = f(x)$ vypočítat $x = f^{-1}(y)$. Prvý problém bývá obyčejně obtížnější.

2. Existence inverzní funkce také souvisí úzce s otázkou řešitelnosti rovnice $f(x) = y_0$, kde f je daná funkce, $y_0 \in \mathbf{R}$ pevné číslo. Řešit takovou rovnici znamená nalézt x_0 tak, že $f(x_0) = y_0$. K tomu, aby takové řešení existovalo, je nutné a stačí, aby y_0 leželo v oboru funkčních hodnot f. Řešení je jediné, je-li f prostá funkce (na příklad ryze monotonní).

Věta: Je-li $f : D \xrightarrow{na} H$ ryze monotonní funkce, je i f^{-1} ryze monotonní. Specielně, je-li f rostoucí, je i f^{-1} rostoucí.

Důkaz: Buď $y = f(x)$ rostoucí a nechť $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in H)$ jsou dva libovolné body z definičního oboru funkce f^{-1}. Označme $y_1 = f^{-1}(x_1)$, $y_2 = f^{-1}(x_2)$. Potom platí $x_1 = f(y_1)$, $x_2 = f(y_2)$ a kdyby bylo $y_1 \geq y_2$, muselo by platit $x_1 \geq x_2$, což je spor.

Definice: Buď f reálná funkce, pro niž platí: je-li definována v bodě x, je definována i v bodě $-x$ a $f(-x) = f(x)$. Potom řekneme, že f je sudá funkce.

Řekneme, že f je lichá funkce, jestliže platí: je-li definována v bodě x, je definována i v bodě $-x$ a $f(-x) = -f(x)$.

Poznámka: Z předchozí definice vyplývá, že graf sudé funkce je symetrický podle osy y, graf liché funkce je symetrický podle počátku. Příklady sudých funkcí jsou třeba

$$x^2, \ x^4, \ x^{2n}, \ \cos x, \ \frac{1}{x^2}, \ \frac{1}{x^4}$$

a.p., lichých funkcí

$$x, \ x^3, \ x^{2k+1}, \ \sin x, \ \operatorname{tg} x, \ \operatorname{cotg} x, \ \frac{1}{x}, \ \frac{1}{x^3} \ \text{a.p..}$$

Definice: Řekneme, že funkce f je periodická, jestliže platí: existuje číslo $p > 0$ tak, že je-li f definována v bodě x, je definována i v bodech $x+p$ a $x-p$ a platí $f(x+p) = f(x)$. Nejmenší číslo p (pokud existuje), které splňuje předchozí požadavky, nazýváme periodou (nebo též primitivní nebo základní periodou) funkce f.

Poznámky: 1. Je zřejmé, že platí

$$f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = \cdots = f(x-p) = f(x-2p) = \ldots.$$

2. Nejznámější periodické funkce jsou $y = \sin x$, $y = \cos x$ s periodou 2π a funkce $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$ s periodou π.

4.2 Základní elementární funkce.

Definice: Polynomem rozumíme funkci tvaru

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \geq 0$ je celé, $a_0, \, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$.

Racionální funkcí rozumíme funkci tvaru

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

kde $n, k \geq 0$ jsou celá, $a_0, \, a_1, \ldots, a_n, \, b_0, \, b_1, \ldots, b_k \in \mathbf{R}$.

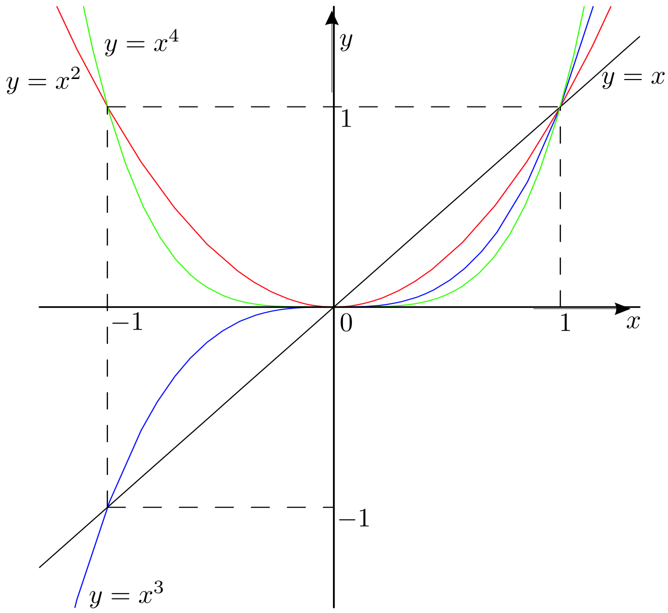
Poznámky: 1. Z definice okamžitě plyne, že polynom je definován pro $x \in (-\infty, +\infty)$, racionální funkce pro všechna x, kde $b_k x^k + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0$.

2. Racionální funkce dělíme na ryze a neryze lomené. Ryze lomená racionální funkce je taková, že $n < k$, ostatní jsou neryze lomené. Každou neryze lomenou racionální funkci lze vyjádřit ve tvaru součtu polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Definice: Obecnou mocninou nazýváme funkci tvaru $y = x^a$, kde $a \in \mathbf{R}$ je libovolné pevné číslo. Definičním oborem této funkce rozumíme interval $(0, +\infty)$.

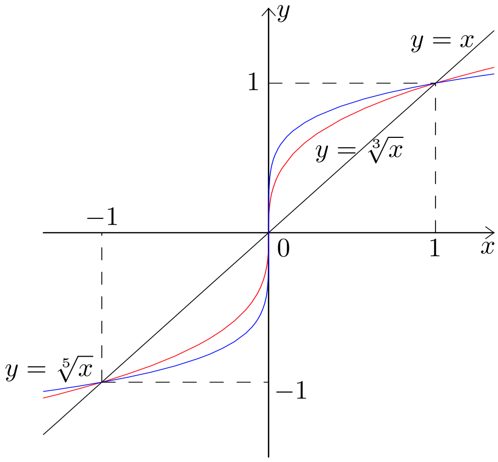
Poznámky: 1. Specielní případy mocninné funkce mohou mít širší definiční obory, jak se ukáže v dalším.

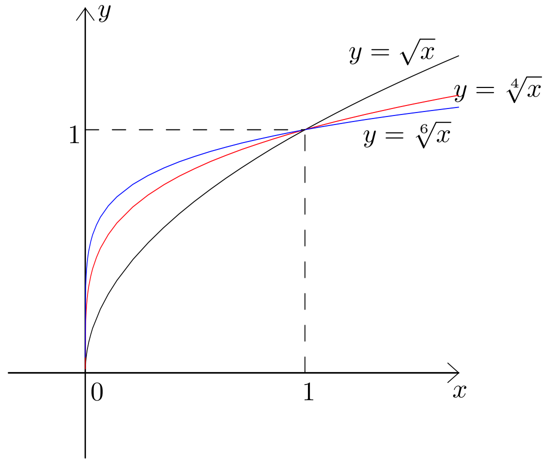
2. Funkce $y = x^n$, kde $n \in \mathbf{N}$, je definována pro $x \in (-\infty, +\infty)$. Její průběh je přibližně zachycen na následujícím obrázku.



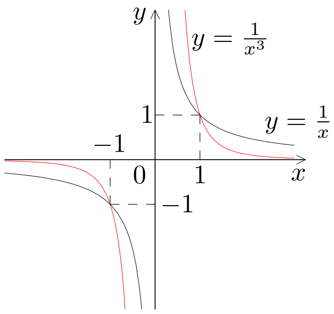
Funkce $y = x^{2k}$ mají všechny podobný průběh a stejně tak funkce $y = x^{2k-1}$.

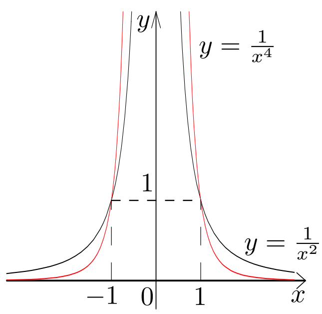
3. Funkci $y = x^{1/n}$ lze považovat za inverzní funkci k funkci $y = x^n$. Poněvadž funkce $y = x^{2k}$ nejsou prosté ve svém definičním oboru, omezíme se pouze na interval $\langle 0, +\infty)$. Z toho plyne, že funkce $y = \sqrt[2k]{x}$ je definována pro $x \in \langle 0, +\infty)$, funkce $y = \sqrt[2k-1]{x}$ je definována pro $x \in (-\infty, +\infty)$. Jejich průběh je zachycen na následujících obrázcích.





4. Funkce $y = x^{-n}$, kde $n \in \mathbf{N}$, je definována pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Její průběh je přibližně následující.



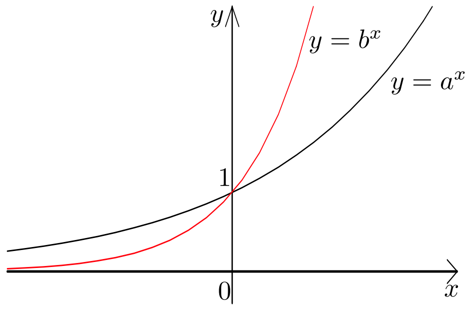


5. Funkce $y = x^{-1/n}$ je inverzní funkcí k funkci $y = x^{-n}$ a je definována pro $x \in (0, +\infty)$ pro n sudé a pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ pro n liché.

Definice: Exponenciální funkcí nazýváme funkci tvaru $y = a^x$, kde $a > 0,\ \ a \neq 1$ je libovolná konstanta. Jejím definičním oborem je interval $(-\infty, +\infty)$.

Poznámky: 1. Je-li $0 < a < 1$, je možno psát $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, kde $\frac{1}{a} > 1$. Stačí tedy uvažovat pouze exponenciální funkci $y = a^x$, kde $a > 1$.

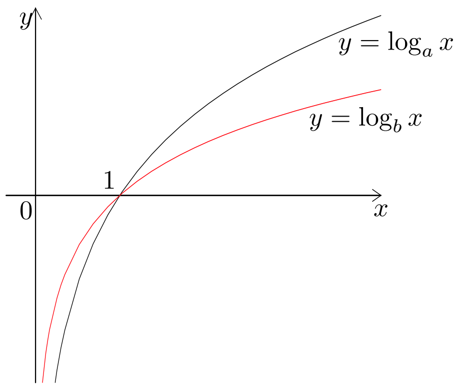
2. Je-li $b > a > 1$, pak pro $x > 0$ je $b^x > a^x > 1$ a pro $x < 0$ platí $0 < b^x < a^x < 1$. Jejich průběh je přibližně zachycen na následujícím obrázku.



3. Z grafu funkce $y = a^x$ pro $a > 1$ plyne, že je to rostoucí funkce pro $x \in (-\infty, +\infty)$ a existuje k ní inverzní funkce. Nejdůležitější exponenciální funkcí je $y = e^x$, kde $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Definice: Inverzní funkci k exponenciální funkci $y = a^x$ $(a > 1)$ nazýváme logaritmickou funkcí a označujeme $y = \log_a x$. Definičním oborem logaritmické funkce je interval $(0, +\infty)$.

Poznámky: 1. Funkce $\log_a x$ je rostoucí pro $a > 1$ a její obor hodnot je interval $(-\infty, +\infty)$. Graf vypadá následovně:



2. Ze vzájemného vztahu mezi exponenciální a logaritmickou funkcí snadno odvodíme následující vlastnosti logaritmů:

$$\log_a 1 = 0,\ \ \log_a a = 1,\ \ \log_a xy = \log_a x + \log_a y,\ \ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,\ \ \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

Tyto vzorce platí pro všechna $x, y > 0$ a $\alpha \in \mathbf{R}$.

3. Funkci $y = \log_e x$ značíme $\ln x$ a nazýváme přirozený logaritmus, funkci $y = \log_{10} x$ značíme $\log x$ a nazýváme dekadický logaritmus. V dalším, pokud nebude řečeno jinak, pod pojmem logaritmus budeme vždy rozumět přirozený logaritmus.

4. Pro převod logaritmů o různých základech platí následující vztah:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \text{ specielně pro } b = e \text{ je } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Důkaz: Rovnost $y = \log_a x$ je ekvivalentní s rovností $a^y = x$. Jestliže tuto rovnost zlogaritmujeme logaritmem při základu b, dostaneme $y \log_b a = \log_b x$ a odtud $y = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

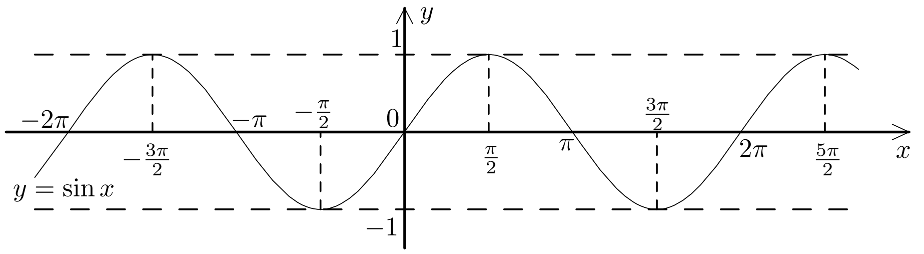
Definice: Goniometrickými funkcemi rozumíme funkce

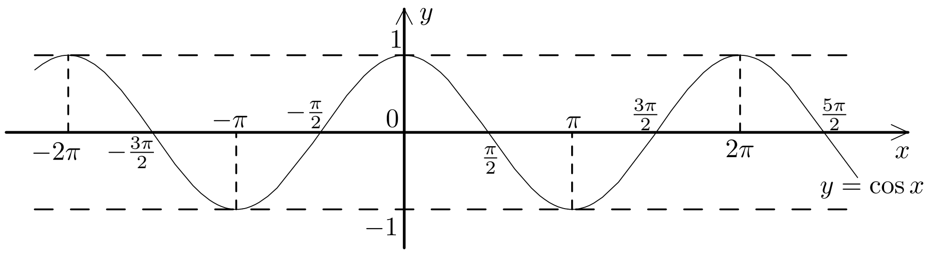
$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{cotg} x,$$

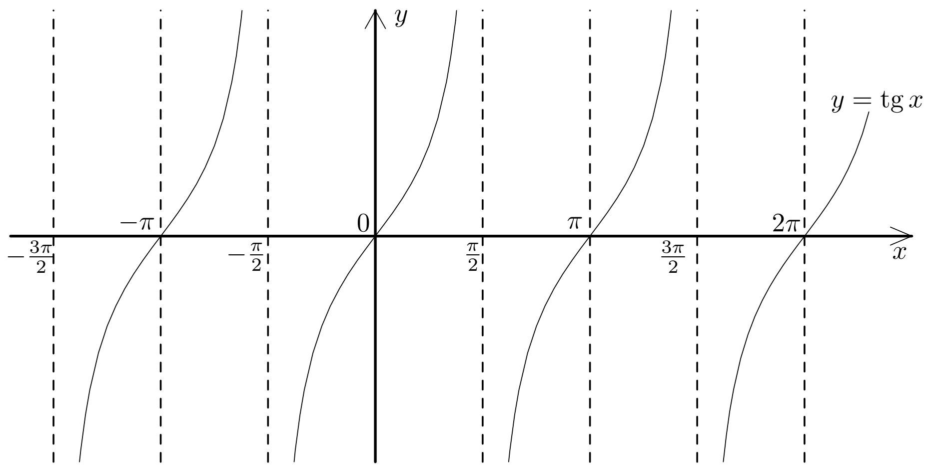
které nazýváme sinus, kosinus, tangens a kotangens. Jejich definičními obory jsou postupně

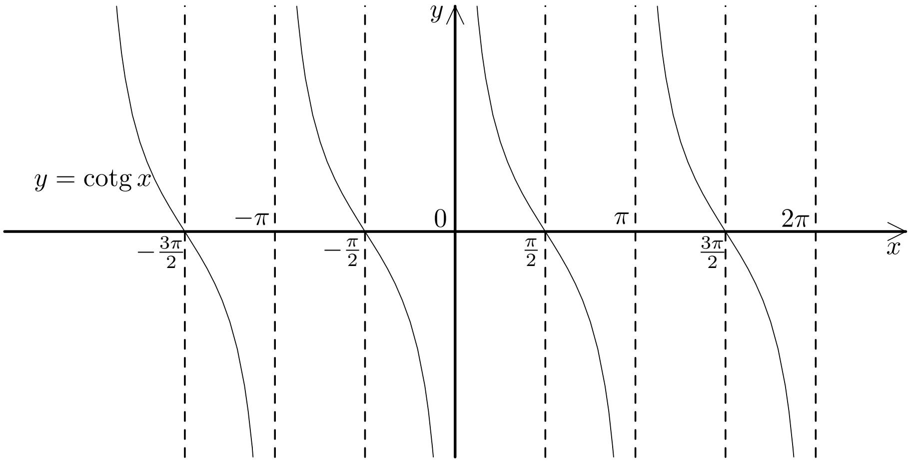
$$x \in \mathbf{R}; \quad x \in \mathbf{R}; \quad x \in \mathbf{R}, \text{ ale } x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}; \quad x \in \mathbf{R}, \text{ ale } x \neq k\pi; \quad \text{kde } k \in \mathbf{Z}.$$

Poznámky: 1. Grafy goniometrických funkcí jsou dobře známy ze střední školy, pro úplnost je však načrtneme.









2. Funkce $\cos x$ je sudá, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ jsou liché. Tyto funkce jsou navíc periodické; $\sin x$, $\cos x$ mají periodu 2π; $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ periodu π. Goniometrické funkce jsou spolu svázány celou řadou vztahů a poněvadž je znalost základních goniometrických vzorců nezbytně nutná v dalším, uvedeme alespoň ty nejdůležitější. Podmínky, za kterých příslušné vzorce platí, si snadno odvodíte sami.

$$\sin(x \pm y) = \sin x\, \cos y \pm \sin y\, \cos x\,, \qquad \cos(x \pm y) = \cos x\, \cos y \mp \sin x\, \sin y\,,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}\,, \qquad \operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y}\,,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x\,, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\,, \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\,, \quad \operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x}\,,$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}\,, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}\,, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,,$$

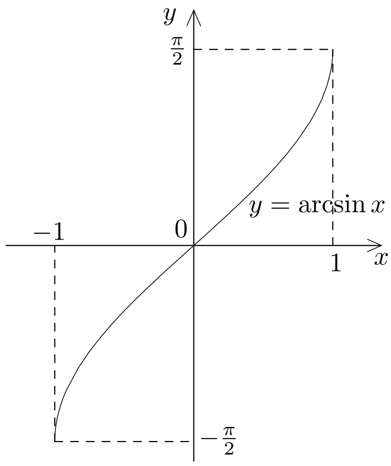
$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\,, \qquad \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}\,,$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}\,, \qquad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\,.$$

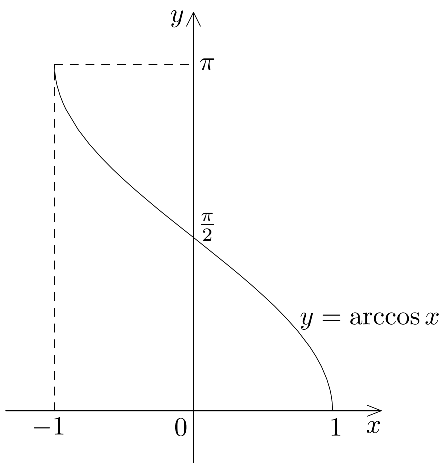
3. Goniometrické funkce nejsou v celém definičním oboru prosté, je však možno zvolit intervaly, ve kterých jsou dokonce ryze monotonní. Funkce $y = \sin x$ je rostoucí v intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, funkce $y = \cos x$ je klesající v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, funkce $y = \operatorname{tg} x$ je rostoucí v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ a funkce $y = \operatorname{cotg} x$ je klesající v intervalu $(0, \pi)$. V těchto intervalech k nim tedy existují inverzní funkce.

Definice: Cyklometrickými funkcemi rozumíme funkce inverzní ke goniometrickým. Jsou to funkce $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$. Čteme arkussinus atd.

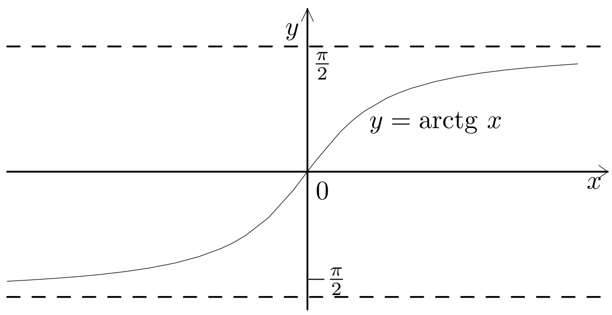
Poznámky: 1. Funkce $y = \arcsin x$ je tedy inverzní funkcí k funkci $y = \sin x$ v intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. To znamená, že funkce $y = \arcsin x$ je definována pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ a jejím oborem hodnot je interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Graf je načrtnut na následujícím obrázku.



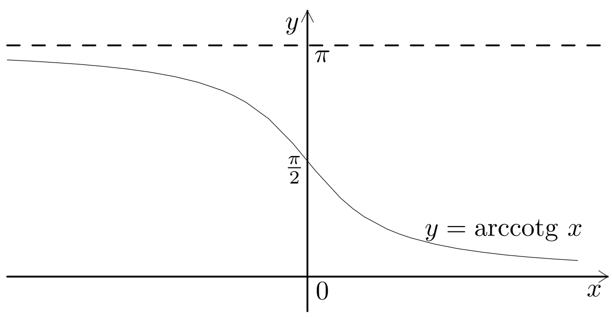
Analogicky funkce $y = \arccos x$ je definována pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ a oborem jejích hodnot je $\langle 0, \pi\rangle$.



Funkce $y = \operatorname{arctg}\, x$ je definována pro $x \in (-\infty, +\infty)$, oborem hodnot je $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Funkce $y = \operatorname{arccotg}\, x$ je definována pro $x \in (-\infty, +\infty)$, oborem hodnot je $(0, \pi)$.



2. Cyklometrické funkce jsou spolu vázány vztahy

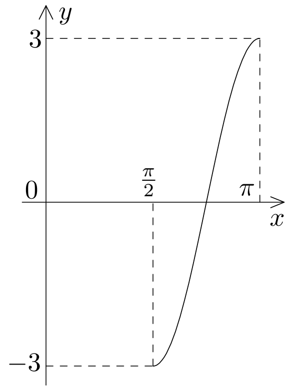
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ \ x \in \langle -1, 1\rangle; \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \ \ x \in (-\infty, +\infty).$$

Důkaz: Platí $x = \sin(\arcsin x) = \cos(\arccos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$ a odtud plyne, že $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Analogicky provedeme důkaz pro $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$.

3. Pomocí těchto funkcí lze vypočítat inverzní funkce ke goniometrickým i v jiných oborech, než byly tyto základní intervaly.

Příklady: 1. Najděte inverzní funkci k funkci $y = 3\,\cos 2x$ pro $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$.

Řešení: Průběh funkce je načrtnut na následujícím obrázku.



Je zřejmě $\cos 2x = \sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$ a $2x - \frac{3\pi}{2} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, můžeme tedy psát

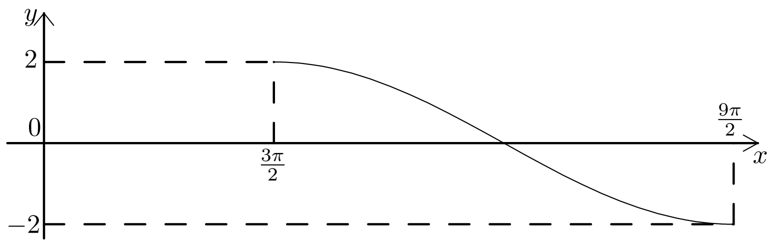
$$y = 3\,\cos 2x = 3\,\sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right), \ \text{ odtud}$$

$$2x - \frac{3\pi}{2} = \arcsin\frac{y}{2}, \ \text{ tedy}$$

$$y = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{3}; \qquad x \in \langle -3, 3\rangle.$$

2. Najděte inverzní funkci k funkci $y = 2\,\sin\frac{x}{3}$ pro $x \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \right\rangle$.

Řešení: Daná funkce je klesající (viz obrázek).



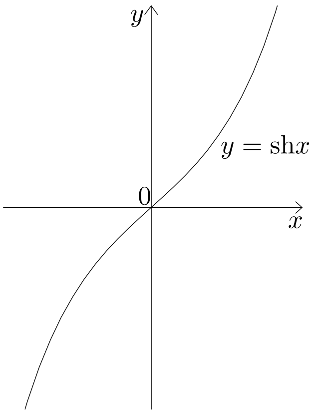
Platí tedy $2\,\sin\frac{x}{2} = 2\,\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$. Poněvadž je $\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} \in \langle 0, \pi\rangle$, dostaneme odtud, že

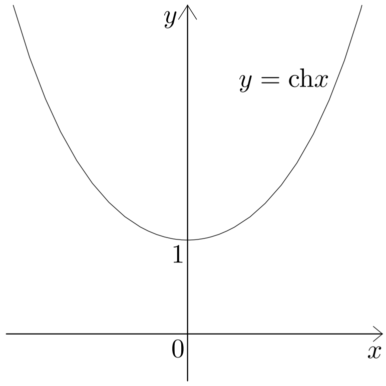
$$\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} = \arccos\frac{y}{3} \ \text{ neboli } \ y = \frac{3\pi}{2} + 3\,\arccos\frac{x}{2}; \qquad x \in \langle -2, 2\rangle.$$

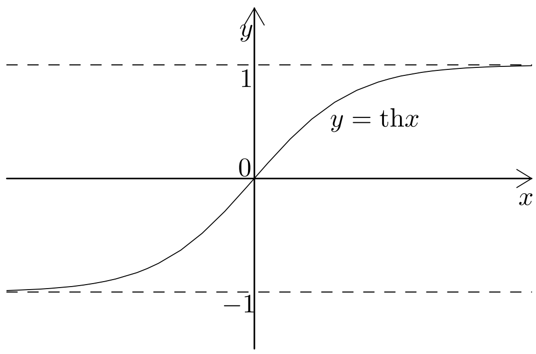
Definice: Hyperbolickými funkcemi nazýváme funkce hyperbolický sinus, hyperbolický kosinus, hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens, definované předpisy

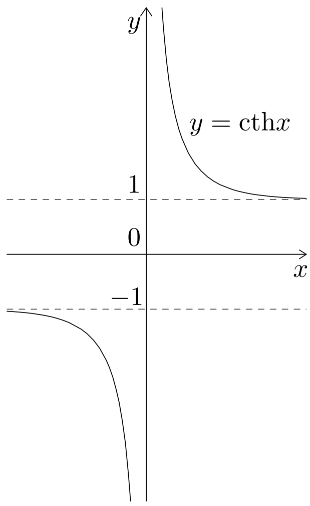
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Poznámky: 1. Hyperbolické funkce jsou zřejmě definovány na celé číselné ose s výjimkou funkce cth$x$, která je definována pro $x \in \mathbf{R} - \{0\}$. Jejich grafy jsou načrtnuty na následujících obrázcích.









2. Hyperbolické funkce, stejně jako goniometrické, jsou spolu vázány řadou vztahů, které však nebudeme uvádět. Základní vztah je $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, který snadno ověříme přímým výpočtem.

3. Funkce sh$x$, th$x$, cth$x$ jsou prosté v celém svém definičním oboru, ch$x$ je rostoucí pro $x \in \langle 0, \infty)$. Existují k nim tedy inverzní funkce, které nazýváme hyperbolometrickými funkcemi. Jsou to funkce argsh$x$, argch$x$, argth$x$, argcth$x$. (Čteme argument sinu hyperbolického atd). Jejich grafy nebudeme načrtávat, jejich analytická vyjádření jsou ponechána jako cvičení.

4.3 Limita funkce.

Příklad: Uvažme funkci $y = \frac{x^2-1}{x-1}$. Tato funkce je definována pro $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ a můžeme se zeptat na její chování v okolí bodu $x = 1$. Jestliže dosazujeme hodnoty blízké 1, dostáváme, že funkční hodnoty budou blízké 2. Napíšeme-li si některé hodnoty do tabulky, dostaneme

x	$1,01$	$0,99$	$1,001$	$0,999$	$1,0001$	$0,9999$	$\dots$
y	$2,01$	$1,99$	$2,001$	$1,999$	$2,0001$	$1,9999$	$\dots$

To nás vede k domněnce, že se funkční hodnoty blíží k číslu 2, jestliže se x blíží hodnotě 1. Tuto skutečnost budeme zapisovat symbolem $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Poznámka: Poněvadž jsme v předchozím příkladu dosazovali jakési hodnoty $x_n \to 1$, můžeme tuto skutečnost také pomocí posloupností formulovat. Můžeme tudíž využít vět, které jsme si o limitách posloupností odvodili.

Definice: (Heineova definice limity)
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 (může být i $x_0 = \pm\infty$) limitu A, (může být i $A = \pm\infty$) jestliže pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f)$ takovou, že $x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbf{N}$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Zapisujeme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Poznámky: 1. Jestliže můžeme nalézt dvě posloupnosti $\{x_n'\}$ a $\{x_n''\}$ tak, že $x_n' \neq x_0 \neq x_n''$, $x_n' \to x_0$, $x_n'' \to x_0$ a při tom $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ neexistuje.

2. Případy, které mohou nastat v předchozí definici, lze rozdělit na několik typů limit.

$$\text{pro } x_0, A \in \mathbf{R} \text{ dostaneme } \lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{(vlastní limita ve vlastním bodu)}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ nebo } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \text{(nevlastní limita ve vlastním bodu)}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ nebo } \lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad \text{(vlastní limita v nevlastním bodu)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

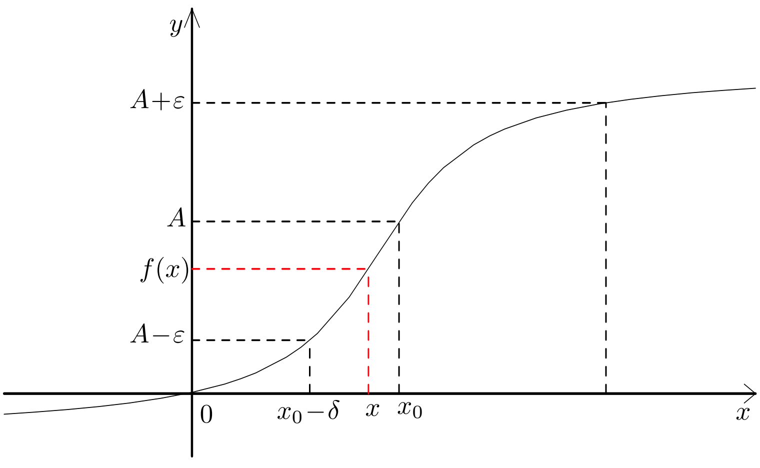
(nevlastní limita v nevlastním bodu).

Příklady:
Použitím definice limity a vlastností základních elementárních funkcí snadno ověříme, že např.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistují. 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty$ $n \in \mathbf{N}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$.

Věta: Buď $x_0, A \in \mathbf{R}$. Potom $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ existuje právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in \mathbf{R}$ taková, že $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Důkaz: Situace, která je popsána ve větě, se dá načrtnout na obrázku.



1. Nechť

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 ; \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ x \neq x_0 \implies A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

a buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost taková, že $x_n \neq x_0, \ x_n \to x_0$. Odtud plyne,že existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|x_n - x_0| < \delta$ a podle uvedené podmínky je $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, neboli $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. To však znamená, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

2. Nechť

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ x \neq x_0, \text{ ale } |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Zvolme $\delta_n = \frac{1}{n}$; pak $\delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ a existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, ale $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$. Odtud plyne, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ neexistuje nebo není $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Definice: (Cauchyova definice limity)
Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ limitu $A \in \mathbf{R}$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x taková, že $0 < |x - x_0| < \delta$ platí nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Poznámky: 1. Jestliže uvážíme případy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = A \ \text{ a } \ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

dostaneme ekvivalentní definice ve smyslu Cauchyově.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \iff \forall K > 0 \,[\text{resp.}\, L < 0] \ \exists \delta > 0 ;$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ x \neq x_0 \ \Rightarrow \ f(x) > K \,[\text{resp.}\, f(x) < L].$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ [\text{resp.}\, S < 0] \ \forall x > R \,[\text{resp.}\, x < S] \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \iff \forall K > 0 \ [\text{resp.}\, L < 0] \ \exists R > 0 \ [\text{resp.}\, S < 0]$$

$$\forall x > R \ [\text{resp.}\, x < S] \ \Rightarrow \ f(x) > K \ [\text{resp.}\, f(x) < L].$$

2. Jestliže se zajímáme pouze o chování funkce f pro $x > x_0$ (resp. $x < x_0$), dostaneme pojem jednostranné limity.

Definice: Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu zprava rovnou A, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \ x_n > x_0, \ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Zapisujeme $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = A$.

Analogicky řekneme, že B je limitou funkce f v bodě x_0 zleva, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \ x_n < x_0, \ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = B$. Zapisujeme $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = B$.

Věta: Rovnost $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ platí právě když $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$. Tedy oboustranná limita existuje právě když existují jednostranné limity a jsou si rovny.

Důkaz: 1. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ a buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \neq x_0$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ libovolná posloupnost. Potom je $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ a je-li náhodou $x_n > x_0$ nebo $x_n < x_0$, je stále $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, tedy $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$.

2. Nechť $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$ a buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost taková, že $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0, \ x_n \neq x_0$. Označme $\{x_n'\}$ tu podposloupnost posloupnosti $\{x_n\}$, pro niž je $x_n' < x_0$

a $\{x_n''\}$ podposloupnost, pro niž $x_n'' > x_0$. Potom je $\lim_{n\to\infty} f(x_n') = A$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n'') = A$, neboli $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Příklady: 1. Využitím grafů základních elementárních funkcí dostaneme např.

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}_+} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x\to 0_+} \operatorname{cotg} x = +\infty$$

2. Je-li f nekonstantní periodická funkce, pak neexistují $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ a $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Důkaz: Buď $p > 0$ perioda funkce f a nechť $x_1, x_2 \in D(f)$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$. Potom $x_1 + np \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $x_2 + np \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ale $f(x_1 + np) = f(x_1)$, $f(x_2 + np) = f(x_2)$. Analogicky pro $x \to -\infty$.

4.4 Věty o limitách funkcí.

Poznámka: Většina vět, které v tomto paragrafu vyslovíme, budou díky Heineově definici limity přímým důsledkem odpovídajících vět pro limity posloupností.

Věta: Funkce f má v bodě x_0 nejvýše jednu limitu a rovněž nejvýše jednu limitu zprava a jednu limitu zleva.

Věta: Buďte x_0, $A \in \mathbf{R}$ a nechť existuje $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že f je omezená v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$. Je-li specielně $A \neq 0$, pak má f pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ stejné znaménko jako A.

Věta: Nechť existují $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$. Jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $f(x) \leq g(x)$, potom $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Věta: (Věta o sevření)
Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A$ a předpokládejme, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Potom je též $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$.

Důsledek: Buď $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a nechť je funkce g omezená pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, $\delta > 0$. Potom platí $\lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = 0$.

Důkaz: Platí $0 \leq |\, f(x)\, g(x)\,| \leq M\, |f(x)|$ a důsledek plyne z předchozí věty.

Příklad: Ukažte, že $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.
Poněvadž platí $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$, dostaneme tvrzení okamžitě z předchozího důsledku.

Věta: Nechť existují $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$ a jsou <u>vlastní</u> a buď $\alpha \in \mathbf{R}$ libovolná konstanta. Potom platí

1. $\lim_{x\to x_0} [\alpha\, f(x)] = \alpha A$
2. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$
3. $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
4. $\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$
5. Je-li $B \neq 0$, je $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Poznámky: 1. Předchozí věta platí i pro případ, že $x_0 = \pm\infty$.

2. Úplnou indukcí dostaneme okamžitě, že $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$, $\lim\limits_{x\to x_0} \prod\limits_{k=1}^{n} f_k(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} A_k$, jestliže dané limity existují a jsou vlastní.

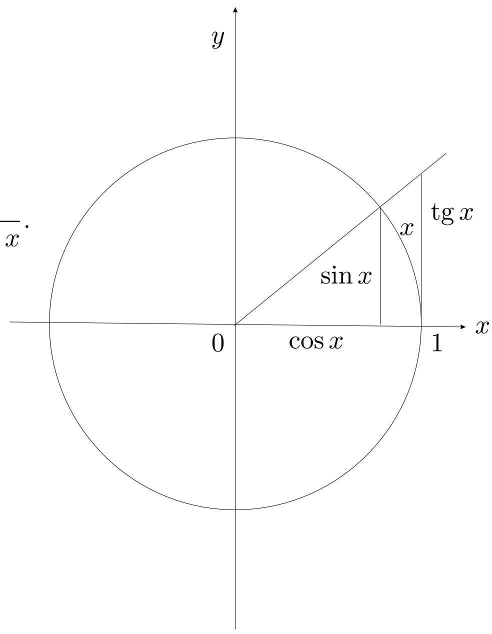
3. Pro funkce lze odvodit další větu, která nemá analogii v případě posloupností, a sice větu o limitě složené funkce.

Věta: (Limita složené funkce)
Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A$ a předpokládejme, že existuje $\Delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$, $x \neq x_0$ je $\varphi(x) \neq y_0$. Potom je $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = A$.

Důkaz: Předpoklad $\varphi(x) \neq y_0$ pro $x \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) - \{x_0\}$ je nutný, poněvadž f nemusí být definována v bodě y_0. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existuje $\eta > 0$ tak, že pro $0 < |y - y_0| < \eta$ platí $|f(y) - A| < \varepsilon$. Dále k číslu $\eta > 0$ existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta_1$ platí $|\varphi(x) - y_0| < \eta$. Položme $\delta = \min(\delta_1, \Delta)$. Potom pro $0 < |x - x_0| < \delta$ platí $|f(\varphi(x)) - A| < \varepsilon$ a podle Cauchyovy definice limity je $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = A$.

Příklady: 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Důkaz:



Buď $x > 0$. Z obrázku je patrné, že pro obsahy příslušných rovinných oborů platí

$$\frac{1}{2} \sin x \cos x \leq \frac{1}{2}\, x \leq \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{neboli} \quad \cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Přechodem k převráceným hodnotám dostaneme

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

a užitím věty o sevření $\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Poněvadž je funkce $\frac{\sin x}{x}$ sudá, plyne odtud, že $\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{\sin x}{x} = 1$, neboli $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Důkaz: α) Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost taková, že $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ a označme $k_n = [x_n]$ (celá část). Potom je

$$k_n \leq x_n \leq k_n + 1 \text{ a odtud } 1 + \frac{1}{k_n + 1} \leq 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{k_n}.$$

Dále

$$\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1}$$

a limitním přechodem dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$
β) Položme $x = -t-1$. Je-li $x \to -\infty$, pak $t \to +\infty$ a

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = e.$$

γ) $\lim\limits_{x\to0_+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$, $\lim\limits_{x\to0_-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$, tedy $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Důkaz: Je

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

podle věty o limitě složené funkce.

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$

Důkaz: Položme $e^x-1=t$; potom je $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$

5. Buď $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a nechť existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x \neq x_0$ je $f(x) \neq 0$. Potom $\lim\limits_{x\to x_0}\{1+f(x)\}^{1/f(x)} = e.$

Důkaz: Položíme-li $f(x) = t$, plyne tvrzení okamžitě z věty o limitě složené funkce.

6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to a}\left\{\frac{\sin x}{\sin a}\right\}^{\frac{1}{x-a}}$.

Řešení: Je

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim_{x\to a}\left\{\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right\}^{\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}}.$$

Podle věty o limitě složené funkce je $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}} = e$ a stačí tedy vypočítat

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a} = \frac{1}{\sin a}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2} = \operatorname{cotg} a.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = e^{\operatorname{cotg} a}$ pro $a \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Poznámka: V případě, že neexistuje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, můžeme zkoumat jednostranné limity $\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x)$. Jestliže však ani tyto limity neexistují, můžeme si položit otázku, jak se chová posloupnost $\{f(x_n)\}$, kde $x_n \to x$, $x_n \neq x_0$. Tato posloupnost může mít částečné limity, mezi nimiž existuje nejmenší a největší. Tím se dostáváme k následující definici.

Definice: Číslo c nazveme <u>částečnou limitou</u> funkce f pro $x \to x_0$, jestliže existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \neq x_0$ taková, že $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$. Největší a nejmenší částečnou limitu f v bodě x_0 nazýváme <u>horní</u> a <u>dolní limitou</u> funkce f a značíme

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x) = \limsup_{x\to x_0} f(x), \qquad \underline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

Poznámky: 1. Analogicky, jako v předchozí definici, můžeme definovat jednostranné částečné limity tedy

$$\overline{\lim_{x\to x_0+}} f(x) = \limsup_{x\to x_0+} f(x), \qquad \underline{\lim_{x\to x_0+}} f(x) = \liminf_{x\to x_0+} f(x),$$

nebo

$$\overline{\lim_{x\to x_0-}} f(x) = \limsup_{x\to x_0-} f(x), \qquad \underline{\lim_{x\to x_0-}} f(x) = \liminf_{x\to x_0-} f(x).$$

2. Je zřejmé, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje právě když

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

Tato společná hodnota je samozřejmě rovna $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Příklady: 1. Je-li $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, je zřejmé, že $\limsup\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, $\liminf\limits_{x\to 0} f(x) = -1$. Navíc každé číslo $a \in \langle -1, 1\rangle$ je částečnou limitou funkce f.

2. Najděte $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)$ a $\liminf\limits_{x\to x_0} f(x)$, je-li

$$f(x) = \left(1 + \sin^2\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}}}.$$

Řešení: Funkce f není definována v bodech $x_k = \frac{1}{k\pi}$ $(k \in \mathbf{Z})$. Platí však, že existuje $\lim\limits_{x\to x_k} f(x)$ pro libovolné $k \in \mathbf{Z}$. Skutečně buď k libovolné, ale pevné a $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost taková, že $u_n \neq x_k$, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_k$. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = e$. Jestliže nyní dodefinujeme funkci f v bodech x_k předpisem $f(x_k) = e$, je již f definována v jistém prstencovém okolí bodu 0, dokonce v $\mathbf{R} - \{0\}$. Označme $g(t) = (1+t)^{1/t}$, kde $t = \sin^2\frac{1}{x}$. Potom je g definována v intervalu $(0, 1\rangle$ a je tam klesající (ověřte si). Tedy

$$\sup_{t\in(0,1\rangle} g(t) = \lim_{t\to 0+} g(t) = e \ \text{ a } \ \max_{t\in(0,1\rangle} g(t) = g(1) = 2.$$

Odtud plyne, že

$$\underline{\lim_{x\to 0}} f(x) = 2 \ \text{ a } \ \overline{\lim_{x\to 0}} f(x) = e.$$

Poznámky: 1. Důkaz tvrzení, že je funkce $g(t) = (1+t)^{1/t}$ klesající, je možno provézt elementárně, jestliže si uvědomíme, že posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n}$, pomocí níž jsme zavedli číslo e je rostoucí a tedy každá z ní vybraná posloupnost je také rostoucí.

2. Předchozí příklad se trochu liší od běžných příkladů na výpočet limity tím, že daná funkce nebyla původně definována v jistém prstencovém okolí bodu x_0. Tento problém odstraníme později, až budeme definovat limitu vzhledem k množině.

Kapitola 5

Spojitost funkce.

5.1 Spojitost v bodě.

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě x_0, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Poznámka: Poněvadž je spojitost v bodě definována pomocí limity, platí okamžitě všechna tvrzení, která byla pro limity odvozena.

Věta: Funkce f je spojitá v bodě x_0 právě když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Věta: Funkce f, g nechť jsou spojité v bodě x_0, $\alpha \in \mathbf{R}$ libovolná konstanta. Potom jsou v bodě x_0 spojité také funkce $\alpha\, f$, $|f|$, $f \pm g$, $f \cdot g$. Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, je v bodě x_0 spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta: (Spojitost složené funkce)
Buď φ funkce spojitá v bodě x_0, f funkce spojitá v bodě $y_0 = \varphi(x_0)$. Potom je složená funkce $f \circ \varphi$ spojitá v bodě x_0.

Důkaz: Platí $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = y_0$, $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$. Poněvadž je f definována v bodě y_0, plyne výsledek rovnou z věty o limitě složené funkce.

Definice: Řekneme, že funkce f je <u>spojitá zprava</u> (resp. <u>zleva</u>) v bodě x_0, jestliže $\lim\limits_{x \to x_{0_+}} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_{0_-}} f(x) = f(x_0)$).

Věta: Funkce f je spojitá v bodě x_0 právě když je v bodě x_0 spojitá zprava i zleva.

Důkaz: Je-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, potom $\lim\limits_{x \to x_{0_+}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{0_-}} f(x) = f(x_0)$ a obráceně.

Definice: Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 <u>nespojitost prvního druhu</u>, jestliže existují vlastní limity $\lim\limits_{x \to x_{0_+}} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_{0_-}} f(x) = B$. Číslo $s = A - B$ nazýváme <u>skokem</u> funkce f v bodě x_0. Je-li $s = 0$, řekneme, že f má v bodě x_0 <u>odstranitelnou nespojitost</u>. Pokud alespoň jedna z uvedených limit neexistuje nebo je nevlastní, řekneme, že f má v bodě x_0 <u>nespojitost druhého druhu</u>.

Poznámka: Jestliže má funkce f v bodě x_0 odstranitelnou nespojitost, pak ji lze dodefinovat v bodě x_0 tak, aby byla spojitá. Stačí položit $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Příklad: Vyšetřete body nespojitosti funkce $y = \frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}$.

Řešení: Funkce je definována pro $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, tedy $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$ jsou body nespojitosti. Dále platí

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1}-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

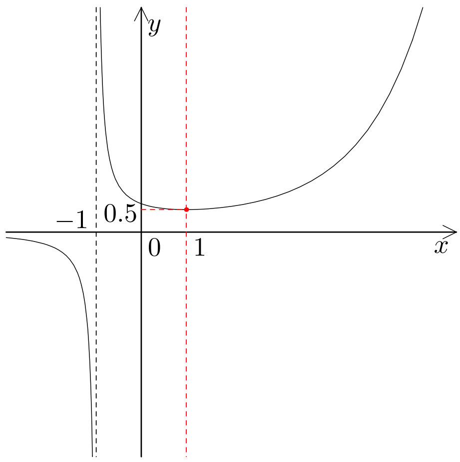
Jestliže položíme $y(1) = \frac{1}{2}$, je y spojitá v bodě $x_1 = 1$ a tento bod je odstanitelný bod nespojitosti. V bodě $x_2 = -1$ je situace následující

$$\lim_{x \to -1_+} \frac{e^{x-1}-1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1_+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -1_-} \frac{e^{x-1}-1}{x^2-1} = -\infty.$$

Funkce y má v bodě $x_2 = -1$ nespojitost druhého druhu. Jestliže ještě přidáme, že

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-1}-1}{x^2-1} = +\infty, \quad \text{(později uvidíme proč)} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x-1}-1}{x^2-1} = 0,$$

můžeme zhruba načrtnout graf funkce y.



5.2 Spojitost v intervalu.

Definice: Řekneme, že funkce f je spojitá v intervalu $\mathcal{I}$, je-li spojitá (oboustranně) v každé vnitřním bodu $\mathcal{I}$ a jednostranně spojitá v krajních bodech $\mathcal{I}$.

Poznámka: Všechny elementární funkce, zavedené v předchozí kapitole, jsou spojité v celém svém definičním oboru. Elementární důkazy těchto tvrzení jsou dosti pracné; jestliže později využijeme diferenciálního počtu, dostaneme je okamžitě.

Definice: Řekneme, že funkce f je stejnoměrně spojitá v intervalu $\mathcal{I}$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že jakmile $x\ y \in \mathcal{I},\ |x-y| < \delta$, potom $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Poznámky: 1. Jestliže zvolíme jeden z bodů v předchozí definici pevně, dostaneme okamžitě, že f je spojitá. Tedy každá stejnoměrně spojitá funkce je spojitá.

2. Pomocí kvantifikátorů lze přehledně zapsat definici funkce spojité a stejnoměrně spojité v intervalu $\mathcal{I}$. Bude také vidět, jaký je mezi oběma definicemi rozdíl.

$$\underline{\text{Spojitost}}$$
$$\forall x \in \mathcal{I} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x) > 0 \ \ (\forall y \in \mathcal{I};\ |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\underline{\text{Stejnoměrná spojitost}}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ (\forall x,\, y \in \mathcal{I};\ |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

3. V dalším se budeme zabývat funkcemi spojitými na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Ukazuje se, že takové funkce mají řadu důležitých vlastností.

Věta: Buď f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je f stejnoměrně spojitá v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz: Předpokládejme, že f není stejnoměrně spojitá. To znamená existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $\delta > 0$ existují $x, y \in \langle a, b\rangle$ taková, že $|x - y| < \delta$, ale $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Zvolme $\delta_n = \frac{1}{n} \to 0$. Pak existují $x_n, y_n \in \langle a, b\rangle$ tak, že $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, ale $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze podle Weierstrassovy věty vybrat poslounost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, která konverguje. Nechť $x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. poněvadž $|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, je i $y_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Ze spojitosti funkce f plyne, že

$$f(x_{k_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0), \ \ f(y_{k_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0).$$

Na druhé straně však platí $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon > 0$ a tento spor dokončuje důkaz věty.

Příklad: Pro otevřený interval věta neplatí. Funkce $y = \frac{1}{x}$ je spojitá v intervalu $(0, 1\rangle$, ale není tam stejnoměrně spojitá. Jestliže zvolíme na příklad $x_n = \frac{1}{n}$, $x'_n = \frac{1}{2n}$, je

$$x_n \to 0,\ x'_n \to 0 \ \text{ ale } \ |\, y(x_n) - y(x'_n)\,| = n \to \infty.$$

Věta: Funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ je na tomto intervalu omezená.

Důkaz: Předpokládejme, že f není omezená v $\langle a, b\rangle$. Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme a buď $\langle a_1, b_1\rangle$ ta polovina, kde f není omezená. Jestliže pokračujeme tímto způsobem dále, získáme posloupnost intervalů $\langle a, b\rangle$, $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle$, $\ldots$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Poněvadž je f spojitá v bodě c, existuje k číslu $\varepsilon = 1$ číslo $\delta > 0$ tak, že pro

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \ \text{ je } \ f(c) - 1 < f(x) < f(c) + 1.$$

V intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ však leží všechny intervaly $\langle a_n, b_n\rangle$ počínaje jistým indexem a to dává spor.

Poznámka: V případě, že daný interval není uzavřený, věta neplatí. Stačí volit $y = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, 1\rangle$.

Věta: Funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá na tomto intervalu své největší a nejmenší hodnoty. Tedy existuje alespoň jeden bod $c_1 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(c_1) = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ a alespoň jeden bod $c_2 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(c_2) = \inf\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$.

Důkaz: Podle předchozí věty je f omezená na $\langle a, b\rangle$ a položme $G = \sup\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$. Předpokládejme, že pro $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) < G$. Potom je funkce $G - f > 0$ spojitá na $\langle a, b\rangle$, tedy $\frac{1}{G-f}$ je také spojitá a tudíž omezená. Existuje tedy $K > 0$ tak, že pro $x \in \langle a, b\rangle$ je $\frac{1}{G-f(x)} \le K$. Odtud plyne, že $f(x) \le G - \frac{1}{K}$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ a to je spor s definicí G.

Věta: Buď f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí $f(a) < 0,\ f(b) > 0$. Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) = 0$.

Důkaz: Interval $\langle a, b\rangle$ rozpůlíme a buď $\langle a_1, b_1\rangle$ taková část, že $f(a_1) < 0,\ f(b_1) > 0$. Je-li náhodou $f(a_1) = 0$ nebo $f(b_1) = 0$, jsme hotovi. Jestliže pokračujeme takto dále, získáme posloupnosti

$$a \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1 \ \text{ a } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

Protože je $f(a_n) < 0$ a $f(b_n) > 0$, plyne ze spojitosti f, že

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \le 0 \ \text{ a } \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \ge 0, \ \text{ tedy } f(c) = 0.$$

Poznámka: Předložený postup důkazu je též metoda, kterou je možné hledat řešení rovnice $f(x) = 0$. Ukazuje se, že tato metoda je zdlouhavá a neobratná, ale vyžaduje pouze minimální předpoklady pro f, t.j. spojitost.

Příklad: Řešte přibližně rovnici $2^x - 4x = 0$.

Řešení: Je snadné zjistit, že jeden kořen je $x_1 = 4$. Jestliže označíme $f(x) = 2^x - 4x$, pak $f(0) = 1 > 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} - 2 < 0$, tedy v intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ leží další kořen rovnice $f(x) = 0$. Jestliže touto metodou pokračujeme dále, dostaneme přibližnou hodnotu $x_2 = 0,3990692$, pro niž je $f(x_2) = 0,000000038884$.

Důsledek: Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, kde $A \ne B$, pak funkce f nabývá všech hodnot mezi A a B.

Důkaz: Nechť je na příklad $A < B$ a buď $y_0 \in (A, B)$ libovolná hodnota. Potom pro funkci $h(x) = f(x) - y_0$ platí $h(a) = A - y_0 < 0$, $h(b) = B - y_0 > 0$ a podle předchozí věty existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $0 = h(c) = f(c) - y_0$.

Důsledek: Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$, pak nabývá všech hodnot mezi maximem a minimem.

Důkaz: Podle věty o nabývání největší a nejmenší hodnoty existují body x_1, $x_2 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(x_1) = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = B$, $f(x_2) = \min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = A$. Nyní stačí použít předchozího důsledku na interval $\langle x_1, x_2\rangle$ nebo $\langle x_2, x_1\rangle$.

Kapitola 6

Diferenciální počet.

6.1 Derivace a diferenciál.

Definice: Buď f funkce, která je definována v jistém okolí bodu x_0. Jestliže existuje limita

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě x_0. Je-li $f'(x_0)$ nevlastní, pak řekneme, že f má v bodě x_0 nevlastní derivaci. Jestliže uvedená limita neexistuje, řekneme, že f nemá v bodě x_0 derivaci.

Analogicky

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left[\text{resp. } f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right]$$

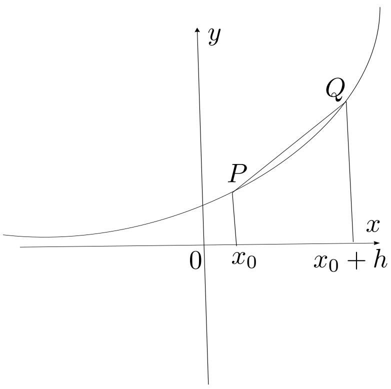
nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 zprava [resp. zleva].

Poznámky: 1. Pro označení derivace budeme též používat některý z následujících symbolů

$$\frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad y'(x_0), \quad y'|_{x=x_0}.$$

2. Derivace je základním pojmem diferenciálního počtu, má však celou řadu použití i v jiných oborech jako fyzika, technika, ekonomie a pod.

3. Budeme zkoumat otázku nalezení tečny ke křivce $y = f(x)$ v jejím bodě $P[x_0, f(x_0)]$.



Poměr $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ znamená směrnici sečny, která spojuje body P a Q. Tedy derivaci $f'(x_0)$ lze považovat za směrnici hledané tečny v bodě P. Později tento výsledek zformulujeme do věty.

4. Uvažujme pohyb bodu po přímce a nechť je jeho poloha v každém časovém okamžiku t určena funkcí $s(t)$. Potom poměr $\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}$ představuje průměrnou rychlost pohybu v časovém intervalu $\langle t_0, t_0+h\rangle$ a $s'(t_0)$ je okamžitá rychlost v čase t_0.

5. Jestliže označíme $y(t)$ počet bakterií v živném roztoku, pak je známo, že rychlost jejich množení je úměrná jejich množství. Platí tedy rovnice $\frac{dy}{dt} = k\,y$. To je jednoduchá diferenciální rovnice, jejímž řešením se budeme zabývat později.

6. Jestliže v definici derivace označíme $x_0 + h = x$, je možno derivaci definovat předpisem

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Analogicky pro jednostranné derivace

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_{0+}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_{0-}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

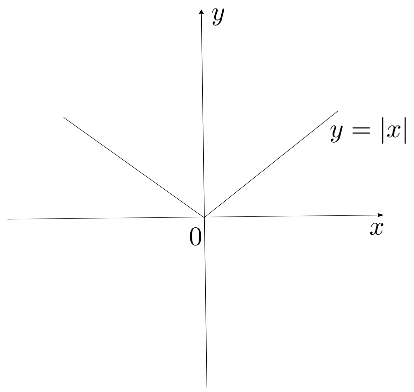
Těchto vyjádření bude také v dalším použito.

Příklad: Funkce $y = x^2$ má v každém bodě x_0 derivaci $y' = 2x_0$.

Důkaz: Platí $(x^2)'|_{x=x_0} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0$.

Věta: Derivace funkce f v bodě x_0 existuje právě když v bodě x_0 existují derivace zprava a zleva a jsou si rovny.

Příklad: Buď $y = |x|$. Potom funkce y nemá v bodě $x_0 = 0$ derivaci.



Snadno se ukáže, že $y'_+(0) = 1, \quad y'_-(0) = -1$.

Věta: Buď f funkce, $T[x_0, y_0]$, kde $y_0 = f(x_0)$ bod grafu f. Jestliže existuje vlastní derivace $f'(x_0)$, má křivka $y = f(x)$ v bodě T tečnu, jejíž rovnice je

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Poznámka: S tečnou v bodě $T[x_0, y_0]$ úzce souvisí též normála dané křivky, tedy přímka kolmá na tečnu v bodě dotyku. Její rovnice je

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

pokud je $f'(x_0) \neq 0$.

Věta: Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, je f spojitá v bodě x_0.

Důkaz: Je $\lim\limits_{h\to 0}\{f(x_0+h)-f(x_0)\} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h = f'(x_0)\cdot 0 = 0$.

Poznámky: 1. Předchozí větu nelze obrátit, tedy existují spojité funkce, které nemají derivaci. Analogicky, jestliže připustíme i nevlastní derivace, věta už nebude platit. Uvažme funkci $y = \operatorname{sgn} x$. Potom pro $x_0 = 0$ platí

$$y'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{\operatorname{sgn} h - \operatorname{sgn} 0}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} = +\infty, \quad y'_-(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{\operatorname{sgn} h - \operatorname{sgn} 0}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{-1}{h} = +\infty.$$

tedy $y'(0) = +\infty$ a funkce y není spojitá v bodě $x_0 = 0$.

2. Analogickou větu lze dokázat i pro jednostranné derivace a jednostrannou spojitost.

Věta: Buďte $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ konstanty, f, g funkce. Nechť existují vlastní derivace $f'(x_0), g'(x_0)$. Potom platí

1. Funkce $\alpha f + \beta g$ má v bodě x_0 derivaci $\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$.
2. Součin $f\cdot g$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. Je-li $g(x_0)\neq 0$, má funkce $\frac{f}{g}$ v bodě x_0 derivaci $\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[\,g(x_0)\,]^2}$.

Důkaz: 1.

$$[\,\alpha f + \beta g\,]'_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\{\alpha f(x_0+h) + \beta g(x_0+h)\} - \{\alpha f(x_0) + \beta g(x_0)\}}{h} =$$

$$= \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \beta \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \alpha\, f'(x_0) + \beta\, g'(x_0).$$

2.

$$[\,f\cdot g\,]'_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\, g(x_0+h) - f(x_0)\, g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\, g(x_0+h) - f(x_0)\, g(x_0+h) + f(x_0)\, g(x_0+h) - f(x_0)\, g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x_0+h)\, \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x_0)\, \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =$$

$$= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0), \text{ protože } \lim_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0).$$

3.

$$\left[\frac{f}{g}\right]'_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right\} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{f(x_0+h)\, g(x_0) - f(x_0)\, g(x_0+h)}{g(x_0+h)\, g(x_0)}\right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0+h)\, g(x_0)} \left\{ g(x_0)\, \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f(x_0)\, \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right\}.$$

Výsledek nyní plyne z definice derivace a ze spojitosti funkce g v bodě x_0.

Poznámka: Jestliže označíme $u = f(x)$, $v = g(x)$, lze předchozí vzorce přepsat přehledněji ve tvaru

$$(\alpha\, u + \beta\, v)' = \alpha\, u' + \beta\, v'; \qquad (\,uv\,)' = u'\, v + u\, v'; \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\, v - u\, v'}{v^2}.$$

Věta: (Derivace inverzní funkce)
Buď f ryze monotonní v intervalu $\mathcal{I}$, $x_0 \in \mathcal{I}$ vnitřní bod. Nechť existuje $f'(x_0) \neq 0$. Potom má inverzní funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ rovnou

$$\{f^{-1}\}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Důkaz: Platí

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = 1 : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

kde $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$. Jestliže $x \to x_0$, pak $y \to y_0$ a odtud dostaneme okamžitě tvrzení věty.

Věta: (Derivace složené funkce)
Nechť má funkce φ v bodě x_0 vlastní derivaci $\varphi'(x_0)$, funkce f v bodě $y_0 = \varphi(x_0)$ vlastní derivaci $f'(y_0)$. Potom má složená funkce $f \circ \varphi$ v bodě x_0 derivaci $f'(y_0) \cdot \varphi'(x_0)$.

Důkaz: Jestliže napíšeme formálně

$$\frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0},$$

kde $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$, zdá se, že výsledek plyne okamžitě z definice derivace. Může se však stát, že $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ i pro $x \neq x_0$ a tam náš postup selže.
Označme $F(x) = f(\varphi(x))$. Máme dokázat, že

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} = f'(y_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

Definujme funkci Φ předpisem

$$\Phi(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} - f'(y_0) & \text{pro} \quad y \neq y_0 \\ 0 & \text{pro} \quad y = y_0. \end{cases}$$

Poněvadž je $\lim\limits_{y \to y_0} \Phi(y) = f'(y_0) - f'(y_0) = 0$, je funkce Φ spojitá v bodě y_0. Funkce φ je spojitá v bodě x_0, protože má vlastní derivaci v tomto bodě. Tedy složená funkce $\Phi(\varphi(x))$ je spojitá v bodě x_0, tj. $\lim\limits_{x \to x_0} \Phi(\varphi(x)) = \Phi(\varphi(x_0)) = \Phi(y_0) = 0$. Dále platí

$$\Phi(\varphi(x)) = \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} - f'(y_0) \quad \text{pro} \quad \varphi(x) \neq y_0.$$

Po jednoduché úpravě odtud dostaneme, že pro každé $x \neq x_0$ $[\,x \in D(\varphi)\,]$ takové, že $\varphi(x) \neq y_0$ platí

$$[\,\Phi(\varphi(x)) + f'(y_0)\,] \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0}.$$

Tento vztah ale platí i pro taková $x \neq x_0$, pro něž je $\varphi(x) = y_0$. Nyní je

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} [\Phi(\varphi(x)) + f'(y_0)] \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \left[\lim_{x \to x_0} \Phi(\varphi(x)) + \lim_{x \to x_0} f'(y_0) \right] \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f'(y_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

Poznámky: 1. Jestliže označíme $y = f(\varphi(x))$, pak je podle předchozí věty $y' = f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, tedy derivaci vnější funkce násobíme derivací vnitřní funkce.

2. Předchozí věty jsou podstatné pro výpočet derivací a je třeba je dobře znát.

3. Jestliže v definici derivace bod x_0 nahradíme libovolným bodem x, je $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a derivace funkce $f(x)$ je opět funkce, kterou budeme značit $f'(x)$.

Derivace základních elementárních funkcí.

1. Je-li $f(x) = C$ (konstanta), je $f'(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.
Důkaz:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C-C}{h} = 0.$$

2. Je-li $f(x) = x^n$ pro $n \in \mathbf{N}$, je $f'(x) = n\,x^{n-1}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.
Důkaz:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{ n\,x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \right\} = n\,x^{n-1}.$$

3. Je-li $f(x) = e^x$, je $f'(x) = e^x$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.
Důkaz:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

4. Je-li $f(x) = \ln x$, je $f'(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$.
Důkaz: Platí

$$y = \ln x \iff x = e^y, \text{ tedy } [\ln x]' = \frac{1}{[e^y]'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

5. Je-li $f(x) = \sin x$, je $f'(x) = \cos x$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.
Důkaz:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\,\sin\frac{h}{2}\,\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

6. Je-li $f(x) = \cos x$, je $f'(x) = -\sin x$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.
Důkaz:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\,\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\,\sin\frac{h}{2}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\sin x.$$

7. Je-li $f(x) = \operatorname{tg} x$, je $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in \mathbf{R}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.
Důkaz:

$$[\operatorname{tg} x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = \frac{\cos x\,\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8. Je-li $f(x) = \operatorname{cotg} x$, je $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in \mathbf{R}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Důkaz:

$$[\operatorname{cotg} x]' = \left[\frac{\cos v}{\sin x}\right]' = \frac{-\sin x\,\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

9. Je-li $f(x) = \arcsin x$, je $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$.

Důkaz: Platí $y = \arcsin x \iff x = \sin y$, tedy

$$f'(x) = \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

poněvadž je $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a platí tedy $\cos y > 0$.

10. Je-li $f(x) = \arccos x$, je $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$.

Důkaz: Poněvadž platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$, dostaneme tvrzení okamžitě zderivováním této identity.

11. Je-li $f(x) = \operatorname{arctg}\, x$, je $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.

Důkaz: Platí $y = \operatorname{arctg}\, x \iff x = \operatorname{tg} y$ a podle věty o derivaci inverzní funkce dostaneme

$$[\operatorname{arctg}\, x]' = \frac{1}{[\operatorname{tg} y]'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

12. Je-li $f(x) = \operatorname{arccotg}\, x$, je $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.

Důkaz: Tvrzení dostaneme okamžitě zderivováním identity $\operatorname{arctg}\, x + \operatorname{arccotg}\, x = \frac{\pi}{2}$, platné pro $x \in (-\infty, +\infty)$.

13. Je-li $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, je $f'(x) = a^x \ln x$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.

Důkaz: Je $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$. Jestliže položíme $u = x \ln a$, plyne z věty o derivaci složené funkce, že

$$[a^x]' = (e^u)' \cdot u' = a^x \ln a.$$

14. Je-li $f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, je $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ pro $x \in (0, +\infty)$.

Důkaz: Platí $y = \log_a x \iff a^y = x$, tedy

$$[\log_a x]' = \frac{1}{[a^y]'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

15. Je-li $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{R})$, je $f'(x) = n\, x^{n-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$.

Důkaz: Platí

$$[x^n]' = \left[e^{n \ln x}\right]' = e^{n \ln x} \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n\, x^{n-1}.$$

16. Je-li $f(x) = \operatorname{sh} x$, je $f'(x) = \operatorname{ch} x$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.

Důkaz: Je

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right] = \operatorname{ch} x.$$

17. Je-li $f(x) = \operatorname{ch} x$, je $f'(x) = \operatorname{sh} x$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.

Důkaz: Je

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right] = \operatorname{sh} x.$$

18. Je-li $f(x) = \operatorname{th} x$, je $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.
Důkaz: Platí

$$f'(x) = \left[\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right]' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

19. Je-li $f(x) = \operatorname{cth} x$, je $f(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ pro $x \in \mathbf{R} - \{0\}$.
Důkaz: Je

$$f'(x) = \left[\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right]' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

20. Je-li $f(x) = \operatorname{argsh} x$, je $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$.
Důkaz: Poněvadž platí $y = \operatorname{argsh} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{sh} y$, je tedy

$$f'(x) = \frac{1}{[\operatorname{sh} y]'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

21. Je-li $f(x) = \operatorname{argch} x$, je $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ pro $x \in (1, +\infty)$.
Důkaz: Je $y = \operatorname{argch} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{ch} y$ pro $y \in \langle 0, +\infty)$ a tedy

$$f'(x) = \frac{1}{[\operatorname{ch} y]} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

22. Je-li $f(x) = \operatorname{argth} x$, je $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ pro $x \in (-1, 1)$.
Důkaz: Platí $y = \operatorname{argth} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{th} y$, tedy

$$f'(x) = \frac{1}{[\operatorname{th} y]'} = \operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

23. Je-li $f(x) = \operatorname{argcth} x$, je $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
Důkaz: Platí $y = \operatorname{argcth} x \Longleftrightarrow x = \operatorname{cth} y$, tedy

$$f'(x) = \frac{1}{[\operatorname{cth} y]'} = -\operatorname{sh}^2 y = \frac{1}{1 - \operatorname{cth}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Poznámka: Uvedené vzorce s výjimkou vzorců $20 - 23$ se používají tak často, že je bezpodmínečně nutné je znát zpaměti. Stejně tak je třeba se naučit natolik derivovat, že budeme schopni mechanicky vypočítat derivaci libovolné funkce.

Příklady: 1. Vypočtěte derivaci funkce $y = 3^{\operatorname{arctg}(x \, \sin x + \sqrt[3]{\operatorname{cotg} x})}$.

Řešení: Pro začátek je vhodné si danou funkci rozepsat pomocí řetězce základních elementárních funkcí. Je tedy

$$y = 3^u, \;\; u = \operatorname{arctg}\, v, \;\; v = x \, \sin x + \sqrt[3]{w}, \;\; w = \operatorname{cotg} x.$$

Odtud podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$y' = 3^u \, \ln u \cdot u' = 3^u \, \ln u \cdot \frac{1}{1 + v^2} \cdot v' = 3^u \, \ln 3 \cdot \frac{1}{1 + v^2}(\sin x + x \, \cos x + \frac{1}{3}\, w^{-\frac{2}{3}} \cdot w') =$$

$$= 3^u \, \ln 3 \cdot \frac{1}{1 + v^2} \left\{ \sin x + x \, \cos x + \frac{1}{3}\, w^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) \right\}.$$

Jestliže se vrátíme k původní proměnné, dostaneme

$$y' = 3^{\operatorname{arctg}(x\,\sin x + \sqrt[3]{\operatorname{cotg} x})}\,\ln 3\,\frac{1}{1+(x\,\sin x+\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x})^2}\cdot\left\{\sin x + x\,\cos x + \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^{-\frac{2}{3}} x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right\}.$$

2. Najděte derivaci funkce $y = x^{\sin x}$.

Je $y = e^{\sin x\,\ln x}$, tedy $y' = x^{\sin x}\left(\cos x\,\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

Definice: Buď f funkce, x_0, h čísla. Potom výraz $f(x_0+h)-f(x_0)$ nazýváme přírůstkem funkce f nebo diferencí funkce f v bodě x_0.

Poznámka: Položíme si nyní otázku, za jakých podmínek je možno přírůstek funkce f vyjádřit tak, že jeho rozhodující část bude lineární, tedy $f(x_0+h)-f(x_0)\doteq A\,h$. Pro přesné vyjádření přírůstku funkce f budeme požadovat, aby chyba, které se dopustíme, byla řádově vyšší než h, tedy

$$f(x_0+h)-f(x_0) = A\,h + h\,\eta(h),\ \text{ kde } \lim_{h\to 0}\eta(h)=0.$$

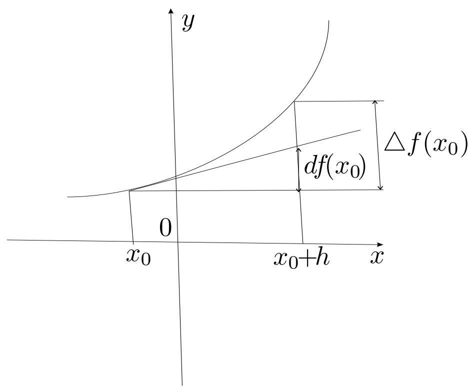
Abychom tuto podmínku splnili, musí platit

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-A\,h}{h} = \eta(h),\ \text{ tedy } A = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Tím dostáváme

Definice: Nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci. Potom výraz $f'(x_0)\,h$ nazýváme diferenciálem funkce f v bodě x_0 a značíme $df(x_0)$, dy a podobně.

Poznámky: 1. Diferenciál funkce má velmi jednoduchou geometrickou interpretaci. Je to totiž přírůstek na tečně, sestrojené v bodě $[\,x_0, f(x_0)\,]$.



Dále je zřejmé, že přibližné formule

$$f(x_0+h)-f(x_0)\doteq df(x_0),$$

neboli $f(x_0+h)\doteq f(x_0)+df(x_0)$ lze pro malá h využít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot.

2. Protože x_0 mohl být libovolný bod, budeme jej v dalším většinou opět značit x. Je-li specielně $f(x)=x$, je $f'(x)=1$ a tedy $d\,f(x)=dx=1\cdot h$ a pro diferenciál budeme používat tradičního, i když ne zcela přesného značení $dy = f'(x)\cdot dx$.

3. Jestliže se nyní ve světle předchozí poznámky podíváme na symbol pro derivaci $\frac{d\,f(x)}{dx}$ nebo $\frac{dy}{dx}$, lze jej považovat za podíl dvou diferenciálů.

3. Diferenciálu je možno použít k odvození derivace parametricky zadané funkce. Parametrickým vyjádřením funkce rozumíme dvojici $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, kde $t\in\langle\alpha,\beta\rangle$. Je-li na příklad φ prostá funkce, je možno psát $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ a můžeme si položit otázku, jak se vypočítá derivace $\frac{dy}{dx}$. Podle vzorce pro derivaci složené funkce dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\,\left[\,\varphi^{-1}(x)\,\right]' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Předpoklad existence φ^{-1} však není vždy splněn, [viz na příklad parametrické rovnice jednotkové kružnice $x = \cos t$, $y = \sin t$; $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$] přesto daný vzorec platí.

Příklady: 1. Vypočtěte přibližně $\sqrt[10]{1000}$.

Řešení: Uvažme funkci $f(x) = \sqrt[n]{a^n + x}$. Potom je $f(0) = a$, $f'(0) = \frac{1}{n\,a^{n-1}}$ a dostaneme tedy přibližnou formuli

$$\sqrt[n]{a^n + x} \doteq a + \frac{1}{n\,a^{n-1}}.$$

Jestliže nyní položíme $n = 10$, $a = 2$, $x = -24$, dostaneme $\sqrt[10]{1000} \doteq 2 - \frac{24}{10 \cdot 2^9} = 1,9951125$. zatímco přesnější hodnota je $1,9952623$.

Analogicky je možno pro malá x odvodit přibližné formule

$$\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x; \quad e^x \doteq 1 + x; \quad \ln(1+x) \doteq x; \quad \sin x \doteq x; \quad \operatorname{tg} x \doteq x$$

a pod.

2. Buďte $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ funkce, které mají v intervalu $\mathcal{I}$ derivace a $\varphi'(t) \neq 0$ v $\mathcal{I}$. Potom existuje derivace $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Důkaz: Platí $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi'(t)\,dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

6.2 Derivace a diferenciály vyšších řádů.

Definice: Buď f funkce, která má derivaci f'. Derivaci funkce f' (pokud existuje) nazýváme druhou derivací funkce f a značíme f''. Obecně derivaci $(n-1)-$vé derivace nazýváme $n-$tou derivací (nebo derivací $n-$tého řádu) a značíme $f^{(n)}$.

Poznámky: 1. Alternativní značení pro druhou derivaci jsou

$$f''(x), \ \frac{d^2 f}{dx^2}, \ \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \ y'', \ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

a podobně. Analogicky pro $n-$tou derivaci.

$$f^{(n)}(x), \ \frac{d^n f}{dx^n}, \ \frac{d^n f(x)}{dx^n}, \ y^{(n)}, \ \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Je-li $n = 0$, pak položíme $f^{(0)}(x) = f(x)$.

2. Podle definice druhé derivace je

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\lim_{k \to 0} \left\{ \frac{f(x_0+h+k) - f(x_0+h)}{k} - \frac{f(x_0+k) - f(x_0)}{k} \right\}}{h}.$$

Jestliže máme zaručenu existenci $f''(x_0)$, můžeme položit $k = h$ a dostaneme

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 2h) - 2\,f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}.$$

Položíme-li $k = -h$, dostaneme analogicky

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - 2\,f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

Věta: (Leibnizova formule)
Mají-li funkce u, v v bodě x_0 derivace až do řádu $n-$tého, má v tomto bodě $n-$tou derivaci i součin $u \cdot v$ a platí

$$(u \cdot u)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}\, v^{(k)}, \text{ kde } u^{(0)} = u,\, v^{(0)} = v.$$

Důkaz: Provede se úplnou indukcí jako důkaz binomické věty.

Příklady: 1. Najděte $n-$tou derivaci funkce $y = \ln x$.

Řešení: Platí

$$y' = \frac{1}{x},\ y'' = -\frac{1}{x^2},\ y''' = \frac{2}{x^3},\ y^{IV} = -\frac{3!}{x^4} \text{ a odtud indukcí } y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

2. Vypočtěte $n-$tou derivaci funkce $y = x^2\, e^x$.

Řešení: Položme $v = x^2$, $u = e^x$. Potom je

$$v' = 2x,\ v'' = 2,\ v''' = 0, \ldots, v^{(n)} = 0,\ u' = e^x,\ u'' = e^x, \ldots, u^{(n)} = e^x$$

a podle Leibnizovy formule platí $y^{(n)} = x^2 e^x + 2n\, x\, e^x + n(n-1)\, e^x$.

3. Vypočtěte $\frac{d^2y}{dx^2}$, je-li $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$.

Řešení: Podle příkladu z konce předchozího paragrafu je $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, tedy pro druhou derivaci platí

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\varphi'(t)\, dt} = \frac{\varphi'(t)\, \psi''(t) - \varphi''(t)\, \psi'(t)}{[\,\varphi'(t)\,]^3}.$$

Tímto způsobem můžeme pokračovat dále při výpočtu $\frac{d^3y}{dx^3}$ atd.

Poznámka: Uvážíme-li diferenciál funkce $dy = f'(x)\, dx$, je to funkce proměnné x a též přírůstku h (nebo dx). Jestliže předpokládáme, že h je v každém bodě x stejné, dostaneme funkci jedné proměnné a můžeme se ptát, jak vypadá diferenciál této funkce, neboli $d(dy)$. Tím se dostáváme k definici diferenciálu $n-$tého řádu.

Definice: Buď dána funkce $y = f(x)$. Jestliže existuje diferenciál funkce dy, nazýváme jej diferenciálem druhého řádu a značíme d^2y.
Obecně diferenciál $n-$tého řádu definujeme předpisem $d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$.

Poznámky: 1. Platí $dy = f'(x)\, dx$, tedy $d^2y = d\,(f'(x)\, dx) = f''(x)\, dx^2$. Indukcí odtud dostaneme, že $d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n$.

2. Diferenciál $n-$tého řádu funkce f tedy existuje právě když existuje $n-$tá derivace funkce f a pojem $n-$tého diferenciálu se zdá býti zbytečný. Jeho důležitost se však ukáže až v souvislosti s funkcemi více proměnných. Jestliže však uvážíme symbol pro vyjádření $n-$té derivace $\frac{d^n y}{dx^n}$, lze jej považovat za podíl $n-$tého diferenciálu y ku $n-$té mocnině dx. To je však spíš zajímavost, než že by to prakticky k něčemu bylo.

6.3 Základní věty diferenciálního počtu.

Definice: Buď f funkce, x_0 číslo. Řekneme, že f je rostoucí v bodě x_0, jestliže existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x) < f(x_0)$ a pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) > f(x_0)$.
Řekneme, že f je klesající v bodě x_0, jestliže existuje $\delta > 0$ tak,že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$ a pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) < f(x_0)$,

Poznámka: Jestliže srovnáme předchozí definici s definicí funkce rostoucí v intervalu, je vidět, že funkce f je rostoucí v intervalu (a, b) právě když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu. Analogicky pro klesající funkci. Pro vyšetření růstu funkce v bodě lze však použít následující větu.

Věta: 1. Je-li $f'(x_0) > 0$ (resp. $f'(x_0) = +\infty$), je f rostoucí v bodě x_0.
2. Je-li $f'(x_0) < 0$ (resp. $f'(x_0) = -\infty$), je f klesající v bodě x_0.

Důkaz: ad 1. Buď $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ pro $0 < |x - x_0| < \delta$. Tedy pro $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x) - f(x_0) < 0$ t.j. $f(x) < f(x_0)$ a pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) - f(x_0) > 0$. Analogicky dokážeme tvrzení 2.

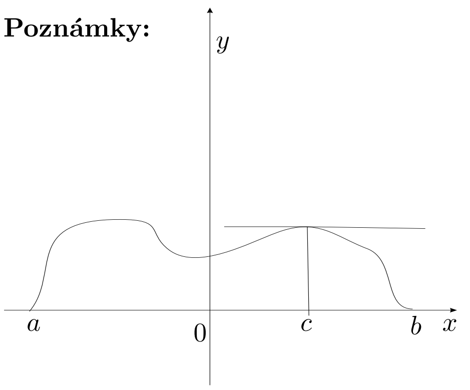
Poznámka: Předchozí věta udává jednoduchou postačující podmínku pro to, aby daná funkce f byla rostoucí po případě klesající v daném intervalu.

! Věta: (Rolleova)
Nechť funkce f splňuje následující podmínky:
1. f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.
2. f má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v intervalu (a, b).
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

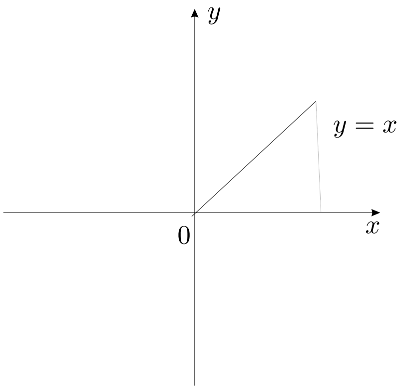
Důkaz: Můžeme předpokládat, že $f(a) = f(b) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, zvolíme $h(x) = f(x) - f(a)$, pro niž již tento předpoklad platí a poněvadž $[\,f(a)\,]' = 0$. nic se na tvrzení věty nezmění.
Je-li nyní $f(x) = 0$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, je $f'(x) = 0$ pro $x \in (a, b)$ a věta platí.
Nechť existuje bod $x_1 \in (a, b)$ tak, že $f(x_1) > 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) = \max\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$. Kdyby nyní bylo $f'(c) > 0$ (resp. $f'(c) = +\infty$), pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (c, c + \delta)$ je $f(x) > f(c)$. Analogicky je-li $f'(c) < 0$ (resp. $f'(c) = -\infty$), existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (c - \delta, c)$ je $f(x) > f(c)$. Musí tedy být $f'(c) = 0$.
Případ, kdy existuje bod $x_2 \in (a, b)$ tak, že $f(x_2) < 0$, se provede analogicky. Hledaný bod $c \in (a, b)$ je takový, že $f(c) = \min\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$.

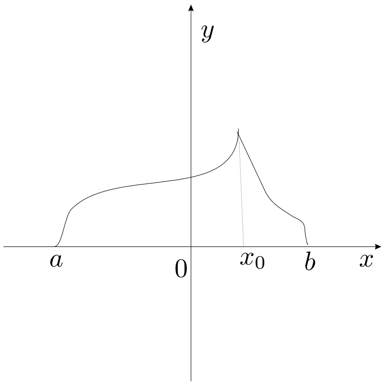
Poznámky:



1. Rolleova věta má jednoduchou geometrickou interpretaci. Tvrzení $f'(c) = 0$ říká, že v bodě c je tečna ke křivce $y = f(x)$ rovnoběžná s osou x. (Viz obrázek). Takových bodů může být samozřejmě více.

2. Jestliže zeslabíme některý z předpokladů 1 nebo 2, tvrzení věty již neplatí, jak je vidět na následujících obrázcích.





V prvém případu stačí zvolit na příklad $y = x$ pro $x \in \langle 0, 1) , y(1) = 0$. Tato funkce není spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Ve druhé případu nemá daná funkce derivaci v bodě x_0. Není tedy splněn předpoklad existence derivace v intervalu (a, b). Stačí na příklad zvolit funkci $y = 1 - |x|$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$. (Je $x_0 = 0$.)

! Věta: (Lagrangeova nebo věta o střední hodnotě)
Nechť funkce f splňuje následující podmínky:
1. Je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.
2. Má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

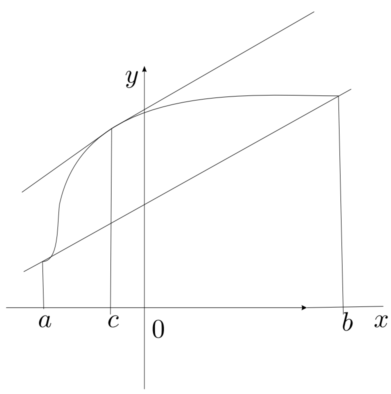
Důkaz: Je-li $f(a) = f(b)$, dostaneme Rolleovu větu. Položme nyní

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\,[\,f(b) - f(a)\,]\,.$$

Potom je Φ spojitá v $\langle a, b\rangle$, $\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ existuje pro $x \in (a, b)$. Dále $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ a podle Rolleovy věty existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $\Phi'(c) = 0$, neboli $0 = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Poznámka:

Věta o střední hodnotě má následující geometrickou interpretaci. Existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že tečna v bodě $[\,c, f(c)\,]$ je rovnoběžná se sečnou, spojující body $[\,a, f(a)\,]$ a $[\,b, f(b)\,]$. (Viz obrázek vpravo.)



! Věta: (Cauchyova nebo zobecněná věta o střední hodnotě)
Buďte f a g dvě funkce, které splňují následující podmínky:
1. Jsou spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$.

2. V každém bodě intervalu (a, b) existuje derivace f (vlastní nebo nevlastní) a vlastní derivace funkce g.

3. $g'(x) \neq 0$ pro $x \in (a, b)$.

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Důkaz: Podle věty o střední hodnotě existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že

$$g(b) - g(a) = g'(\xi)\,(b - a) \neq 0$$

a oba zlomky ve tvrzení věty mají smysl. Položme

$$F(x) = [\,f(x) - f(a)\,]\;[\,g(b) - g(a)\,] - [\,f(b) - f(a)\,]\;[\,g(x) - g(a)]\,.$$

Funkce F spňuje předpoklady Rolleovy věty a tedy existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $F'(c) = 0$, neboli

$$f'(c)\,[\,g(b) - g(a)\,] - g'(c)\,[\,f(b) - f(a)\,] = 0,$$

což po jednoduché úpravě dává tvrzení věty.

Poznámky: 1. Jestliže v předchozí větě položíme $g(x) = x$, dostaneme větu o střední hodnotě.

2. Rolleova věta, věta o střední hodnotě a zobecněná věta o střední hodnotě jsou základními větami diferenciálního počtu. Jednoduché aplikace těchto vět budou uvedeny v následujících příkladech, složitějším aplikacím je věnován celý následující paragraf.

Příklady: 1. Ukažte, že pro libovolná $x, y \in \mathbf{R}$ platí $|\sin x - \sin y\,| \leq |\,x - y\,|$.

Důkaz: Je-li $x = y$, pak tvrzení platí. Nechť $x < y$. Použitím věty o střední hodnotě na interval $\langle x, y\rangle$ dostaneme, že existuje bod $c \in (x, y)$ tak, že

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos c, \quad \text{tedy} \quad \left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| = |\cos c| \leq 1$$

a odtud plyne tvrzení.

2. Buď $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ polynom s reálnými koeficienty a nechť jsou všechny kořeny algebraické rovnice $P_n(x) = 0$ reálné. Potom mají všechny polynomy $P_n'(x), P_n''(x), \ldots$ také pouze reálné kořeny.

Důkaz: Stačí zřejmě ukázat, že polynom $P_n'(x)$ má pouze reálné kořeny.

a) Nechť $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ jsou kořeny rovnice $P_n(x) = 0$, tedy všechny jsou jednoduché. Podle Rolleovy věty existují čísla $\beta_1 \in (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta_2 \in (\alpha_2, \alpha_3), \ldots,$ $\beta_{n-1} \in (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ tak,že $P_n'(\beta_i) = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

b) Má-li polynom $P_n(x)$ $k-$násobný kořen α, pak α je $(k-1)-$násobný kořen polynomu $P_n'(x)$. Skutečně $P(x)$ lze psát ve tvaru $P(x) = (x - \alpha)^k\,Q(x)$, kde $Q(\alpha) \neq 0$. Potom

$$P'(x) = k(x-\alpha)^{k-1}\,Q(x) + (x-\alpha)^k\,Q'(x) = (x-\alpha)^{k-1}\,[\,k\,Q(x) + (x - \alpha)\,Q'(x)] = (x-\alpha)^{k-1}\,R(x),$$

kde $R(\alpha) = k\,Q(\alpha) \neq 0$.

c) Buďte nyní $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$ kořeny polynomu $P_n(x)$ s násobnostmi $k_1, k_2, \ldots, k_p$ a uvažme interval $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle$. Podle bodu b) má $P_n'(x)$ kořeny α_1, α_2 s násobnostmi $k_1 - 1$, $k_2 - 1$ a podle a) existuje $\beta_1 \in (\alpha_1, \alpha_2)$ tak, že $P_n'(\beta_1) = 0$. Jestliže pokračujeme stejným způsobem pro intervaly $\langle\alpha_2, \alpha_3\rangle, \ldots, \langle\alpha_{p-1}, \alpha_p\rangle$, dostaneme tvrzení.

6.4 Užití diferenciálního počtu.

Poznámky: 1. V tomto paragrafu ukážeme 3 aplikace vět střední hodnotě a sice l'Hôspitalovo pravidlo, Taylorův vzorec a metody vyšetřování průběhu funkce.

2. Při vyšetřování limity podílu $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ lze použít příslušné věty za předpokladu, že limity čitatele i jmenovatele existují, jsou vlastní a $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$. Věta tedy nedává žádnou odpověď v případě, že $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ nebo je-li některá z limit nevlastní po případě neexistuje. Není těžké zjistit, že $\lim\limits_{x\to c}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$, je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq 0$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$. Je-li $f(x)$ omezená v jistém okolí bodu c a $\lim\limits_{x\to c}|g(x)| = +\infty$, pak $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Stejně tak, je-li $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ vlastní a $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = +\infty$, pak $\lim\limits_{x\to c}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$. Nerozhodnuté zůstávají dva případy a sice je-li

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ nebo } \lim_{x\to c}|f(x)| = \lim_{x\to c}|g(x)| = +\infty.$$

V těchto případech může pomoci l'Hôspitalovo pravidlo.

Věta: (První l'Hôspitalovo pravidlo)
Nechť $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$. Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní nebo nevlastní), pak existuje i $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogická věta platí i pro jednostranné limity.

Důkaz: Dokážeme tvrzení věty pro limitu zprava v bodě c. Položme $f(c) = g(c) = 0$. Dále existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (c, c+\delta)$ má smysl $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (existuje totiž $\lim\limits_{x\to c_+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$) a tedy $g'(x) \neq 0$. Pro libovolné $x \in (c, c+\delta)$ jsou funkce f a g spojité v intervalu $\langle c, x\rangle$ a podle zobecněné věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (c, x)$ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

jestliže $x \to c_+$, pak $\xi \to c_+$ a tedy

$$\lim_{x\to c_+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c_+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámky: 1. Je-li v předchozí větě $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = \lim\limits_{x\to c} g'(x) = 0$, můžeme opakovaně použít tvrzení věty, tedy

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Obecně, jestliže

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} f'(x) = \cdots = \lim_{x\to c} f^{(k-1)}(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} g'(x) = \cdots = \lim_{x\to c} g^{(k-1)}(x) = 0$$

a existuje $\lim\limits_{x\to c}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$, pak existují i $\lim\limits_{x\to c}\frac{f^{(i)}(x)}{g^{(i)}(x)}$ pro $i = 0, 1, \ldots, i-1$ a jsou si všechny rovny.

2. Jestliže $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, nelze o limitě $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ předem nic říci. Uvažme na příklad $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$. Po formálním použití l'Hôspitalova pravidla dostaneme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$. Tato limita však neexistuje, poněvadž $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ neexistuje. Platí však

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Příklad:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{3e^x} = \frac{1}{3}.$$

Věta: (Druhé l'Hôspitalovo pravidlo)
Buď $\lim\limits_{x\to c} |g(x)| = +\infty$ a nechť existuje $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní nebo nevlastní). Potom existuje také $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Důkaz: Důkaz provedeme opět pouze pro limitu zprava. Poněvadž existuje $\lim\limits_{x\to c_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ a $\lim\limits_{x\to c_+} |g(x)| = +\infty$, plyne odtud, že existuje číslo $\triangle > 0$ tak, že pro $\forall x \in (c, c+\triangle)$ existují derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ a $g'(x) \neq 0 \neq g(x)$. Jestliže nyní zvolíme $c < x < x_1 < c + \triangle$, pak podle zobecněné věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (x, x_1)$ tak, že

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{neboli} \quad f(x) - f(x_1) = [\, g(x) - g(x_1)\,] \, \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

po vydělení $g(x)$ a jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(x_1)}{g(x)}, \quad x < \xi < x_1.$$

Nyní budeme rozlišovat 3 případy.

α) $A = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Potom existuje $\delta_1 > 0$ (volme $\delta_1 < \triangle$) tak, že pro

$$\xi \in (c, c + \delta_1) \quad \text{je} \quad \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| < \frac{1}{2}\,\varepsilon.$$

Jestliže zvolíme $x_1 = c + \delta_1$, platí, že $\xi \in (c, c + \delta_1)$ a dostaneme odhad

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{|g(x)|} \left\{ \frac{\varepsilon}{2}\, |g(x_1)| + |f(x_1)| \right\} \quad \text{pro} \quad c < x < c + \delta_1.$$

Poněvadž je $\lim\limits_{x\to c_+} |g(x)| = +\infty$, existuje $\delta_2 > 0$ tak, že

$$\frac{1}{|g(x)|} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} |g(x_1)| + |f(x_1)| \right\} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro} \quad x \in (c, c + \delta_2).$$

$\big[$Stačí volit taková x, že $|g(x)| > \frac{2}{\varepsilon}\left\{\frac{\varepsilon}{2}|g(x_1)| + |f(x_1)|\right\}\big]$. Položíme-li nyní $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, platí pro $x \in (c, c+\delta)$ odhad

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon\,, \quad \text{neboli} \quad \lim_{x\to c_+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

β) Nechť $A \in \mathbf{R} - \{0\}$ a položme $F(x) = f(x) - Ag(x)$. Potom platí

$$\lim_{x\to c_+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c_+} \left\{\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right\} = 0$$

a podle případu α) je $\lim\limits_{x\to c_+} \frac{F(x)}{g(x)} = 0$, neboli

$$\lim_{x\to c_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c_+} \left\{\frac{F(x)}{g(x)} + A\right\} = A\,.$$

γ) Buď $A = +\infty$.
$\Big($Případ $A = -\infty$ dostaneme okamžitě, jestliže místo podílu $\frac{f(x)}{g(x)}$ vyšetříme $-\frac{f(x)}{g(x)}\Big)$. Zvolme $K > 0$ libovolně. Potom existuje $\delta_1 > 0$ $(\delta_1 < \triangle)$ tak, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 2(K+1) \quad \text{pro} \quad c < \xi < c + \delta_1\,.$$

Jestliže položíme opět $x_1 = c + \delta_1$, existuje $\delta_2 > 0$ tak, že platí

$$|g(x)| > 2|g(x_1)|\,; \quad |g(x)| > |f(x_1)| \quad \text{pro} \quad x \in (c, c+\delta_2)\,.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom pro $x \in (c, c+\delta)$ platí

$$\left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right| < 1\,; \quad \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}\,, \quad \text{tedy} \quad 1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} > \frac{1}{2}$$

a odtud plyne, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2} \cdot 2(K+1) - \left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right| > K \quad \text{pro} \quad x \in (c, c+\delta)\,,$$

je tedy $\lim\limits_{x\to c_+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Poznámky: 1. Znění předchozí věty ukazuje, že vlastně nepotřebujeme informaci o limitě $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, i když její dominantní použití je na případ, že $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = \lim\limits_{x\to c} |g(x)| = +\infty$.

2. Z důkazů obou l'Hôspitalových pravidel plyne, že jsou důsledkem zobecněné věty o střední hodnotě.

3. L'Hôspitalovo pravidlo platí i pro limity v nevlastních bodech. Je-li na příklad

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

a položíme $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$, pak platí

$$\lim_{t\to 0_+} F(t) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{t\to 0_+} G(t) = 0\,.$$

Dále $F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)$, $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$ a tedy

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0_+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0_+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

4. L'Hôspitalova pravidla se týkají limit, které bychom mohli nazvat neurčitými výrazy a budeme je symbolicky značit „$\frac{0}{0}$" a „$\frac{\infty}{\infty}$". Jestliže vyšetřujeme limitu tvaru $\lim\limits_{x\to c} f(x)\,g(x)$, kde $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to c}|g(x)|=+\infty$, dostaneme další neurčitý výraz „$0\cdot\infty$". Pro limitu rozdílu dvou funkcí $\lim\limits_{x\to c}[\,f(x)-g(x)\,]$ dostaneme neurčitý výraz „$\infty-\infty$", je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c} g(x)=\pm\infty$. V souvislosti s limitou $\lim\limits_{x\to c}[\,f(x)\,]^{g(x)}$ vznikají další neurčité výrazy „1^{∞}", „0^{0}", „∞^{0}", „0^{∞}". Po vhodné úpravě je možno při výpočtu všech těchto limit užít l'Hôspitalova pravidla.

5. L'Hôspitalovo pravidlo dává též možnost srovnání rychlosti růstu různých funkcí. Je např.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^{\varepsilon x}}=0\,,\ \varepsilon>0\,,\ a\in\mathbf{R};\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^a x}{x^{\varepsilon}}=0\,,\ \varepsilon>0\,,\ a\in\mathbf{R};\quad \lim_{x\to 0_+} x^{\varepsilon}\ln^k x=0\,,\ \varepsilon>0,\ k\in\mathbf{N}\,.$$

Příklady:

1.
$$\lim_{x\to 0_+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0_+}\left\{\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos 2x}{\cos x}\right\}=1.$$

2.
$$\lim_{x\to+\infty}\{\,(\pi-2\mathrm{arctg}\ x\,)\ln x\,\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\,\mathrm{arctg}\ x}{\ln^{-1}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x}\ln^{-2}x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\ln^2 x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln^2 x+4\ln x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0.$$

3.
$$\lim_{x\to 0}\left\{\mathrm{cotg}\,x-\frac{1}{x}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\frac{\sin x}{x}}=0\,.$$

4.
$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right\}^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)}{x^2}}=e^A,$$

kde

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(a^x-1)\ln a}{a^x-x\ln a}-\frac{(b^x-1)\ln b}{b^x-x\ln b}}{2x}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a^x-1}{x\ln a}\cdot\frac{\ln^2 a}{a^x-x\ln a}-\frac{b^x-1}{x\ln b}\cdot\frac{\ln^2 b}{b^x-x\ln b}\right\}=\frac{1}{2}\left(\ln^2 a-\ln^2 b\right).$$

Hledaná limita je tedy $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}$.

Poznámka: Je-li dána funkce f, může být její průběh v okolí nějakého bodu značně komplikovaný. Pokusíme se ji tedy v okolí takového bodu aproximovat jednodušší funkcí. K poměrně jednoduchým funkcím patří polynomy a budeme tedy uvažovat přibližné vyjádření

$$f(x)\approx c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n=P_n(x).$$

Má-li funkce f v bodě a derivace až do řádu $n-$tého, můžeme navíc požadovat, aby platilo

$$f(a)=P_n(a),\ \ f'(a)=P_n'(a),\ \ldots\,,\ \ f^{(n)}(a)=P_n^{(n)}(a),$$

Jestliže provedeme příslušné výpočty, zjistíme, že polynom P_n je těmito podmínkami určen jednoznačně a platí

$$c_0=f(a)\,,\ \ c_1=\frac{f'(a)}{1!}\,,\ \ldots\ ,\ \ c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,.$$

Jestliže funkci $f(x)$ v okolí bodu a nahradíme polynomem $P_n(x)$, dopustíme se chyby, kterou budeme označovat $R_{n+1}(x)$. Tedy $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$.

Definice: Buď f funkce, která má v bodě a derivace až do řádu $n-$tého. Potom polynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

nazýváme<u>Taylorovým polynomem</u> $n-$tého stupně funkce f. Je-li $a = 0$, pak polynom

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k$$

nazýváme <u>Maclaurinovým polynomem</u>.

Věta: (Taylorova)
Nechť má funkce f derivace až do řádu $(n+1)-$vého v otevřeném intervalu $\mathcal{I}$ a buďte $a, x \in \mathcal{I}$ dva body. Definujme $R_{n+1}(x)$ rovnicí

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)\,, \quad \text{kde} \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k.$$

Buď φ funkce, která má v intervalu $\mathcal{I}$ nenulovou derivaci. Potom existuje bod ξ, ležící mezi body a, x tak, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \cdot \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi).$$

Je-li specielně $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, je

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \qquad [\,\text{Lagrangeův tvar zbytku}\,].$$

Pro $\varphi(t) = t$ dostaneme

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n\,(x-a)}{n!}\,f^{(n+1)}(\xi) \qquad [\,\text{Cauchyův tvar zbytku}\,].$$

Důkaz: Definujme funkci F předpisem

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\,(x-t)^k.$$

Potom je $F(x) = 0,\;\; F(a) = R_{n+1}(x)$, funkce F má v intervalu $\mathcal{I}$ derivaci a platí

$$F'(t) = -f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Je totiž

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\,(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}\,(x-t)^{k-1}.$$

Jestliže ve druhé sumě změníme sčítací index, dostaneme

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\,(x-t)^k + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!}\,(x-t)^l = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n.$$

Podle zobecněné věty o střední hodnotě existuje bod ξ mezi body a, x tak, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

a odtud

$$F(a) = R_{n+1}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-\xi)^n}{n!}.$$

Je-li nyní $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, pak $\varphi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$, $\varphi(x) = 0$, $\varphi(a) = (x-a)^{n+1}$, neboli

$$R_{n+1}(x) = \frac{-(x-a)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n} \; f^{(n+1)}(\xi) \; \frac{(x-\xi)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \, (x-a)^{n+1}.$$

Pro $\varphi(t) = t$ dostaneme $\varphi'(t) = 1$, neboli

$$R_{n+1}(x) = (x-a) \; f^{(n+1)}(\xi) \; \frac{(x-\xi)^n}{n!} = \frac{(x-\xi)^n (x-a)}{n!} \, f^{(n+1)}(\xi).$$

Poznámky: 1. Taylorova věta je opět důsledkem zobecněné věty o střední hodnotě a má mimořádný význam v numerické matematice. Dává možnost přibližného výpočtu funkčních hodnot i odhadu chyby, které se dopustíme.

2. Pro pohodlnější odhad bývá někdy vhodné zbytek přepsat. Jestliže položíme $x - a = h$, je $\xi = a + \Theta h$, kde $0 < \Theta < 1$ a zbytky mají tvar

$$R_{n+1}(h) = \frac{f^{(n+1)}(a + \Theta h)}{(n+1)!} \, h^{n+1} \qquad [\,\text{Lagrangeův tvar}\,],$$

$$R_{n+1}(h) = \frac{f^{(n+1)}(a + \Theta h)}{n!} \, h^{n+1} \, (1 - \Theta)^n \qquad [\,\text{Cauchyúv tvar}\,].$$

V Cauchyově tvaru zbytku je totiž $x - \xi = a + h - a - \Theta h = (1 - \Theta)h$.

Příklady: 1. Najděte Maclaurinův vzorec pro funkci $y = e^x$ a vypočtěte $\sqrt{e}$ s chybou menší než 10^{-6}.

Řešení: Poněvadž $y^{(n)} = e^x$ pro $n \in \mathbf{N}$, dostaneme $y(0) = 1$, $y'(0) = 1, \ldots, y^{(n)}(0) = 1$ a tedy

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \text{ kde } R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} \, x^{n+1}$$

a ξ leží mezi 0 a x. Nyní

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \, 2!} + \cdots + \frac{1}{2^n \, n!} + R_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

a hledáme n tak, aby $\left|R_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| < 10^{-6}$. Je však $R_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^\xi}{2^{n+1}(n+1)!}$, kde $0 < \xi < \frac{1}{2}$ a poněvadž $e^\xi \leq 2$, stačí nalézt n takové, aby $\frac{1}{2^n (n+1)!} < \frac{1}{10^6}$, neboli $2^n (n+1)! > 10^6$. K tomu stačí $n = 7$ a tedy

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \, 2!} + \frac{1}{2^3 \, 3!} + \frac{1}{2^4 \, 4!} + \frac{1}{2^5 \, 5!} + \frac{1}{2^6 \, 6!} + \frac{1}{2^7 \, 7!} = 1,648\,721\,168\,,$$

zatímco přesnější hodnota je $\sqrt{e} \doteq 1,648\,721\,271\,.$

2. Ukažte, kolik členů v Maclaurinově vzorci pro funkci $y = \cos x$ je třeba vzíti, aby chyba v intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ byla menší než 10^{-10}.

Řešení: Odvodíme nejdříve Maclaurinův vzorec pro funkci $y = \cos x$. Je

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\cos x = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ldots, y^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

a odtud

$$y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = -1, \ldots, \; y^{(2k-1)} = 0, \;\; y^{(2k)} = (-1)^k.$$

Tedy

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x), \;\; \text{kde} \;\; R_{2n+2}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cos\xi}{(2n+2)!}\, x^{2n+2};$$

ξ leží mezi 0 a x. Nyní stačí nalézt n tak, aby $|R_{2n+2}(x)| < 10^{-10}$. Poněvadž je

$$\frac{\pi}{4} < 1\,, \quad |\cos\xi| < 1\,, \quad \text{je} \quad |R_{2n+2}(x)| < \frac{1}{(2n+2)!} \leq \frac{1}{10^{10}}\,.$$

To je splněno pro $n = 6$.

3. Najděte maximální chybu, které se dopustíte při použití přibližné formule $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Řešení: $\sqrt{1+x}$ je speciálním případem obecné mocniny $(1+x)^m$, a proto odvodíme Maclarinův vzorec této funkce. Je-li m přirozené číslo, dostaneme známou binomickou větu

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Pro ostatní m platí $y^{(k)} = m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$ a definujeme-li binomický koeficient pro libovolné m předpisem

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}, \quad \binom{m}{0} = 1,$$

můžeme psát

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + R_{n+1}(x), \quad \text{kde} \quad R_{n+1}(x) = \binom{m}{n+1} x^{n+1}(1-\Theta)^n \,(1+\Theta x)^{m-n-1}\,;$$

$0 < \Theta < 1$. Pro $m = \frac{1}{2}$ je

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!}, \;\; k \geq 2.$$

Tedy

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{(2k)!!}\, x^k + R_{n+1}(x), \;\; \text{kde}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n\,(1-\Theta)^n(2n-1)!!}{(2n+2)!!\,(1+\Theta x)^{n+1/2}}\; x^{n+1}; \;\; 0 < \Theta < 1.$$

V našem případě je $n = 2$ a pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$|R_3(x)| = x^3 \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta\, x}\right)^2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\Theta\, x}} \leq \frac{1}{16}.$$

Je totiž $\frac{1-\Theta}{1+\Theta\, x} \leq 1$ a stejně $\frac{1}{\sqrt{1+\Theta\, x}} \leq 1$.

4. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Řešení: Jestliže použijeme Maclaurinova vzorce pro funkce $\cos x$ a e^t pro $t = -\frac{x^2}{2}$, dostaneme

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\cos\xi}{6!}\, x^6\,, \quad e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{e^{-\frac{\vartheta^2}{2}}}{8\cdot 3!}\, x^6\,.$$

Po dosazení a jednoduché úpravě je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + x^2 \left(\frac{e^{-\frac{\vartheta^2}{2}}}{8\cdot 3!} - \frac{\cos\xi}{6!} \right) \right\} = -\frac{1}{12}\,.$$

Poznámky: 1. Předchozí příklad ukazuje, že Taylorova vzorce můžeme využít k efektivnímu výpočtu limit funkcí. Srovnejte si, o co rychlejší je tento způsob výpočtu ve srovnání s l'Hôspitalovým pravidlem.

2. Zbytek tohoto paragrafu bude věnován aplikacím věty o střední hodnotě a sice metodám vyšetřování průběhu funkce.

Definice: Buď f funkce, definovaná na množině $M \subset \mathbf{R}$ a buď c vnitřní bod M. Řekneme, že f má v bodě c <u>lokální maximum</u> (resp. <u>lokální minimum</u>), jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro

$$x \in (c-\delta, c+\delta) \text{ platí } f(x) \leq f(c) \text{ (resp. } f(x) \geq f(c)).$$

Jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro

$$x \in (c-\delta, c+\delta),\, x \neq c \text{ platí } f(x) < f(c) \text{ (resp. } f(x) > f(c)),$$

řekneme, že funkce f má v bodě c <u>ostré lokální maximum</u> (resp. <u>ostré lokální minimum</u>).

Věta: Jestliže pro $x_0 \in \operatorname{Int} M$ je $f'(x_0) \neq 0$, pak funkce f nemá v bodě x_0 extrém.

Důkaz: Plyne okamžitě z definice funkce rostoucí nebo klesající v bodě.

Důsledek: Nutná podmínka extrému funkce f v bodě x_0 je $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.

Věta: Buď $f'(x_0) = 0$ a nechť existuje vlastní derivace funkce f v jistém okolí bodu x_0. Potom platí

1. Existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f'(x) > 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f'(x) < 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

2. Existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $x_{-}\delta < x < x_0$ je $f'(x) < 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f'(x) > 0$, má f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

3. Jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ je $f'(x) > 0$, je f rostoucí v bodě x_0.

4. Jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ je $f'(x) < 0$, je f klesající v bodě x_0.

Důkaz: Podle předpokladu existuje $\alpha > 0$ tak, že funkce f má v intervalu $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ derivaci a zvolme $\delta \leq \alpha$ a nechť $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ je libovolný bod. Funkce f splňuje v intervalu $\langle x_0, x\rangle$ (resp. $\langle x, x_0\rangle$) předpoklady věty o střední hodnotě, tedy existuje bod η, ležící mezi x_0 a x tak,že

$$f(x) - f(x_0) = f'(\eta)(x - x_0).$$

ad 1. Pro $x < x_0$ je $f'(\eta) > 0$, tedy $f(x) < f(x_0)$ a pro $x > x_0$ je $f'(\eta) < 0$, tedy $f(x) < f(x_0)$. Odtud plyne, že f má v bodě x_0 ostré lokální maximum. Ostatní případy se vyšetří analogicky.

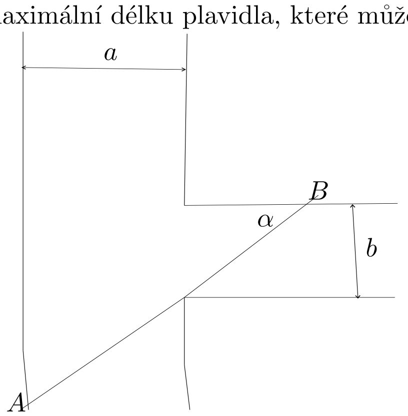
Věta: Buď f funkce, definovaná na množině M a nechť nabývá své největší (resp. nejmenší) hodnoty v bodě $c \in M$. Potom je bod c buďto hraničním bodem této množiny nebo je to bod, v němž má funkce f lokální extrém.

Důkaz: Tvrzení je zřejmé.

Věta: Nechť existují derivace $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ různých znamének. Potom má funkce f v bodě x_0 ostrý lokální extrém a to
1. ostré lokální maximum, je-li $f'_-(x_0) > 0$ a $f'_+(x_0) < 0$,
2. ostré lokální minimum, je-li $f'_-(x_0) < 0$ a $f'_+(x_0) > 0$.

Důkaz: 1. Je $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$ a tedy existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro $x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$ je $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$, tedy $f(x) < f(x_0)$. Analogicky $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$ a tedy existuje $\delta_2 > 0$ tak, že pro $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$ je $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$, tedy $f(x) < f(x_0)$. Zvolíme-li $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, dostaneme definici ostrého lokálního maxima. Případ 2 provedeme analogicky.

Příklad: Do řeky o šířce a metrů ústí pod pravým úhlem kanál o šířce b metrů. Zjistěte maximální délku plavidla, které může z řeky do kanálu vplout.



Řešení: Jestliže si situaci načrtneme, je vidět, že délka úsečky AB se mění v závislosti na úhlu α. Nejkratší z těchto úseček je právě hledaná maximální délka plavidla. Jestliže označíme $f(\alpha)$ délku úsečky AB, pak platí

$$f(\alpha) = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\sin\alpha};$$

$$f'(\alpha) = \frac{a\,\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{b\,\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{a\,\sin^3\alpha - b\,\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha}.$$

Položíme-li $f'(\alpha) = 0$, dostaneme podmínku $\mathrm{tg}^3\alpha = \frac{b}{a}$, tedy $\alpha_0 = \mathrm{arctg}\,\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Poněvadž je čitatel v $f'(\alpha)$ rostoucí funkce α, je pro $\alpha < \alpha_0$ $f'(\alpha) < f'(\alpha_0) = 0$ a pro $\alpha > \alpha_0$ $0 = f'(\alpha_0) < f(\alpha)$. Funkce f má tedy v daném bodě ostré lokální minimum

$$f(\alpha) = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}\left(a + \frac{b}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right), \text{ neboli } f(\alpha_0) = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Definice: Řekneme, že funkce f je <u>konvexní</u> v intervalu $\mathcal{I}$, jestliže pro libovolnou dvojici bodů x_1, $x_2 \in \mathcal{I}$ platí

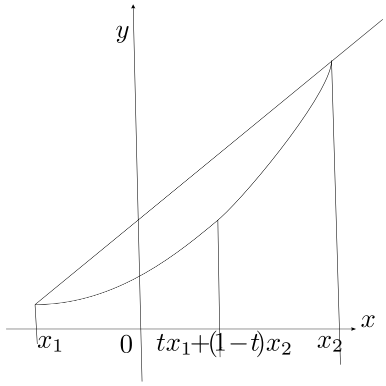
$$f\{tx_1 + (1-t)x_2\} \leq t\,f(x_1) + (1-t)f(x_2) \text{ pro } t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Řekneme, že f je ryze konvexní (nebo také striktně nebo ostře konvexní), jestliže pro libovolnou dvojici $x_1,\, x_2 \in \mathcal{I},\ \ x_1 \neq x_2$ a $t \in (0,1)$ platí

$$f\,\{t\,x_1 + (1-t)x_2\} < t\,f(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

O funkci f řekneme, že je konkávní, je-li funkce $-f$ konvexní. Analogicky pro ryze konkávní funkci.

Poznámky:



1. Z definice konxexní funkce plyne, že libovolná funkční hodnota $f\{tx_1 + (1-t)x_2\}$ leží pod spojnicí (nebo na ní) bodů $A[\,x_1, f(x_1)\,]$ a $B[\,x_2, f(x_2)\,]$. (Viz obrázek vlevo). Skutečně, je-li

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

spojnice bodů A a B, pak pro $x = tx_1 + (1-t)x_2$ platí

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,\{(t-1)x_1 + (1-t)x_2\} =$$

$$= f(x_1) + (1-t)\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x_2 - x_1) = t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2).$$

Výraz $t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2)$ nazýváme konvexní kombinací.

2. Vzhledem k předchozí definici je vidět, že stačí vyšetřovat pouze konvexní funkce. Příslušná tvrzení pro konkávní funkce odtud okamžitě dostaneme. Je-li nyní funkce f diferencovatelná, t.j. má-li v okolí jistého bodu x_0 vlastní derivaci, můžeme konvexitu definovat lokálně.

Definice: Nechť má funkce f derivaci v okolí bodu x_0. Řekneme, že f je ryze konvexní v bodě x_0, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ leží bod $[\,x, f(x)\,]$ nad tečnou $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Analogicky pro ryze konkávní funkci.

Poznámka: Srovnáme-li obě uvedené definice konvexity, plyne odtud, že diferencovatelná funkce je ryze konvexní na intervalu $\mathcal{I}$, je-li ryze konvexní v každém jejím vnitřním bodě. Pro vyšetřování konvexity lze využít vlastností 2. derivace.

Věta: Nechť existuje 2. derivace funkce f v otevřeném intervalu $\mathcal{I}$ a buď $f''(x) > 0$ v $\mathcal{I}$. Potom je f ryze konvexní v $\mathcal{I}$.

Důkaz: Podle Taylorova vzorce platí pro libovolné $x_0 \in \mathcal{I}$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\,f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

Poněvadž je $f''(\xi) > 0$, platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ a f je ryze konvexní v bodě x_0.

Poznámky: 1. Analogicky, je-li $f''(x) < 0$ v $\mathcal{I}$, je f ryze konkávní v $\mathcal{I}$.

2. V důkazu předchozí věty byl využit Taylorův vzorec, poněvadž je důkaz krátký.Věta je však důsledkem věty o střední hodnotě, jak bude vidět v následujícím tvrzení.

Věta: Buď $f''(x_0) > 0$. Potom je f ryze konvexní v bodě x_0. Analogicky, je-li $f''(x_0) < 0$, je f ryze konkávní v bodě x_0.

Důkaz: Nechť je $f''(x_0) > 0$. Potom je funkce f' rostoucí v bodě x_0 a existuje tedy $\delta > 0$ tak, že pro $\xi \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f'(\xi) < f'(x_0)$ a pro $\xi \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f'(x_0) < f'(\xi)$. Podle věty o střední hodnotě platí pro $0 < |x - x_0| < \delta$ $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ a odtud plyne, že

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Druhé tvrzení dostaneme užitím funkce $-f$.

Poznámka: Zbývá charakterizovat body, kde se funkce mění z konvexní na konkávní nebo naopak. Takovým bodům říkáme inflexní.

Definice: Funkce f nechť má v bodě x_0 derivaci. Řekneme, že f má v bodě x_0 <u>inflexi</u> nebo, že křivka $y = f(x)$ má v bodě $[\,x_0, f(x_0)\,]$ <u>inflexní bod</u>, jestliže platí. Existuje $\delta > 0$ tak, že buď

1. bod $[\,x, f(x)\,]$ leží pro $x_0 - \delta < x < x_0$ pod tečnou $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ nad ní nebo

2. bod $[\,x, f(x)\,]$ leží pro $x_0 - \delta < x < x_0$ nad tečnou a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ pod ní.

Věta: Je-li $f''(x_0) \neq 0$, nemá f v bodě x_0 inflexi.

Důkaz: Tvrzení je zřejmé.

Důsledek: Nutná podmínka inflexe v bodě x_0 je $f''(x_0) = 0$ nebo $f''(x_0)$ neexistuje.

Věta: Nechť má funkce f spojitou první derivaci v intervalu (a, b) a předpokládejme, že existuje $f''(x)$ pro $x \neq x_0$, kde $x_0 \in (a, b)$. Potom platí.

1. Existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f''(x) < 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f''(x) > 0$, má f v bodě x_0 inflexi (1. případ z definice).

2. Existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f''(x) > 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f''(x) < 0$, má f v bodě x_0 inflexi (2. případ z definice).

3. Jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je $f''(x) > 0$, je f ryze konvexní v bodě x_0.

4. Jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ je $f''(x) < 0$, je f ryze konkávní v bodě x_0.

Důkaz: Zvolme x tak, aby $0 < |x - x_0| < \delta$. Podle věty o střední hodnotě platí

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \text{ kde } \xi \text{ leží mezi } x \text{ a } x_0.$$

ad 1. Nechť pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f''(x) < 0$, potom je $f'(\xi) > f'(x_0)$ (f' je klesající) a

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) < f'(x_0)(x - x_0).$$

Pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f''(x) > 0$, tedy $f'(\xi) > f'(x_0)$ [funkce f' má v bodě x_0 extrém] a

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0).$$

Dostáváme tedy 1. případ z definice. Ostatní případy se dokáží analogicky.

Poznámky: 1. Jestliže si projdeme důkaz předchozí věty, je vidět, že funkce f má v bodě x_0 inflexi právě když f' má v bodě x_0 ostrý lokální extrém.

2. Pro detailnější vyšetření průběhu funkce je prospěšná i informace o t.zv. asymtotách funkce f, neboli o „tečnách v nekonečnu“. Jestliže v nějakém bodě $x_0 \in \mathbf{R}$ platí $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$, řekneme, že přímka $x = x_0$ je asymptotou (nebo svislou asymptotou) funkce f. Případ $x \to \pm\infty$ je pokryt následující definicí.

Definice: Buď f funkce, definovaná v intervalu $(a, +\infty)$. Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je asymptotou křivky $f(x)$, jestliže platí

$$\lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - (kx + q)\,] = 0.$$

Analogicky definujeme asymptotu pro $x \to -\infty$.

Věta: Je-li $y = kx + q$ asymptota křivky $f(x)$ pro $x \to +\infty$, pak platí

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - kx\,],$$

pokud obě limity existují a jsou vlastní. Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.

Důkaz: Poněvadž je $\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - (kx + q)\,] = 0$, plyne odtud, že

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (kx + q)}{x} = 0, \text{ tedy } k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ a } q = \lim_{x \to +\infty} [\, f(x) - kx\,].$$

Příklad: Najděte asymptoty hyperboly $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Řešení: Poněvadž platí $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}$, dostaname odtud, že $|\, y\,| = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.
1. Nechť je $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (horní poloviny hyperboly). Potom je

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a} \quad \text{a analogicky} \quad k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -\frac{b}{a}.$$

Dále

$$q_1 = \lim_{x \to +\infty} (y - k_1 x) = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$$

Analogicky

$$q_2 = \lim_{x \to -\infty} (y - k_2 x) = \frac{b}{a} \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right) = \frac{b}{a} \lim_{x \to -\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} - x} = 0.$$

2. Buď $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (dolní poloviny hyperboly). Potom platí

$$k_3 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{-\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = -\frac{b}{a} \quad \text{a analogicky} \quad k_4 = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \frac{b}{a}.$$

Nyní

$$q_3 = \lim_{x \to +\infty} (y - k_3 x) = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{x^2 - a^2} + x\right) = 0\,; \; q_4 = \lim_{x \to -\infty} (y - k_4 x) = 0.$$

Odtud plyne, že asymptoty mají tvar $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Poznámky: i. Další možný postup je ten, že hyperbolu zparametrizujeme. Platí

$$x = a\,\mathrm{ch}t\ ,\ y = b\,\mathrm{sh}t\ ;\ t \in \mathbf{R}$$

pro pravou větev a

$$x = -a\,\mathrm{ch}t\ ,\ y = b\,\mathrm{sh}t\ ;\ t \in \mathbf{R}$$

pro levou větev. Další výpočet je jednoduchý.

ii. K vyšetření průběhu funkce je možno též použít vyšších derivací, jak bude ukázáno v následujících dvou větách.

Věta: Buď f funkce, definovaná v intervalu (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Nechť existuje $n \in \mathbf{N}$ tak, že $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, ale $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $0 < k < n$. Potom platí

1. Je-li n sudé, $f^{(n)}(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.
2. Je-li n sudé, $f^{(n)}(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.
3. Je-li n liché, $f^{(n)}(x_0) > 0$, je f rostoucí v bodě x_0.
4. Je-li n liché, $f^{(n)}(x_0) < 0$, je f klesající v bodě x_0.

Důkaz: Provedeme indukcí a pouze pro případ $f^{(n)}(x_0) > 0$. Ostatní případy se provedou analogicky. Pro $n = 1$ věta platí a předpokládejme její platnost pro $n - 1$.
Nechť dále $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) > 0$. Funkce $g = f'$ vyhovuje vztahům $g'(x_0) = \cdots = g^{(n-2)}(x_0) = 0$, $g^{(n-1)}(x_0) > 0$.

α) Je-li n sudé, je $n - 1$ liché a g je rostoucí v bodě x_0. Tedy f má ostré lokální minimum.

β) Je-li n liché, je $n - 1$ sudé a g má v bodě x_0 ostré lokální minimum. Poněvadž je však $f'(x_0) = 0$, je f rostoucí v bodě x_0.

Věta: Buď f funkce, definovaná v intervalu (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Nechť existuje přirozené číslo $n > 1$ tak, že $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, ale $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $1 < k < n$. Potom platí.

1. Je-li n liché, $f^{(n)}(x_0) > 0$, má f v bodě x_0 inflexi (1. případ z definice).
2. Je-li n liché, $f^{(n)}(x_0) < 0$, má f v bodě x_0 inflexi (2. případ z definice).
3. Je-li n sudé, $f^{(n)}(x_0) > 0$, je f ryze konvexní v bodě x_0.
4. Je-li n sudé, $f^{(n)}(x_0) < 0$, je f ryze konkávní v bodě x_0.

Důkaz: Provede se analogicky jako u předchozí věty.

Poznámka: Graf funkce f sestrojujeme proto, abychom získali názornou představu o tom, jak f skutečně vypadá. Při tomto vyšetřování bývá vhodné se řídit podle následujících bodů.

a) Najdeme definiční obor funkce f, zjistíme, zda je daná funkce sudá, lichá nebo periodická. Najdeme (pokud se nám to podaří) nulové body f, tedy řešíme rovnici $f(x) = 0$.

b) Najdeme limity f v krajních bodech definičního oboru, po případě určíme asymptoty.

c) Vypočteme 1. derivaci a najdeme stacionární body, t.j. řešení rovnice $f'(x) = 0$. S tím souvisí nalezení intervalů, kde je f klesající a kde je rostoucí. Vypočteme extrémy a funkční hodnoty v těchto bodech.

d) Vypočteme 2. derivaci, najdeme inflexní body, dále intervaly, kde je f konvexní a kde je konkávní. Můžeme též nalézt směrnice tečen v inflexních bodech (po případě tzv. inflexní tečny).

e) Nakreslíme charakteristické body a spojíme. Daný postup nemusí být samozřejmě dodržen, ale zaručuje, že na nic nezapomeneme.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $y = x^2\, e^{-x}$ a načrtněte její graf.

Řešení: a) Definiční obor je $x \in (-\infty, +\infty)$, nulový bod $x = 0$, jinak je $x^2\, e^{-x} > 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\, e^{-x} = 0$ (dvojím použitím l'Hôspitalova pravidla), $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\, e^{-x} = +\infty$. Asymptota pro $x \to +\infty$ je tedy $y = 0$, asymptota pro $x \to -\infty$ neexistuje, poněvadž je

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x\, e^{-x} = -\infty.$$

c) $y' = (2x - x^2)e^{-x}$ a $y' = 0$ pro $x = 0$ a $x = 2$. V bodě $x = 0$ má y ostré lokální minimum $y(0) = 0$, v bodě $x = 2$ je ostré lokální maximum $y(2) = 4e^{-2} \doteq 0,54$.

d) $y'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$, $y'' = 0$ pro $x_1 = 2 - \sqrt{2} \doteq 0,58$ a $x_2 = 2 + \sqrt{2} \doteq 3,41$. Oba body jsou inflexní a

$$y(x_1) \doteq 0,19; \quad y(x_2) \doteq 0,38; \quad y'(x_1) \doteq 0,46; \quad y'(x_2) \doteq -1,59.$$

e) Graf vypadá přibližně Doplnit grafem funkce.

Kapitola 7

Prostor $\mathbf{R}^n$.

7.1 Základní vlastnosti $\mathbf{R}^n$.

Definice: Prostorem $\mathbf{R}^n$ (nebo eukleidovským prostorem) rozumíme množinu všech uspořádaných $n-$tic reálných čísel $x = (x_1, x_1, \ldots, x_n)$, kde $x_k \in \mathbf{R}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$.

Poznámky: 1. Prostor $\mathbf{R}^n$ není nic jiného, než kartézský součin reálné přímky $\mathbf{R}$ samotné se sebou $n-$krát, tedy

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n - \text{krát.}}$$

2. Analogicky jako $\mathbf{R}^n$ je možno definovat $\mathbf{C}^n$, tedy množinu všech uspořádaných $n-$tic komplexních čísel

$$\mathbf{C}^n = \underbrace{\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}.}_{n - \text{krát}}$$

Prostor $\mathbf{C}_n$ však nebudeme v dalším používat.

3. Prvky $\mathbf{R}^n$ budeme pokládat za body nebo za vektory, podle toho, jaká interpretace se nám bude hodit. Existuje totiž vzájemně jednoznačná korespondence mezi body $\mathbf{R}^n$ a vektory $n-$rozměrného lineárního prostoru. Na příklad v rovině bodu $P[x, y]$ odpovídá vektor $\overrightarrow{r} = (x, y)$. Vektor $\overrightarrow{r}$ nazýváme průvodič nebo radius vektor bodu P. Viz obrázek.

$\mathbf{R}^n$ tvoří skutečně $n-$rozměrný lineární prostor, jestliže definujeme součet vektorů a násobek skalárem následujícím způsobem. Je-li $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, pak

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \qquad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

Při tom

$$\mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0), \quad -x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

a $n-$tice

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

tvoří bázi (přirozenou) prostoru $\mathbf{R}^n$.

4. V celé kapitole se budeme zabývat tzv. metrickými vlastnostmi prostoru $\mathbf{R}^n$, které jsou založeny na tom, že je možno v $\mathbf{R}^n$ definovat vzdálenost bodů (nebo vektorů) a vyšetřují se její vlastnosti

Definice: Buďte $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dva body $\mathbf{R}^n$. Potom jejich vzdáleností, kterou budeme značit $\mathbf{d}(x,y)$, rozumíme jedno z čísel

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \text{ kde } p \geq 1 \text{ je pevná číslo, nebo } \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|.$$

Normu bodu (nebo vektoru) x definujeme jako $\|x\| = \mathbf{d}(x, 0)$.

Poznámky: 1. Předpis $\mathbf{d}$, podle nějž se měří vzdálenost v $\mathbf{R}^n$, nazýváme metrika. Metrika má následující vlastnosti:

α) $\mathbf{d}(x,y) \geq 0 \;\forall\, x, y \in \mathbf{R}^n$, $\quad \mathbf{d}(x,y) = 0 \iff x = y$.

β) $\mathbf{d}(y,x) = \mathbf{d}(x,y) \;\forall\, x, y \in \mathbf{R}^n$.

γ) $\mathbf{d}(x,z) \leq \mathbf{d}(x,y) + \mathbf{d}(y,z) \;\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}^n$ (trojúhelníková nerovnost).

Prvé dvě vlastnosti plynou okamžitě z definice, třetí vlastnost vyžaduje o něco delší důkaz.

Lemma: Buďte $a, b > 0$, $p > 1$, q takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz: Nerovnost je zřejmá pro $p = q$. Potom je $p = 2$ a platí $2ab \leq a^2 + b^2$, neboli ekvivalentně $(a-b)^2 \geq 0$ a to je v oboru reálných čísel vždy pravda.

Je-li $p > 1$ libovolné, uvážíme funkci $\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$ pro $t > 0$. Tato funkce má pro $t = 1$ minimum $\varphi(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Je totiž $\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{q-1} = 0$ pro $t = 1$ a $\varphi(t) > 0$ pro $t > 0$. Neboli $1 = \varphi(1) \leq \varphi(t)$ pro $t > 0$. Jestliže položíme $t = a^{1/q} \cdot b^{-1/p}$, dostaneme

$$1 \leq \frac{a^{\frac{p}{q}}\, b^{-1}}{p} + \frac{a^{-1}\, b^{\frac{q}{p}}}{p} \Bigg| \cdot ab \qquad\qquad ab \leq \frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{p} + \frac{b^{\frac{q}{p}+1}}{q}.$$

Poněvadž je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,|\cdot p\,|\cdot q$, dostaneme $1 + \frac{p}{q} = p$, $\frac{q}{p} + 1 = q$, tedy danou nerovnost.

Věta: (Hölderova nerovnost)
Buďte $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ nezáporná, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom je

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Důkaz: Položme

$$A_k = \frac{a_k}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}}, \quad B_k = \frac{b_k}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}}$$

Podle předchozího lemmatu je

$$A_k B_k \leq \frac{A_k^p}{p} + \frac{B_k^q}{q}, \text{ neboli } \frac{a_k b_k}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_k^p}{p \sum\limits_{i=i}^{n} a_i^p} + \frac{b_k^q}{q \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}.$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

a odtud plyne daná nerovnost.

Věta: (Minkowského nerovnost)
Buďte $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ nezáporná, $p \geq 1$. Potom platí

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Důkaz: Je-li $p = 1$, je nerovnost zřejmá. Je-li $p > 1$, pak můžeme psát

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k + \sum_{k=1}^{n} c_k b_k, \text{ kde } c_k = (a_k + b_k)^{p-1}.$$

Podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} c_k^q\right\}^{\frac{1}{q}} \left[\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right]$$

a odtud

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p}{\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{q(p-1)}\right\}^{\frac{1}{q}}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Poněvadž je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, plyne odtud, že $q = \frac{p}{p-1}$, neboli

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right\}^{1-\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

což je daná nerovnost. Trojúhelníkovou nerovnost dostaneme nyní z Minkowského nerovnosti, jestliže položíme $a_k = |\, x_k - y_k|$, $b_k = |\, y_k - z_k|$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

2. Metriku je možné zavést i na mnohem obecnějších množinách. Dostáváme t.zv. metrické prostory, které hrají důležitou roli v matematice i v jejích technických aplikacích.

Příklady: α) Symbolem $\mathbf{C}(a, b)$ označíme množinu všech funkcí, spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$. Tato množina tvoří metrický prostor, jestliže definujeme

$$\mathbf{d}(f, g) = \max_{t \in \langle a,b\rangle} |f(t) - g(t)| \qquad \forall\, f, g \in \mathbf{C}(a, b).$$

Ověření axiomů metriky je jednoduchá záležitost a ponecháme ji tedy jako cvičení.

β) Prostorem $\mathbf{l}_p$ pro $p \geq 1$ označíme množinu všech posloupností reálných nebo komplexních čísel takových, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$, kde $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Metriku definujeme předpisem

$$\mathbf{d}(x, y) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \text{ kde } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \ y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Ověření prvých dvou axiomů metrického prostoru je jednoduché, k ověření trojúhelníkové nerovnosti potřebujeme rozšířit Minkowského nerovnost na nekonečné řady a nebudeme to provádět.

γ) Prostorem $\mathbf{l}_\infty$ rozumíme množinu všech omezených posloupností reálných nebo komplexních čísel. Metrika je definována předpisem

$$\mathbf{d}(x, y) = \sup_{k=1,2,\ldots} |x_k - y_k| \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{l}_\infty, \ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \ y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Ověření axiomů metrického prostoru je rutinní záležitost a nebudeme ji provádět.

δ) Prostorem $\mathbf{L}_p(a, b)$, kde $p \geq 1$ budeme rozumět množinu všech funkcí takových, že $|f(t)|^p$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Metrika je definována předpisem

$$\mathbf{d}(f, g) = \left\{ \int_a^b |f(t) - g(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \qquad \forall\, f, g \in \mathbf{L}_p(a, b).$$

V případě, že dané funkce jsou spojité na $\langle a, b\rangle$, není těžké ověřit prvé dva axiomy metrického prostoru. K důkazu trojúhelníkově nerovnosti potřebujeme integrální tvar Minkowského nerovnosti. Poněvadž však funkce f může býti integrovatelná v $p-$té mocnině a nemusí být spojitá, budeme muset otázku integrovatelnosti upřesnit. To ale bude provedeno později.

ε) Symbolem $\mathbf{C}^k(a, b)$ budeme označovat množinu všech funkcí, které mají spojité derivace až do řádu $k-$tého na intervalu $\langle a, b\rangle$. Metrika je definována předpisem

$$\mathbf{d}(f, g) = \sum_{i=0}^{k} \max_{t \in \langle a, b\rangle} |f^{(i)}(t) - g^{(i)}(t)|.$$

3. Vzdálenost $\mathbf{d}(x, y)$ bodů $x, y \in \mathbf{R}^n$ je samozřejmě závislá na tom, který z předpisů v definici zvolíme. Poněvadž však metriku budeme používat převážně při vyšetřování konvergence posloupností bodů $\mathbf{R}^n$ a s tím souvisejícího pojmu limity a spojitosti funkce n proměnných, ukáže se, že není podstatné, který předpis zvolíme. Nejčastěji používané metriky budou

$$\mathbf{d}_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \mathbf{d}_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad \text{a} \quad \mathbf{d}_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

4. Metrika $\mathbf{d}_2(x, y) = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$ je známá eukleidovská vzdálenost, se kterou se každý seznámil na základní a střední škole. Této metrice je možno přiřadit tzv. <u>normu</u> vektoru $x \in \mathbf{R}^n$ předpisem

$$\|x\| = \mathbf{d}_2(x, 0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

která souvisí s dalším pojmem, skalárním součinem.

Definice: Jsou-li $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dva vektory z $\mathbf{R}^n$, pak jejich <u>skalárním součinem</u> rozumíme číslo

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Věta: Pro libovolné $x, y \in \mathbf{R}^n$ platí

$$|\,(x, y)\,| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{(Cauchyova nerovnost). Dále} \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)} \;\; \forall\, x \in \mathbf{R}^n.$$

Důkaz: Platí

$$|\,(x, y)\,| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i\, y_i| \leq \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \|x\| \cdot \|y\|$$

podle Hölderovy nerovnosti. Tvrzení o normě je zřejmé.

5. Norma $\|x\| = \mathbf{d}(x, 0)$ má následující vlastnosti.

$\alpha)$ $\|x\| \geq 0 \;\; \forall\, x \in \mathbf{R}^n$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

$\beta)$ $\|\lambda\, x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n, \;\; \forall\, \lambda \in \mathbf{R}$

$\gamma)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$ (trojúhelníková nerovnost).

Důkaz plyne okamžitě z odpovídajících vlastností metriky.

6. Jedním z důvodů, proč zavádíme tolik různých metrik, tedy také různých možností měření vzdálenosti, je to, že se s různými metrikami počítá obtížněji nebo snáze. Velmi špatně se počítá s metrikou $\mathbf{d}_2(x, y) = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$. Další důvody se objeví na příklad v lineární algebře nebo v numerických metodách.

Definice: Buď $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ posloupnost bodů $\mathbf{R}^n$. Řekneme, že posloupnost $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, jestliže

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{d}(x^{(k)}, a) = 0. \quad \text{Zapisujeme} \quad \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = a.$$

Poznámka: Je zřejmé, že $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = a$ právě když

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, k \geq k_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{d}(x^{(k)}, a) < \varepsilon.$$

Věta: Posloupnost $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ konverguje k bodu $a = (a_1, \ldots, a_n)$ právě když

$$\lim_{k \to \infty} x_i^{)k)} = a_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Důkaz: Poněvadž platí $|x_i^{(k)} - a_i| \le \mathbf{d}(x^{(k)}, a) < \varepsilon$, je zřejmé, že pokud $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$, pak $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a$ pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Jestliže obráceně $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, pak

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, k \ge k_0 \quad \Longrightarrow \quad |x_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

neboli $\mathbf{d}_\infty(x^{(k)}, a) \longrightarrow 0$.

Definice: Buďte $\mathbf{d}$, $\mathbf{d}^*$ dvě metriky na $\mathbf{R}^n$. Řekneme, že tyto metriky jsou <u>ekvivalentní</u>, jestliže existují čísla $\alpha, \beta > 0$ tak, že

$$\alpha\, \mathbf{d}(x, y) \le \mathbf{d}^*(x, y) \le \beta\, \mathbf{d}(x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Věta: Jsou-li $\mathbf{d}$, $\mathbf{d}^*$ ekvivalentní metriky, $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost bodů $\mathbf{R}^n$, pak

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{d}(x^{(k)}, a) = 0 \quad \text{právě když} \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{d}^*(x^{(k)}, a) = 0.$$

Důkaz: Plyne okamžitě z definice ekvivalentních metrik.

Věta: Metriky

$$\mathbf{d}_p(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \ge 1) \quad \text{a} \quad \mathbf{d}_\infty(x, y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$$

jsou ekvivalentní.

Důkaz: Je zřejmé, že $\mathbf{d}_\infty(x, y) \le \mathbf{d}_p(x, y)$. Dále platí $|x_i - y_i|^p \le \mathbf{d}_\infty^p(x, y)$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ a sečtením těchto nerovností dostaneme $\mathbf{d}_p^p(x, y) \le n\, \mathbf{d}_\infty^p(x, y)$, neboli

$$\mathbf{d}_\infty(x, y) \le \mathbf{d}_p(x, y) \le n^{1/p}\, \mathbf{d}_\infty(x, y) \le n\, \mathbf{d}_\infty(x, y).$$

Poznámka: Z předchozího důkazu plyne, že $\lim\limits_{p\to\infty} \mathbf{d}_p(x, y) = \mathbf{d}_\infty(x, y)$, což zdůvodňuje příslušné označení.

7.2 Metrické vlastnosti $\mathbf{R}^n$.

Definice: Buďte A, B podmnožiny $\mathbf{R}^n$. Potom <u>vzdáleností množin</u> A, B rozumíme výraz

$$\mathbf{d}(A, B) = \inf_{x\in A,\, y\in B} \mathbf{d}(x, y).$$

<u>Průměrem</u> množiny A nazveme výraz

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} \mathbf{d}(x, y).$$

Množinu A nazveme omezenou, je-li $\delta(A) < \infty$.

Poznámka: Je-li specielně jedna z množin A, B jednobodová, na příklad $A = \{a\}$, dostaneme okamžitě vzdálenost bodu od množiny $\mathbf{d}(a, B) = \inf_{y \in B} \mathbf{d}(x, y)$.

Definice: Buď $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbf{R}^n$. Potom množinu

$$U(a\,;\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n\,;\, \mathbf{d}(x, a) < \varepsilon\}$$

nazveme $\varepsilon-$okolím bodu a a množinu $P(a\,;\varepsilon) = U(a\,;\varepsilon) - \{a\}$ prstencovým $\varepsilon-$okolím bodu a.

Příklad: Buď $n = 2$, $a = 0$. $\varepsilon-$okolí bodu 0 při různých metrikách mají tvar

α) $\{x \in \mathbf{R}^2\,;\, \mathbf{d}_\infty(x, 0) = \max_{i=1,2} |x_i| < \varepsilon\}$

β) $\{x \in \mathbf{R}^2\,;\, \mathbf{d}_1(x, 0) = |x_1| + |x_2| < \varepsilon\}$

γ) $\{x \in \mathbf{R}^2\,;\, \mathbf{d}_2(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \varepsilon\}$. Následující obrázky ilustrují, jak tato okolí vypadají.

Poznámka: Všechna tato okolí mají tu vlastnost, že jedno lze vnořit do druhého a tak lze pokračovat do nekonečna. To ukazuje, že všechny tyto metriky jsou ekvivalentní. Tvoří tzv. fundamentální systém (nebo bázi) okolí. Obrázek.

Definice: Množinu $G \subset \mathbf{R}^n$ nazveme otevřenou, jestliže ke každému bodu $x \in G$ existuje okolí bodu x, které celé leží v množině G.

Množinu $F \subset \mathbf{R}^n$ nazveme uzavřenou, je-li ji možno psát ve tvaru $F = \mathbf{R}^n - G$, kde G je otevřená množina.

Příklady: 1. Prázdná množina $\emptyset$ a celý prostor $\mathbf{R}^n$ jsou množiny zároveň otevřené i uzavřené.

2. Buďte $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ konstanty. Potom uzavřeným intervalem v $\mathbf{R}^n$ nazveme množinu

$$\{x \in \mathbf{R}^n\,;\, a_i \le x_i \le b_i\,,\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

a otevřeným intervalem v $\mathbf{R}^n$ množinu

$$\{x \in \mathbf{R}^n\,;\, a_i < x_i < b_i\,,\, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Intervaly v $\mathbf{R}^2$ jsou obdélníky se stranami rovnoběžnými a osami souřadnými, v $\mathbf{R}^3$ kvádry se stěnami rovnoběžnými s rovinami souřadnými. Z toho je již vidět, že s intervaly v $\mathbf{R}^n$ nevystačíme a budeme muset uvažovat obecnější množiny.

3. Existují množiny, které nejsou ani otevřené, ani uzavřené, na příklad kartézský součin $\langle a_1, b_1\rangle \times (a_2, b_2)$ v $\mathbf{R}^2$.

Věta: Sjednocení libovolného systému a průnik konečného systému otevřených množin je množina otevřená.

Sjednocení konečného systému a průnik libovolného systému uzavřených množin je množina uzavřená.

Důkaz: 1. Buďte G_λ otevřené a nechť $x \in \bigcup\limits_\lambda G_\lambda$. Potom existuje takové λ_0, že $x \in G_{\lambda_0}$ a tedy i okolí $U(x\,;\,\varepsilon) \subset G_{\lambda_0}$. Odtud plyne, že $U(x\,;\,\varepsilon) \subset \bigcup\limits_\lambda G_\lambda$.
Nechť $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{r} G_i$, kde $G_1, \ldots, G_r$ jsou otevřené. Potom je $x \in G_i$ pro $i = 1, \ldots, r$ a existují okolí $U(x_i\,;\,\varepsilon_i) \subset G_i$, $i = 1, \ldots, r$. Jestliže zvolíme $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r\}$, pak $U(x\,;\,\varepsilon) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{r} G_i$.

2. Buďte nyní F_λ uzavřené. Potom existují otevřené množiny G_λ tak, že $F_\lambda = \mathbf{R}^n - G_\lambda$. Užitím de Morganových vzorců dostaneme

$$\bigcap_\lambda F_\lambda = \bigcap_\lambda (\mathbf{R}^n - G_\lambda) = \mathbf{R}^n - \bigcup_\lambda G_\lambda$$

a poněvadž je $\bigcup\limits_\lambda G_\lambda$ otevřená, dostaneme uzavřenost $\bigcap\limits_\lambda F_\lambda$.
Buďte nyní $F_1, \ldots, F_r$ uzavřené, $F_i = \mathbf{R}^n - G_i$, $i = 1, \ldots, n$. Pak

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathbf{R}^n - G_i) = \mathbf{R}^n - \bigcap_{i=1}^{n} G_i$$

a odtud plyne druhé tvrzení.

Poznámka: Pojem otevřené množiny je základ k zavedení tzv. topologie na množině. Tím dostáváme pojem topologického prostoru, obecnějšího než je metrický prostor.

Definice: Buď $A \subset \mathbf{R}^n$ libovolná množina. Potom množinu všech bodů $x \in \mathbf{R}^n$, pro něž platí $\mathbf{d}(x, A) = 0$, nazveme <u>uzávěrem</u> množiny A a označíme $\overline{A}$.
Řekneme, že a je <u>vnitřním bodem</u> množiny A, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $U(a\,;\,\varepsilon) \subset A$. Množinu všech vnitřních bodů množiny A nazveme jejím <u>vnitřkem</u> a označíme A^o nebo $\operatorname{Int} A$.

Množinu všech bodů, které nepatří ani do A^o ani do $(\mathbf{R}^n - A)^o$, nazveme <u>hranicí</u> množiny A a označíme $F(A)$ nebo $\partial(A)$.

Věta: Buď $A \subset \mathbf{R}^n$ množina, $x \in \mathbf{R}^n$ bod. Potom platí
1. $x \in \overline{A}$ právě když existuje posloupnost $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $x^{(k)} \in A$ tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$.
2. Množina A je uzavřená právě když $\overline{A} = A$.

Důkaz: 1. Jestliže existuje posloupnost$\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{d}(x^{(k)}, x) = 0$, pak je zřejmě $\mathbf{d}(x, A) = 0$.
Buď obráceně $\mathbf{d}(x, A) = 0$. Potom k $\varepsilon_k = \frac{1}{k} > 0$ existuje $x^{(k)} \in A$ tak, že $\mathbf{d}(x^{(k)}, x) < \frac{1}{k}$. Odtud plyne, že $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$.

2. Buď A uzavřená, $x \in \overline{A}$. Kdyby $x \notin A$, pak $x \in \mathbf{R}^n - A$ a $\mathbf{R}^n - A$ je otevřená. Existuje tedy $\varepsilon > 0$ tak, že $U(x\,;\,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ a nemůže platit $\mathbf{d}(x, A) = 0$.
Nechť $A = \overline{A}$ a označme $G = \mathbf{R}^n - A$. Buď $x \in G$; potom $\mathbf{d}(x, A) > 0$ a zvolme $0 < \varepsilon < \mathbf{d}(x, A)$. Z volby ε plyne, že $U(x\,;\,\varepsilon) \subset G$ a G je otevřená.

Věta: Buď $A \subset \mathbf{R}^n$ množina. Potom platí
1. $\operatorname{Int} A$ je otevřená množina.
2. Množina A je otevřená právě když $A = A^o$.

Důkaz: 1. Tvrzení je zřejmé.

2. Je-li $A = A^o$, je A otevřená. Obráceně je-li A otevřená, $x \in A$ libovolný bod, pak existuje $U(x\,;\,\varepsilon) \subset A$, neboli $x \in A^o$.

Důsledek: $F(A) = \overline{A} \cap \overline{(\mathbf{R}^n - A)} = F(\mathbf{R}^n - A)$.

Důkaz: Z definice hranice množiny plyne, že $F(A) = F(\mathbf{R}^n - A)$.
Dále $F(A) = (\mathbf{R}^n - A^o) \cap \{\mathbf{R}^n - (\mathbf{R}^n - A)^o\}$ a platí $\mathbf{R}^n - A^o = \overline{\mathbf{R}^n - A}\,;\ \mathbf{R}^n - (\mathbf{R}^n - A)^o = \overline{A}$.

Definice: Buď $A \subset \mathbf{R}^n$ množina, $x \in \mathbf{R}^n$ bod. Řekneme, že x je hromadným bodem množiny A, jestliže každé okolí $U(x\,;\,\varepsilon)$ bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů A. Množinu všech hromadných bodů A označíme A'.
Bod množiny A, který není hromadný, nazýváme izolovaný.

Poznámka: Hromadný bod množiny A nemusí ležet v množině A, je-li však A uzavřená množina, je to pravda.

Věta: Buď $A \subset \mathbf{R}^n$ množina, $x \in \mathbf{R}^n$ bod. Potom je x hromadným bodem množiny A právě když existuje posloupnost $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že

$$x^{(k)} \in A\,,\ x^{(k)} \neq x\,,\ \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x.$$

Dále platí $\overline{A} = A \cup A'$.

Důkaz: Buď $x \in A'$. Potom existuje

$$x^{(k)} \in U\left(x\,;\,\frac{1}{k}\right)\,,\ x^{(k)} \neq x\,,\ x^{(k)} \in A \ \text{ a tedy } \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x.$$

Obráceně je-li $x^{(k)} \in A\,,\ x^{(k)} \neq x\,,\ \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, pak $U(x\,;\,\varepsilon)$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ obsahuje všechny členy dané posloupnosti, počínaje jistým indexem, tedy nekonečně mnoho bodů A.
Poněvadž platí $A \subset \overline{A}\,,\ A' \subset \overline{A}\,$, je $A \cup A' \subset \overline{A}$. Obráceně buď $x \in \overline{A} - A$. Pak každé okolí $U\left(x\,;\,\frac{1}{k}\right)$ obsahuje bod $x^{(k)} \in A$ a je tedy $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, tedy $x \in A'$, neboli $\overline{A} \subset A \cup A'$.

Definice: Buď $K \subset \mathbf{R}^n$ množina. Řekneme, že K je kompaktní, jestliže každá posloupnost bodů množiny K obsahuje vybranou posloupnost, konvergentní v K.

Věta: Množina $K \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní právě když je uzavřená a omezená.

Důkaz: 1. Buď K uzavřená a omezená a $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost bodů K. Poněvadž je $\{x^{(k)}\}$ omezená, jsou všechny posloupnosti $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ také omezené. Podle Weierstrassovy věty lze z posloupností $\{x_1^{(k)}\}\,,\ \{x_2^{(k)}\}\,,\ \ldots\,,\{x_n^{(k)}\}\,,$ postupně vybrat posloupnosti konvergentní, tedy existuje vybraná posloupnost $\{x^{(j_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, která konverguje. Poněvadž K je uzavřená množina, konverguje $\{x^{(j_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ v K.
2. Nechť K není omezená a buď $x^{(0)} \in K$ libovolný bod. Potom ke každému přirozenému k existuje $x^{(k)} \in K$ tak, že $\mathbf{d}(x^{(k)}, x^{(0)} \geq k$. Kdyby z této posloupnosti bylo možno vybrat posloupnost $\{x^{(j_k)}\}$, konvergentní k $x \in K$, pak

$$\mathbf{d}(x^{(j_k)}, x^{(0)}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{d}(x, x^{(0)}) \ \text{ a zároveň } \ \mathbf{d}(x^{(j_k)}, x^{(0)}) \geq j_k \geq k \to \infty.$$

Tedy K nemůže být kompaktní.
Jestliže K není uzavřená, existuje $x \in K'\,,\ x \notin K$ a tedy posloupnost $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}\,,\ x^{(k)} \in K$, která není konvergentní v K.

Poznámka: Kompaktní množiny v $\mathbf{R}^n$ hrají stejnou roli jako uzavřené intervaly v $\mathbf{R}$ a později ukážeme, že spojitá reálná funkce na kompaktní množině je omezená a nabývá své největší a nejmenší hodnoty.

Definice: Dvě množiny $A, B \subset \mathbf{R}^n$ nazveme oddělené, jestliže $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Řekneme, že množina $S \subset \mathbf{R}^n$ je souvislá, je-li $S \neq \emptyset$ a není-li S sjednocením dvou neprázdných oddělených množin. Množinu S nazveme jednoduše souvislou, je-li souvislá a množina $\mathbf{R}^n - S$ je též souvislá. Otevřenou souvislou množinu nazveme oblastí.

Poznámky: 1. Později ukážeme ekvivalentní charakterizaci oblasti pomocí křivek, ležících v dané množině.
2. Neprázdná množina v $\mathbf{R}$ je souvislá právě když je to interval nebo jednobodová množina.

7.3 Funkce n proměnných.

Definice: Funkcí n reálných proměnných ($n \in \mathbf{N}$) nazveme zobrazení f množiny $A \subset \mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$. Je-li oborem hodnot f podmnožina $\mathbf{R}$, řekneme, že f je reálná, je-li obor hodnot f podmnožina $\mathbf{C}$, řekneme, že f je komplexní. Množinu A nazveme definičním oborem f.

Poznámky: 1. Pro funkci f n proměnných budeme používat jednoho z následujících značení:

$$\begin{array}{ll} \alpha)\ \ f : A \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}\,; & \beta)\ \ f : A \longrightarrow \mathbf{C}\,; \\ \gamma)\ \ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,;\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A\,; & \delta)\ \ y = f(x)\,;\ x \in A. \end{array}$$

Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ budeme používat tradičního označení $z = f(x, y)$ nebo $u = f(x, y, z)$.

2. Je-li $f : A \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, je grafem f podmnožina $\mathbf{R}^{n+1}$ tvaru $\{(x, f(x))\,;\, x \in A\}$. Pro $n = 2$ dostaneme plochu v $\mathbf{R}^3$.

Příklad: Najděte definiční obor funkce $z = \ln\{x \ln(y - x)\}$.
Musí být $x \ln(y - x) > 0$, tedy

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x > 0\,,\ \ln(y - x) > 0 \ \text{ neboli } \ x > 0\,,\ y > x + 1 \\ \text{b)} & x < 0\,,\ \ln(y - x) < 0 \ \text{ neboli } \ x < 0\,,\ x < y < x + 1. \end{array}$$

Daný definiční obor je načrtnut na následujícím obrázku.

Definice: Řekneme, že funkce $f : A \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ má v bodě $a \in A'$ limitu vzhledem k množině A rovnu b, jestliže pro libovolnou posloupnost $x^{(k)} \in A$, $x^{(k)} \neq a$, takovou, že $x^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$ platí $f\left(x^{(k)}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b$. Zapisujeme $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Věta: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ existuje právě když k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - b| < \varepsilon$ platí jakmile $0 < \mathbf{d}(x, a) < \delta$, $x \in A$.

Důkaz: Provede se analogicky jako pro funkce jedné proměnné.

Důsledek: Jestliže existují dvě posloupnosti $\{x^{(k)}\}$ a $\{y^{(k)}\}$ tak, že

$$x^{(k)} \neq a \neq y^{(k)}\,,\ x^{(k)} \to a\,,\ y^{(k)} \to a \ \text{ a při tom } \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)})\,,\ \lim_{k\to\infty} f(y^{(k)})$$

neexistují nebo jsou od sebe různé, pak funkce f nemá v bodě a limitu vzhledem k množině A.

Poznámka: Jestliže existuje $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ a je-li $B \supset A$, pak nemusí existovat $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$.
Obráceně, je-li $C \subset A$, $a \in C'$, pak existuje také $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in C}} f(x)$.

Příklady: 1.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right) = 2.$$

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ neexistuje. Jestliže označíme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\,;\, x = 0\,,\, y \neq 0\}$ potom
$\lim\limits_{\substack{x \to 0\ y \to 0 \\ (x,y) \in A}} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$; na druhé straně pro $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\,;\, y = x\,,\, x \neq 0\}$ dostaneme
$\lim\limits_{\substack{x \to 0\ y \to 0 \\ (x,y) \in B}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ neexistuje, i když je limita po každé přímce, procházející počátkem, rovna 0.
Stačí volit křivku $y = \sqrt[3]{x}$.

Poznámka: Výpočet limity funkce více proměnných bývá dosti komplikovaná záležitost. Snadněji se ukáže, že limita neexistuje. Trochu může pomoci následující věta.

Věta: Buď $y = f(x,y)$ funkce dvou proměnných a nechť
a) existuje $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = \alpha$ (dvojná)
b) existuje $\Delta > 0$ tak, že pro $0 < |\,x-a\,| < \Delta$ existuje $\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = \varphi(x)$.
Potom existuje také $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \alpha$, tj. $\alpha = \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{y\to b} f(x,y)$. Za analogických předpokladů platí $\alpha = \lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f(x,y)$.

Důkaz: Z existence $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,y) = \alpha$ plyne, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{ tak, že } |\,f(x,y)-\alpha\,| < \varepsilon \ \text{ jakmile } |\,x-a\,| < \delta\,,\ |\,y-b\,| < \delta\,;\ (x,y) \neq (a,b).$$

Jestliže necháme $y \to b$, dostaneme $|\,\varphi(x)-\alpha\,| \leq \varepsilon$, tedy $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \alpha$.

Definice: Buď f funkce, definovaná na množině $G \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že f je spojitá v bodě $a \in G$, jestliže $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in G}} f(x) = f(a)$.

Řekneme, že f je spojitá na G, je-li spojitá v každém bodě množiny G.

Poznámka: Předchozí definice je samozřejmá, je-li a hromadný bod množiny G. Je-li a izolovaný bod G, je f automaticky spojitá v bodě a.

Věta: Buď f spojitá funkce na kompaktní množině $K \subset \mathbf{R}^n$. Potom je $f(K)$ kompaktní množina.

Důkaz: Buďte $y_k \in f(K)$. Potom existují $x^{(k)} \in K$ tak, že $f\left(x^{(k)}\right) = y_k$. Poněvadž je K kompaktní, lze vybrat posloupnost $\left\{x^{(j_k)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ tak, že $x^{(j_k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \in K$. Ze spojitosti f plyne, že existuje $\lim\limits_{k\to\infty} y_{j_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f\left(x^{(j_k)}\right) = f(x)$.

Poznámky: 1. Je-li f reálná funkce, pak je $f(K)$ uzavřená a omezená podmnožina $\mathbf{R}$, obsahuje tedy největší a nejmenší číslo. Dostáváme tím analogii o spojitém obrazu uzavřeného intervalu.

2. Analogicky jako pro funkce jedné reálné proměnné, je možno definovat pojem stejnoměrné spojitosti funkce f na množině $A \subset \mathbf{R}^n$. Je-li f spojitá na kompaktní množině $K \subset \mathbf{R}^n$, je na K stejnoměrně spojitá.

3. Stejně tak, je-li $S \subset \mathbf{R}^n$ souvislá množina, f spojitá na S, je $f(S)$ souvislá množina.

Kapitola 8

Integrální počet.

8.1 Neurčitý integrál.

Poznámka: V tomto paragrafu se budeme zabývat metodami výpočtu primitivní funkce k dané funkci, tedy úlohou opačnou k derivování.

Definice: Buďte F, f dvě funkce, definované v otevřeném intervalu (a, b). Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí rovnost $F'(x) = f(x)$, řekneme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b).

Příklad: Funkce $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ je pro $x \in (-\infty, +\infty)$ primitivní k funkci $f(x) = \cos 2x$, což se snadno ověří. Tedy $F'(x) = f(x)$.

Věta: Buď f funkce, spojitá v intervalu $\mathcal{I}$, která má derivaci rovnu nule v každém vnitřním bodě $\mathcal{I}$. Potom je f konstantní v $\mathcal{I}$.

Důkaz: Buďte $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ dva libovolné body a nechť $x_1 < x_2$. Podle věty o střední hodnotě existuje bod $\xi \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0.$$

Odtud plyne, že $f(x_1) = f(x_2)$ a f je konstantní.

Poznámka: Předchozí věta je obrácením známého vzorce, že derivace konstanty je nula.

Věta: Jsou-li $F(x), G(x)$ dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), platí v celém intervalu (a, b) rovnost $G(x) = F(x) + C$, kde C je konstanta.

Důkaz: Označme $H(x) = G(x) - F(x)$. Potom je $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ a podle předchozí věty je $H(x) = C$. Odtud plyne tvrzení věty.

Definice: Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci $f(x)$ na intervalu (a, b), $(a < b)$ nazveme neurčitým integrálem funkce $f(x)$ a označíme

$$\int f(x)\, dx.$$

Poznámky: 1. Je-li $F(x)$ jedna primitivní funkce k $f(x)$, pak platí $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, kde C je libovolná konstanta.

2. Základní integrační vzorce dostaneme okamžitě z odpovídajících vzorců pro derivování.

Funkce $f(x)$	$\int f(x)\,dx$	Poznámka
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbf{N}\,,\ x \in \mathbf{R}$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbf{R}\,,\ n \neq -1\,,\ x \in (0, +\infty)$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert\, x \,\rvert + C$	$x \in \mathbf{R} - \{0\}$
e^x	$e^x + C$	$x \in \mathbf{R}$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln\, a} + C$	$x \in \mathbf{R}\,,\ a > 0\,,\ a \neq 1$
$\sin\, x$	$-\cos\, x + C$	$x \in \mathbf{R}$
$\cos\, x$	$\sin\, x + C$	$x \in \mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$x \in \mathbf{R}\,,\ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbf{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x + C$	$x \in \mathbf{R}\,,\ x \neq k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin\, x + C = -\arccos\, x + C$	$x \in (-1, 1)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg}\, x + C = -\operatorname{arccotg}\, x + C$	$x \in \mathbf{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$	$x \in \mathbf{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$	$x \in \mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x + C$	$x \in \mathbf{R}$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x + C$	$x \in \mathbf{R} - \{0\}$

8.1.1 Základní integrační metody.

Věta: Nechť existují k funkcím f_1, f_2 v intervalu (a, b) neurčité integrály a buďte c_1, c_2 konstanty. Potom existuje neurčitý integrál k funkci $c_1 f_1 + c_2 f_2$ a platí

$$\int \{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\}\, dx = c_1 \int f_1(x)\, dx + c_2 \int f_2(x)\, dx.$$

Důkaz: Označme $F_1(x) = \int f_1(x)\, dx$, $F_2(x) = \int f_2(x)\, dx$. Potom platí

$$[\, c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x)\,]' = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

a tedy funkce

$$c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) = c_1 \int f_1(x)\, dx + c_2 \int f_2(x)\, dx$$

je primitivní funkcí k funkci $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$.

Příklad:

$$\int \left(3 \sin x - \sqrt{2}\, x^3 + \frac{2}{1+x^2}\right) dx = 3 \int \sin x\, dx - \sqrt{2} \int x^3\, dx + 2 \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -3 \cos x - \frac{\sqrt{2}}{4} x^4 + 2 \operatorname{arctg} x + C.$$

! Věta: (Integrace per partes)
Funkce $u(x), v(x)$ nechť mají v intervalu (a, b) spojité derivace. Potom je

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

v intervalu (a, b).

Důkaz: Funkce $u \cdot v$ má v (a, b) derivaci $[\, u(x) \cdot v(x)\,]' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$ a tedy

$$u(x)\, v(x) = \int [\, u(x)\, v(x)\,]'\, dx = \int [\, u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)\,]\, dx$$

v (a, b). Odtud plyne tvrzení věty.

Příklady: 1. Označme $\mathcal{I}_n = \int x^n e^{ax}\, dx$ pro $n \in \mathbf{N}$, $a \neq 0$. Položme $\begin{array}{ll} u = x^n & v' = e^{ax} \\ u' = n\, x^{n-1} & v = \frac{1}{a} e^{ax}. \end{array}$
Tedy

$$\mathcal{I}_n = \int x^n\, e^{ax}\, dx = \frac{x^n}{a}\, e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\, dx = \frac{x^n}{a}\, e^{ax} - \frac{n}{a}\, \mathcal{I}_{n-1}$$

a odtud dostaneme rekurentní formuli

$$\mathcal{I}_n = \frac{x^n}{a}\, e^{ax} - \frac{n}{a}\, \mathcal{I}_{n-1}.$$

2. Označme $\mathcal{K}_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ pro $n \in \mathcal{N}$. Je zřejmé, že $\mathcal{K}_1 = \operatorname{arctg} x + C$. Buď

$$\begin{array}{ll} u = \frac{1}{(1+x^2)^n} & v' = 1 \\ u' = -\frac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}} & v = x. \end{array} \quad \text{Tedy}$$

$$\mathcal{K}_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} +$$

$$+2n \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} - 2n \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\,\mathcal{K}_n - 2n\,\mathcal{K}_{n+1}.$$

Z této rovnice vypočteme $\mathcal{K}_{n+1}$ a dostaneme rekurentní formuli

$$\mathcal{K}_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,\mathcal{K}_n.$$

3. Vypočtěte $\int e^{ax} \sin bx\,dx$, $\int e^{ax} \cos bx\,dx$.

Řešení: Je

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin bx\,, & v' = e^{ax} \\ u' = b\cos bx\,, & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array} \right| = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \cos bx\,, & v' = e^{ax} \\ u' = -b\sin bx\,, & v = \frac{1}{a}e^{ax} \end{array} \right| = \left\{ \frac{1}{a} \sin bx - \frac{b}{a^2} \cos bx \right\} e^{ax} - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx\,dx.$$

Z této rovnice vypočteme

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a \sin bx - b\cos bx) + C.$$

Analogickým způsobem nebo využitím předchozího integrálu dostaneme

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a \cos bx + b\sin bx) + C.$$

! Věta: (Substituční metoda)

Funkce $f(x)$ nechť je spojitá v intervalu (a,b), funkce $\varphi(t)$ nechť má v intervalu (α,β) spojitou derivaci $\varphi'(t)$ a nechť pro každé $t \in (\alpha,\beta)$ platí $\varphi(t) \in (a,b)$. Potom v intervalu (α,β) platí

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Důkaz: Položme $F(x) = \int f(x)\,dx$ v (a,b). Věta říká, že funkce $F(\varphi(t))$ je v intervalu (α,β) primitivní funkcí k $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. To je však důsledek věty o derivaci složené funkce, poněvadž platí

$$[\,F(\varphi(t))\,]' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Poznámka: Předchozí věta je používána dvěma směry.

I. Chceme vypočítat $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, jestliže umíme vypočítat $\int f(x)\,dx$. V tomto případě bývá výpočet jednoduchý, poněvadž tvar integrandu rovnou ukazuje substituci, kterou je třeba zavést.

II. Potřebujeme vypočítat $\int f(x)\,dx$ pomocí vhodné substituce $x = \varphi(t)$. Dojdeme tím k integrálu $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, který musí být takového tvaru, abychom ho byli schopni vypočítat. K tomu je však třeba předem znát substituci $x = \varphi(t)$. Tomuto použití věty o substituci bude také věnována převážná část následujícího paragrafu.

Příklady: I. způsob.
1.

$$\int \sin^3 t\,\cos t\,dt = \left|\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{array}\right| = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C = \frac{1}{4}\sin^4 t + C.$$

2.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \left|\begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \\ \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = dt \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|\,t\,| + C = \ln\left|\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

3.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left|\begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x)\,dx = dt \end{array}\right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|\,t\,| + C = \ln|\,f(x)\,| + C.$$

II. způsob

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left|\begin{array}{l} x = \mathrm{cotg}\,t\,,\ t \in (0,\pi) \\ dx = -\frac{dt}{\sin^2 t} \end{array}\right| = -\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= -\ln\left|\,\mathrm{tg}\frac{t}{2}\right| + C = \ln\mathrm{cotg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{arccotg}\ x\right) + C.$$

Poněvadž platí $\mathrm{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\beta - 1}{\mathrm{cotg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\beta}$, tedy $x = \mathrm{cotg}\,t = \frac{\mathrm{cotg}^2\frac{t}{2} - 1}{2\,\mathrm{cotg}\frac{t}{2}}$, dostaneme odtud rovnici

$$\left(\mathrm{cotg}\,\frac{t}{2}\right)^2 - 2x\,\mathrm{cotg}\,\frac{t}{2} - 1 = 0 \ \text{ s kořeny } \left(\mathrm{cotg}\,\frac{t}{2}\right)_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Vzhledem k tomu, že $t \in (0,\pi)$, vyhovuje jen znaménko $+$ a tedy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

Kdo si v kapitole, věnované derivacím základních elementárních funkcí, všimnul, jak vypadá derivace funkce $\mathrm{argsh}\,x$, mohl tento výsledek napsat rovnou. Poněvadž se však s touto substitucí sejdeme později znovu při výpočtu komplikovanějších integrálů, není uvedení tohoto příkladu na škodu.

Integrace racionální funkce.

Poznámka: Každou racionální funkci $\frac{P(x)}{Q(x)}$ lze vyjádřit ve tvaru polynomu a ryze lomené racionální funkce. Je-li tedy $\mathrm{st}\,P < \mathrm{st}\,Q$, lze takovou funkci rozložit na parciální zlomky, které jsou tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n}\,,\ \ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,,\ \ \text{kde } A,B,C,\alpha,p,q \in \mathbb{R}\,,\ m,n \in \mathbb{N}\,,\ \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

Stačí tedy popsat, jak se integrují parciální zlomky.

$\alpha)$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = \left| \begin{array}{l} x-\alpha = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^n} = \begin{cases} \ln|\,t\,| + C = \ln|\,x-\alpha\,| + C & \text{pro } n=1; \\ \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{1-n}(x-\alpha)^{1-n} + C & \text{pro } n>1. \end{cases}$$

$\beta)$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{1}{2}B \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,dx + \left(C - \frac{1}{2}Bp\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m}.$$

1.

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = t \\ (2x+p)dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^m} =$$

$$= \begin{cases} \ln|\,t\,| + C = \ln(x^2+px+q) + C & \text{pro } m=1 \\ \frac{t^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{1}{1-m}(x^2+px+q)^{1-m} + C & \text{pro } m>1. \end{cases}$$

2.

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \int \frac{dx}{\left\{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right\}^m} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} = t \\ dx = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)^m} \int \frac{dt}{(1+t^2)^m},$$

což je integrál, pro nějž byla odvozena rekurentní formule.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} = \frac{16}{9} \int \frac{dx}{\left\{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right\}^2} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} = t \\ dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{2x-1}{3(x^2-x+1)} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

užitím rekurentní formule $\mathcal{K}_{n+1} = \frac{t}{2n(t^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,\mathcal{K}_n$.

8.1.2 Integrace některých transcendentních funkcí.

I. Integrály typu

$$\int R\left(x, \left\{\frac{\alpha\,x+\beta}{\gamma\,x+\delta}\right\}^{\frac{1}{s}}\right)\,dx,$$

kde R je racionální funkce, $s>1$ přirozené, $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0$.

Řešení: Zavedením substituce $t = \left(\frac{\alpha\,x+\beta}{\gamma\,x+\delta}\right)^{1/s}$ dostaneme integrál z racionální funkce. Je totiž

$$x = \frac{\beta - \delta\,t^s}{\gamma\,t^s - \alpha}\,; \quad dx = \frac{\alpha\,\delta - \beta\,\gamma}{(\gamma\,t^s - \alpha)^2}\,s\,t^{s-1}\,dt$$

a po dosazení dostaneme

$$\int R\left\{\frac{\beta-\delta\,t^s}{\gamma\,t^s-\alpha}\,,\,t\right\}\,\frac{\alpha\,\delta-\beta\,\gamma}{(\gamma\,t^s-\alpha)^2}\,s\,t^{s-1}\,dt,$$

tedy integrál z racionální funkce.

Příklad: Vypočtěte $\int\frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx$.

Řešení: Je $R(x,y)=\frac{y+x}{y-x}$, $\alpha=2,\beta=3,\gamma=0,\delta=1,s=2$. Tedy $\sqrt{2x+3}=t$, $x=\frac{t^2-3}{2}$, $dx=t\,dt$ a

$$\int\frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx=-\int\frac{t^3+2t^2-3t}{t^2-2t-3}\,dt=-\frac{t^2}{2}-4t-9\ln|\,t-3\,|+\ln|\,t+1\,|+C=$$

$$=-x-4\sqrt{2x+3}-9\ln|\,\sqrt{2x+3}-3\,|+\ln\big(\sqrt{2x+3}+1\big)+C.$$

Poznámka: Analogickým způsobem se řeší integrály typu

$$\int R\left\{x,\left(\frac{\alpha\,x+\beta}{\gamma\,x+\delta}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\ldots,\left(\frac{\alpha\,x+\beta}{\gamma\,x+\delta}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right\}\,dx,$$

kde R je racionální funkce, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{R}$, $\alpha\,\delta-\beta\,\gamma\neq 0$, $p_1,\ldots,p_n\in\mathbf{Z}$, $q_1,\ldots,q_n\in\mathbf{N}$.

Buď s nejmenší společný násobek čísel $q_1,\ldots,q_n$. Potom substituce $\left(\frac{\alpha\,x+\beta}{\gamma\,x+\delta}\right)^{1/s}=t$ dává integrál z racionální funkce. Skutečně existují přirozená čísla $k_1,\ldots,k_n$ tak, že

$$s=k_1q_1=k_2q_2=\cdots=k_nq_n\ \text{ a tedy }\ \left(\frac{\alpha\,x+\beta}{\gamma\,x+\delta}\right)^{\frac{p_i}{q_i}}=\left(\frac{\alpha\,x+\beta}{\gamma\,x+\delta}\right)^{\frac{k_ip_i}{s}}=t^{k_ip_i}\,;\ i=1,\ldots,n.$$

Příklad: Vypočtěte $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Řešení: Je

$$R(x,y,z)=\frac{x}{y+z}\,,\ \alpha=1,\beta=1,\gamma=0,\delta=1\,,\ n=2,p_1=1,q_1=2,p_2=1,q_2=3\,,\ s=6.$$

Tedy $x+1=t^6$, $dx=6t^5\,dt$ a odtud

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=6\left\{\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}\right\}+C=$$

$$=6\left\{\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right\}+C.$$

II. Integrály typu

$$\int R(\sin\,x,\cos\,x)\,dx,$$

kde R je racionální funkce.

Řešení: Substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ dává

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,,\ \cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}\,,\ \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=dt\ \text{ neboli }\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}\,,\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2},$$

což je integrál z racionální funkce.

Příklad: Vypočtěte $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

Řešení: Je

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=2\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{6t^2+4t+4}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(\frac{3t+1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt5}+C=\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt5}+C.$$

$\Big[$Je $R(x,y)=\frac{1}{2x-y+5}\Big]$

Poznámky: 1. Analogicky je možno počítat integrály typu $\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)\,dx$, musíme si však odvodit příslušné vzorce pro hyperbolické funkce. Poněvadž je však možno $\operatorname{sh}x$ a $\operatorname{ch}x$ vyjádřit pomocí funkce e^x, můžeme daný integrál též považovat za integrál typu $\int R\left(e^{\alpha x}\right)\,dx$, který uvedeme později.

2. Ukazuje se, že substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ vede vždy k cíli v tom smyslu, že integrál $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ převádí na integrál z racionální funkce. Může se však stát, že příslušná racionální funkce bude natolik komplikovaná, že se ji nepodaří rozložit na parciální zlomky. V tom případě je třeba hledat jiné cesty, alespoň pro speciální případy.

Speciální případy:

a) $\int R(\operatorname{tg}x)\,dx$, kde R je racionální funkce.

Řešení:

$$\int R(\operatorname{tg}x)\,dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int R(t)\,\frac{dt}{1+t^2},$$

což je integrál z racionální funkce.

Příklad: Vypočtěte $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx$.

Řešení:

$$\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\,dx=\int\frac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{(t-1)\,dt}{(t+2)(t^2+1)}=$$

$$= -\frac{3}{5}\ln|\,t+2\,| + \frac{3}{10}\ln(t^2+1) - \frac{1}{5}\,\mathrm{arctg}\; t + C = -\frac{1}{5}\,\{x + 3\ln|\sin x + 2\cos x\,|\} + C.$$

b) $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx$, kde R je racionální funkce.

Řešení: Substituce $\mathrm{tg}\, x = t$ dává

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}\,;\ \sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}\,;\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Tedy

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx = \int R\left\{\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right\}\frac{dt}{1+t^2},$$

což je opět integrál z racionální funkce.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \left|\begin{array}{c} \mathrm{tg}\, x = t,\ \ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array}\right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\, x) + C.$$

c) $\int \sin^n x \cos^k x\,dx$, kde $n, k \in \mathbf{Z}$.

Řešení: α) Předpokládejme, že alespoň jedno z čísel n, k je liché. Nechť třeba $n = 2l+1$. Potom substituce $\cos x = t$ dává integrál z racionální funkce. Je totiž

$$\int \sin^n x \cos^k x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^l \cos^k x \sin x\,dx = \left|\begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{array}\right| = -\int (1-t^2)^l\, t^k\,dt.$$

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \left|\begin{array}{c} \cos x = t \\ \sin x\,dx = -dt \end{array}\right| = \int \frac{dt}{t^4(t^2-1)} =$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

Poznámka: Situace je analogická, je-li k liché. V tom případě je třeba zavést substituci $\sin x = t$. V případě, že jsou obě čísla n i k liché, je jedno, kterou substituci zavedeme. Při praktickém použití zvolíme substituci, která dává příjemnější integrál.

β) Obě čísla n, k jsou sudá. Pak můžeme použít substituci $\mathrm{tg}\, x = t$ (případ b)) nebo použijeme vyjádření pomocí dvojnásobného argumentu. Je-li $n = 2m$, $k = 2l$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, pak

$$\int \sin^{2m} x \cos^{2l} x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^m \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l dx.$$

Jestliže se v některém z integrálů, které takto vzniknou, opět objeví integrál typu β), je třeba postup zopakovat a použít vyjádření pomocí čtyřnásobného argumentu.

Příklad: Vypočtěte $\int \sin^6 x\,dx$.

Řešení:

$$\int \sin^6 x\,dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}\int (1+\cos 4x)\,dx - \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Poznámka: Jsou-li v integrálu $\int \sin^n x \cos^k x\,dx$ oba exponenty sudé a záporné, bývá možné užít následujícího obratu.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{dx}{\cos^6 x}\,dx$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x}\,dx = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\cos^6 x} = \int \mathrm{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^4 x} + \int \frac{dx}{\cos^4 x} =$$

$$\int \mathrm{tg}^4 x \frac{dx}{\cos^2 x} + 2\int \mathrm{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x + \frac{2}{3}\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\, x + C.$$

d) $\int \sin \alpha x \cos \beta x\,dx$; $\int \sin \alpha x \sin \beta x\,dx$; $\int \cos \alpha x \cos \beta x\,dx$, kde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq \beta$.

Řešení: K výpočtu těchto integrálů je využito goniometrických vzorců

$$\sin u \pm \sin v = 2 \sin \frac{u \pm v}{2} \cos \frac{u \mp v}{2},$$

po případě

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

nebo

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}.$$

Jestliže na příklad ve vzorci pro $\sin u + \sin v$ položíme

$$\begin{array}{ll} \frac{u+v}{2} = \alpha x & u+v = 2\alpha x \\ \frac{u-v}{2} = \beta x & u-v = 2\beta x \end{array} \quad \text{dostaneme } u = \frac{\alpha+\beta}{2}x,\ v = \frac{\alpha-\beta}{2}x,$$

neboli

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin \frac{\alpha+\beta}{2}x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin \frac{\alpha-\beta}{2}x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\alpha+\beta}\cos \frac{\alpha+\beta}{2}x - \frac{1}{\alpha-\beta}\cos \frac{\alpha-\beta}{2}x + C.$$

Analogicky se počítají zbývající dva integrály.

Poznámka: Striktně řečeno, předchozí integrál není typu II. Tyto integrály však hrají důležitou roli v souvislosti s Fourierovými řadami, a proto jsme jej zařadili do této skupiny.

III. Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx,$$

kde R je racionální funkce.

Řešení: Je-li $a=0$, dostáváme rovnou speciální případ integrálu typu I. V dalším budeme tedy předpokládat, že $a \neq 0$.

Má-li rovnice $ax^2+bx+c=0$ dvojnásobný kořen α, je $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$ a příslušná odmocnina má smysl pouze, je-li $a>0$. Potom dostaneme

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx = \int R(x, \sqrt{a}\ |\, x-\alpha\,|)\, dx,$$

což je integrál z racionální funkce.

α) Buď $a>0$. Potom Eulerova substituce

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\, x + t \ \text{ dává } \ x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\, t}\ ;\ dx = 2\frac{-\sqrt{a}\, t^2+bt-\sqrt{a}\, c}{(b-2\sqrt{a}\, t)^2}\, dt,$$

neboli

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx = 2\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\, t}, \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\, t}+t\right)\cdot\frac{-\sqrt{a}\, t^2+bt-\sqrt{a}\, c}{(b-2\sqrt{a}\, t)^2}\, dt,$$

což je integrál z racionální funkce.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}\, dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}\, dx = \left|\begin{array}{l} x^2=u \\ x\, dx = \frac{1}{2}du \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{(u-1)\, du}{u\sqrt{1+3u+u^2}} =$$

$$= \left|\begin{array}{lll} \sqrt{u^2+3u+1}=u+t, & u=\frac{1-t^2}{2t-3}, & u+t=\frac{t^2-3t+1}{2t-3}, \\ du=-2\frac{t^2-3t+1}{(2t-3)^2}\, dt, & u-1=\frac{-t^2-2t+4}{2t-3}. & \end{array}\right| = \int \frac{t^2+2t-4}{(2t-3)(1-t^2)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\{\ln|\, t+1\,| - \ln|\, t-1\,| - \ln|\, 2t-3\,|\} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\ln\frac{\sqrt{x^4+3x^2+1}-x^2+1}{\sqrt{x^4+3x^2+1}-x^2-1} - \ln|\, 2\sqrt{x^4+3x^2+1}-2x^2-3\,|\right\} + C.$$

Poznámka: Stejným způsobem lze použít i substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\, x - t, \ \text{ resp. } \ t-\sqrt{a}\, x = \sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Je-li na příklad $c>0$, lze použít též substituce

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}\, ;\ \sqrt{ax^2+bx+c} == \sqrt{c}-xt\, ;\ \sqrt{ax^2+bx+c} = xt-\sqrt{c}.$$

β) Buď $a < 0$. Pak má daná odmocnina smysl pouze tehdy, má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dva reálné různé kořeny, na příklad α_1, α_2 a nechť $\alpha_1 < \alpha_2$. Potom $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ a příslušná odmocnina je definována pro $x \in \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$. Odtud plyne, že

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a}\,(x - \alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}\,;$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx = \int R\left\{x, \sqrt{-a}\,(x - \alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}\right\} dx,$$

což je integrál typu I.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}} = \int \frac{dx}{x\sqrt{(x+1)(2-x)}} = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}}{x(x+1)}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x+1}{2-x} = t^2\,; & x = \dfrac{2t^2 - 1}{t^2 + 1}\,; \\ x + 1 = \dfrac{3t^2}{t^2 + 1}\,; & dx = \dfrac{6t\,dt}{(t^2 + 1)^2}. \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}\,t - 1}{\sqrt{2}\,t + 1} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2(x+1)} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{2(x+1)} + \sqrt{2-x}} \right| + C.$$

Poznámka: Eulerovy substituce znamenají ve většině případů nepříjemně dlouhý výpočet a můžeme se jim často vyhnout zavedením jiných substitucí, které bývají jednodušší.

Je-li $a > 0$, je možno psát

$$ax^2 + bx + c = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}.$$

Je-li $\frac{b^2-4ac}{4a^2} < 0$, je odmocnina tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\sqrt{t^2 + \alpha^2},$$

pro $\frac{b^2-4ac}{4a^2} > 0$ je

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\sqrt{t^2 - \alpha^2}.$$

Jestliže $a < 0$, přichází v úvahu jedině případ $b^2 - 4ac > 0$, tedy případ reálných různých kořenů a pak dostáváme

$$ax^2 + bx + c = \sqrt{-a}\left\{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2\right\},$$

neboli

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\sqrt{\alpha^2 - t^2}.$$

Odtud dostaneme tři speciální případy.

Speciální případy.

a) Integrály typu

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + \alpha^2})\,dx,$$

kde R je racionální funkce, $\alpha > 0$.

Řešení: Substituce

$$x = \alpha \operatorname{tg} t \quad \left[t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right] \text{ dává } dx = \frac{\alpha\, dt}{\cos^2 t}\,;\; x^2 + \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 t},$$

neboli

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + \alpha^2}\,)\, dx = \int R\left(\alpha \operatorname{tg} t, \frac{\alpha}{|\cos t\,|}\right) \frac{\alpha\, dt}{\cos^2 t},$$

což je integrál typu II, navíc platí $\cos t > 0$ pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{dx}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{x^2(x + \sqrt{1+x^2})} = \left| \begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{\cos t\, dt}{\sin^2 t(1 + \sin t)} = \left| \begin{array}{c} \sin t = u \\ \cos t\, dt = du \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u^2(u+1)} = \ln|\,u+1\,| - \ln|\,u\,| - \frac{1}{u} + C = \ln \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{|\,x\,|} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

Poznámka: Další možnost dává substituce $x = \alpha \operatorname{sh} t$ pro $t \in (-\infty, +\infty)$. Je totiž $dx = \alpha \operatorname{ch} t\, dt$, $\sqrt{x^2+\alpha^2} = \alpha \operatorname{ch} t$, neboli

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + \alpha^2})\, dx = \alpha \int R(\alpha \operatorname{sh} t, \alpha \operatorname{ch} t) \operatorname{ch} t\, dt,$$

což je integrál typu II., jen v hyperbolických funkcích.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \left| \begin{array}{c} x+1 = \operatorname{sh} t \\ dx = \operatorname{ch} t\, dt \end{array} \right| = \int dt = t + C = \operatorname{argsh}(x+1) + C = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$$

b) Integrály tvaru

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})\, dx,$$

kde R je racionální funkce, $\alpha > 0$.

Řešení: Poněvadž je funkce $\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ definována ve dvou intervalech $(-\infty, -\alpha) \cup (\alpha, +\infty)$, provedeme výpočet jen pro interval $(\alpha, +\infty)$. Substituce $x = \alpha \operatorname{ch} t$ pro $t > 0$ dává

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2}\right)\, dx = \alpha \int R(\alpha \operatorname{ch} t, \alpha \operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t\, dt,$$

neboli integrál typu II. v hyperbolických funkcích.

Příklad: Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{ch} t\,; \quad t > 0 \\ dx = \operatorname{sh} t\, dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t + 1} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{th} t = u\,, & \operatorname{ch}^2 t = \dfrac{1}{1-u^2} \\ du = \dfrac{dt}{\operatorname{ch}^2 t}\,, & dt = \dfrac{du}{1-u^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{du}{2-u^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{\sqrt{2}\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}\,x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}\,x - \sqrt{x^2-1}} \right| + C.$$

c) Integrály tvaru

$$\int R\left(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right)\, dx,$$

kde R je racionální funkce, $\alpha > 0$.

Řešení: Substituce $x = \alpha \sin t$ [nebo $x = \alpha \cos t$] dává

$$dx = \alpha \cos t\, dt\,, \ \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \alpha\, |\cos t\,|,$$

neboli

$$\int R\left(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right)\, dx = \alpha \int R\,(\alpha \sin t, \alpha\, |\cos t\,|\,) \cos t\, dt,$$

což je integrál typu II.

Příklad: Vypočtěte $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

Řešení:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \left| \begin{array}{c} x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{21}}{2} \sin t\ ;\ t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ dx = \dfrac{\sqrt{21}}{2} \cos t\, dt \end{array} \right| =$$

$$\frac{1}{2} \int dt + \frac{\sqrt{21}}{2} \int \sin t\, dt = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{21}} - \sqrt{5+x-x^2} + C.$$

IV. Binomické integrály

$$\int x^{\gamma} \left(a + bx^{\delta}\right)^{\beta}\, dx,$$

kde β, γ, δ jsou racionální čísla.

Řešení: Substituce $x^{\delta} = t$, $x = t^{1/\delta}$, $dx = \frac{1}{\delta}\, t^{1/\delta - 1}\, dt$ dává integrál

$$\int t^{\alpha} (a+bt)^{\beta}\, dt,$$

kde α, β jsou racionální. Pro něj platí

Věta: Integrál

$$\int t^{\alpha} (a+bt)^{\beta}\, dt,$$

kde α, β jsou racionální čísla, lze převézt na integrál z racionální funkce, jestliže alespoň jedno z čísel $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ je celé.

Důkaz: a) Buď α celé, $\beta = \frac{r}{s}$. Potom dostáváme integrál $\int t^{\alpha}(a+bt)^{r/s}\,dt$, což je integrál typu I a substituce $(a+bt)^{1/s} = u$ jej převádí na integrál z racionální funkce.

b) Buď β celé, $\alpha = \frac{r}{s}$. pak dostáváme onalogickou situaci jako v případu a) a substituce $t^{1/s} = u$ dává integrál z racionální funkce.

c) Buď $\alpha + \beta$ celé, $\beta = \frac{r}{s}$. Potom

$$\int t^{\alpha}(a+bt)^{\beta}\,dt = \int t^{\alpha+\beta}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{r}{s}}\,dt,$$

což je integrál typu I.

Příklad: Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6}\,dx$.

Řešení:

$$\int \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6}\,dx = \int x^{-6}(2x^3+1)^{\frac{2}{3}}\,dx = \left|\begin{array}{l} x^3 = t \\ dx = \frac{1}{3}t^{-2/3}\,dt \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int t^{-2}\left(\frac{2t+1}{t}\right)^{\frac{2}{3}}\,dt =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} \left(\frac{2t+1}{t}\right)^{1/3} = u & \\ t = \frac{1}{u^3-2} & dt = \frac{-3u^2\,du}{(u^3-2)^2} \end{array}\right| = -\int u^4\,du = -\frac{1}{5x^5}(2x^3+1)^{\frac{5}{3}} + C.$$

V. Integrály tvaru

$$\int R\left(e^{\alpha x}\right)\,dx,$$

kde R je racionální funkce.

Řešení: Substituce $e^{\alpha x} = t$ dává $x = \frac{1}{\alpha}\ln t$, $dx = \frac{dt}{\alpha t}$, neboli

$$\int R(e^{\alpha x})\,dx = \frac{1}{\alpha}\int R(t)\,\frac{dt}{t},$$

což je integrál z racionální funkce.

Příklad: Vypočtěte

$$\int \frac{e^{\frac{\pi}{2}x} - e^{\frac{\pi}{3}x}}{e^{\frac{\pi}{3}x}+1}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{e^{\frac{\pi}{2}x} - e^{\frac{\pi}{3}x}}{e^{\frac{\pi}{3}x}+1}\,dx = \left|\begin{array}{l} e^{\frac{\pi}{6}x} = t \\ dx = \frac{6}{\pi}\cdot\frac{dt}{t} \end{array}\right| = \frac{6}{\pi}\int \frac{t^2-t}{t^2+1}dt =$$

$$= \frac{6}{\pi}\left\{e^{\frac{\pi}{6}x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+e^{\frac{\pi}{3}x}\right) - \operatorname{arctg} e^{\frac{\pi}{6}x}\right\} + C.$$

VI. Integrály tvaru

$$\int R(\ln x)\,\frac{dx}{x},$$

kde R je racionální funkce.

Řešení: Substituce $\ln x = t$ dává okamžitě integrál z racionální funkce.

Příklad:

$$\int \frac{dx}{x(\ln^2 x - 1)} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \right| + C.$$

VII. Integrály typu

$$\int P(x)\, e^{\alpha x}\, dx\,, \qquad \int P(x) \begin{matrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{matrix}\, dx\,, \qquad \int P(x) \ln x\, dx\,,$$

$$\int P(x) \begin{matrix} \operatorname{arctg} x \\ \operatorname{arccotg} x \end{matrix}\, dx\,, \qquad \int P(x) \begin{matrix} \arcsin x \\ \arccos x \end{matrix}\, dx\,,$$

kde P je polynom.

Řešení: Všechny uvedené integrály se počítají integrací per partes. Prvé dva volbou

$$\begin{array}{llll} u = P(x)\,; & v' = e^{\alpha x}\,, & \sin \alpha x\,, & \cos \alpha x \\ u' = Q(x)\,; & v = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x}\,, & -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x\,, & \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x\,, \end{array}$$

kde $Q(x)$ je polynom stupně o jednu menší, než $P(x)$. Tímto způsobem se pokračuje dále.
Zbývající integrály se počítají volbou

$$\begin{array}{llll} u' = P(x)\,; & v = \ln x\,, & \operatorname{arctg} x\,, & \arcsin x \\ u = P_1(x)\,; & v' = \frac{1}{x}\,, & \frac{1}{1+x^2}\,, & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \end{array}$$

což dává integrály z racionální funkce v prvých dvou případech a integrál typu III. ve třetím případu.

Příklad: Vypočtěte $\int x(1+x^2)\operatorname{arctg} x\, dx$.

Řešení:

$$\int x(1+x^2)\operatorname{arctg} x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x(1+x^2) & v = \operatorname{arctg} x \\ u = \frac{1}{4}(1+x^2)^2 & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\, x + \frac{1}{12}\, x^3 + C.$$

8.2 Newtonův integrál.

Definice: Řekneme, že $F(x)$ je primitivní funkcí k $f(x)$ v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je-li $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

Poznámky: 1. V krajních bodech $\langle a, b\rangle$ rozumíme jednostranné derivace.
2. Z existence derivace $F'(x) = f(x)$ plyne, že $F(x)$ je spojitá pro $x \in \langle a, b\rangle$.

Věta: Každá funkce $f(x)$, spojitá v $\langle a, b\rangle$, má v tomto intervalu primitivní funkci.

Důkaz: Vyžaduje vybudování Riemannova integrálu a nebudeme jej provádět.

Definice: Buď f spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$, F primitivní funkce k f. Potom výraz $F(b)-F(a)$ nazýváme určitým Newtonovým integrálem v intervalu $\langle a,b\rangle$ a značíme

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = [\,F(x)\,]_{x=a}^{x=b} = F(x)|_a^b$$

a podobně.

Poznámka: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ nezávisí na volbě primitivní funkce.

Věta: Buďte c_1, c_2 konstanty, f_1, f_2 funkce spojité v $\langle a,b\rangle$. Potom platí

$$\int\limits_a^b \{\, c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\,\}\; dx = c_1 \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

Důkaz: Buďte F_1, F_2 primitivní funkce k funkcím f_1, f_2. Potom je $H(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x)$ primitivní funkcí k $c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$. Tedy

$$\int\limits_a^b \{\, c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\,\}\; dx = [\,H(x)\,]_a^b = H(b)-H(a) = c_1F_1(b)+c_2F_2(b)-[\,c_1F_1(a)+c_2F_2(a)\,] =$$

$$c_1[\,F_1(b)-F_1(a)\,] + c_2[\,F_2(b)-F_2(a)\,] = c_1\int\limits_a^b f_1(x)\,dx + c_2\int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

Poznámky: 1. Úplnou indukcí dostaneme, že

$$\int\limits_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^n c_k \int\limits_a^b f_k(x)\,dx.$$

2. Předchozí věta ukazuje, že určitý integrál je lineární zobrazení množiny všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$ do $\mathbf{R}$. Tyto funkce tvoří vektorový prostor a takovému zobrazení říkáme lineární funkcionál.

Věta: Je-li f spojitá v $\langle a,b\rangle$, potom

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx. \text{ Speciálně } \int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Důkaz: Zřejmý.

Věta: Buď f spojitá v $\langle a,b\rangle$, $c \in \langle a,b\rangle$. Potom platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Důkaz: Je

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int\limits_c^b f(x)\,dx + \int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

Poznámka: V dalším se budeme zajímat o geometrickou interpretaci $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Speciálně o to, jak vypočítat obsah rovinného oboru, omezeného přímkami $y = 0, x = a, x = b$ a křivkou $y = f(x)$. Viz příslušný obrázek

Definice: Dělením intervalu $\langle a, b\rangle$ rozumíme posloupnost $n + 1$ bodů, pro něž platí

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dělení intervalu značíme D. Normou dělení D rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

Buď f funkce, spojitá v $\langle a, b\rangle$. Potom integrálním součtem, příslušným funkci f a dělení D rozumíme výraz

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\,, \ \text{ kde } \ \xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$$

je libovolný bod.

! Věta: Buď f spojitá v $\langle a, b\rangle$, $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0$. Potom platí

$$\lim_{m\to\infty} S(f, D_m) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz: Stačí ukázat, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\left| S(f, D) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon \ \text{ jakmile } \ \nu(D) < \delta.$$

Buď $D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Potom platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int\limits_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)\,dx + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx =$$

$$= [\,F(x_1) - F(x_0)\,] + [\,F(x_2) - F(x_1)\,] + \cdots + [\,F(x_n) - F(x_{n-1})\,]\,.$$

Podle věty o střední hodnotě existují čísla $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ tak, že

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Tedy

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Nechť jsou nyní $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ libovolné body. Potom platí

$$\left| S(f, D) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \le \sum_{i=1}^{n} |\, f(\xi_i) - f(\eta_i)\,|(x_i - x_{i-1}).$$

f je spojitá v $\langle a, b\rangle$ a je tedy stejnoměrně spojitá. Odtud plyne, že pro $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že jakmile $\nu(D) < \delta$, potom $|\, f(\xi_i) - f(\eta_i)\,| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Tedy

$$\left| S(f, D) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \le \sum_{i=1}^{n} |\, f(\xi_i) - f(\eta_i)\,|(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Věta: Buď f spojitá v $\langle a, b\rangle$. Potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ tak, že platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(c).$$

Důkaz: Věta má názornou geometrickou interpretaci. Viz obrázek.

Podle definice integrálu a věty o střední hodnotě platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) = F(a) = F'(c)(b - a) = (b - a)\,f(c).$$

Důsledky: 1. Je-li f spojitá a nezáporná v $\langle a, b\rangle$, je

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

Důkaz: Podle předchozí věty platí

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(c) \ge 0.$$

2. Jsou-li f, g spojité v $\langle a, b\rangle$, $f(x) \le g(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, potom

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Důkaz: Označme $h(x) = g(x) - f(x)$. Potom je $h(x) \ge 0$ pro $x \in \langle a, b\rangle$ a tedy

$$\int_a^b h(x)\,dx \ge 0\,, \quad \text{t.j.} \quad \int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a platí $m \le f(x) \le M$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, potom

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Důkaz: Podle důsledku 2 ze vztahu

$$m \le f(x) \le M \ \text{ plyne } \ \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx,$$

neboli

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

4. Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$, potom

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx.$$

Důkaz: Pro $x \in \langle a, b\rangle$ platí $-|\,f(x)\,| \le f(x) \le |\,f(x)\,|$ a odtud

$$-\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx,$$

což je ekvivalentní vyjádření pro tvrzení důsledku.

Věta: Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$, pak je funkce $U(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ primitivní k funkci f, tedy platí

$$U'(x) = f(x), \quad \text{tj.} \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Důkaz: Je

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

a odtud po zderivování dostaneme tvrzení věty.

Poznámky: 1. Analogicky je možno definovat funkci $V(x) = \int_x^b f(t)\,dt$, pro niž platí $V'(x) = -f(x)$.

2. Pomocí integrálu s proměnnou horní mezí lze zavést základní elementární funkce, tentokrát úplně přesně. Definujme na příklad

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \text{pro} \quad x > 0,$$

e^x zavedeme jako funkci k ní inverzní. Dále na příklad

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R}$$

a odtud pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funkci $\operatorname{tg} x$, kterou pak $\pi-$periodicky rozšíříme.

Věta: (1. věta o střední hodnotě integrálního počtu)
Buďte f, g spojité v $\langle a, b\rangle$, $f(x) \geq 0$, $m \leq g(x) \leq M$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Potom je

$$m \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M \int_a^b f(x)\,dx.$$

Jinak řečeno existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(\xi) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz: Poněvadž je $m \leq g(x) \leq M$, plyne odtud, že

$$m\,f(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M\,f(x)$$

a zintegrováním dostaneme prvou část tvrzení.

Pokud se týče 2. části tvrzení, můžeme zvolit ξ libovolně, je-li $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Jestliže $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, potom položíme

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \quad \text{a platí tedy} \quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b f(x)\,dx\,,\ m \leq \mu \leq M.$$

Jestliže dále zvolíme

$$m = \min_{x \in \langle a,b\rangle} g(x)\,,\ M = \max_{x \in \langle a,b\rangle} g(x),$$

potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že $\mu = g(\xi)$.

Věta: (2. věta o střední hodnotě integrálního počtu)
Buďte f, g spojité v $\langle a, b\rangle$, g monotonní. Potom existuje $c \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^c f(x)\, dx + g(b) \int_c^b f(x)\, dx.$$

Důkaz: Nebudeme provádět.

Věta: (Integrace per partes)
Funkce $u(x)$ a $v(x)$ nechť mají v $\langle a, b\rangle$ spojité derivace $u'(x), v'(x)$. Potom platí

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a) - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx.$$

Důkaz: Je

$$\int_a^b [\, u(x)\, v(x)\,]'\, dx = \int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx + \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx.$$

Poněvadž

$$\int_a^b [\, u(x)\, v(x)\,]'\, dx = [\, u(x)\, v(x)\,]_a^b = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a),$$

plyne odtud okamžitě tvrzení věty.

Příklad: Vypočtěte $\mathcal{I}_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$, kde $n \geq 0$ je celé.

Řešení:

$$\mathcal{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x\,, & v' = \sin x \\ u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x\,, & v = -\cos x \end{array} \right| = -\cos x \sin^{n-1} x \,\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+(n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, (1 - \sin^2 x)\, dx = (n-1)\mathcal{I}_{n-2} - (n-1)\mathcal{I}_n.$$

Tedy $\mathcal{I}_n = \frac{n-1}{n} \mathcal{I}_{n-2}$.

Pro $n = 2k$ (sudé) dostáváme

$$\mathcal{I}_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Pro $n = 2k+1$ (liché) dostáváme

$$\mathcal{I}_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Věta: (Substituční metoda)
Nechť platí
1. Funkce $x = \varphi(t)$ má spojitou derivaci $\varphi'(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.
2. Pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ je $A \leq \varphi(t) \leq B$.
3. Funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle A, B \rangle$.

Jestliže položíme $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ pak platí

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Důkaz: Označme

$$\Phi(t) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)\, dx\,, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle\,; \;\; F(u) = \int_{\varphi(\alpha)}^{u} f(x)\, dx\,, \;\; \Psi(t) = \int_\alpha^t f(\varphi(\tau))\, \varphi'(\tau)\, d\tau.$$

Potom platí

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\,, \qquad \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dt} = f(u)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Poněvadž je pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ $\Phi'(t) = \Psi'(t)$, musí být $\Phi(t) = \Psi(t) + K$. Pro $t = \alpha$ dostaneme $\Phi(\alpha) = 0 = \Psi(\alpha)$, tedy $K = 0$.

Příklad: Vypočtěte $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx$.

Řešení:

$$\mathcal{I} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx \left| \begin{array}{ll} x = \operatorname{tg} t\,, & dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4}\,, & x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos t\, \sin^2 t} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \sin t = u\,, & \cos t\, dt = du \\ t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, & t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u^2(1-u^2)} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}.$$

Integrál $\mathcal{I}$ lze také počítat pomocí jediné substituce $x = \operatorname{sh} t$ a dostaneme

$$\mathcal{I} = \int_{\ln(1+\sqrt{2})}^{\ln(2+\sqrt{3})} \operatorname{cth}^2 t\, dt = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}.$$

Poznámka: Výpočet určitého integrálu pomocí substituční metody má tu výhodu, že se nemusíme vracet k původní proměnné a dostáváme vždy nový integrál se stejným výsledkem. To je výhodné zvláště v těch případech, kdy k výpočtu potřebujeme více substitucí.

8.3 Nevlastní integrály.

Definice: Každou funkci $F(x)$, spojitou v intervalu I, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ v každém bodě intervalu I s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů, nazveme zobecněnou primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I.

Věta: Je-li $F(x)$ zobecněná primitivní funkce k $f(x)$ v intervalu I, pak je každá zobecněná primitivní funkce k $f(x)$ tvaru $F(x) + C$, kde C je konstanta.

Důkaz: Je zřejmé, že $F(x) + C$ je zobecněné primitivní funkce k $f(x)$. Obráceně buď $G(x)$ zobecněná primitivní funkce k $f(x)$ a označme $H(x) = G(x) - F(x)$. Potom je $H'(x) = 0$ s výjimkou konečného počtu bodů, na příklad $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Tedy ve všech intervalech $(x_{i-1}, x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$ je H konstantní a ze spojitosti plyne, že $H(x) = C$ pro $x \in I$.

Věta: Existuje-li k funkci $f(x)$ zobecněná primitivní funkce $G(x)$ v intervalu $\langle a, c\rangle$ a zobecněná primitivní funkce $H(x)$ v intervalu $\langle c, b\rangle$, potom k funkci f existuje zobecněná primitivní funkce F v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz: Je $G'(x) = f(x)$ pro $x \in \langle a, c\rangle$ s výjimkou konečného počtu bodů a $H'(x) = f(x)$ s výjimkou konečného počtu bodů. Potom je

$$F(x) = \begin{cases} G(x) & \text{pro} \quad x \in \langle a, c\rangle \\ H(x) + K & \text{pro} \quad x \in (c, b\rangle. \end{cases}$$

je jedna ze zobecněných primitivních funkcí k $f(x)$, jestliže zvolíme $K = G(c) - H(c)$.

Poznámka: Indukcí můžeme větu snadno zobecnit na konečný počet intervalů.

Příklad: Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x \in \langle -1, 0\rangle, \\ x & \text{pro} \quad x \in (0, 1\rangle, \\ 2 & \text{pro} \quad x \in (1, 2\rangle. \end{cases}$$

viz obrázek

Je

$$F(x) = \begin{cases} -x & \text{pro} \quad x \in \langle -1, 0\rangle, \\ \frac{x^2}{2} & \text{pro} \quad x \in (0, 1\rangle \\ 2x - \frac{3}{2} & \text{pro} \quad x \in (1, 2\rangle. \end{cases}$$

viz obrázek

Všechny ostatní zobecněné primitivní funkce jsou tvaru $F(x) + C$.

Definice: Buď $F(x)$ zobecněná primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom určitým integrálem (Newtonovým) funkce $f(x)$ přes interval $\langle a,b\rangle$ rozumíme číslo

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Funkci $f(x)$ nazýváme integrovatelnou v $\langle a,b\rangle$.

Poznámka: Pro integrovatelné funkce platí analogické věty jako pro Newtonův integrál a nebudeme je tedy znovu formulovat. Za zmínku stojí jen následující věta.

Věta: Je-li f integrovatelná v $\langle a,b\rangle$ a $g(x) = f(x)$ až na konečný počet bodů intarvalu $\langle a,b\rangle$, je i g integrovatelná v $\langle a,b\rangle$ a platí

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz: K $f(x)$ existuje zobecněná primitivní funkce $F(x)$, která je též zobecněnou primitivní funkcí ke $g(x)$. Tedy

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Poznámka: V dalším si všimneme otázky existence zobecněné primitivní funkce nebo jinými slovy otázky integrovatelnosti.

Věta: Je-li f omezená v intervalu $\langle a,b)$ a jejím jediným bodem nespojitosti je bod b, potom je f integrovatelná v $\langle a,b\rangle$.

Důkaz: Stačí dokázat, že k funkci f existuje v $\langle a,b\rangle$ zobecněná primitivní funkce. Označme $G(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Potom je G spojitá v $\langle a,b)$ a ukážeme, že existuje $\lim\limits_{x\to b_-} G(x)$. Poněvadž je f omezená, existuje $L > 0$ tak, že $-L \le f(x) \le L\ \forall x \in \langle a,b)$, tedy $f(x) + L \ge 0\ \forall x \in \langle a,b)$. Odtud plyne, že $U(x) = \int\limits_a^x [f(t)+L]\,dt$ je neklesající a shora omezená. Je totiž $U'(x) = f(x) + L$ a

$$\int\limits_a^x [f(t)+L]\,dt \le 2\int\limits_a^x L\,dx \le 2L(b-a).$$

Existuje tedy $\lim\limits_{x\to b_-} U(x) = D$ a odtud $\lim\limits_{x\to b_-} G(x) = D - L(b-a)$.

Důsledek: Je-li funkce f omezená a nespojitá v konečném počtu bodů intervalu $\langle a,b\rangle$, je v tomto intervalu integrovatelná.

Důkaz: Plyne okamžitě z předchozí věty.

Poznámka: V dalším se budeme zabývat otázkou integrovatelnosti neomezené funkce, nebo takové funkce, která je definovaná na neomezeném intervalu. Tím se dostaneme k pojmu nevlastního integrálu.

Definice: Buď f spojitá funkce v $\langle a, b)$. Řekneme, že f je integrovatelná v $\langle a, b\rangle$, jestliže existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to b_-} \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Potom položíme

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b_-} \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

a daný integrál nazveme konvergentní.

Je-li $b = +\infty$, říkáme, že $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ je konvergentní, jestliže existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f(t)\,dt$ a položíme

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Poznámky: 1. Prvý typ integrálů nazýváme nevlastní vlivem funkce, druhý typ nevlastní vlivem meze.

2. Analogicky se definuje

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a_+} \int\limits_x^b f(t)\,dt \quad \text{a} \quad \int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int\limits_x^b f(t)\,dt,$$

jestliže uvedené limity existují a jsou vlastní.

3. Je-li f neomezená jak v okolí bodu a, tak v okolí bodu b, potom položíme

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int\limits_{a+\varepsilon}^c f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0_+} \int\limits_c^{b-\eta} f(x)\,dx,$$

kde $c \in (a, b)$ je libovolný bod a obě limity existují a jsou vlastní. Analogicky

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_B^c f(x)\,dx + \lim_{A\to+\infty} \int\limits_c^A f(x)\,dx.$$

4. Z definice nevlastního integrálu plyne, že je oba druhy (vlivem funkce i vlivem meze) možno vyšetřovat zároveň.

Věta: Jsou-li f a g spojité v $\langle a, b)$ [resp. $\langle a, +\infty)$] a platí-li v tomto intervalu $0 \le f(x) \le g(x)$, potom z kovergence integrálu $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ $\left[\text{ resp. } \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx\right]$ plyne konvergence integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ $\left[\text{ resp. } \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\right]$ a z divergence integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ $\left[\text{ resp. } \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\right]$ plyne divergence integrálu $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ $\left[\text{ resp. } \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx\right]$.

Důkaz: Buď $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt\,,\ G(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt$. Poněvadž je $f(x) \le g(x)$, platí, že $F(x) \le G(x)$. Funkce F je neklesající [je $F'(x) = f(x) \ge 0$] a tedy existuje $\lim\limits_{x \to b_-} F(x)$.

Obráceně, je-li $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ divergentní, nemůže být $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ konvergentní.

Věta: Jsou-li funkce f, g, h spojité v $\langle a, b)$ [resp. $\langle a, +\infty)$] a platí-li v tomto intervalu nerovnost $g(x) \le f(x) \le h(x)$ potom z konvergence integrálů

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx\,,\ \int\limits_a^b h(x)\,dx \left[\text{resp.}\ \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx\,,\ \int\limits_a^{+\infty} h(x)\,dx\right]$$

plyne konvergence integrálu

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \left[\text{resp.}\ \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\right].$$

Důkaz: Je $0 \le f(x) - g(x) \le h(x) - g(x)$. Poněvadž konverguje integrál

$$\int\limits_a^b [h(x) - g(x)]\,dx \left[\text{resp.}\ \int\limits_a^{+\infty} [h(x) - g(x)]\,dx\right],$$

konverguje i integrál

$$\int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \left[\text{resp.}\ \int\limits_a^{+\infty} [f(x) - g(x)]\,dx\right].$$

Označíme-li $r(x) = f(x) - g(x)$, potom $f(x) = r(x) + g(x)$ a tedy $\int\limits_a^b f(x)\,dx \left[\text{resp.}\ \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\right]$ konverguje.

Věta: Je-li f spojitá v $\langle a, b)$ [resp. $\langle a, +\infty)$] a je-li konvergentní

$$\int\limits_a^b |\, f(x)\,|\,dx \left[\text{resp.}\ \int\limits_a^{+\infty} |\, f(x)\,|\,dx\right],$$

potom je konvergentní i

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \left[\text{resp.}\ \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\right].$$

Důkaz: Platí $-|\, f(x)\,| \le f(x) \le |\, f(x)\,|$ a podle předchozí věty

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \left[\text{resp.}\ \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx\right]$$

konverguje.

Definice: Konverguje-li

$$\int_a^b |\, f(x)\,|\, dx \quad \left[\text{resp.} \quad \int_a^{+\infty} |\, f(x)\,|\, dx\right],$$

řekneme, že

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \left[\text{resp.} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx\right]$$

konverguje absolutně.

Konverguje-li

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \left[\text{resp.} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx\right],$$

ale

$$\int_a^b |\, f(x)\,|\, dx \quad \left[\text{resp.} \quad \int_a^{+\infty} |\, f(x)\,|\, dx\right]$$

diverguje, říkáme, že

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \left[\text{resp.} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx\right]$$

konverguje neabsolutně.

Příklady: 1. Integrál $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje pro $\alpha < 1$. Integrál $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$.

Důkaz: Je-li $\alpha = 1$, je $\int \frac{dx}{x} = \ln |\, x\,| + C$ a tedy

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x|_0^1 = -\lim_{\varepsilon\to 0_+} \ln \varepsilon = +\infty\,, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_1^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty} \ln A = +\infty.$$

Pro $\alpha \neq 1$ platí $\int \frac{dx}{x^\alpha} = \int x^{-\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha} + C$. Nyní pro $\alpha < 1$ je $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{1-\alpha} = 0$ a integrál $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje, pro $\alpha > 1$ je $\lim\limits_{x\to 0_+} a^{1-\alpha} = +\infty$ a integrál $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ diverguje.

Analogicky pro $\alpha > 1$ je $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = 0$ a integrál $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje a pro $\alpha < 1$ je $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$ a integrál $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverguje.

2. Laplaceův integrál $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Důkaz: a) Integrál $\mathcal{I} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ konverguje. Platí

$$\mathcal{I} = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2.$$

Poněvadž e^{-x^2} je spojitá funkce na intervalu $\langle 0,1\rangle$, konverguje $\mathcal{I}_1$.

Pro $\mathcal{I}_2$ platí

$$x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}\,, \quad \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = e^{-1} < +\infty$$

a $\mathcal{I}_2$ také konverguje.

b) Výpočet $\mathcal{I}$. Do integrálu $\mathcal{I}$ zavedeme substituci $x = ut\,,\ (u \geq 0)\,,\ dx = u\,dt$. Potom je

$$\mathcal{I} = u\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}\,dt \ \text{ a } \ \mathcal{I}^2 = \int\limits_0^{\infty} e^{-u^2}du \int\limits_0^{\infty} u\,e^{-u^2t^2}\,dt = \int\limits_0^{\infty}\left\{\int\limits_0^{\infty} u\,e^{-(1+u^2t^2)}du\right\}dt$$

a po další substituci $(1+t^2)u^2 = v\,;\ u\,du = \frac{dv}{2(1+t^2)}$ dostaneme

$$\mathcal{I}^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}\int\limits_0^{\infty} e^{-v}\,dv = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Poněvadž je $\mathcal{I} > 0$, platí, že $\mathcal{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) Pro $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ platí

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

poněvadž je funkce e^{-x^2} sudá.

3. <u>Beta funkce</u> nebo Eulerův integrál 1. druhu.

Definice: Funkci

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

nazýváme beta funkcí.

Věta: $B(x,y)$ konverguje pro $x > 0$ a $y > 0$.

Důkaz: Body, v jejichž okolí je integrand v integrálu $\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ neomezený, jsou $t = 0$ pro t^{x-1} a $t = 1$ pro $(1-t)^{y-1}$. Dále platí

$$B(x,y) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2.$$

podle příkladu 1 $\mathcal{K}_1$ konverguje pro $x-1 > -1$, tedy $x > 0$ [$(1-t)^{y-1}$ je spojitá funkce] a stejně tak $\mathcal{K}_2$ konverguje pro $y-1 > -1$, tedy $y > 0$ [t^{x-1} je spojitá].

4. <u>Gama funkce</u> nebo Eulerův integrál 2. druhu.

Definice: Funkci

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

nazýváme gama funkcí.

Věta: $\Gamma(x)$ konverguje pro $x > 0$.

Důkaz: $\Gamma(x)$ rozepíšeme opět do tvaru

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt + \int\limits_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2.$$

Integrál $\mathcal{I}_1$ konverguje podle příkladu 1 pro $x > 0$ [e^{-t} je spojitá funkce] a $\mathcal{I}_2$ konverguje dokonce pro $x \in \mathbf{R}$. To vyplývá ze skutečnosti, že $\int\limits_1^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$, dokonce $\int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$ konverguje $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Skutečně je

$$\mathcal{K}_n = \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = \left| \begin{array}{ll} u = t^n\,, & v' = e^{-t} \\ u' = n t^{n-1}\,, & v = -e^{-t} \end{array} \right| = -t^n e^{-t}\Big|_0^{\infty} + n\mathcal{K}_{n-1} =$$

$$= n\mathcal{K}_{n-1} = n(n-1)\mathcal{K}_{n-2} = \cdots = n!\, \mathcal{K}_0 = n!,$$

poněvadž $\mathcal{K}_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 1$.

Poznámka: Ukazuje se, že funkci $\Gamma(x)$ lze definovat i v komplexním oboru pro $\operatorname{Re} x > 0$.

Věta: Platí $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Důkaz:

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = \left| \begin{array}{ll} u = t^x\,, & v' = e^{-t} \\ u' = x\, t^{x-1}\,, & v = -\, e^{-t} \end{array} \right| = -\, t^x\, e^{-t}\Big|_0^{\infty} + x \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(x),$$

poněvadž $\lim\limits_{t \to 0_+} t^x\, e^{-t} = 0 \ \ (x > 0)$ a $\lim\limits_{t \to \infty} t^x\, e^{-t} = 0$ (opakovaným použitím l'Hôspitalova pravidla).

Důsledek: Pro $n \in \mathbf{N}$ platí $\Gamma(n+1) = n!\,$.

Důkaz: Tento integrál byl vypočten v předchozí části ($\mathcal{K}_n$).

Poznámka: Γ-funkce je rozšířením pojmu faktoriálu na libovolné reálné číslo $x > 0$. Ukazuje se, že hodnoty $\Gamma(x)$ lze rozšířit dokonce na celou komplexní rovinu s výjimkou bodů $0, -1, -2, -3, \ldots,$ kde má $\Gamma(x)$ jednoduché póly.

8.4 Užití integrálního počtu.

8.4.1 Užití v geometrii.

1. Obsah rovinného oboru.

Označení: Označme $P(a,b;f(x))$ nebo stručně P obsah rovinného oboru, omezeného křivkou $y = f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Věta: Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom platí

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz: Plyne okamžitě z geometrické interpretace určitého integrálu.

Příklad: Najděte obsah rovinného oboru, omezeného křivkami

$$x^2+y^2=a^2\,,\ \ x^2-2y^2=\frac{a^2}{4}\quad (a>0).$$

Řešení: Jestliže si načrtneme obrázek, dostaneme, že omezené obory jsou tři a platí

$$P_1 = 2\,(\,P_3+P_4\,)\ ,\ \ P_2 = \pi a^2 - 2P_1.$$

Dále platí

$$P_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \sqrt{4x^2-a^2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} x=\frac{a}{2}\operatorname{ch}t\,, & t=\operatorname{argch}\frac{2x}{a}=\ln\left(\frac{2x}{a}+\sqrt{\frac{4x^2}{a^2}-1}\right) \\ dx=\frac{a}{2}\operatorname{sh}t\,dt\,, & \text{pro } x=\frac{a}{2} \text{ je } t=0 \text{ a pro } x=\frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ je } t=\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \end{array}\right| =$$

$$= \frac{a^2}{4\sqrt{2}}\int_0^{\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \operatorname{sh}^2 t\,dt = \frac{a^2}{8\sqrt{2}}\int_0^{\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})} (\operatorname{ch}2t-1)dt = \frac{a^2}{16\sqrt{2}}\ \operatorname{sh}2t\Big|_0^{\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})} -$$

$$-\frac{a^2}{8\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = \frac{a^2}{32\sqrt{2}}\left\{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}\right\} - \frac{a^2}{8\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{a^2}{8\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\ ;$$

$$P_4 = \int\limits_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\, dt \end{array} \right| = a^2 \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Tedy

$$P_1 = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{2}}{8} \ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \; ; \; P_2 = \frac{2\pi a^2}{3} + \frac{a^2\sqrt{2}}{4} \ln\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right).$$

2. Objem rotačního tělesa.

Poznámka: Budeme hledat objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného oboru, omezeného křivkou $y = f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osz x. Viz obrázek.

Jestliže utvoříme dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$, $D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, pak můžeme hledaný objem přibližně vyjádřit ve tvaru

$$V \doteq \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \text{ kde } \xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle.$$

To jest součet objemů válců o poloměru podstavy $f(\xi_i)$ a výšce $x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. To je však integrální součet, příslušný dělení D a funkci $\pi f^2(x)$. Jestliže provedeme limitní přechod pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ takovou, že $\nu(D_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, dostaneme.

Věta: Buď f spojitá a nezáporná v $\langle a, b \rangle$. Potom je objem V rotačního tělesa, které vznikne rotací výše popsaného rovinného oboru kolem osy x roven

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx.$$

Příklad: Najděte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací kruhu $x^2 + (y - b)^2 \leq a^2$ $(0 < a \leq b)$ kolem osy x. Takto vzniklé těleso se nazývá anulus.

Řešení: Hledaný objem najdeme jako rozdíl objemů dvou rotačních těles; prvé vznikne rotací oboru, omezeného půlkružnicí $y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, druhé rotací půlkružnice $y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$. Situace je znázorněna na následujících obrázkách.

Tedy

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int\limits_{-a}^{a} \left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int\limits_{-a}^{a} \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx =$$

$$= 8\pi b \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\pi a^2 b.$$

(Integrand je sudá funkce).

Doplnit přijde délka oblouku rovinné křivky a obsah pláště rotačního tělesa.
Doplnit přijde dále užití ve fyzice.

Kapitola 9

Cvičení.

9.1 Prostor $\mathbf{R}^n$.

1. Buďte $G_n = \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$, $F_n = \left\langle \frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n} \right\rangle$; $n \in \mathbf{N} - \{1\}$. Najděte

$$\bigcap_{n=2}^{\infty} G_n \; ; \quad \bigcup_{n=2}^{\infty} F_n \, .$$

$[\, \langle 0,1 \rangle \; ; \; (0,1) \,]$

2. Určete definiční obor dané funkce a načrtněte jej.

   (a) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$ $\quad [\, |\,x\,| \leq 1 \, , \, |\,y\,| \geq 1 \,]$

   (b) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $\quad \left[\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \,\right]$

   (c) $z = \ln(\, y^2 - 4x + 8)$ $\quad \left[\, y^2 > 4x - 8 \,\right]$

   (d) $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$ $\quad \left[\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \,\right]$

   (e) $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$ $\quad [\, x \neq 0 \; ; \; 1-x \leq y \leq 1+x \text{ pro } x > 0 \; ; \; 1+x \leq y \leq 1-x \text{ pro } x < 0 \,]$

   (f) $z = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$
   $\left[\, \mathbf{R}^2 - A \, , \text{ kde } A = \left\{(x,y) \; ; \; (x+1)^2 + y^2 < 1\right\} \cup \left\{(x,y) \; ; \; (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\} \,\right]$

   (g) $z = \sqrt{\sin \pi (x^2+y^2)}$ $\quad \left[\, 2k \leq x^2+y^2 \leq 2k+1 \; ; \; k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \,\right]$

   (h) $z = \arcsin \left[\, 2y(1+x^2) - 1 \,\right]$ $\quad \left[\, x \in \mathbf{R} \, , \, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2+1} \,\right]$

   (i) $u = \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $\; (R > r)$ $\quad \left[\, r^2 < x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \,\right]$

   (j) $u = \ln(z^2-x^2-y^2-1)$ $\quad \left[\,\text{vnitřek dvojdílného hyperboloidu } x^2+y^2-z^2 = -1 \,\right]$

   (k) $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   $\left[\,\text{vnějšek kužele } x^2+y^2-z^2 = 0 \text{ včetně hranice s vyloučením počátku} \,\right]$

Poznámka: Nalézt nerovnosti, uvedené ve výsledcích, není nic obtížného. Mnohem důležitější je však načrtnutí příslušných definičních oborů, poněvadž až potom porozumíme správně tomu, co to je definiční obor funkce dvou nebo tří proměnných. Doporučuji tedy věnovat načrtnutí obrázků patřičnou pozornost.

3. Vypočtěte následující limity.

(a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ [0]

(b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$ [1]

(c) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [ln 2]

(d) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ [0]

(e) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$ [neexistuje]

9.2 Určitý integrál.

1. Vypočtěte následující integrály.

(a) $\int\limits_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$ $\left[\,\frac{45}{4}\,\right]$

(b) $\int\limits_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$ $\left[\,-5\left(\sqrt[5]{16}-1\right)\right]$

(c) $\int\limits_{0}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$ [12]

(d) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ $\left[\,\frac{\pi}{2}\,\right]$

(e) $\int\limits_{0}^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2-x^{2n}}}$ $\left[\,\frac{\pi}{6n}\,\right]$

(f) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3\,dx}{\left(\frac{5}{8}-x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8}-x^4}}$ $\left[\,\frac{4}{3}\,\right]$

(g) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ [2]

(h) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,\sin 2x\,dx$ $\left[\,\frac{2}{7}\,\right]$

(i) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ $\left[\,\frac{21}{16\sqrt[3]{2}}-\frac{9}{8}\,\right]$

(j) $\int\limits_{1}^{2} x\,\log_2 x\,dx$ $\left[\,2-\frac{3}{4\ln 2}\,\right]$

(k) $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)\,dx$ [1]

(l) $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $\left[\frac{\pi a^2}{4}\right]$

(m) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\, dx$ $\left[\frac{e^\pi - 2}{5}\right]$

(n) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x} - 1}$ $[1 + 2\ln 2]$

(o) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\, dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$ $\left[\ln \frac{e + \sqrt{1 + e^2}}{1 + \sqrt{2}}\right]$

(p) $\int\limits_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ $\left[\frac{\pi}{16}\right]$

(q) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\, dx$ $\left[\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}}\right]$

(r) $\int\limits_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}}\, dx$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 - \sqrt{3})\right]$

(s) $\int\limits_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x \sqrt{(x^2 - 2)^5}}$ $\left[\frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{48}\right]$

(t) $\int\limits_0^1 \sqrt{2x + x^2}\, dx$ $\left[\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]$

(u) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3}$ $\left[\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$

(v) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \frac{1}{6} \sin^2 x}$ $\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}\right]$

(w) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\, dx$ $\left[\frac{1}{a^2 - b^2} \ln\left|\frac{a}{b}\right|\right]$

(x) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}$ $(0 \le \varepsilon < 1)$ $\left[\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right]$

(y) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ $(ab \neq 0)$ $\left[\frac{\pi}{2\,|ab|}\right]$

2. Buď $I_{m,n} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx$ $(m, n \ge 0)$. Ukažte, že platí

$$I_{m,n} = \frac{n - 1}{m + n} I_{m,n-2} = \frac{m - 1}{m + n} I_{m-2,n}\,.$$

Užijte této formule k výpočtu $\int\limits_0^1 x^p (1 - x)^q\, dx$ $(p, q \in \mathbf{N})$. $\left[\frac{p!\, q!}{(p + q + 1)!} \text{ položte } x = \sin^2 t\right]$

3. Vypočtěte následující integrály jako limity integrálních součtů.

(a) $\int\limits_{-1}^2 x^2\, dx$ $[3]$

(b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ $[1]$

4. Užitím určitého integrálu najděte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ $\left[\ln 2\ ;\quad \text{užijte} \quad \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}\right]$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ $\left[\frac{\pi}{4}\ ;\quad \text{užijte} \quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right]$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^p\ ;\ (p>0)$ $\left[\frac{1}{p+1}\ ;\quad \text{užijte} \quad \int\limits_0^1 x^p\,dx\right]$

5. Najděte $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx\ ;\ \ \frac{d}{da}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx\ ;\ \ \frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$ $[\,0\ ;\ -\sin a^2\ ;\ \sin b^2\,]$

6. Vypočtěte následující derivace

(a) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}\,dt$ pro $x=1$ $[\,\frac{1}{3}\,]$

(b) $\frac{d}{dx}\int\limits_x^5 \sqrt{1+t^2}\,dt$ pro $x=0\,,\ x=\frac{3}{4}$ $[\,-1\,,\ -\frac{5}{4}\,]$

7. Vypočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2\,dt}{x}$ $[\,1\,]$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$ $\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left\{\int_0^x e^{t^2}\,dt\right\}^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,dt}$ $[\,0\ ;\quad \text{užijte l'Hôspitalova pravidla}\,]$

8. Najděte $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, je-li

(a) $a=0\,,\ b=2\ ;\ f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{pro} \quad 0\le x\le 1 \\ 2-x & \text{pro} \quad 1<x\le 2 \end{cases}$ $[\,\frac{5}{6}\,]$

(b) $a=0\,,\ b=1\ ;\ f(x)=\begin{cases} x & \text{pro} \quad 0\le x\le t \\ t\,\frac{1-x}{1-t} & \text{pro} \quad t<x\le 1 \end{cases}$ $[\,\frac{t}{2}\,]$

(c) $a=-2\,,\ b=2\ ;\ f(x)=\begin{cases} -x & \text{pro} \quad -2\le x\le -1 \\ 0 & \text{pro} \quad -1<x<0 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{pro} \quad 0\le x\le 1 \\ 2-x & \text{pro} \quad 1<x\le 2 \end{cases}$ $[\,2+\frac{\pi}{4}\,]$

9. Buďte $f(x)$ sudá a $g(x)$ lichá funkce, které jsou integrovatelné na intervalu $\langle -a,a\rangle$, $a>0$. Ukažte, že

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx\ ;\qquad \int\limits_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0\,.$$

10. Pomocí vět o střední hodnotě odhadněte integrál I , je-li

(a) $I=\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}$ $\left[\,\frac{4\pi}{3}\le I\le 4\pi\,\right]$

(b) $I = \int\limits_0^1 \frac{x^9\,dx}{\sqrt{1+x}}$ $\left[\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq I \leq \frac{1}{10}\right]$

(c) $I = \int\limits_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,dx$ $\left[\frac{1}{200} \leq I \leq \frac{1}{100}\right]$

(d) $I = \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ $\left[\,|\,I\,| \leq \frac{1}{50\pi}\right]$

(e) $I = \int\limits_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\,\sin x\,dx\,; \quad a > 0$ $\left[\,|\,I\,| \leq \frac{2\,e^{-\alpha a}}{a}\right]$

11. Vypočtěte integrály

(a) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

(b) $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\,dx\,; \quad (a > 0)$ $\left[\frac{1}{a}\right]$

(c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ [diverguje]

(d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ $[\pi]$

(e) $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$ [diverguje]

(f) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$ $[1 - \ln 2]$

(g) $\int\limits_0^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

(h) $\int\limits_0^\infty x\,\sin x\,dx$ [diverguje]

(i) $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\,\cos\beta x\,dx$ $\left[\frac{a}{a^2+\beta^2}\ \text{pro}\ a > 0\,; \quad \text{diverguje pro}\ a \leq 0\right]$

(j) $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\right]$

(k) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ $\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right]$

(l) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ $\left[\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right]$

(m) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$

(n) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

(o) $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$ $\left[\frac{8}{3}\right]$

(p) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\,\sqrt{\ln x}}$ $[2]$

(q) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$ $\left[\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right]$

(r) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$ [diverguje]

(s) $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; $(a < b)$ [π]

(t) $\int\limits_{a}^{b} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; $(a < b)$ $\left[\frac{\pi(a+b)}{2}\right]$

(u) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

(v) $\int\limits_{0}^{\infty} x^n\,e^{-x}\,dx$; $(n \in \mathbf{N})$ [$n!$]

(w) $\int\limits_{0}^{\infty} x^{2n+1}\,e^{-x^2}\,dx$; $(n \in \mathbf{N})$ $\left[\frac{n!}{2}\right]$

(x) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$; $(a > 0\,,\, n \in \mathbf{N})$ $\left[\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2\,a^{2n-1}}\right]$

(y) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $(n \in \mathbf{N})$ $\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ pro } n = 2k\,; \quad \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \text{ pro } n = 2k+1\right]$

12. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů.

(a) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ [konverguje]

(b) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ [konverguje]

(c) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ [diverguje]

(d) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^4}\,dx$ [konverguje]

(e) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2+1}$ [konverguje]

(f) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\ln x}$ [diverguje]

(g) $\int\limits_{0}^{\infty} x^{p-1}\,e^{-x}\,dx$ [konverguje pro $p > 0$]

(h) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx$ [konverguje pro $n - m > 1$]

(i) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ [konverguje]

(j) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}\,dx$ [diverguje]

(k) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\,dx$ [konverguje]

(l) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$ [diverguje]

9.3 Užití určitého integrálu.

1. Najděte obsah rovinného oboru, omezeného křivkami.

   (a) $ax = y^2$; $ay = x^2$ $\left[\frac{a^2}{3}\right]$

   (b) $y = 2x - x^2$; $x + y = 0$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

   (c) $y = x$; $y = x + \sin^2 x \quad (0 \le x \le \pi)$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

   (d) $y = -x^2 + 4x - 3$ a tečnami k této křivce v bodech $(0, -3)$ a $(3, 0)$ $\left[\frac{9}{4}\right]$

   (e) $x^2 + y^2 = 8$; $y = \frac{x^2}{2}$ (2 obory) $\left[2\pi + \frac{4}{3}\ ;\ 6\pi - \frac{4}{3}\right]$

   (f) $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 - 2y^2 = \frac{a^2}{4}$ (3 obory)
   $\left[a^2\left\{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right\}\ \text{(2 obory)}\ ;\quad a^2\left\{\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right\}\right]$

   (g) $y^2 = x^3$; $y = 8$; $x = 0$ $[19,2]$

   (h) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$; $a > 0$ $\left[\frac{4}{3}a^3\right]$

   (i) $4(y^2 - x^2) + x^3 = 0$ $\left[\frac{128}{15}\right]$

   (j) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $a > 0$ (astroida) $\left[\frac{3\pi a^2}{8}\right]$

2. Najděte obsah rovinného oboru, omezeného parametricky zadanou křivkou

$$x = \varphi(t)\,,\ y = \psi(t)\ ;\ t \in \langle\alpha, \beta\rangle\,.$$

$$\left[\text{Užijte vzorců } S = \left|\int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt\right| \text{ nebo } S = \frac{1}{2}\left|\int_\alpha^\beta (\varphi'(t)\,\psi(t) - \varphi(t)\,\psi'(t))\,dt\right|\,.\right]$$

   (a) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $a > 0$ (cykloida), $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$; $y = 0$ $\left[3\pi a^2\right]$

   (b) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ $\left[\frac{72}{5}\sqrt{3}\right]$

   (c) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$ $\left[\frac{8}{15}\right]$

   (d) $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ (kardioida) $\left[6\pi a^2\right]$

   (e) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $(a > 0)$ (Deckartův list) $\left[\frac{3}{2}a^2\ ;\ \text{předpokládejte, že } y = tx\right]$

3. Užitím 2. vzorce z předchozího příkladu ukažte, že pro křivku zadanou v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$, $\varphi \in \langle\alpha, \beta\rangle$ platí $S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$.

4. Užitím předchozího vzorce najděte obsah rovinného oboru, omezeného křivkou v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$.

   (a) $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (lemniskata) $\left[a^2\right]$

   (b) $r = a\cos 5\varphi$ (pětilistá růže) $\left[\frac{\pi a^2}{4}\right]$

   (c) $r = a\sin 4\varphi$ (čtyřlistá růže) $\left[\frac{\pi a^2}{4}\right]$

   (d) $r = a\,|\sin 2\varphi|$ (čtyřlístek) $\left[\frac{\pi a^2}{4}\right]$

   (e) $r = 2 + \cos 2\varphi$ vně křivky $r = 2 + \sin\varphi$ $\left[\frac{51\sqrt{3}}{27}\right]$

5. Najděte délku oblouku křivky.

   (a) $y^2 = x^3$ po přímku $x = \frac{4}{3}$ $\left[\frac{112}{27}\right]$

(b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\,,\ \ a > 0$ $\quad [\,6a\,]$

(c) $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}\,,\quad 0 \le x \le b\,,\ \ a > 0$ $\quad \left[\,a\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}\,\right]$

(d) $y^2 = 2px\,,\quad 0 \le x \le x_0$ $\quad \left[2\sqrt{x_0\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)} + p\,\ln\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}\right]$

(e) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$ $\quad [\,2\,]$

(f) $x = a(t - \sin t)\,,\ y = a(1 - \cos t)\quad 0 \le t \le 2\pi$ $\quad [\,8a\,]$

(g) $x = a(\cos t + t\,\sin t)\,,\ y = a(\sin t - t\,\cos t)\,,\quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $\quad [\,2\pi^2 a\,]$

(h) $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1\,,\quad (a, b > 0)$ $\quad \left[\,\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\,\right]$

(i) $r = a(1 + \cos\varphi)$ $\quad [\,8a\,]$

(j) $r = a\varphi$ (Archimedova spirála), $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $\quad \left[\,\pi a\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\,\right]$

6. Najděte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oboru.

(a) $y = \sin x\,,\ y = 0\ \ (0 \le x \le \pi)$ kolem osy x ; kolem osy y $\quad \left[\,\frac{\pi^2}{2}\ ;\ 2\pi^2\,\right]$

(b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,,\ y = \pm b$ kolem osy x ; kolem osy y $\quad \left[\,\frac{4\pi ab^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)\ ;\ \frac{8\pi a^2 b}{3}\,\right]$

(c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ kolem osy symetrie $\quad \left[\,\frac{32\pi a^3}{105}\,\right]$

(d) $x^2 + (y - b)^2 = a^2\quad (0 < a \le b)$ kolem osy x $\quad [\,2\pi^2 a^2 b\,]$

(e) $x = a(t - \sin t)\,,\ y = a(1 - \cos t)\ ,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\ ;\ y = 0$ kolem osy x ; kolem osy y ;
kolem přímky $y = 2a$ $\quad [\,5\pi^2 a^3\ ;\ 6\pi^3 a^3\ ;\ 7\pi^2 a^3\,]$

7. Najděte obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky.

(a) $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}\,,\ \ -a \le x \le a$ kolem osy x $\quad [\,\pi a^2(\mathrm{sh}2 + 2)\,]$

(b) $4x^2 + y^2 = 4$ kolem osy x ; kolem osy y $\quad \left[\,4\pi\left(2 + \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right)\ ;\ 2\pi\left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)\,\right]$

(c) $y = x\,\sqrt{\frac{x}{a}}\,,\ \ 0 \le x \le a$ kolem osy x $\quad \left[\,\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\,\sqrt{13} + 2\,\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\,\right]$

(d) $y = \mathrm{tg}\,x\,,\ \ x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle$ kolem osy x $\quad \left[\,\pi\left\{\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right\}\,\right]$

(e) $x^2 + (y - b)^2 = a^2\,,\ \ (b \ge a > 0)$ podle osy x $\quad [\,4\pi^2 ab\,]$

(f) $x = a(t - \sin t)\,,\ y = a(1 - \cos t)\ ,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ kolem osy x ; kolem osy y ;
kolem přímky $y = 2a$ $\quad \left[\,\frac{64}{3}\pi a^2\ ;\ 16\pi^2 a^2\ ;\ \frac{32}{3}\pi a^2\,\right]$

(g) $x = a\,\cos^3 t\,,\ y = a\,\sin^3 t\ \ (a > 0)$ kolem osy x ; kolem přímky $y = x$
$\left[\,\frac{12}{5}\pi a^2\ ;\ \frac{3}{5}\pi a^2(4\sqrt{2} - 1)\,\right]$

(h) $x = a(1 + \cos\varphi)\ \ (a > 0)$ kolem polární osy $\quad \left[\,\frac{32}{5}\pi a^2\,\right]$

(i) $r^2 = a^2\cos 2\varphi\ \ (a > 0)$ kolem polární osy ; kolem osy $\varphi = \frac{\pi}{2}$; kolem osy $\varphi = \frac{\pi}{4}$
$[\,2\pi a^2(2 - \sqrt{2})\ ;\ 2\pi a^2\sqrt{2}\ ;\ 4\pi a^2\,]$