Matematická analýza 2.

Kubr Milan

21. února 2008

Obsah

Kapitola 1

Vektorové funkce jedné reálné proměnné.

1.1 Základní pojmy.

Definice: Buď $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}$ podmnožina. Zobrazení $\mathcal{I}$ do $\mathbf{R}^n$ nazýváme vektorovou funkcí jedné reálné proměnné t, definovanou na $\mathcal{I}$. Zapisujeme

$$x : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbf{R}^n ; \qquad x = x(t)\,,\ t \in \mathcal{I} ; \qquad x :\ t \longrightarrow x(t)\,,\ t \in \mathcal{I}\ .$$

Poznámka: Předchozí definice znamená, že každému $t \in \mathcal{I}$ je přiřazen jediný vektor $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. Funkce $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ budeme nazývat složky dané vektorové funkce.

Příklad: Lineární vektorová funkce je dána předpisem $x(t) = a\,t + b$, kde $a, b \in \mathbf{R}^n$ jsou pevné vektory. Neboli $x_i(t) = a_i\,t + b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jejímž geometrickým vyjádřením je přímka (polopřímka, úsečka) v $\mathbf{R}^n$ v závislosti na $t \in \mathcal{I}$.

Poznámka: Vektorové funkce lze sčítat a násobit skalární funkcí, neboli

$$z(t) = x(t) + y(t) \ \text{ znamená } \ z_i(t) = x_i(t) + y_i(t)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,;$$

$$\alpha(t)\,x(t) = (\alpha(t)\,x_1(t), \ldots, \alpha(t)\,x_n(t))\,.$$

Analogicky skalární součin vektorových funkcí je definován předpisem $(x(t), y(t)) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t)\,y_i(t)$.

Definice: Řekneme, že vektorová funkce $x(t)$ má v bodě t_0 limitu $a \in \mathbf{R}^n$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 ;\ 0 < |\,t - t_0\,| < \delta \implies \|\,x(t) - a\,\| < \varepsilon.$$

Zapisujeme $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$.

Je-li $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x(t_0)$, řekneme, že $x(t)$ je spojitá v bodě $t_0 \in \mathcal{I}$.

Věta: Platí

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a \iff \lim_{t \to t_0} x_i(t) = a_i\,;\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x(t_0) \iff \lim_{t \to t_0} x_i(t) = x_i(t_0)\,;\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Důkaz: Byl proveden v předchozí kapitole v souvislosti s konvergencí v $\mathbf{R}^n$.

Věta: Jestliže existují limity $x(t), y(t), \alpha(t)$ v bodě t_0, potom platí

1. $\lim\limits_{t\to t_0} \|x(t)\| = \| \lim\limits_{t\to t_0} x(t)\| = \|a\|$; 2. $\lim\limits_{t\to t_0} [x(t)+y(t)] = \lim\limits_{t\to t_0} x(t) + \lim\limits_{t\to t_0} y(t)$;

3. $\lim\limits_{t\to t_0} [\alpha(t)\,x(t)] = \lim\limits_{t\to t_0} \alpha(t)\cdot \lim\limits_{t\to t_0} x(t)$; 4. $\lim\limits_{t\to t_0} (x(t), y(t)) = \left(\lim\limits_{t\to t_0} x(t), \lim\limits_{t\to t_0} y(t)\right)$.

Analogická věta platí pro spojité vektorové funkce.

Definice: 1. Vektorová funkce $x = x(t)$ má v bodě $t_0 \in \mathcal{I}$ derivaci $\dot{x}(t_0)$, jestliže existuje limita

$$\dot{x}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}.$$

2. Vektorová funkce $x(t)$ je diferencovatelná v bodě $t_0 \in \mathcal{I}$, jestliže existuje konstantní vektor a a vektorová funkce $\omega(h)$ tak, že platí

$$\text{a)}\ x(t_0+h) - x(t_0) = h\cdot a + \omega(h)\,; \qquad \text{b)}\ \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

Vektorovou funkci

$$d\,x(t)|_{t=t_0} = a\cdot h = \dot{x}(t_0)\cdot h = \dot{x}(t_0)\,dt$$

nazýváme diferenciálem vektorové funkce $x(t)$ v bodě t_0.

Poznámky: 1. Platí stejná pravidla jako pro derivace a diferenciály funkcí jedné proměnné, neboli

α) $x(t)$ je diferencovatelná v bodě t_0 právě když má v bodě t_0 derivaci.

β) Je-li $x(t)$ diferencovatelná v bodě t_0, pak je v tomto bodě spojitá.

2. Je

$$\dot{x}(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))\ ; \qquad dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = (x_1'(t)\,dt, x_2'(t)\,dt, \ldots, x_n'(t))\,dt.$$

Analogicky pro vyšší derivace a diferenciály.

$$\frac{d^2x}{d\,t^2} = \ddot{x}(t) = (x_1''(t), x_2''(t), \ldots, x_n''(t))\,.$$

Věta: (O střední hodnotě)

Nechť $x(t)$ je spojitá v $\langle\alpha,\beta\rangle \subset \mathbf{R}$ a diferencovatelná v (α,β). Potom existuje bod $\xi \in (\alpha,\beta)$ tak, že

$$\|x(\beta) - x(\alpha)\| \le (\beta-\alpha)\,\|\dot{x}(\xi)\|.$$

Důkaz: Označme $\varepsilon = \frac{u}{\|u\|}$, kde $u = x(\beta) - x(\alpha)$ a uvažme funkci

$$f(t) = (x(t), \varepsilon) = \frac{1}{\|u\|} \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\,u_i.$$

Podle věty o střední hodnotě (pro funkce jedné proměnné) platí

$$f(\beta) - f(\alpha) = (\beta-\alpha)\,f'(\xi),$$

neboli

$$\| u \| = f(\beta) - f(\alpha) = \frac{1}{\| u \|} \sum_{i=1}^{n} u_i \{x_i(\beta) - x_i(\alpha)\} = \frac{\beta - \alpha}{\| u \|} \sum_{i=1}^{n} x_i'(\xi)\, u_i .$$

Tedy

$$\| u \|^2 = \| x(\beta) - x(\alpha) \|^2 = (\beta - \alpha)\, (\dot{x}(\xi), u) \leq (\beta - \alpha)\, \| u \| \cdot \| \dot{x}(\xi) \| .$$

Odtud $\| u \| \leq (\beta - \alpha) \| \dot{x}(\xi) \|$, což je tvrzení věty.

Definice: Vektorovou funkci $X(t)$ takovou, že $\dot{X}(t) = x(t)$ pro $t \in \mathcal{I}$ nazveme primitivní funkcí k $x(t)$. Je-li $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \mathcal{I}$, potom

$$X(\beta) - X(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\, dt = \left(\int_{\alpha}^{\beta} x_1(t)\, dt, \int_{\alpha}^{\beta} x_2(t)\, dt, \ldots, \int_{\alpha}^{\beta} x_n(t)\, dt \right)$$

nazveme určitým integrálem vektorové funkce $x(t)$.

1.2 Křivky v $\mathbf{R}^n$.

Definice: Zobrazení $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{R}^n$ nazýváme jednoduchou křivkou v $\mathbf{R}^n$, jestliže platí
1. γ je spojité;
2. γ je prosté, t.j. pro každou dvojici $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Je-li $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, řekneme, že γ je jednoduchá uzavřená křivka. Jednoduchou uzavřenou křivku v $\mathbf{R}^2$ nazveme Jordanovou křivkou.

O křivce γ řekneme, že je regulární nebo hladká, jestliže navíc
3. γ je spojitě diferencovatelné zobrazení v $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Jestliže existuje derivace $\dot{\gamma}$ a je spojitá v $\langle \alpha, \beta \rangle$ až na konečný počet bodů, řekneme, že γ je po částech hladká křivka.

Poznámky: 1. Křivka v $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^3$) je tedy dvojice (resp. trojice) funkcí

$$r(t) = (x(t), y(t)) \ \ [\text{resp. } r(t) = (x(t), y(t), z(t))\,] \ \ \text{pro } \ t \in \langle \alpha, \beta \rangle .$$

t nazýváme parametrem, $r(t)$ parametrickým vyjádřením.

2. Je-li $r(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ křivka, pak jsme při dané parametrizaci schopni rozlišit body na $\Gamma = \{ r(t) ; t \in \langle \alpha, \beta \rangle \}$ tím způsobem, že je-li $t_1 < t_2$, pak můžeme říci, že bod $r(t_1)$ leží před bodem $r(t_2)$, viz obrázek

neboli jsme schopni křivku Γ orientovat nebo rozlišit pohyb na křivce Γ, je-li t interpretováno jako časová proměnná.

Příklad:

$$\begin{matrix} x = \cos t \\ y = \sin t \end{matrix} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \qquad\qquad \begin{matrix} x = \sin \tau \\ y = \cos t \end{matrix} \quad \tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

jsou dvě parametrizace téže křivky $x^2 + y^2 = 1$. Jestliže vyšetříme dané parametrizace trochu podrobněji, zjistíme, že uvedené parametrizace indukují opačný pohyb na dané křivce. Tím se dostáváme k následující definici.

Definice: O dvou křivkách

$$\Gamma_1 : \ r_1 = r_1(t) \ \ t \in \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \, ; \qquad\qquad \Gamma_2 : \ r_2 = r_2(\tau) \ \ \tau \in \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$$

řekneme, že jsou si rovné, jestliže

$$\{ \, r_1(t) \, ; \, t \in \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \, \} = \{ \, r_2(\tau) \, ; \, \tau \in \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \, \}.$$

Poznámka: Předchozí příklad ukazuje dvě parametrizace téže křivky. Tyto parametrizace se však liší tím, že indukují opačné orientace. Dále není těžké ukázat, že každá křivka má nekonečně mnoho parametrizací.

Definice: Buď Γ křivka v $\mathbf{R}^n$. Jestliže jeden směr pohybu na Γ nazveme kladný a druhý záporný, řekneme, že jsme křivku Γ orientovali.

Je-li Γ Jordanova křivka v rovině, pak její kladnou orientací rozumíme pohyb na Γ proti směru hodinových ručiček a opačný směr zápornou orientací.

Poznámky: 1. Pojem pohybu proti směru hodinových ručiček není tak zcela jednoznačně určen, jak ukazuje následující obrázek

Trochu přesnější bývá lokální rozhodnutí. Pozorovatel, který se dívá ve směru kladné orientace na dané křivce, má lokálně vnitřek po levé straně a vnějšek po pravé straně. To je však založeno na tzv. Jordanově větě, což je hluboká věta z topologie roviny.

2. Explicitně zadaná křivka $y = f(x)\,;\, x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ se parametrizuje bez problémů následujícím způsobem $\quad x = t\,,\, y = f(t) \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

3. Je-li $r = r(t)\,,\, t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ hladká křivka v $\mathbf{R}^n$, potom

$$\Delta r = r(t_0 + h) - r(t_0) \ \text{ a } \ \dot r(t_0) = \left. \frac{d\, r(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$$

je tečný vektor ke křivce Γ v bodě t_0, jak je zřejmé z obrázku.

Věta: Je-li $\Gamma : \ r = r(t) \ \ t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ hladká křivka v $\mathbf{R}^n$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ bod, pak parametrické rovnice tečny ke křivce Γ v bodě t_0 mají tvar

$$X = r(t_0) + \tau\, \dot r(t_0)\, ; \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

Definice: Je-li $\Gamma : \ r = r(t)\,,\, t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ regulární křivka v $\mathbf{R}^n$, pak výraz $d\,r(t_0) = \dot r(t_0)\, dt$ nazýváme diferenciálem křivky Γ a $ds = \| \, \dot r(t_0) \, \| \, dt$ diferenciálem oblouku křivky Γ.

Věta: Je-li $\Gamma : \ r = r(t)\, ; \, t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ po částech hladká křivka v $\mathbf{R}^n$, pak pro délku s oblouku této křivky platí $s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \| \, \dot r(t) \, \| \, dt$.

Příklad: Najděte délku oblouku křivky $x = a \cos t\, ; \ \ y = a \sin t\, ; \ \ z = b\,t$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $(a, b > 0)$. Viz obrázek

Je $\| \dot{r}(t) \| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \sqrt{a^2 + b^2}$, tedy $s = \int\limits_0^{2\pi} \| \dot{r}(t) \| \, dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.3 Komplexní funkce reálné proměnné.

Definice: Komplexní funkcí reálné proměnné x rozumíme uspořádanou dvojici reálných funkcí $F(x) = (f(x), g(x))$. Funkci f budeme nazývat reálnou částí F a budeme ji značit $f = \operatorname{Re} F$, funkci g nazveme imaginární částí F a označíme $g = \operatorname{Im} F$.

Poznámky: 1. Z definice komplexní funkce plyne, že to není nic jiného, než vektorová funkce v $\mathbf{R}^2$. Platí pro ni tedy všechny věty, které byly odvozeny pro vektorové funkce.

2. Komplexní funkci můžeme psát ve tvaru $F(x) = f(x) = ig(x)$. Toto vyjádření má tu výhodu, že s ním můžeme počítat jako s komplexním číslem, což nám trochu usnadní zacházení s ní, na rozdíl od vektorové funkce jako takové.

3. Je-li $\Gamma \, : \, r = r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ křivka v $\mathbf{R}^2$, pak ji můžeme zapsat ve tvaru $z(t) = x(t) + iy(t)$, kde $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, tedy jako komplexní funkci reálné proměnné t . Jinými slovy, křivku v rovině můžeme chápat jako zobrazení $z \, : \, \langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbf{C}$. Důležitost a vhodnost tohoto vyjádření bude vidět později v souvislosti s teorií funkcí komplexní proměnné. V tomto paragrafu uvedeme jednu velmi důležitou komplexní funkci, a sice Eulerovu identitu, kterou budeme potřebovat v souvislosti s řešením diferenciálích rovnic.

Příklad: Označme $E(t) = \cos t + i \sin t$; $t \in \mathbf{R}$. Potom je $E(t)$ komplexním vyjádřením jednotkové kružnice a navíc platí

$$\frac{1}{E(t)} = \frac{1}{\cos t + i \sin t} = \cos t - i \sin t = \overline{E}(t) = E(-t) \, .$$

Dále

$$\{E(t)\}^n = (\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt = E(nt) \, ;$$

$$\dot{E}(t) = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = iE(t) \, .$$

Funkce $E(t)$ těmito vlastnostmi připomíná eponencielu, a proto zavedeme následující označení.

Označení: Funkci $E(t)$ označíme jako

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

a nazveme <u>Eulerovou identitou</u>.

Poznámka: 1. Eulerovu identitu nejsme zatím schopni přesně ověřit, to bude provedeno až v paragrafu, věnovaném mocninným řadám.

2. Jestliže si uvědomíme, že

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \, ; \quad e^{-it} = \cos t - i \sin t \, ,$$

můžeme sečtením a odečtením těchto identit vyjádřit funkce cos a sin pomocí exponenciální funkce. Platí

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \; ; \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \, .$$

Tato vyjádření připomínají opticky definici hyperbolických funkcí a položme si otázku, zda mezi nimi neexistuje hlubší souvislost. Skutečně tomu tak je, ale musíme sáhnout do komplexního oboru. Je-li $t = iu$, dostáváme

$$\cos iu = \frac{e^{-u} + e^{u}}{2} = \mathrm{ch} u \ ; \quad \sin iu = \frac{e^{-u} - e^{u}}{2i} = i\, \frac{e^{u} - e^{-u}}{2} = i\, \mathrm{sh} u\,.$$

Tedy funkce cos a sin se na imaginární ose chovají jako funkce ch a $i\,$sh na ose reálné. Analogicky

$$\mathrm{ch}\, iu = \frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} = \cos u \ ; \quad \mathrm{sh}\, iu = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2} = i\, \sin u\,.$$

3. Jestliže označíme $z = x + iy$ komplexní proměnnou, můžeme psát

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

a dostaneme překvapivou informaci, totiž, že exponenciální funkce je v komplexním oboru periodická s periodou $2\pi i$. Stejně jako v reálném oboru platí i v komplexním oboru vztahy

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \ ; \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ ; \ \mathrm{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \ ; \ \mathrm{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\,.$$

Takto bychom mohli pokračovat a definovat další funkce v komplexním oboru. Nemá to však velký smysl, poněvadž teorie funkcí komplexní proměnné se opírá o pojem derivace v komplexním oboru, což se dosti podstatně liší od pojmu derivace funkce jedné reálné proměnné, i když je formální definice stejná.

Kapitola 2

Diferenciální počet funkcí více proměnných.

2.1 Derivace a diferenciál.

Definice: Buď $f \; : \; \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ funkce, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $x^{(0)} \in \Omega$ vnitřní bod Ω. Nechť dále $s = (s_1, s_2 \ldots, s_n)$ je daný pevný vektor. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\left(x^{(0)} + ts\right) - f\left(x^{(0)}\right)}{t} \,,$$

pak tuto limitu nazveme derivací funkce f v bodě $x^{(0)}$ podle vektoru s a označíme

$$\frac{\partial\, f\left(x^{(0)}\right)}{\partial\, s} \,.$$

Je-li s jednotkový vektor ($\|s\| = 1$), pak tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě $x^{(0)}$ ve směru s.

Je-li $s = e_i$, tj. jednotkový vektor ve směru osy x_i, pak derivaci

$$\frac{\partial\, f\left(x^{(0)}\right)}{\partial\, e_i} = \frac{\partial\, f\left(x^{(0)}\right)}{\partial\, x_i}$$

nazýváme parciální derivací funkce f v bodě $x^{(0)}$ podle $i-$té proměnné nebo podle x_i.

Příklad: Najděte derivaci $\frac{\partial\, f(x,y)}{\partial\, s}$, kde $f(x,y) = \sin x^3 y^2$ a $s = (1,2)$.

Řešení: Platí

$$\frac{\partial\, f(x,y)}{\partial\, s} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y+2t) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin\left\{(x+t)^3 (y+2t)^2\right\} - \sin\left\{x^3 y^2\right\}}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{2 \sin \frac{(x+t)^3 (y+2t)^2 - x^3 y^2}{2} \cos \frac{(x+t)^3 (y+2t)^2 + x^3 y^2}{2}}{t} =$$

$$= \cos x^3 y^2 \lim_{t \to 0} \frac{\sin \frac{\left\{t(3x^2y^2 + 4x^3 y) + t^2 (4x^3 + 12 x^2 y + 3 x y^2 + \ldots)\right\}}{2}}{\frac{t}{2}} = \left(3x^2 y^2 + 4x^3 y\right) \cos x^3 y^2 \,.$$

Poznámka: Předchozí příklad ukazuje, že definice derivace podle vektoru není vhodný způsob pro její výpočet. Příslušná limita může být velmi komplikovaná. Není však žádný problém vypočítat parciální derivace dané funkce podle všech proměnných. Stačí si uvědomit, že při derivování podle proměnné x_i se ostatní proměnné chovají jako konstanty. V dalším výkladu ukážeme, že existuje velmi úzký vztah mezi parciálními derivacemi a derivací podle vektoru.

Příklad: Vypočtěte parciální derivace funkce $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Je zřejmé, že

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

Definice: Buď $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, kde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a nechť f má parciální derivace podle všech proměnných v Ω . Potom vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

nazýváme <u>gradientem</u> funkce f a značíme $\operatorname{grad} f$ nebo ∇f .

Věta: Je-li $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \in \Omega$ vnitřní bod, s pevný vektor, potom

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (s, \operatorname{grad} f)\,.$$

Důkaz: Je

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+ts)-f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{f(x_1+ts_1, x_2+ts_2, \dots, x_n+ts_n) - f(x_1, x_2+ts_2, \dots, x_n+ts_n)}{t} + \right.$$

$$+ \frac{f(x_1, x_2+ts_2, \dots, x_n+ts_n) - f(x_1, x_2, x_3+ts_3, \dots, x_n+ts_n)}{t} +$$

$$\left. + \dots + \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n+ts_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{t} \right\} = s_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + s_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + s_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\,.$$

Poznámky: 1. Důkaz předchozí věty má jednu vadu na kráse. Aby vše prošlo, musíme nejen předpokládat existenci parciálních derivací, ale též spojitost funkce f . Jak se však ukáže později, spojitost vyjde jako důsledek předpokladu diferencovatelnosti funkce f .

2. Při vyšetřování vlastností funkcí jedné proměnné hrál dominantní roli pojem derivace. Pro funkce více nezávisle proměnných je tato role nahrazena pojmem diferenciálu, se kterým se nyní seznámíme.

Definice: Buď $x^{(0)} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ vnitřní bod, $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$. Potom funkci proměnné h , definovanou předpisem

$$\triangle f\left(x^{(0)}, h\right) = f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right)$$

nazýváme <u>diferencí</u> nebo <u>přírůstkem</u> funkce f v bodě $x^{(0)}$ vzhledem k h .

Řekneme, že f je <u>diferencovatelná</u> v bodě $x^{(0)}$, jestliže existuje vektor $D = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ a funkce $\omega(h)$ tak, že

$$f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right) = (D, h) + \omega(h) \quad \text{a} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0\,.$$

Výraz
$$(D,h) = D_1 h_1 + D_2 h_2 + \cdots + D_n h_n$$
nazýváme <u>totálním diferenciálem</u> funkce f v bodě $x^{(0)}$ a značíme $d\,f\left(x^{(0)}, h\right)$. Je-li f diferencovatelná v každém bodě $x \in \Omega$, řekneme, že je diferencovatelná v Ω.

Věta: Je-li výraz (D,h) totálním diferenciálem funkce f v bodě $x^{(0)}$, potom platí
$$D_j = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_{x=x^{(0)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Důkaz: Jestliže položíme
$$h_1 = h_2 = \cdots = h_{j-1} = h_{j+1} = \cdots = h_n = 0, \quad h_j \neq 0$$
a vydělíme rovnost
$$f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right) = (D,h) + \omega(h)$$
výrazem h_j, dostaneme
$$\frac{f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right)}{h_j} = D_j + \frac{\omega(h)}{h_j}$$
a tvrzení věty odtud plyne okamžitě pro $h_j \to 0$.

Poznámky: 1. Definice totálního diferenciálu a předchozí věta ukazují, že požadavek
$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = 0$$
je natolik silný, že určuje čísla D_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ jednoznačně. Navíc ukazuje, že pokud je f diferencovatelná v bodě $x^{(0)}$, pak „podstatná část" přírůstku f je lineární, tj. právě totální diferenciál. Této vlastnosti bude v dalším využito k přibližnému výpočtu funkčních hodnot a k nalezení tečné nadroviny ke grafu funkce f.

2. Z předchozí věty též plyne, že
$$d\,f = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n = (\operatorname{grad} f, h).$$
Je-li specielně $f(x) = x_j$, dostaneme $d\,f = d\,x_j = h_j$ a v dalším budeme většinou používat pro totální diferenciál následujícího označení (i když ne zcela přesného)
$$d\,f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = (\nabla f, dx).$$

3. Definice totálního diferenciálu funkce f dává návod k přibližnému výpočtu funkčních hodnot, jestliže využijeme skutečnosti, že podstatnou část přírůstku funkce tvoří totální diferenciál. Platí totiž přibližná formule
$$f\left(x^{(0)} + h\right) \doteq f\left(x^{(0)}\right) + d\,f\left(x^{(0)}\right).$$

Důsledek: Je-li f diferencovatelná v bodě $x^{(0)}$, pak je v tomto bodě spojitá.

Důkaz: Plyne okamžitě z vyjádření $f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right) = d\,f(x^{(0)}) + \omega(h)$.

Příklad: Vypočtěte přibližně $(1,04)^{2,02}$.

Řešení: Uvažme funkci

$$f(x,y) = x^y\,,\;\; x^{(0)} = [x_0, y_0] = [1,2]\,,\;\; h = (h_1, h_2) = (0,04\,;\,0,02)\,.$$

Potom platí

$$(1,04)^{2,02} = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \doteq f(x_0, y_0) + d\,f(x_0, y_0)\,.$$

Poněvadž je

$$f(x_0, y_0) = 1\,, \quad \frac{\partial\, f}{\partial\, x} = y\,x^{y-1}\,, \quad \frac{\partial\, f}{\partial\, y} = x^y \ln x\,, \quad d\,f(x_0, y_0) = 2 \cdot 0,04 + 0 \cdot 0,02\,,$$

dostaneme odtud, že $(1,04)^{2,02} \doteq 1,08$. Přesnější hodnota je $1,082\,448\,755$.

2.2 Vlastnosti diferencovatelných funkcí.

Věta: Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial\, f}{\partial\, x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ spojité v bodě $x^{(0)}$, má f v tomto bodě totální diferenciál.

Důkaz: Podle věty o střední hodnotě platí

$$f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right) =$$

$$= f\left(x_1^{(0)} + h_1, x_2^{(0)} + h_2, \ldots, x_n^{(0)} + h_n\right) - f\left(x_1^{(0)} + h_1, \ldots, x_{n-1}^{(0)} + h_{n-1}, x_n^{(0)}\right) +$$

$$+ f\left(x_1^{(0)} + h_1, \ldots, x_{n-1}^{(0)} + h_{n-1}, x_n^{(0)}\right) - f\left(x_1^{(0)} + h_1, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}\right) +$$

$$+ \cdots + f\left(x_1^{(0)} + h_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) - f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) =$$

$$= \frac{\partial\, f\left(x_1^{(0)} + h_1, \ldots, x_{n-1}^{(0)} + h_{n-1}, x_n^{(0)} + \vartheta_n h_n\right)}{\partial\, x_n} h_n + \cdots + \frac{\partial\, f\left(x_1^{(0)} + \vartheta_1 h_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)}{\partial\, x_1} h_1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} h_j\, \frac{\partial\, f\left(\xi^{(j)}\right)}{\partial\, x_j}\,.$$

Ze spojitosti parciálních derivací $\frac{\partial\, f}{\partial\, x_j}$ v bodě $x^{(0)}$ plyne, že

$$\frac{\partial\, f\left(\xi^{(j)}\right)}{\partial\, x_j} = \left.\frac{\partial\, f}{\partial\, x_j}\right|_{x = x^{(0)}} + \omega_j(h)\,, \quad \text{kde} \quad \omega_j(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Tedy

$$f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\, f\left(x^{(0)}\right)}{\partial\, x_j}\, h_j + \sum_{j=1}^{n} h_j\, \omega_j(h)\,.$$

Poněvadž platí $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{\|\, h\,\|} = 0$, kde $\omega(h) = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j\, \omega_j(h)$, plyne odtud tvrzení věty.

Věta: Je-li $\frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial z}$ derivace f v bodě $x^{(0)}$ ve směru gradientu, potom

$$\left| \frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial z} \right| = \max_s \left| \frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial s} \right| ,$$

kde s je libovolný jednotkový vektor.

Důkaz: Je $\frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial s} = \left(s, \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)\right)$ a pro $z = \frac{\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)}{\left\|\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)\right\|}$ platí

$$\left| \frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial z} \right| = \left\| \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) \right\| .$$

Na druhé straně z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti plyne, že

$$\left\| \left(s, \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)\right) \right\| \leq \| s \| \left\| \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) \right\| = \left\| \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) \right\| .$$

Poznámka: V dalším si všimneme otázky existence tečné nadroviny ke grafu funkce

$$y = f(x) , \quad \text{tj.} \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

Pro $n = 1$ dostaneme známý výsledek $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, tedy rovnici tečny. Pro obecné n zavedeme pojem tzv. nadroviny. Vzhledem k tomu, že grafem funkce n proměnných $y = f(x)$ je podmnožina $\mathbf{R}^{n+1}$, budeme odpovídající nadrovinou rozumět lineární funkci

$$y = D_1 x_1 + D_2 x_2 + \cdots + D_n x_n + D_0 .$$

Definice: Buď dána funkce n proměnných f a bod $x^{(0)}$. Řekneme, že nadrovina

$$y = D_1 x_1 + D_2 x_2 + \cdots + D_n x_n + D_0$$

je tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $\left[\, x^{(0)} , f\left(x^{(0)}\right) \right]$, jestliže platí

$$f(x) - [D_1 x_1 + D_2 x_2 + \cdots + D_n x_n + D_0] = \omega\left(x - x^{(0)}\right) , \quad \text{kde} \quad \lim_{x \to x^{(0)}} \frac{\omega\left(x - x^{(0)}\right)}{\left\| x - x^{(0)} \right\|} = 0 = \omega(0) .$$

Věta: Funkce f má v bodě $x^{(0)}$ totální diferenciál právě když v bodě $\left[\, x^{(0)} , f\left(x^{(0)}\right) \right]$ existuje tečná nadrovina. Rovnice této nadroviny je

$$y = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_j} \left(x_j - x_j^{(0)}\right) + f\left(x^{(0)}\right) .$$

Normála v tomto bodě má kanonické rovnice

$$\frac{x_1 - x_1^{(0)}}{\frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_1}} = \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{\frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_2}} = \cdots = \frac{x_n - x_n^{(0)}}{\frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_n}} = \frac{y - f\left(x^{(0)}\right)}{-1} .$$

Důkaz: Je zřejmé, že

$$f\left(x^{(0)}\right) = D_1 x_1^{(0)} + D_2 x_2^{(0)} + \cdots + D_n x_n^{(0)} + D_0\,.$$

Jestliže tuto identitu odečteme od rovnice nadroviny, dostaneme, že tečná nadrovina má tvar

$$y - f\left(x^{(0)}\right) = D_1\left(x_1 - x_1^{(0)}\right) + D_2\left(x_2 - x_2^{(0)}\right) + \cdots + D_n\left(x_n - x_n^{(0)}\right).$$

Podle předchozí definice nyní dostaneme, že

$$f(x) - f\left(x^{(0)}\right) = D_1\left(x_1 - x_1^{(0)}\right) + D_2\left(x_2 - x_2^{(0)}\right) + \cdots + D_n\left(x_n - x_n^{(0)}\right) + \omega\left(x - x^{(0)}\right)\,.$$

To je však příslušná ekvivalence totálního diferenciálu a existence tečné nadroviny. Navíc z vyjádření totálního diferenciálu plyne, že $D_j = \frac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_j}$. Kanonické rovnice normály plynou okamžitě z vyjádření tečné nadroviny.

Poznámky: 1. Předchozí věta ukazuje dva možné přístupy k pojmu diferencovatelnosti funkce. Analytický pomocí definice totálního diferenciálu, nebo geometrický pomocí tečné nadroviny.

2. Je-li $z = f(x,y)$ funkce dvou proměnných, nebo chcete-li plocha v $\mathbf{R}^3$, $[x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ dotykový bod, pak má tečná rovina tvar

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0)\,.$$

Příklad: Najděte rovnici tečné roviny a normály k ploše $z = \sqrt{x^2+y^2} - xy$ v bodě $[3,4,?]$.

Řešení: Po dosazení $x = 3$, $y = 4$ dostaneme, že dotykový bod je $T[3,4,-7]$. Dále

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\,, \quad \frac{\partial z(3,4)}{\partial x} = -\frac{17}{5}\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - x\,, \quad \frac{\partial z(3,4)}{\partial y} = -\frac{11}{5}\,,$$

tedy tečná rovina má tvar $z + 7 = -\frac{17}{5}(x-3) - \frac{11}{5}(y-4)$ a po jednoduché úpravě dostaneme

$$17x + 11y + 5z - 60 = 0\,, \qquad \frac{x-3}{17} = \frac{y-4}{11} = \frac{z+7}{5}\,.$$

Poznámka: V další výkladu si všimneme problematiky výpočtu parciálních derivací složených funkcí. Je-li $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkce n proměnných a $x_j = x_j(t_1, t_2, \ldots, t_r)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ je výsledně f funkcí r proměnných $t_1, t_2, \ldots, t_r$. Pokusíme se odpovědět na otázku, jak vypadají parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial t_k}$ pro $k = 1, 2, \ldots, r$. Překvapivě jednodušší problém je nalézt totální diferenciál této složené funkce. Můžeme psát

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\,dx_j = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial t_r}dt_r\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2 + \cdots + \frac{\partial x_2}{\partial t_r}dt_r\right) +$$

$$+ \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial x_n}{\partial t_2}dt_2 + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial t_r}dt_r\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}\right) dt_1 +$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2}\right) dt_2 + \cdots +$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_r} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_r} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_r}\right) dt_r \,.$$

Poněvadž totální diferenciál funkce f jako funkce proměnných $t_1, t_2, \ldots, t_r$ má za koeficienty parciální derivace podle příslušných proměnných, dostaneme okamžitě větu pro výpočet parciálních derivací složené funkce.

Věta: Buď f funkce n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která má v otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ spojité parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných. Nechť $x_j = \varphi_j(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ jsou funkce r proměnných se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu podle všech proměnných v otevřené množině $A \subset \mathbf{R}^r$. Označme

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_r) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \,.$$

Potom má funkce F parciální derivace podle všech proměnných v množině A a platí

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \qquad k = 1, 2, \ldots, r \,.$$

Důkaz: Plyne okamžitě z předchozí poznámky.

Poznámky: 1. Předchozí věta je poměrně dlouhá, ale má tu výhodu, že je přesná. Jestliže nebude hrozit nebezpečí nesrozumitelnosti, budeme používat zkráceného označení

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)\,,\ x_j = x_j(t_1, \ldots, t_r)\,, \quad \text{pak} \quad \frac{\partial z}{\partial t_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_k} \qquad k = 1, 2, \ldots, r \,.$$

2. Často se však vyskytuje případ funkce n proměnných

$$z = f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \quad (p + q = n)\,, \quad \text{kde} \quad y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_p) \quad j = 1, 2, \ldots, q \,.$$

Definujeme-li funkci F předpisem

$$F(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_p, \varphi_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \varphi_q(x_1 \ldots, x_p)) \,,$$

pak platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial f}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_k} \quad k = 1, \ldots, p \,.$$

Jestliže však použijeme zkráceného zápisu z předchozí poznámky, dostaneme nesrozumitelný symbol

$$z = f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial z}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{q} \frac{\partial z}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_k} \quad k = 1, \ldots, p \,.$$

3. Důležité jsou specielní případy, kdy n a r nabývají některé z hodnot 1,2,3, po případě 4. Je-li na příklad $n = r = 1$, dostaneme známý vzorec pro derivaci složené funkce $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$.

V dalším se budeme setkávat nejčastěji s případem $n = r = 2$ a pro ilustraci tyto vzorce uvedeme. Je-li

$$z = f(x,y)\,,\ \ x = x(u,v)\,,\ y = y(u,v)\,,\quad \text{potom}\quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\,.$$

Vyplatí se vypsat si i některé další možnosti.

Příklad: Ukažte, že funkce $z = y \cdot f\left(x^2 - y^2\right)$, kde f je libovolná diferencovatelná funkce, vyhovuje rovnici

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xz\,.$$

Řešení: Funkci $f\left(x^2 - y^2\right)$ musíme derivovat jako složenou funkci, což ukazuje, že máme případ $n = 1$, $r = 2$. Jestliže označíme

$$u = x^2 - y^2\,,\quad \text{je}\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\,f'(u)\,,\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = -2y\,f'(u)\,,$$

dostaneme po dosazení do dané rovnice

$$2xy^3\,f'\left(x^2 - y^2\right) + xyf\left(x^2 - y^2\right) - 2xy^3\,f'\left(x^2 - y^2\right) = xz\,.$$

2.3 Derivace a diferenciály vyšších řádů.

Poznámka: Jestliže máme dánu funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a vypočteme na příklad parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, dostáváme opět funkce n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, které mohou mít po případě parciální derivace podle proměnných x_1, x_2 . Tím dostaneme parciální derivace 2. řádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\,.$$

Položme si nyní otázku, zda je důležité pořadí, ve kterém derivujeme, nebo zda záleží jen na tom, podle kterých proměnných se derivuje. Odpověď je dána v následující větě.

Věta: Buď f funkce n proměnných $(n > 1)$ a nechť existují parciální derivace

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\ f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

v jistém okolí bodu $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Předpokládejme, že $f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}$ je spojitá v bodě a . Potom je v bodě a definována i $f_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}$ a platí $f_{12}(a) = f_{21}(a)$.

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $n = 2$. Máme ukázat, že

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{f_2(a_1 + h, a_2) - f_2(a_1, a_2)\right\} = f_{12}(a)\,.$$

Z existence prvých derivací v okolí bodu a plyne, že výraz za limitou můžeme psát ve tvaru

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{hk}\left\{f(a_1 + h, a_2 + k) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + k) + f(a_1, a_2)\right\} = \lim_{k\to 0} F(h,k)\,.$$

Máme nyní ukázat, že

$$\lim_{h\to 0}\left\{\lim_{k\to 0} F(h,k)\right\} = f_{12}(a)\,.$$

Poněvadž vnitřní limita existuje, stačí pouze ukázat, že existuje dvojná limita

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} F(h,k) = f_{12}(a)\,.$$

Položme nyní $\varphi(x_1) = f(x_1, a_2+k) - f(x_1, a_2)$. Podle věty o střední hodnotě platí

$$F(h,k) = \frac{1}{hk}\left\{\varphi(a_1+h) - \varphi(a_1)\right\} = \frac{1}{k}\,\varphi'(a_1+\vartheta_1 h) =$$

$$= \frac{1}{k}\left\{f_1(a_1+\vartheta_1 h, a_2+k) - f_1(a_1+\vartheta_1 h, a_2)\right\} = f_{12}(a_1+\vartheta_1 h, a_2+\vartheta_2 k)\,,\ \text{ kde } 0<\vartheta_1,\vartheta_2<1\,.$$

Dané tvrzení plyne nyní ze spojitosti druhé parciální derivace f_{12} v bodě a .

Poznámka: Jestliže f_{12} není spojitá v bodě a , může být $f_{12}(a) \neq f_{21}(a)$, jak ukazuje následující příklad.

Příklad: Buď

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{pro } |x| \geq |y|\,, \\ 0 & \text{pro } |x| < |y|\,. \end{cases}$$

Pro $y \neq 0$ je

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = 0\,; \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0\,.$$

Pro $x \neq 0$ platí

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = x\,; \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$$

a tedy

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\,\partial y} = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left\{\frac{\partial f(0,k)}{\partial x} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right\} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\,\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\partial f(h,0)}{\partial y} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right\} = 1\,.$$

Poznámka: Předchozí větu lze snadno rozšířit na případ parciálních derivací vyšších řádů. Jednoduchý důkaz indukcí dává

Důsledek: Buď $k \geq 2$ celé. Parciální derivace funkce f až do řádu $k-1$ nechť jsou záměnné v jistém okolí $\mathcal{U}$ bodu $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$. Předpokládejme, že parciální derivace $f_{j_1,\dots,j_k}$ je spojitá v bodě $x^{(0)}$. Buď $l_1,\dots,l_k$ libovolná permutace čísel $j_1,\dots,j_k$. Potom existuje i $f_{l_1,\dots,l_k}$ v bodě $x^{(0)}$ a platí

$$f_{l_1,\dots,l_k}\left(x^{(0)}\right) = f_{j_1,\dots,j_k}\left(x^{(0)}\right)\,.$$

Poznámka: Jestliže uvážíme totální diferenciál funkce f n proměnných

$$df(x,h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,h_n\,,$$

je to funkce $2n$ proměnných (x, h). Jestliže však budeme předpokládat, že přírůstek h zůstává konstantní, dostaneme funkci n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a můžeme se opět zeptat, zda tato funkce má totální diferenciál. Tím se dostaneme k definici totálního diferenciálu druhého řádu a následně k pojmu $k-$tého diferenciálu.

Definice: Nechť má funkce f totální diferenciál $df(x, h) = (h, \operatorname{grad} f)$ vzhledem k přírůstku h v jistém okolí $\mathcal{U}$ bodu $x^{(0)}$. Diferenciál funkce $df(x, h)$ v bodě $x^{(0)}$ opět vzhledem k h nazýváme druhým diferenciálem funkce f v bodě $x^{(0)}$ a značíme $d^2 f\left(x^{(0)}, h\right)$.

Diferenciál $k-$tého řádu definujeme rekurentně

$$d^k f(x, h) = d\left(d^{k-1} f(x, h)\right).$$

Poznámky: 1. Platí

$$d^2 f = d(df) = \frac{\partial(df)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial(df)}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial(df)}{\partial x_n} h_n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} h_j^2 + 2 \sum_{i=1; i<j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} h_i h_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right)^2 f.$$

Na druhé straně

$$d^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} h_i h_j = (Hh, h), \quad \text{kde}$$

$$H = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, & \ldots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_n}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{matrix} \right\|.$$

Toto vyjádření ukazuje, že druhý diferenciál je kvadratická forma v proměnných $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

2. Z předchozí poznámky dostaneme okamžitě indukcí, že

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n\right)^k f.$$

To je sice elegantní vyjádření, ale při praktickém výpočtu budeme potřebovat tzv. polynomickou větu, abychom byli schopni vyjádřit příslušnou $k-$tou mocninu. Platí

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0 \\ i_1 + \cdots + i_n = k}} \frac{k!}{i_1! \, i_2! \, \ldots \, i_n!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n}.$$

Nejčastěji se však vyskytuje případ $n = 2$, kde platí

$$d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2\right)^k f = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-i} \, \partial x_2^i} h_1^{k-i} h_2^i$$

podle známé binomické věty.

3. Pomocí diferenciálů vyšších řádů můžeme odvodit Taylorův vzorec pro funkce n proměnných.

Věta: (Taylorova)
Buď $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ a nechť má v okolí $\mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \subset \Omega$ bodu $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ diferenciál řádu $k+1$. Nechť $h \in \mathbf{R}^n$ je takové, že $x^{(0)} + h \in \mathcal{U}\left(x^{(0)}\right)$. Potom existuje $\vartheta\,(0 < \vartheta < 1)$ tak, že

$$f\left(x^{(0)} + h\right) - f\left(x^{(0)}\right) = \frac{1}{1!}df\left(x^{(0)}, h\right) + \frac{1}{2!}d^2 f\left(x^{(0)}, h\right) + \cdots + \frac{1}{k!}d^k f\left(x^{(0)}, h\right) +$$

$$+\frac{1}{(k+1)!}d^{k+1} f\left(x^{(0)} + \vartheta h, h\right).$$

Důkaz: Označme $F(t) = f\left(x^{(0)} + th\right)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$. Podle Taylorovy věty pro funkce jedné proměnné platí

$$F(1) - F(0) = \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{1}{k!}F^{(k)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\vartheta).$$

Výpočtem těchto derivací dostaneme nyní výsledek.

Příklad: Najděte Taylorův polynom 3. stupně funkce $z = x^y$ v okolí bodu $(1,1)$. Výsledku užijte k přibližnému výpočtu $1,1^{1,02}$.

Řešení: V předchozí větě položíme $n = 2$. Dále je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1};\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3};\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = yx^{y-1}\ln^2 x + 2x^{y-1}\ln x;\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = x^y \ln^3 x.$$

Nyní platí

$$\frac{\partial z(1,1)}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial z(1,1)}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x^2} = 0;\ \frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x\,\partial y} = 1;\ \frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z(1,1)}{\partial x^3} = 0;\ \frac{\partial^3 z(1,1)}{\partial^2 x\,\partial y} = 1;\ \frac{\partial^3 z(1,1)}{\partial x\,\partial^2 y} = 0;\ \frac{\partial^3 z(1,1)}{\partial y^3} = 0$$

a odtud dostaneme, že hledaný Taylorův polynom má tvar

$$P(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}\{\,2(x-1)(y-1)\} + \frac{1}{3!}\{\,3(x-1)^2(y-1)\}.$$

Daná hodnota je nyní $1,1^{1,02} \doteq P(1,1\,;\,1,02) = 1,1021$, zatímco přesnější hodnota je $1,102\,098\,82$.

Poznámky: 1. V závěru tohoto paragrafu se vrátíme znovu ke vzorcům pro výpočet parciálních derivací složených funkcí. Je-li

$$y = f(x_1, \ldots, x_n), \quad x_j = \varphi_j(t_1, \ldots, t_r), \quad F(t_1, \ldots, t_r) = f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right),$$

potom

$$\frac{\partial F}{\partial t_i} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t_i} \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Jestliže budeme předpokládat spojitost všech parciálních derivací druhého řádu, tedy jejich záměnnost, dostaneme použitím předchoího návodu

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_i\,\partial t_j} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\,\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t_i}\,\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t_j} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial t_i\,\partial t_j} \qquad i,j = 1,\dots,r\,.$$

Tímto způsobem můžeme pokračovat dále a vypočítat parciální derivace 3. řádu.

2. Při použití těchto vzorců se nejčastěji vyskytuje případ $n = r = 2$. Je-li tedy

$$y = f(x_1,x_2)\,,\ x_1 = x_1(t_1,t_2)\,,\ x_2 = x_2(t_1,t_2)\,,$$

pak

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\,; \qquad \frac{\partial f}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\frac{\partial x_2}{\partial t_2}$$

a tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\,\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_1^2}\,.$$

Analogicky pro $\frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}$. Pro smíšenou derivaci platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_1\,\partial t_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\,\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \frac{\partial x_2}{\partial t_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial t_2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\,\frac{\partial x_2}{\partial t_2} +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1\,\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_1\,\partial t_2}\,.$$

Příklad: Zavedením nových nezávisle proměnných $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$ transformujte rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,.$$

Řešení: Ze zadání je vidět, že funkce z je složena následujícím způsobem

$$z = z(u,v)\,, \quad u = u(x,y)\,, \quad v = v(x,y)\,.$$

Tedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} = y\,\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v}\,; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} = x\,\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

Pro druhé derivace dostaneme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} =$$
$$= y^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{y^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

a analogicky

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\,\frac{x^2}{y^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{x^2}{y^4}\,\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{x}{y^3}\,\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

Po dosazení do původní rovnice a lednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2xy}\frac{\partial z}{\partial v} = 0\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0\,.$$

Až se naučíme řešit diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými, ukáže se, že jsme schopni tuto rovnici úplně řešit.

2.4 Řešitelnost funkcionálních rovnic.

Poznámka: V tomto paragrafu si položíme otázku řešitelnosti rovnice

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0\,,$$

kde F je daná funkce $n+1$ proměnných. Z této rovnice se pokusíme vypočítat y jako funkci proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tento úkol se nemusí vždy zdařit a pokud se podaří, nemusí být dané řešení jediné. Dúležité bude také to zda budeme hledat globální řešení nebo jenom lokální řešení, tedy řešení v jistém okolí bodu $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y^{(0)}\right)$.

Příklad: Rovnice $y^2-(x^2-1)^2 = 0$ má v $\mathbf{R}$ 8 spojitých řešení a nekonečně mnoho nespojitých řešení.

Důkaz: Jestliže si načrtneme množinu všech bodů, které vyhovují rovnici $y^2 - (x^2-1)^2 = 0$, viz obrázek

je vidět, že hledaná spojitá řešení mají tvar

$$\begin{array}{lllllll}
1. & y = x^2-1 & \text{pro} & x \in \mathbf{R}\,, & & & \\
2. & y = x^2-1 & \text{pro} & x \in (-\infty, 1\rangle\,; & y = 1-x^2 & \text{pro} & x \in (1, +\infty)\,, \\
3. & y = x^2-1 & \text{pro} & |x| \geq 1\,; & y = 1-x^2 & \text{pro} & x \in (-1, 1)\,, \\
4. & y = x^2-1 & \text{pro} & x \in (-\infty, -1\rangle\,; & y = 1-x^2 & \text{pro} & x \in (-1, +\infty)\,, \\
5. & y = 1-x^2 & \text{pro} & x \in \mathbf{R}\,, & & & \\
6. & y = 1-x^2 & \text{pro} & x \in (-\infty, 1\rangle\,; & y = x^2-1 & \text{pro} & x \in (1, +\infty)\,, \\
7. & y = 1-x^2 & \text{pro} & |x| \geq 1\,; & y = x^2-1 & \text{pro} & x \in (-1, 1)\,, \\
8. & y = 1-x^2 & \text{pro} & x \in (-\infty, -1\rangle\,; & y = x^2-1 & \text{pro} & x \in (-1, +\infty)\,.
\end{array}$$

Nespojitá řešení mají na příklad tvar

$$y = x^2-1 \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, t\rangle\,; \qquad y = 1-x^2 \quad \text{pro} \quad x \in (t, +\infty)\,, \quad \text{kde} \quad t \in \mathbf{R}\,,\, t \neq \pm 1\,.$$

Definice: Buď $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ funkce $n+1$ proměnných a uvažujeme rovnici $F(x, y) = 0$. Funkci $y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ nazveme na Ω řešením této rovnice, jestliže pro všechna $x \in \Omega$ platí $F(x, f(x)) = 0$.

Jestliže pro všechna $x \in \mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \subset \mathbf{R}^n$ je $F(x, f(x)) = 0$, pak $y = f(x)$ nazveme lokálním řešením dané rovnice.

Poznámka: V dalším si položíme několik otázek:
a) Jak zaručit existenci řešení?
b) Jak zaručit existenci jediného řešení?
c) Jaké vlastnosti dané řešení má?

Věta: (Globální řešitelnost)
Buď funkce $F(x, y)$ definována na množině $\Omega \times \langle a, b\rangle \subset \mathbf{R}^{n+1}$ a předpokládejme, že pro každé pevné $x \in \Omega$ je spojitá v proměnné y . Jestliže $F(x, a)\, F(x, b) \leq 0 \;\; \forall\, x \in \Omega$, pak existuje alespoň jedna funkce $y = f(x)$, definovaná na Ω tak, že $F(x, f(x)) = 0 \;\; \forall\, x \in \Omega$.

Důkaz: Označme $h(y) = F(x,y)$ pro $x \in \Omega$ pevné. Podle předpokladu je h spojitá funkce a platí $h(a)\,h(b) \leq 0$. Existuje tedy $\overline{y}$ (závislé na x) tak, že $h(\overline{y}) = 0$, neboli $F(x,\overline{y}) = 0$. Tím dostaneme funkci $\overline{y} = f(x)$, $x \in \Omega$, pro niž platí $F(x, f(x)) = 0 \ \forall\, x \in \Omega$.

Poznámka: Tato věta zaručuje existenci řešení, nikoliv však jednoznačnost. Jednoznačnost globálního řešení bývá též málokdy splněna. Tu však bývá možné zaručit při hledání lokálního řešení.

Věta: (Lokální řešitelnost)
Buď $F(x,y) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ funkce, která má spojité parciální derivace až do řádu k–tého v jistém okolí bodu $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ a nechť

$$F\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial F\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)}{\partial y} \neq 0\,.$$

Potom platí
1. Existuje okolí $\mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \subset \mathbf{R}^n$ bodu $x^{(0)}$ a funkce $y = f(x)$, která je jediným řešením rovnice $F(x,y) = 0$ na $\mathcal{U}$, tj.

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{U}\,.$$

2. Funkce $y = f(x)$ má spojité parciální derivace až do řádu k–tého pro $x \in \mathcal{U}$.

Důkaz: 1. Z předpokladu $\frac{\partial F\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)}{\partial y} \neq 0$ plyne, že na příklad platí $F_y\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) > 0$. Poněvadž je F_y spojitá, existuje okolí $\mathcal{V}\left(x^{(0)}\right)$ bodu $x^{(0)}$ a $\delta > 0$ tak, že

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} > 0 \quad \text{pro} \quad x \in \mathcal{V}\left(x^{(0)}\right)\,,\ y \in \left(y^{(0)} - \delta, y^{(0)} + \delta\right)\,.$$

Pro každé $x \in \mathcal{V}\left(x^{(0)}\right)$ je $F(x,y)$ rostoucí funkce y pro $y \in \left(y^{(0)} - \delta, y^{(0)} + \delta\right)$. Zvolme $y_1, y_2 \in \left(y^{(0)} - \delta, y^{(0)} + \delta\right)$ tak, aby bylo $y_1 < y^{(0)} < y_2$. Poněvadž je

$$F\left(x^{(0)}, y_1\right) < 0 \quad \text{a} \quad F\left(x^{(0)}, y_2\right) > 0\,,$$

pak ze spojitosti F plyne též, že $F(x, y_1) < 0$, $F(x, y_2) > 0$ pro x z jistého okolí bodu $x^{(0)}$ a buď toto okolí $\mathcal{V}\left(x^{(0)}\right)$. Nyní použijeme pro $x \in \mathcal{V}\left(x^{(0)}\right)$ předchozí větu a tedy existuje $\overline{y}$ takové, že $y_1 < \overline{y} < y_2$ a $F(x, \overline{y}) = 0$, neboli $F(x, \overline{y}(x)) = 0$. Takové $\overline{y}$ existuje jediné, poněvadž $F(x,y)$ je rostoucí vzhledem k y. Tím dostáváme funkci $\overline{y} = f(x)$, pro niž platí

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{V}\left(x^{(0)}\right)\,.$$

2. Druhou část důkazu nebudeme provádět detailně, ukážeme spíše metodu výpočtu parciálních derivací. Je $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$. Jestliže tuto rovnost zderivujeme, dostaneme podle vzorce pro parciální derivace složených funkcí ($n \to n+1\,,\ r \to n$)

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0$$

a poněvadž $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_i} = 0$ pro $\alpha \neq i$ a $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_i} = 1$ pro $\alpha = i$, dostaneme odtud

$$(*) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Odtud

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Podle předpokladu je $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, tedy si můžeme předchozí úpravu dovolit. Jestliže v rovnosti $(*)$ pokračujeme v derivování podle $j-$té proměnné, dostaneme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_j\, \partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial x_i}\,\frac{\partial y}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x_i\, \partial x_j} = 0 \quad i, j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Z této rovnice je možno vypočítat druhé parciální derivace, vzhledem k tomu, že koeficient u těchto derivací je opět $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Tímto způsobem můžeme pokračovat dále při výpočtu parciálních derivací vyšších řádů.

Definice: Funkci $y = f(x)$, která je řešením rovnice $F(x, y) = 0$, nazýváme implicitní funkcí nebo funkcí danou implicitně.

Příklady: 1. Buď F funkce dvou proměnných a uvažme rovnici $F(x, y) = 0$. Potom je

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

a je-li $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}\,.$$

Jestliže pokračujeme v derivování, dostaneme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{d^2 y}{dx^2} = 0\,.$$

Z této rovnice dostaneme po jednoduchém výpočtu

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{F_y^3}\,.$$

2. Buď $F(x, y, z) = 0$ plocha v $\mathbf{R}^3$. Potom má tečná rovina a normála dané plochy v bodě (x_0, y_0, z_0) tvar

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0\,;$$

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}}\,.$$

Důkaz: Jestliže budeme na příklad předpokládat, že $\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$, můžeme z považovat za funkci x a y (implicitní) a platí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\,.$$

Tečná rovina má nyní tvar

$$z - z_0 = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

a po dosazení a jednoduché úpravě dostaneme výsledek. Vyjádření pro normálu je zřejmé.

Poznámky: 1. Jestliže se vrátíme k úvodnímu příkladu řešení rovnice $y^2 - (x^2-1)^2 = 0$, je $F(x,y) = y^2 - (x^2-1)^2$, tedy $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$ a pro $y = 0$ dostaneme body $(-1,0)$ a $(1,0)$, v jejichž okolí nelze danou rovnici jednoznačně řešit. To je však vidět též z obrázku. Pro $y \neq 0$ takové řešení (lokální) vždy existuje.

2. V aplikacích se setkáváme s případy, kdy

$$F(x,y) = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,,$$

po případě

$$F(x,y,z) = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0\,.$$

V takových bodech neexistuje tečná nadrovina a takové body se nazývají singulárníni body dané křivky $F(x,y) = 0$ nebo plochy $F(x,y,z) = 0$.

Kapitola 3

Optimalizace v $\mathbf{R}^n$.

3.1 Lokální a globální extrémy.

Definice: Buď f funkce, definovaná na množině $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že číslo $f\left(x^{(0)}\right)$ je lokálním minimem (resp. lokálním maximem) funkce f na množině Ω, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}\left(x^{(0)}\right)$ bodu $x^{(0)}$ takové, že

$$f\left(x^{(0)}\right) \le f(x)\,, \quad \left[\text{resp.} \quad f\left(x^{(0)}\right) \ge f(x)\right] \quad \forall\, x \in \mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \cap \Omega\,.$$

Pokud pro $x \in \mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \cap \Omega\,,\ x \ne \left(x^{(0)}\right)$ platí ostré nerovnosti, řekneme, že f má v bodě $\left(x^{(0)}\right)$ ostré lokální minimum (resp. ostré lokální maximum) na množině Ω. Zapisujeme

$$f\left(x^{(0)}\right) = \min_{x \in \mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \cap \Omega} f(x)\,, \qquad \left[\text{resp.} \quad f\left(x^{(0)}\right) = \max_{x \in \mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \cap \Omega} f(x)\right].$$

Řekneme, že $f\left(x^{(0)}\right)$ je globálním minimem (resp. globálním maximem) funkce f na množině Ω, jestliže platí

$$f\left(x^{(0)}\right) \le f(x)\,, \qquad \left[\text{resp.} \quad f\left(x^{(0)}\right) \ge f(x)\right] \quad \forall\, x \in \Omega\,.$$

Píšeme

$$f\left(x^{(0)}\right) = \min_{x \in \Omega} f(x)\,, \qquad \left[\text{resp.} \quad f\left(x^{(0)}\right) = \max_{x \in \Omega} f(x)\right].$$

Věta: (Nutná podmínka existence extrému)
Nechť má funkce $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ ve vnitřním bodě $x^{(0)} \in \Omega$ lokální extrém a je v tomto bodě diferencovatelná. Potom

$$d\,f\left(x^{(0)}, h\right) = 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n\,, \qquad \text{resp.} \quad \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) = 0\,.$$

Důkaz: Nechť $d\,f\left(x^{(0)}, h\right) > 0$ pro nějaké $h \in \mathbf{R}^n$, $h \ne 0$. Položíme-li $h = \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) \ne 0$, pak

$$(h, \nabla f) = d\,f\left(x^{(0)}, h\right) = \left\| \operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) \right\|^2 > 0\,.$$

Poněvadž je

$$(h, \operatorname{grad} f(x)) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x^{(0)} + th\right) - f\left(x^{(0)}\right)}{t} > 0\,,$$

plyne odtud nerovnost $f\left(x^{(0)}+th\right)-f\left(x^{(0)}\right)>0$ pro $t>0$ a bod $x^{(0)}$ nemůže být bodem maxima f. Analogicky se provede důkaz pro minimum.

Definice: Bod $x^{(0)}$, pro nějž je grad $f\left(x^{(0)}\right)=0$, nazýváme stacionární bod diferencovatelné funkce f.

Věta: (Postačující podmínky pro extrém)
Nechť je funkce $f:\Omega\longrightarrow\mathbf{R}$, $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ dvakrát diferencovatelná ve vnitřním bodě $x^{(0)}\in\Omega$ a předpokládejme, že

$$d\,f\left(x^{(0)},h\right)=0\ \ \forall\,h\in\mathbf{R}^n\,.$$

Potom platí

1. Je-li

$$d^2 f\left(x^{(0)},h\right)>0\quad\forall\,h\in\mathbf{R}^n\,,\ h\neq 0\,,$$

má funkce f v bodě $x^{(0)}$ ostré lokální minimum.

2. Je-li

$$d^2 f\left(x^{(0)},h\right)<0\quad\forall\,h\in\mathbf{R}^n\,,\ h\neq 0\,,$$

má funkce f v bodě $x^{(0)}$ ostré lokální maximum.

3. Jestliže existují $h_1,h_2\in\mathbf{R}^n$ tak, že

$$d^2 f\left(x^{(0)},h_1\right)<0\,,\quad d^2 f\left(x^{(0)},h_2\right)>0\,,$$

nemá funkce f v bodě $x^{(0)}$ extrém a nastává případ tzv. sedlového bodu.

Důkaz: Důkaz nebudeme provádět detailně. Z Taylorova vzorce plyne, že

$$f\left(x^{(0)}+h\right)-f\left(x^{(0)}\right)=d\,f\left(x^{(0)},h\right)+\frac{1}{2!}d^2 f\left(x^{(0)}+\vartheta h,h\right)\qquad 0<\vartheta<1$$

a uvažme případ 1. Poněvadž je

$$d^2 f\left(x^{(0)}+\vartheta h,h\right)=d^2 f\left(x^{(0)},h\right)+R_2\,,\quad\text{kde}\quad R_2\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0\quad\text{a}\quad d\,f\left(x^{(0)},h\right)=0\,,$$

rozhoduje o znaménku $f\left(x^{(0)}+h\right)-f\left(x^{(0)}\right)$ druhý diferenciál v bodě $x^{(0)}$. Jestliže uvážíme množinu $S=\{\,h\in\mathbf{R}^n\,;\,\|h\|=1\}$, dostaneme kompaktní množinu a $d^2 f\left(x^{(0)},h\right)$ má na množině S kladné infimum (dokonce minimum). Potom je

$$f\left(x^{(0)}+h\right)-f\left(x^{(0)}\right)\geq\inf_{h\in S}d^2 f\left(x^{(0)},h\right)+R_2$$

a vzhledem k tomu, že $R_2\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0$, zachovává si rozdíl $f\left(x^{(0)}+h\right)-f\left(x^{(0)}\right)$ v jistém okolí bodu $x^{(0)}$ kladné znaménko. Analogicky se dokáže 2. a 3. případ.

Poznámky: 1. Druhý diferenciál $d^2 f\left(x^{(0)},h\right)$ je kvadratická forma v h tvaru

$$d^2 f\left(x^{(0)},h\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f\left(x^{(0)},h\right)}{\partial\,x_i\,\partial\,x_j}\,h_i h_j=(Hh,h)\,,$$

kde H je tzv. Hessova matice funkce f v bodě $x^{(0)}$.
Podmínka 1. v předchozí větě tedy znamená, že kvadratická forma $Q(h)=(Hh,h)$ je positivně definitní, neboli ekvivalentně $Q(h)>0\ \forall h\neq 0$, nebo, že je matice H positivně definitní, nebo, že všechny hlavní minory matice H jsou kladné, nebo, že všechna vlastní čísla matice H jsou kladná.

Analogicky druhý případ znamená, že $Q(h)$ je negativně definitní a třetí případ znamená, že $Q(h)$ je indefinitní.

2. Je-li kvadratická forma Q semidefinitní, nemůžeme o extrému tímto způsobem rozhodnout. Mohou totiž nastat nastat všechny případy. Je-li

$$f(x,y) = x^2 + x^2y^2\,, \quad g(x,y) = x^2 + y^4\,, \quad h(x,y) = x^2 + y^3\,,$$

pak v bodě $(0,0)$ platí $Q(h,k) = 2h^2$ pro všechny tři funkce, zatímco f má v bodě $(0,0)$ neostré lokální minimum, g ostré lokální minimum a h nemá extrém.

Důsledek: Je-li $n = 2$, $a = (a_1, a_2)$ takový bod, že

$$d\,f(a) = 0\,, \quad f_{11} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial\,x^2} \neq 0\,, \quad f_{12} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial\,x\,\partial\,y}\,, \quad f_{22} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial\,y^2}\,,$$

pak platí

1. Je-li

$$f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 > 0\,,$$

má f v bodě a ostrý lokální extrém a sice minimum pro $f_{11} > 0$ a maximum pro $f_{11} < 0$.

2. Je-li

$$f_{11}f_{22} - (f_{12})^2 < 0\,,$$

nemá f v bodě a lokální extrém.

Důkaz: Jestliže označíme $\alpha = f_{11}$, $\beta = f_{12}$, $\gamma = f_{22}$, je $Q(h,k) = \alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2$.
Buď Q positivně definitní. Potom je $\alpha > 0$, $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ a f má v bodě a ostré lokální minimum.
Je-li Q negativně definitní, je $\alpha < 0$, $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ a f má v bodě a ostré lokální maximum.
Je-li $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$, je Q indefinitní a f nemá v bodě a extrém.

Příklad: Najděte lokální extrémy funkce

$$z = (5x + 7y - 25)\,e^{-\left(x^2+xy+y^2\right)}\,.$$

Řešení: Funkce z je definována v celé rovině $\mathbf{R}^2$ a platí

$$\frac{\partial\,z}{\partial\,x} = \{\,5 - (5x + 7y - 25)(2x + y)\}\;e^{-\left(x^2+xy+y^2\right)}\,,$$

$$\frac{\partial\,z}{\partial\,y} = \{\,7 - (5x + 7y - 25)(x + 2y)\}\;e^{-\left(x^2+xy+y^2\right)}\,.$$

Položíme-li $\frac{\partial\,z}{\partial\,x} = \frac{\partial\,z}{\partial\,y} = 0$, dostaneme soustavu rovnic

$$(5x + 7y - 25)(2x + y) = 5\,, \qquad (5x + 7y - 25)(x + 2y) = 7\,,$$

neboli $\frac{5}{2x+y} = \frac{7}{x+2y}$ a odtud $y = 3x$. Dosazením do jedné z předchozích rovnic dostáváme

$$26x^2 - 25x - 1 = 0 \quad \text{s kořeny} \quad x_1 = 1\,,\ \ x_2 = -\frac{1}{26}\,.$$

Odpovídající stacionární body jsou

$$A[\,1,3\,]\,, \qquad B\left[-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26}\right]\,.$$

a) Uvažme bod $A[1,3]$. Je

$$f_{11} = -27e^{-13} < 0\,, \quad f_{12} = -36e^{-13}\,, \quad f_{22} = -51e^{-13}\,; \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 81e^{-26} > 0$$

a v bodě A je tedy ostré lokální maximum $z(A) = e^{-13} \doteq 2,26 \cdot 10^{-6}$.

b) Pro bod $B\left[-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26}\right]$ platí

$$f_{11} = \frac{1377}{26}e^{-\frac{1}{52}} > 0\,, \quad f_{12} = \frac{711}{26}e^{-\frac{1}{52}}\,, \quad f_{22} = \frac{1401}{26}e^{-\frac{1}{52}}\,.$$

Je zřejmé, že $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$, tedy funkce z má v bodě B ostré lokální minimum

$$z(B) = -26e^{-\frac{1}{52}} \doteq -25,505\,.$$

3.2 Extrémy vzhledem k podmnořině.

Poznámka: V tomto paragrafu budeme vyšetřovat extrémy dané spojité funkce f (n proměnných) na podmnožinách $V \subset \mathbf{R}^n$, které se dají charakterizovat soustavou podmínek ve tvaru rovnosti nebo nerovnosti. Soustředíme se však na popis možných postupů při výpočtu konkrétních úloh a nebudeme dokazovat základní větu o postačujících podmínkách vázaného extrému.

Příklady: 1. Najděte extrémy funkce $z = x^2 + y^2$ na množině $V = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2\,;\ x + y = 1\,\}$.

Řešení: Je $y = 1 - x$, tedy

$$z = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1\,, \quad z' = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\,, \quad z'' = 4 > 0$$

a bodě $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ má z minimum vzhledem k V rovné $z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

2. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ na množině

$$V = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2\,;\ x^2 + y^2 \le 25\,\}\,.$$

Řešení: Poněvadž V je kompaktní množina a z spojitá funkce, existuje $\max\{\,z\,;\ (x,y) \in V\,\}$ a $\min\{\,z\,;\ (x,y) \in V\,\}$.

a) Buď nejdříve $x^2 + y^2 < 25$. Pak hledáme extrém na otevřené množině a užijeme postupu z předchozího paragrafu.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16\,.$$

Stacionární bod je $(6, -8)$, který však neleží v daném oboru.

b) Předpokládejme nyní, že $x^2 + y^2 = 25$. Jestliže danou křivku zparametrizujeme, dostaneme $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi)$ a tedy

$$z(t) = 25 - 60\cos t + 80\sin t\,, \quad z'(t) = 60\sin t + 80\cos t = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} t = -\frac{4}{3}\,.$$

t tedy leží ve druhém nebo čtvrtém kvadrantu.

α) Pro druhý kvadrant platí $\cos t < 0$, $\sin t > 0$, neboli

$$x = 5\cos t = -5\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = -\frac{5}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = -3\,, \quad y = 5\sin t = -5\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{5 \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = 4$$

a $z(-3,4) = 125$.

β) Ve čtvrtém kvadrantu je $\cos t > 0$, $\sin t < 0$ a dostaneme stacionární bod $(3,-4)$, pro nějž je $z(3,-4) = -75$.

Poznámka: Ke stejnému výsledku, pouze trochu pomalejší cestou, se dostaneme, jestliže uvážíme dvě možná vyjádření $y = \sqrt{25-x^2}$ a $y = -\sqrt{25-x^2}$.

3. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $z = x^2 - xy + y^2$ na množině

$$V = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,;\ |x| + |y| \le 1 \,\}.$$

Řešení: Množina V je opět kompaktní, tedy obě hledané hodnoty existují (z je spojitá).

a) Buď $|x| + |y| < 1$. Potom je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y = 0\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y = 0$$

a stacionární bod je $(0,0)$. Dále

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -1\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\,, \quad \text{tedy} \quad z_{11}z_{22} - z_{12}^2 = 3 > 0\,,\ z_{11} = 2 > 0$$

a v bodě $(0,0)$ má funkce z ostré lokální minimum $z(0,0) = 0$.

b) Nechť $|x| + |y| = 1$.

α) Pro $x, y \ge 0$ je $x + y = 1$, tedy $y = 1 - x$, $x \in \langle 0,1\rangle$,

$$z(x) = x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = 3x^2 - 3x + 1\,,\ z'(x) = 6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\,,\ z''(x) = 6 > 0$$

a v bodě $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ má funkce z lokální minimum $z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. V krajních bodech intervalu $\langle 0,1\rangle$ nabývá funkce $z(x)$ svého maxima. Platí $z(1,0) = z(0,1) = 1$.

β) Je-li $x \le 0$, $y \ge 0$, pak $y = 1 + x$, $x \in \langle -1,0\rangle$ a

$$z(x) = x^2 - x(1+x) + (1+x)^2 = x^2 + x + 1\,,\ z'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\,,\ z''(x) = 2 > 0$$

a v bodě $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ má funkce z lokální minimum $z\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$. V krajních bodech intervalu $\langle -1,0\rangle$ nabývá funkce $z(x)$ svého maxima. Platí $z(-1,0) = z(0,1) = 1$.

γ) Analogicky pro $x, y \le 0$ je $y = -1 - x$, $x \in \langle -1,0\rangle$ a tedy

$$z(x) = 3x^2 + 3x + 1\,,\ z'(x) = 6x + 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\,,\ z''(x) = 6 > 0$$

a v bodě $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ má funkce z lokální minimum $z\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. V krajních bodech intervalu $\langle -1,0\rangle$ nabývá funkce $z(x)$ svého maxima. Platí $z(-1,0) = z(0,-1) = 1$.

δ) Pro $x \ge 0$, $y \le 0$ je $y = x - 1$, $x \in \langle 0,1\rangle$ a odtud

$$z(x) = x^2 - x + 1\,,\ z'(x) = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\,,\ z''(x) = 2 > 0$$

a v bodě $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ má funkce z lokální minimum $z\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$. V krajních bodech intervalu $\langle 0,1\rangle$ nabývá funkce $z(x)$ svého maxima. Platí $z(1,0) = z(0,-1) = 1$.

Jestliže tyto výsledky shrneme, dostaneme, že největší a nejmenší hodnoty funkce jsou 1 a 0.

Poznámka: Uvedené příklady ukazují, že výpočet je poměrně dlouhý a má řadu záludností. Tomu se ale bohužel nemůžeme vyhnout. V dalším výkladu si nyní povšimneme technického postupu, který se při vyšetřování vázaných extrémů používá. Nikde totiž nemáme zaručeno, že se nám podaří jednu (nebo více) proměnných z daných vazeb vypočítat.

Definice: Buď $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ spojitá funkce, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ otevřená množina.
1. Nechť $h_j : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, p$ jsou spojité funkce a označme

$$V = \{ x \in \mathbf{R}^n ; \; h_j(x) = 0 \, , \, j = 1, 2, \dots, p \} .$$

Potom úlohu nalézt extrém funkce f na množině V nazýváme optimalizační úlohou s vazbami typu rovnosti.
2. Buďte $g_i : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, q$ spojité funkce a označme

$$W = \{ x \in \mathbf{R}^n ; \; g_i(x) \le 0 \, , \, i = 1, 2, \dots, q \} .$$

Potom úlohu nalézt extrém funkce f na množině W nazýváme optimalizační úlohou s vazbami typu nerovnosti.

Definice: Číslo $f\left(x^{(0)}\right)$ nazvene lokálním vázaným minimem (resp. maximem) funkce f na množině V, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}\left(x^{(0)}\right)$ bodu $x^{(0)}$ tak, že

$$f\left(x^{(0)}\right) \le f(x) \quad \left[\text{resp.} \quad f\left(x^{(0)}\right) \ge f(x)\right] \qquad \forall\, x \in V \cap \mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) .$$

Značíme

$$\min\left\{ f(x) \; ; \; x \in V \cap \mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \right\} \quad \left[\text{resp.} \quad \max\left\{ f(x) \; ; \; x \in V \cap \mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \right\}\right] .$$

Analogicky, jestliže

$$f\left(x^{(0)}\right) \le f(x) \quad \left[\text{resp.} \quad f\left(x^{(0)}\right) \ge f(x)\right] \qquad \forall\, x \in V ,$$

řekneme, že $f\left(x^{(0)}\right)$ je globálním vázaným minimem (resp. maximem) funkce f na množině V a značíme

$$\min\{ f(x) \; ; \; x \in V \} \quad [\text{resp.} \quad \max\{ f(x) \; ; \; x \in V \}] .$$

Věta: Buď $V \subset \mathbf{R}^n$ kompaktní množina a nechť je f spojitá na V. Potom jsou obě úlohy

$$\min\{ f(x) \; ; \; x \in V \} \quad \text{a} \quad \max\{ f(x) \; ; \; x \in V \}$$

řešitelné.

Důkaz: Plyne okamžitě z Weierstrassovy věty.

Poznámka: V dalším výkladu si všimneme nutných podmínek vázaného extrému s vazbami typu rovnosti a ukážeme postup při výpočtu těchto extrémů.

Věta: (Nutná podmínka extrému)
Nechť $x^{(0)}$ je bod lokálního extrému diferencovatelné funkce $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ na množině

$$V = \{x \in \Omega \; ; \; h_j(x) = 0 \, , \, j = 1, 2, \dots, p \} \, , \, p < n$$

a předpokládejme, že jsou vektory grad $h_j\left(x^{(0)}\right)$, $j=1,2,\dots,p$ lineárně nezávislé. Potom existují čísla $\lambda_1,\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tak, že platí

$$\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right)+\sum_{j=1}^{p}\lambda_j \operatorname{grad} h_j\left(x^{(0)}\right)=0\,.$$

Důkaz: Nebudeme provádět, poněvadž vyžaduje širší znalost věty o implicitních funkcích.

Poznámka: Postup při výpočtu předvedeme nyní na několika příkladech, z nichž bude zřejmé, že můžeme použít postupu z předchozího paragrafu, jen je třeba vzít v úvahu příslušné vazby.

Příklady: 1. Najděte extrémy funkce $u=xy+yz$ na množině

$$V=\{\,(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\ ;\ x^2+y^2=2\,,\ y+z=2\,\}\,.$$

Řešení: Máme dány dvě vazby typu rovnosti

$$h_1(x,y,z)=x^2+y^2-2=0\,,\quad h_2(x,y,z)=y+z-2=0\,.$$

Nejdříve budeme hledat tzv. stacionární body, tj. body, které splňují nutnou podmínku extrému. Označme

$$K(x,y,z)=xy+yz+\lambda_1(x^2+y^2-2)+\lambda_2(y+z-2)\,.$$

Potom musí platit

$$\frac{\partial K}{\partial x}=y+2\lambda_1 x=0\,,\quad \frac{\partial K}{\partial y}=x+z+2\lambda_1 y+\lambda_2=0\,,\quad \frac{\partial K}{\partial z}=y+\lambda_2=0\,.$$

Nyní je třeba nalézt vhodná x,y,z a λ_1,λ_2 . K tomu máme k disposici 5 rovnic (3parciální derivace a 2 vazby), takže se nám to může podařit. Z předchozích rovnic dostaneme

$$y=-\lambda_2\,,\quad x=\frac{\lambda_2}{2\lambda_1}\,,\quad z=2\lambda_1\lambda_2-\lambda_2-\frac{\lambda_2}{2\lambda_1}\,.$$

Dosazením do vazebních rovnic dostaneme dále

$$\frac{\lambda_2^2}{4\lambda_1^2}+\lambda_2^2=2\,,\quad 2\lambda_1\lambda_2-2\lambda_2-\frac{\lambda_2}{2\lambda_1}=2\,.$$

Z první rovnice plyne, že $4\lambda_1^2=\frac{\lambda_2^2}{2-\lambda_2^2}$ a musí tedy být $|\lambda_2|<\sqrt{2}$, neboli $2\lambda_1=\pm\frac{\lambda_2}{\sqrt{2-\lambda_2^2}}$.

a) Nechť $2\lambda_1=\frac{\lambda_2}{\sqrt{2-\lambda_2^2}}$. Dosadíme-li do druhé rovnice, dostaneme po jednoduché úpravě $\lambda_2^2-1=(\lambda_2+1)\sqrt{2-\lambda_2^2}$.
Je-li $\lambda_2=-1$, pak $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ a $x=y=z=1$.
Pro $\lambda_2\neq-1$ musíme řešit rovnici $\lambda_2-1=\sqrt{2-\lambda_2^2}$ s podmínkou $\lambda_2>1$. To dává kvadratickou rovnici $2\lambda_2^2-2\lambda_2-1=0$, které vyhovuje kořen $\lambda_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ a potom je $\lambda_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$, tedy

$$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,,\quad y=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,,\quad z=\frac{5+\sqrt{3}}{2}\,.$$

b) Buď $2\lambda_1=-\frac{\lambda_2}{\sqrt{2-\lambda_2^2}}$. Dosadíme-li do druhé rovnice, dostaneme tentokrát rovnici

$$1-\lambda_2^2=(\lambda_2+1)\sqrt{2-\lambda_2^2}\,.$$

Pro $\lambda_2 = -1$ je $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\quad x = -1$, $y = z = 1$.
Je-li $\lambda_2 \neq -1$, dostáváme rovnici $1 - \lambda_2 = \sqrt{2 - \lambda_2^2}$ za podmínky $\lambda_2 < 1$ a stejnou kvadratickou rovnici $2\lambda_2^2 - 2\lambda_2 - 1 = 0$, tentokrát s kořenem $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, tedy $\lambda_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ a

$$x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad z = \frac{5-\sqrt{3}}{2}.$$

Shrneme-li výsledek, dostaneme 4 stacionární body

$$A[1,1,1], \quad B\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{5+\sqrt{3}}{2}\right], \quad C[-1,1,1], \quad D\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right].$$

Pokračujeme dále a vypočteme 2. diferenciál funkce K. Je

$$d^2K = 2\left(\lambda_1\,dx^2 + dx\,dy + \lambda_1\,dy^2 + dy\,dz\right).$$

Nyní máme k disposici vazby

$$x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{a} \quad y + z - 2 = 0,$$

jejichž diferencováním dostaneme

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0, \;\; dy + dz = 0 \quad \text{a odtud} \quad dz = -dy, \;\; dx = -\frac{y}{x}dy.$$

Dosazením do kvadratické formy d^2K zredukujeme počet proměnných o dvě (počet nezávislých vazeb typu rovnosti) a dostaneme kvadratickou formu Q, jejíž definitnost budeme vyšetřovat. Je

$$Q(dy) = \frac{1}{x^2}\left(\lambda_1 y^2 - xy + \lambda_1 x^2 - x^2\right) dy^2.$$

α) V bodě A je $Q(dy) = -6dy^2$ a funkce u má maximum vzhledem k V, $u(A) = 2$.

β) V bodě B je $Q(dy) = 6(5+3\sqrt{3})dy^2$ a funkce u má minimum vzhledem k V, $u(B) = -\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$.

γ) V bodě C je C je $Q(dy) = 2dy^2$ a funkce u má minimum vzhledem k V, $u(C) = 0$.

δ) V bodě D je $Q(dy) = 6(5-3\sqrt{3})dy^2$ a funkce u má maximum vzhledem k V, $u(D) = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}$.

Poznámky: 1. Výpočet (i když zdlouhavý) dává jasný návod, jak postupovat i v obecném případu. Existuje však další možnost výpočtu, která spočívá v redukci počtu proměnných přímým využitím vazebních podmínek. Podmínky $x^2+y^2 = 2$, $y+z = 2$ určují křivku v $\mathbf{R}^3$. Jestliže se nám podaří tuto křivku zparametrizovat, dostaneme funkci jedné proměnné, jejíž extrém vyšetříme. To je v tomto případě možné. Je totiž

$$x = \sqrt{2}\cos t, \quad y = \sqrt{2}\sin t, \quad z = 2 - \sqrt{2}\sin t, \qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

tedy

$$u(t) = 2\sin t\,\cos t + \sqrt{2}\sin t\left(2 - \sqrt{2}\sin t\right), \quad \text{neboli} \quad u(t) = 2\sin t\,\cos t + 2\sqrt{2}\sin t - 2\sin^2 t.$$

Odtud

$$u'(t) = 2\cos^2 t - 2\sin^2 t + 2\sqrt{2}\cos t - 4\sin t\,\cos t = 0$$

a musíme řešit rovnici

$$1 - 2\sin^2 t = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\sin t - 1\right).$$

a) Buď $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{3\pi}{4}$ a dostaneme body A a C.

b) Je-li $\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = -1$, neboli $2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ pak odtud plyne, že

$$t + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6}\,, \quad \text{nebo} \quad t + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{6}\,, \qquad \text{neboli} \quad t_1 = \frac{11\pi}{12}\,,\ t_2 = \frac{19\pi}{12}\,.$$

Nyní platí

$$\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{12} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = -\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{8}} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\,,$$

$$\sin\frac{11\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{8}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

a dostaneme bod D. Pro $t_2 = \frac{19\pi}{12}$ je

$$\cos\frac{19\pi}{12} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\,, \quad \sin\frac{19\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

a dostaneme bod B.

2. Do třetice máme další možnost, a to kombinaci obou způsobů. Jestliže využijeme druhé vazební podmínky, můžeme danou úlohu redukovat na vyšetření extrému funkce dvou proměnných $u = xy + y(2-y)$ s jednou podmínkou $x^2 + y^2 - 2 = 0$. Označme

$$L(x,y) = xy + y(2-y) + \lambda(x^2 + y^2 - 2)\,.$$

Potom je

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0\,; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2 - 2y + 2\lambda y = 0$$

a odtud

$$x = -\frac{y}{2\lambda}\,,\ y = \frac{4\lambda}{1+4\lambda-4\lambda^2}\,, \quad \text{tedy} \quad x = -\frac{2}{1+4\lambda-4\lambda^2}$$

Jestliže dosadíme do vazební podmínky, dostaneme rovnici

$$\frac{4+16\lambda^2}{(1+4\lambda-4\lambda^2)^2} = 2\,, \quad \text{neboli} \quad 16\lambda^4 - 32\lambda^3 + 8\lambda - 1 = 0\,.$$

To je algebraická rovnice s celočíselnými koeficienty, která může míti racionální kořeny tvaru $\lambda = \pm\frac{1}{2}\,, \pm\frac{1}{4}\,, \pm\frac{1}{8}\,, \pm\frac{1}{16}$. (Jmenovatel musí být dělitelem koeficientu u nejvyšší mocniny). Jestliže využijeme této informace, dostaneme, že $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ a po vydělení polynomem $4\lambda^2 - 1$ kvadratickou rovnici

$$4\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0 \quad \text{s kořeny} \lambda_{3,4} = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\,.$$

Není těžké ověřit, že pro $\lambda = -\frac{1}{2}$ dostaneme bod A, pro $\lambda = \frac{1}{2}(2+\sqrt{3})$ bod B, pro $\lambda = \frac{1}{2}$ bod C a pro $\lambda = \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$ bod D. Z předvedených postupů si může každý vybrat takový postup, který mu nejlépe vyhovuje. Platí ovšem známá zásada, že každý problém má svoji obtížnost, kterou v jisté fázi postupu vždy musíme vždy překonat.

3. Některé příklady vypadají na prvý pohled hrozivě, ale použijeme-li zdravý selský rozum, mohou být řešeny promptně, jak ukazuje následující příklad.

2. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ na množině

$$V = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 \le 100 \,\right\}\,.$$

Řešení: Je zřejmé, že nejmenší hodnoty nabývá funkce u v bodě $O[0,0,0]$ $\quad u(O)=0$ (funkce u je nezáporná). Stejně tak je vidět, že největší hodnoty nabývá u v bodě $A[0,0,10]$ nebo ze symetrie v bodě $B[0,0,-10]$ a je $u(A)=u(B)=300$. Tím je sice úloha vyřešena, unikají nám však další stacionární body, ve kterých může mít funkce u lokální vázaný extrém. Jestliže tedy označíme

$$U=\left\{ (x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \ ; \ x^2+y^2+z^2<100 \right\} ,$$

pak

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=4y=0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z}=6z=0$$

a dostaneme stacionární bod $O[0,0,0]$, $\quad Q(dx,dy,dz)=2dx^2+4dy^2+6dz^2$ a funkce u má v bodě $O[0,0,0]$ ostré lokální minimum $u(O)=0$, jak již víme. Zbývá vyšetřit chování u na množině

$$V-U=\left\{ (x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \ ; \ x^2+y^2+z^2=100 \right\} .$$

Označíme-li

$$K(x,y,y,\lambda)=x^2+2y^2+3z^2+\lambda(x^2+y^2+y^2-100)\,,$$

potom platí

$$\frac{\partial K}{\partial x}=2x(1+\lambda)=0\,, \quad \frac{\partial K}{\partial y}=2y(2+\lambda)=0\,, \quad \frac{\partial K}{\partial z}=2z(3+\lambda)=0\,, \quad \frac{\partial K}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-100=0\,.$$

Odtud

$$\lambda=-1\,,\ y=0\,,\ z=0\,,x=\pm 10$$

a dostaneme dva stacionární body $C[10,0,0]$, $D[-10,0,0]$. Analogicky pro

$$\lambda=-2\,,\ x=0\,,\ z=0\,,\ y=\pm 10$$

dostaneme další dva stacionární body $E[0,10,0]$ a $F[0,-10,0]$. Pro poslední volbu

$$\lambda=-3\,,\ x=0\,,\ y=0\,,\ z=\pm 10$$

dostaneme body $A[0,0,10]$ a $B[0,0-10]$. Pro kvadratickou formu 2. diferenciálu platí

$$d^2K=2\left\{(1+\lambda)dx^2+(2+\lambda)dy^2+(3+\lambda)dz^2\right\}$$

a diferencováním vazby $x^2+y^2+z^2-100=0$ dostaneme $2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz=0$.

a) Nechť $\lambda=-1$, pak $Q(dy,dz)=2\left\{dy^2+2dz^2\right\}$ a u má v bodech C a D minima $u=100$ vzhledem k $V-U$. (dx vyjádříme pomocí dy a dz, zde je to však zbytečné).

b) Pro $\lambda=-2$ je $Q(dx,dz)=2\left\{-dx^2+dz^2\right\}$ a u nemá v bodech E a F extrém.

c) Buď $\lambda=-3$. Potom $Q(dx,dy)=2\left\{-2dx^2-dy^2\right\}$ a u má v bodech A a B maxima $u=300$ vzhledem k $V-U$.

3. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $u=x+y+z$ na množině

$$V=\left\{ (x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \ ; \ x^2+y^2\le z\le 1 \right\} .$$

Řešení: Volný extrém neexistuje, poněvadž je $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=1$.
a) Buď nyní $z=x^2+y^2$ a označme $v(x,y)=x+y+x^2+y^2$. Potom je

$$\frac{\partial v}{\partial x}=1+2x=0\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=1+2y=0$$

a dostaneme stacionární bod $A\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Dále je $Q(dx,dy) = 2\{dx^2+dy^2\}$ a funkce u má ostré lokální minimum $u(A) = -\frac{1}{2}$ vzhledem k V.

b) Je-li $z=1$, pak $w(x,y) = x+y+1$ nemá extrém pro $x^2+y^2<1$.

c) Označme

$$K(x,y,z,\lambda,\mu) = x+y+z+\lambda(x^2+y^2-1)+\mu(z-1).$$

Potom je

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 1+2\lambda x = 0\,, \quad \frac{\partial K}{\partial y} = 1+2\lambda y = 0\,, \quad \frac{\partial K}{\partial z} = 1+\mu = 0\,, \quad \frac{\partial K}{\partial \lambda} = x^2+y^2-1 = 0\,, \quad \frac{\partial K}{\partial \mu} = z-1 = 0\,.$$

Odtud dostaneme $x=y=-\frac{1}{2\lambda}$, $\mu=-1$ a po dosazení do 4. rovnice dostaneme $\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=1$, neboli $2\lambda^2 = 1$, $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. To nám dává další 2 stacionární body $B\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ pro $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $C\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ pro $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Poněvadž je

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} = 2\lambda\,, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 K}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 K}{\partial y\,\partial z} = 0\,,$$

má kvadratická forma 2. diferenciálu tvar $d^2K = 2\lambda(dx^2+dy^2)$.

Je-li tedy $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pak je $d^2K>0$ a funkce u má v bodě B ostré lokální minimum vzhledem k V rovné $u(B) = -\sqrt{2}+1 > -\frac{1}{2}$.

Pro $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, je $d^2K<0$ a funkce u má v bodě C ostré lokální maximum vzhledem k V rovné $u(C) = \sqrt{2}+1$.

Shrnutím těchto výsledků dostaneme, že největší hodnota funkce u je $\sqrt{2}+1$ a nejmenší $-\frac{1}{2}$.

Poznámka: Na závěr tohoto paragrafu uvedeme bez důkazu postačující podmínky pro existenci vázaného extrému s vazbami typu rovnosti. Odpovídající věta je sice dlouhá, ale dává též návod, jak postupovat při konkrétním výpočtu.

Věta: (Postačující podmínky vázaného extrému)
Buďte

$$f\,;\ h_1\,,\ h_2\,,\ \ldots\,,\ h_p\ :\ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

spojitě diferencovatelné funkce v otevřené množině $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ a nechť

$$V = \{\ x \in \mathbf{R}\ ;\ h_j(x_1,\ldots,x_n) = 0 \quad \text{pro} \quad j = 1,2,\ldots,p\}\ .$$

Buď dále $x^{(0)} \in \Omega$ bod, pro nějž platí
a) vektory $\left\{\operatorname{grad} h_1\left(x^{(0)}\right),\ \operatorname{grad} h_2\left(x^{(0)}\right),\ \ldots\,,\ \operatorname{grad} h_p\left(x^{(0)}\right)\right\}$ jsou lineárně nezávíslé
b) existují čísla $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ tak, že

$$\operatorname{grad} f\left(x^{(0)}\right) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \operatorname{grad} h_j\left(x^{(0)}\right) = 0\,.$$

Označme

$$K(x_1,\ldots,x_n\,;\,\lambda_1,\ldots,\lambda_p) = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, h_j(x_1,\ldots,x_n)$$

a nechť má funkce K v bodě $x^{(0)}$ totální diferenciál 2. řádu. Sestrojme kvadratickou formu 2. diferenciálu

$$d^2K = \sum_{k,l=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2 f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_k\,\partial x_l} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, \frac{\partial^2 h_j\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_k\,\partial x_l} \right\} dx_k\, dx_l\,.$$

Z rovnic
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\, h_j\left(x^{(0)}\right)}{\partial\, x_k}\, dx_k = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, p$$
vypočtěme diferenciály $dx_1, \ldots, dx_p$ pomocí $dx_{p+1}, \ldots, dx_n$ a dosaďme do kvadratické formy d^2K. Tím dostaneme formu
$$Q\,(\,dx_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,dx_n\,)$$
v $n - p$ proměnných. Nyní platí:

α) Je-li Q positivně definitní, má f v bodě $x^{(0)}$ ostré lokální minimum vzhledem k V.

β) Je-li Q negativně definitní, má f v bodě $x^{(0)}$ ostré lokální maximum vzhledem k V.

γ) Je-li Q indefinitní, nemá f v bodě $x^{(0)}$ extrém vzhledem k V.

Poznámky: 1. Dosazení do kvadratické formy d^2K z podmínek
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\, h_j\left(x^{(0)}\right)}{\partial\, x_k}\, dx_k = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, p$$
je možné vzhledem k tomu, že jsou vektory $\left\{ \operatorname{grad} h_1\left(x^{(0)}\right),\, \operatorname{grad} h_2\left(x^{(0)}\right),\, \ldots,\, \operatorname{grad} h_p\left(x^{(0)}\right)\right\}$ lineárně nezávislé.

2. Je-li kvadratická forma d^2K positivně (po případě) negativně definitní pro všechny hodnoty λ_j, je poslední krok (redukce počtu proměnných) v předchozí větě zbytečný a můžeme výpočet zkrátit.

3. Pro redukci počtu proměnných v kvadratické formě d^2K nemusíme (a někdy i nemůžeme) počítat prvých p diferenciálů dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_p. Vypočteme ty, které bude možné nejsnáze eliminovat.

Kapitola 4

Diferencovatelná zobrazení.

4.1 Frécherova derivace.

Poznámka: V této kapitole se budeme zabývat zobrazeními podmnožin $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^m$, kde $m, n \in \mathbf{N}$. Jestliže označíme F takové zobrazení a je-li $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ podmnožina, pak každému bodu $x \in \Omega$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ přiřadíme předpisem $y = F(x)$ bod $y \in \mathbf{R}^m$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. To znamená, že každá složka y_k je funkcí proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, na příklad

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Jinými slovy F má tvar $y = F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$. Nejdůležitější z těchto zobrazení jsou tzv. diferencovatelná zobrazení $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^m$ a specielně případ $n = m$.

Definice: Buď $F \; : \; \Omega \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ zobrazení otevřené množiny Ω. Řekneme, že F je diferencovatelné v bodě $x^{(0)} \in \Omega$, jestliže existuje lineární zobrazení $F'\left(x^{(0)}\right) \; : \; \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ takové, že

$$F\left(x^{(0)} + h\right) - F\left(x^{(0)}\right) = F'\left(x^{(0)}\right) h + \omega\left(x^{(0)}, h\right), \quad \text{kde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\left\| \omega\left(x^{(0)}, h\right) \right\|}{\| h \|} = 0\,.$$

Lineární zobrazení $F'\left(x^{(0)}\right)$ nazýváme Fréchetovou derivací (nebo stručně derivací) zobrazení F v bodě $x^{(0)}$.

Poznámka: Je-li $m = n = 1$, dostáváme diferencovatelnost funkce jedné reálné proměnné a $F'\left(x^{(0)}\right)$ je obyčejná derivace funkce jedné proměnné.

Je-li $m = 1$, je $F'(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = \operatorname{grad} F$ a dostaneme situaci, popsanou v definici totálního diferenciálu.

V obecném případě je $F'\left(x^{(0)}\right)$ representována maticí typu (m, n). Její tvar je popsán v následující větě.

Věta: Buď $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ diferencovatelné zobrazení $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^m$ na otevřené množině $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Potom má derivace $F'(x) \quad (x \in \Omega)$ tvar

$$F'(x) = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{array} \right\| = J_F(x)\,.$$

Matici $F'(x)$ (nebo $J_F(x)$) nazýváme Jacobiho maticí zobrazení F.

Důkaz: Označme $F'\left(x^{(0)}\right) = \| D_{ij} \|$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom vztah

$$F\left(x^{(0)} + h\right) - F\left(x^{(0)}\right) = F'\left(x^{(0)}\right) h + \omega\left(x^{(0)}, h\right)$$

znamená, že pro každou složku platí

$$f_k\left(x^{(0)} + h\right) - f_k\left(x^{(0)}\right) = \sum_{j=1}^{n} D_{kj}\, h_j + \omega_k\left(x^{(0)}, h\right), \quad \text{kde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\omega_k\left(x^{(0)}, h\right)}{\| h \|} = 0\,.$$

To však znamená, že $D_{kj} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$.

Definice: Buď $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ diferencovatelné zobrazení $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$. Potom determinant

$$\det F'(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

nazýváme Jacobiho determinantem, nebo stručně Jakobiánem zobrazení F a značíme

$$\frac{D(F)}{D(x)} = \frac{D\left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\,.$$

Věta: Buďte

$$F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m\,, \quad G : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^p$$

diferencovatelná zobrazení a označme $H = G \circ F$. Potom je $H : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$ diferencovatelné zobrazení a platí

$$H'(x) = G'(y) \cdot F'(x)\,, \quad \text{kde} \quad x = (x_1, \ldots, x_n)\,,\; y = (y_1, \ldots, y_m) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))\,.$$

Je-li speciálně $n = m = p$, pak platí

$$\frac{D(h_1, h_2, \ldots, h_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \cdot \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\,.$$

Důkaz: Symbol $H = G \circ F$ znamená, jak víme, složené zobrazení a označme

$$x = (x_1, \ldots, x_n)\,,\; y = (y_1, \ldots, y_m)\,;$$

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))\,,\; G(y) = (g_1(y), \ldots, g_p(y))\,,\; H(x) = (h_1(x), \ldots, h_p(x))\,,\; y = F(x)\,.$$

Potom je

$$H(x) = G(F(x)) = (g_1(f_1(x), \ldots, f_m(x))\,,\; \ldots\,,\; g_p(f_1(x), \ldots, f_m(x)))$$

a označíme-li

$$H'(x) = \left\| \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \right\|, \quad j = 1, \ldots, p\,,\; k = 1, \ldots, n\,,$$

platí podle věty o parciálních derivacích složených funkcí

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_k} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} \ ; \ j = 1, \dots, p \ ; \ k = 1, \dots, n \, .$$

Speciální případ $n = m = p$ plyne z věty o determinantu součinu matic.

Poznámka: Předchozí věta je přímým zobecněním věty o derivaci složené funkce jedné proměnné. Jediná věc, která je na prvý pohled překvapující, je, že derivace zobrazení F z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^m$ není v pevném bodě číslo, ale lineární zobrazení $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^m$.

4.2 Transformace souřadnic.

Definice: Buď

$$F \ : \ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

zobrazení. Řekneme, že F je regulární ve vnitřním bodě $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$, jestliže platí.

1. Prvky Jacobiho matice $J_F(x)$ jsou spojité funkce x .
2. $\frac{D(F)}{D(x)} \neq 0$.

Zobrazení F je regulární v Ω, je-li regulární v každém vnitřním bodě Ω .

Poznámka: Je-li $F = (f_1, \dots, f_n)$, pak první podmínka předchozí definice znamená, že existují parciální derivace $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, \dots, n$ a jsou spojité v bodě x . Druhá podmínka, rozepsaná do složek, znamená, že

$$\frac{D\,(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \, .$$

Věta: Buď F regulární zobrazení množiny $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$. Potom platí

1. Ke každému vnitřnímu bodu $x^{(0)} \in \Omega$ existuje okolí $\mathcal{U}\left(x^{(0)}\right) \subset \Omega$ bodu $x^{(0)}$ tak, že zúžení F na $\mathcal{U}\left(x^{(0)}\right)$ je prosté.
2. Je-li $A \subset \Omega$ otevřená množina, je $F(A)$ otevřená.
3. Je-li F prosté, je inversní zobrazení F^{-1} regulární zobrazení $F(\Omega)$ na Ω a platí

$$J_{F^{-1}}(y) = J_F^{-1}(x) \, , \quad \text{kde} \quad y = F(x) \, .$$

Důkaz: Nebudeme provádět.

Poznámky: 1. Předchozí věta ukazuje, že regularita zobrazení F nestačí k tomu, aby F bylo globálně prosté. Tedy inversní zobrazení existuje pouze lokálně.

2. Třetí vlastnost regulárního zobrazení je přímým zobecněním věty o derivaci inversní funkce pro jednu proměnnou.

Definice: Transformací souřadnic nazveme každé regulární a prosté zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$.

Poznámky: 1. Jestliže se budeme řídit předchozí definicí, zahrneme nejen změny báze tj. lineární transformace souřadnic, ale dostaneme i nelineární systémy souřadné. Z nich nejdůležitější budou polární souřadnice v rovině a cylindrické a sférické souřadnice v prostoru.

2. Podívejme se nyní na následující problém, související s transformací souřadnic. Je-li

$$F \ : \ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

transformace souřadnic, je $x = x(\xi, \eta)\,,\ \ y = y(\xi, \eta)$ viz obrázek

a položme si otázku vzájemného vztahu obsahů $\Omega_{\xi\eta}$ a Ω_{xy}. Tuto otázku budeme muset řešit v kapitole, věnované vícerozměrným integrálům. Odpověď na tuto otázku dává následující věta.

Věta: Buď F transformace souřadnic v $\mathbf{R}^n$ a označme

$$x = (x_1, \ldots, x_n)\,,\ \ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,, \quad x = F(\alpha) = (f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))\,.$$

Nechť F zobrazuje otevřenou množinu Ω_α na množinu Ω_x (otevřenou), tedy $F\,(\Omega_\alpha) = \Omega_x$. Označíme-li $\mu(\Omega)$ míru (délku, obsah, objem) množiny Ω, d průměr množiny Ω_α, pak platí

$$\lim_{d \to 0} \frac{\mu(\Omega_x)}{\mu(\Omega_\alpha)} = |\det J_F| = \left| \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \right| .$$

Pro malá d můžeme tedy psát

$$\mu(\Omega_x) \approx |\det J_F| \cdot \mu(\Omega_\alpha)\,.$$

Důkaz: Nebudeme provádět.

Příklady: 1. Zobrazení F dané transformačními rovnicemi $x = r\,\cos\varphi$; $y = r \sin\varphi$ nazýváme transformací do polárních souřadnic.

Je-li $r \in (0, +\infty)\,,\ \varphi \in (0, 2\pi)$, je F prosté zobrazení množiny $\Omega_{r\varphi} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ do $\mathbf{R}^2$. Toto zobrazení je regulární, poněvadž

$$F' = \left\| \begin{array}{ll} \cos\varphi\,, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi\,, & r\cos\varphi \end{array} \right\| , \quad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r\,.$$

viz obrázek Dále platí

$$\mu(\Omega_{r\varphi}) = \triangle r \cdot \triangle\varphi\,, \quad \mu(\Omega_{xy}) \approx r\mu(\Omega_{r\varphi})$$

v diferenciální formě $dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$.

2. Zobrazení F dané transformačními rovnicemi $x = r\,\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $z = z$, kde $r \in (0, +\infty)\,,\ \varphi \in (0, 2\pi)\,,\ z \in (-\infty, +\infty)$ nazýváme transformací do cylindrických souřadnic.

Při takto určených parametrech r, φ, z je F opět regulární prosté zobrazení a platí

$$F' = \left\| \begin{array}{ccc} \cos\varphi\,, & -r\sin\varphi\,, & 0 \\ \sin\varphi\,, & r\cos\varphi\,, & 0 \\ 0\,, & 0\,, & 1 \end{array} \right\|\,, \quad \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r\,.$$

Smysl jednotlivých parametrů je zřejmý z následujícího obrázku

Pro diferenciály příslušných měr platí $dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$.

3. Zobrazení F dané transformačními rovnicemi

$$x = r\,\cos\varphi\,\cos\vartheta\,;\; y = r\sin\varphi\,\cos\vartheta\,;\; z = r\,\sin\vartheta\,,\;\text{ kde }\; r \in (0,+\infty)\,,\, \varphi \in (0,2\pi)\,,\, \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

nazýváme transformací do sférických souřadnic.

F je opět transformace souřadnic pro takto určené parametry r, φ, ϑ . Smysl těchto parametrů je zřejmý z následujícího obrázku.

Dále platí

$$F' = \left\| \begin{array}{ccc} \cos\varphi\,\cos\vartheta\,, & -r\sin\varphi\,\cos\vartheta\,, & -r\,\cos\varphi\,\sin\vartheta \\ \sin\varphi\,\cos\vartheta\,, & r\cos\varphi\,\cos\vartheta\,, & -r\,\sin\varphi\,\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\,, & 0\,, & r\,\cos\vartheta \end{array} \right\|\,, \quad \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\vartheta)} = r^2\cos\vartheta > 0\,.$$

Pro příslušné diferenciály tedy platí $dx\,dy\,dz = r^2\cos\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$.

Poznámka: Někdy se úhel ϑ měří nikoliv od roviny xy , ale od kladného směru osy z . V tom případě mají transformační rovnice tvar

$$x = r\,\cos\varphi\,\sin\alpha\,;\; y = r\sin\varphi\,\sin\alpha\,;\; z = r\,\cos\alpha\,,\;\text{ kde }\; r \in (0,+\infty)\,,\, \varphi \in (0,2\pi)\,,\, \alpha \in (0,\pi)$$

a $\frac{D(x.y,z)}{D(r,\varphi,\alpha)} = -r^2\sin\alpha$.

obrázek

4.3 Soustavy funkcionálních rovnic.

Poznámka: V posledním paragrafu se pokusíme zobecnit úlohu pro nalezení implicitní funkce. Uvažme s funkcí $F_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s)$, ... , $F_s(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s)$ a pokusme se řešit soustavu rovnic

$$F_j(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_s) = 0\,, \quad j = 1,2,\ldots,s$$

vzhledem k neznámým $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Nebudeme formulovat existenční větu, ale pokusíme se vypočítat parciální derivace $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$; $j = 1, \ldots, s$, $k = 1, \ldots, n$.

Věta: Buďte $F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, s$ spojitě diferencovatelné funkce $n + s$ proměnných takové, že

$$F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, s\,, \quad \frac{D(F_1, \ldots, F_s)}{D(y_1, \ldots, y_s)} \neq 0\,.$$

Potom lze jednoznačně vypočítat parciální derivace $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$; $j = 1, \ldots, s$, $k = 1, \ldots, n$.

Důkaz: Jestliže rovnosti

$$F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_s) = 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, s$$

zderivujeme podle x_k , dostaneme

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial F_j}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_k} = 0 \quad \text{pro} \quad j = 1, \ldots, s\,;\ k = 1, \ldots, n\,.$$

Tato soustava s lineárních rovnic pro s neznámých $\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_k}$ má nenulový determinant $\frac{D(F_1,\ldots,F_s)}{D(y_1,\ldots,y_s)}$ a je tedy jednoznačně řešitelná. Dalším derivováním můžeme získat druhé parciální derivace. Dostaneme opět soustavu se stejným nenulovým determinantem.

Příklad: Najděte parametrické rovnice tečny ke křivce

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6\,,\ x + y + z = 0 \quad \text{v bodě} \quad T[1, -2, 1]\,.$$

Řešení: Vypočteme nejdříve derivace $\frac{dx}{dz}$ a $\frac{dy}{dz}$. Derivováním daných rovnic dostaneme

$$2x\frac{dx}{dz} + 2y\frac{dy}{dz} + 2z = 0\,, \qquad \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0 \quad \text{s řešením} \quad \frac{dx}{dz} = \frac{y - z}{x - y}\,,\ \frac{dy}{dx} = \frac{z - x}{x - y}\,.$$

Poněvadž mají parametrické rovnice dané křivky tvar $x = x(z)$, $y = y(z)$, $z = z$, je směrový vektor tečny roven

$$\overrightarrow{s} = (-1, 0, 1)\,, \quad \text{tedy} \quad x = 1 - t\,,\ y = -2\,,\ z = 1 + t\,.$$

Správnost výsledku snadno zkontrolujeme, poněvadž daná tečna je průsečnicí dvou tečných rovin k daným plochám, tedy $x - 2y + z - 6 = 0$ a $x + y + z = 0$ a musí splňovat jejich rovnice.

Kapitola 5

Obyčejné diferenciální rovnice.

5.1 Rovnice 1. řádu.

5.1.1 Existenční věta.

Definice: Obyčejnou diferenciální rovnicí $n-$tého řádu rozumíme rovnici tvaru

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0\,,$$

kde F je daná funkce $n{+}2$ proměnných, $n \in \mathbf{N}$, x nezávisle proměnná, y neznámá funkce. Řešením této rovnice na intervalu $\mathcal{I}$ nazveme každou funkci $y = \varphi(x)$, pro niž platí

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathcal{I}\,.$$

Řekneme, že daná rovnice je rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci, je-li ji možno napsat ve tvaru

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)\,,$$

kde f je daná funkce $n+1$ proměnných.

Buď $x_0 \in \mathcal{I}$ bod, $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ čísla. Potom Cauchyovou úlohou nebo počáteční úlohou rozumíme otázku nalezení řešení $y = \varphi(x)$ rovnice

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0\,,$$

vyhovující tzv. počátečním podmínkám

$$\varphi(x_0) = y_0\,,\ \varphi'(x_0) = y_0'\,,\ \dots\,,\ \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}\,.$$

Poznámky: 1. Řešit úplně rovnici

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

je úkol, který se nám nepodaří splnit. Nepodaří se nám ani dokázat existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy v této obecnosti. Ukazuje se totiž, že rovnice, nerozřešené vzhledem k nejvyšší derivaci mají již ve své podstatě zabudovanou nejednoznačnost řešení. Ukážeme později (ve 3. paragrafu), že existují tzv. singulární řešení, která jednoznačnost porušují.

2. Nejvíce různých typů rovnic se nám podaří řešit pro rovnice 1. řádu a těmto rovnicím také věnujeme celou tuto kapitolu. Začneme existenční větou pro rovnici $y' = f(x, y)$. Nejdříve však upřesníme formulaci Cauchyovy úlohy.

Definice: Buď dána množina $D = \mathcal{I} \times H$ v rovině (x, y) a bod $(x_0, y_0) \in D$. Počáteční nebo Cauchyovou úlohou pro rovnici

$$y' = f(x, y)$$

rozumíme úlohu najít funkci $y = \varphi(x)$ s následujícími vlastnostmi.
1. $\varphi(x)$ je spojitě diferencovatelná na intervalu $\mathcal{I}$.
2. Její graf leží v množině D.
3. Splňuje rovnici $\varphi'(x) = f(x\,,\, \varphi(x)) \quad \forall\, x \in \mathcal{I}$.
4. Splńuje počáteční podmínku $\varphi(x_0) = y_0$.

Funkce uvedených vlastností se nazývá řešením počáteční (nebo Cauchyovy) úlohy v množině D, nebo integrální křivkou.

Věta: Řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = f(x, y)\,, \quad y(x_0) = y_0$$

je ekvivalentní s řešením integrální rovnice

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt\,.$$

Důkaz: 1. Nechť $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $\varphi(x_0) = y_0$. Integrací této rovnosti dostaneme

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt\,, \quad \text{neboli} \quad \varphi(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt\,.$$

2. Jestliže obráceně $\varphi(x)$ splňuje rovnici

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt\,,$$

pak je zřejmé, že $\varphi(x_0) = y_0$ a po zderivování dostaneme $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Poznámka: Předchozí věta slouží jako základ tzv. Picardovy iterační metody pro existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy.

Definice: Řekneme, že funkce $f(x, y)$ splňuje v obdélníku $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ Lipschitzovu podmínku, jestliže existuje konstanta $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ a všechna $y_1, y_2 \in \langle c, d\rangle$ platí

$$|\, f(x, y_1) - f(x, y_2)\,| \le K|\, y_1 - y_2\,|\,.$$

Poznámka: Ukazuje se, že Lipschitzova podmínka hraje v dalším podstatnou roli v tom smyslu, že nám umožní dokázat existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici $y' = f(x, y)$. Pokud se zeptáme na to, jaké funkce na příklad splňují Lipschitzovu podmínku, odpověď dává následující lemma.

Lemma: Je-li funkce $f(x,y)$ spojitá na obdélníku $\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ a uvnitř tohoto obdélníka má omezenou parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$, pak f splňuje v D Lipschitzovu podmínku.

Důkaz: Poněvadž platí $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le M$ pro $a < x < b$, $c < y < d$, je tedy

$$|\,f(x,y_1) - f(x,y_2)\,| = \left|\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y}\right| \,|\,y_1 - y_2\,| \le M|\,y_1 - y_2\,|\,.$$

! Věta: Buď dána diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ a nechť je funkce f spojitá v množině

$$D = \langle x_0 - a, x_0 + a\rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b\rangle \quad (a,b > 0)$$

a splňuje tam Lipschitzovu podmínku. Potom existuje číslo $\alpha > 0$ tak, že v intervalu $|x - x_0| \le \alpha$ existuje jediné řešení $\varphi(x)$ rovnice $y' = f(x,y)$, vyhovující podmínce $\varphi(x_0) = y_0$.

$$\left[\text{Platí} \quad \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad \text{kde} \quad M = \max_{(x,y)\in D} |\,f(x,y)\,|\,.\right]$$

Poznámka: Věta tvrdí, že bodem (x_0, y_0) prochází právě jedna integrální křivka. Situaci ilustruje následující obrázek

Důkaz: 1. Existence.

Vzhledem k tomu, že funkce $f(x,y)$ je spojitá na kompaktní množině D, existuje číslo $M = \max\limits_{(x,y)\in D} |\,f(x,y)\,|$ a je konečné.

Řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = f(x,y)\,, \qquad y(x_0) = y_0$$

nyní sestrojíme. Definujme posloupnost funkcí

$$\varphi_0(x) = y_0\,, \quad \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))\,dt\,, \quad n = 0,1,2,\dots \qquad |x - x_0| \le \alpha\,.$$

Ukážeme, že tato posloupnost konverguje k funkci $\varphi(x)$ splňující rovnici

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt\,,$$

tedy k řešení našeho problému.

Uvažme interval $\langle x_0, x_0 + \alpha\rangle$. Pro interval $\langle x_0 - \alpha, x_0\rangle$ se provede úvaha analogicky. Ukážeme nejdříve, že

$$|\,\varphi_n(x) - y_0\,| \le M(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x \in \langle x_0, x_0 + \alpha\rangle \quad \text{a} \quad n = 1,2,\dots\,.$$

Poněvadž tato nerovnost platí zřejmě pro $\varphi_0(x)$, použijeme indukce a předpokládejme, že platí pro $\varphi_n(x)$. Nyní je

$$|\,\varphi_{n+1}(x)-y_0\,| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))\,dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |\,f(t,\varphi_n(t))\,|\,dt \le M\int_{x_0}^{x} dt = M(x-x_0)\,.$$

Geometricky tato nerovnost znamená, že všechny křivky $\varphi_n(x)$ procházejí bodem (x_0, y_0) a zůstávají v trojúhelníku

$$T\,:\,y-y_0=\pm M(x-x_0)\,,\qquad x=x_0+\alpha\,.$$

viz příslušný obrázek

Dále ukážeme, že posloupnost $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje. Položme

$$\triangle_n(x)=|\,\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\,|\,,\qquad x\in\langle x_0, x_0+\alpha\rangle\,.$$

Poněvadž f splňuje Lipschitzovu podmínku

$$|\,f(x,y_1)-f(x,y_2)\,|\le K|\,y_1-y_2\,|\,,\quad K>0\,,$$

dostaneme

$$\triangle_n(x)=|\,\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\,| = \left|\int_{x_0}^{x}\left[\,f(t,\varphi_n(t))-f(t,\varphi_{n-1}(t))\,\right]\,dt\right|\le$$

$$\le\int_{x_0}^{x}|\,f(t,\varphi_n(t))-f(t,\varphi_{n-1}(t))\,|\,dt\le K\int_{x_0}^{x}\triangle_{n-1}(t)\,dt\,.$$

Pro $n=0$ platí $\triangle_0(x)=|\,\varphi_1(x)-\varphi_0(x)\,|\le M(x-x_0)\le M\alpha$. Pro $n=1$ je

$$\triangle_1(x)\le K\int_{x_0}^{x}\triangle_0(t)\,dt\le KM\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\,dt=\frac{M}{K}K^2\,\frac{(x-x_0)^2}{2!}\le\frac{M}{K}K^2\,\frac{\alpha^2}{2!}\,.$$

Pro $n=2$ platí

$$\triangle_2(x)\le K\int_{x_0}^{x}\triangle_1(t)\,dt\le\frac{M}{K}\,K^2\int_{x_0}^{x}\frac{(t-x_0)^2}{2!}dt=\frac{M}{K}\,K^3\,\frac{(x-x_0)^3}{3!}\le\frac{M}{K}\,K^3\,\frac{\alpha^3}{3!}\,.$$

Odtud indukcí snadno získáme odhad

$$\triangle_n(x)\le\frac{M}{K}\,K^{n+1}\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{M}{K}\,K^{n+1}\,\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}\quad\text{pro}\quad x\in\langle x_0,x_0+\alpha\rangle\,.$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\triangle_n(x)$ je tedy majorizována číselnou řadou $\frac{M}{K}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(K\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}$, která má součet $\frac{M}{K}\left(e^{K\alpha}-1\right)$.
Podle Weierstrassova kritéria je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\triangle_n(x)$ stejnoměrně konvergentní v intervalu $\langle x_0, x_0+\alpha\rangle$.
Odtud plyne, že řada

$$\varphi_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\,\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\,\right]$$

konverguje absolutně a stejnoměrně v intervalu $\langle x_0, x_0+\alpha\rangle$. Pro částečný součet této řady platí

$$\varphi_0(x) + \sum_{n=0}^{k-1} [\,\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)\,] = \varphi_k(x)$$

a poněvadž každá funkce $\varphi_k(x)$ spojitá, je spojitá i limitní funkce $\varphi(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x)$. Ukážeme, že $\varphi(x)$ splňuje rovnici

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt\,.$$

Je totiž

$$\left|\varphi(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt\right| = \left|\varphi(x) - \varphi_{n+1}(x) + y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_n(t))\,dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t)\,dt\right| \le$$

$$\le |\,\varphi(x) - \varphi_{n+1}(x)\,| + \int_{x_0}^{x} |\,f(t,\varphi(t) - f(t,\varphi_n(t)\,|\;dt \le |\,\varphi(x) - \varphi_{n+1}(x)\,| + \int_{x_0}^{x} |\,\varphi(t) - \varphi_n(t)\;dt\,.$$

Vzhledem ke stejnoměrné konvergenci $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ musí tedy platit rovnost

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,dt\,.$$

2. Jednoznačnost.
Předpokládejme, že existuje funkce $\psi(x)$, pro niž platí

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))\,dt\,,$$

ale $\varphi(x) \ne \psi(x)$ na nějakém intervalu $x_0 \le x \le x_0+\varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je pevné číslo. Poněvadž φ i ψ jsou spojité funkce na intervalu $\langle x_0, x_0+\varepsilon\rangle$, existuje

$$\delta = \max_{x\in\langle x_0,x_0+\varepsilon\rangle} |\,\varphi(x) - \psi(x)\,| > 0\,.$$

Navíc je $\delta = |\,\varphi(\xi) - \psi(\xi)\,|$ pro nějaké $\xi \in (x_0, x_0+\varepsilon\rangle$. Nyní je

$$|\,\varphi(x) - \psi(x)\,| \le \delta = |\,\varphi(\xi) - \psi(\xi)\,| \le \int_{x_0}^{\xi} |\,f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\,|\,dt \le$$

$$\le K \int_{x_0}^{\xi} |\,\varphi(t) - \psi(t)\,|\,dt \le K \int_{x_0}^{\xi} \delta\,dt = K\delta(\xi - x_0) \le K\delta\varepsilon\,.$$

Odtud plyne, že $K\varepsilon \ge 1$. To je však spor, poněvadž stačí zvolit $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $K\varepsilon < 1$.

Poznámky: 1. Kdo zatím není seznámen s teorií funkčních řad, může důkaz existenční věty přeskočit a vrátit se k němu po přečtení následující kapitoly, věnované právě těmto řadám.

2. Důkaz jednoznačnosti řešení ukazuje, že je někdy třeba zmenšit interval $\langle x_0-\alpha, x_0+\alpha\rangle$. To však není nic překvapivého, poněvadž celá věta o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy má lokální charakter. Můžeme se však zeptat, zda tento výsledek není

možno rozšířit na daný interval, tedy získat globální výsledek. Takové metody existují, my se jimi však nebudume zabývat. Ukáže se, že pro případ lineární rovnice dostaneme tento výsledek přímo.

3. Situace je značně komplikovanější v okolí bodů, kde f není spojitá nebo nesplňuje Lipschitzovu podmínku. Jednoduchý příklad uvedeme v následujícím paragrafu; trochu systematičtěji se jí budeme zabývat v kapitole věnované otázkám stability.

4. Právě dokázaná existenční věta ukazuje též možnost přibližného řešení Cauchyovy úlohy. Uchýlíme se k ní však pouze v tom případu, kdy nám jiné metody selžou. S jinými možnostmi řešení se budeme postupně seznamovat. Následující příklad ukazuje, že to však možné je.

Příklad: Najděte řešení Cauchyovy úlohy $y' = y\,, \quad y(0) = 1\,.$

Řešení: Metoda postupných aproximací dává

$$\varphi_0(x) = 1\,, \quad \varphi_1(x) = 1 + \int\limits_0^x \varphi_0(t)\,dt = 1 + x\,, \quad \varphi_2(x) = 1 + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}\,,$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\,, \quad \varphi_4(x) = 1 + \int_0^x \varphi_3(t)\,dt = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\,.$$

Jestliže budeme pokračovat dále, je vidět, že hledané řešení $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = e^x$. To však bylo zřejmé od samého začátku.

Poznámka: Ukazuje se, že důkaz o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy lze zopakovat i pro obecnější rovnici $\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu)$, kde μ je jistý parametr (může nastat i $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$).

Věta: Buď dána diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu)\,,$$

kde f vyhovuje podmínkám věty o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy a konstanta K v Lipschitzově podmínce nezávisí na parametru $\mu \in \langle \mu_1, \mu_2 \rangle$. Potom je řešení $y(x, \mu)$ dané rovnice, vyhovující podmínce $y(x_0) = y_0$ spojitě závislé na parametru μ.

Důkaz: Důkaz můžeme provést analogicky jako důkaz hlavní věty.

Poznámka: Jak již bylo řečeno, parametrů může býti více. Jestliže za parametry zvolíme počáteční podmínky x_0, y_0, dostaneme, že řešení spojitě závisí na x_0 a y_0, neboli $y = y(x, x_0, y_0)$. To je možno zformulovat následujícím způsobem. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že jakmile

$$|x_0 - \overline{x}_0| < \delta\,, \quad |y_0 - \overline{y}_0| < \delta\,, \quad \text{pak} \quad |y(x, x_0, y_0) - y(x, \overline{x}_0, \overline{y}_0)| < \varepsilon\,.$$

Situace je načrtnuta na následujícím obrázku.

Je však třeba znovu upozornit na to, že předchozí tvrzení platí pouze lokálně, kdežto globálně může být situace značmě komplikovanější.

5.1.2 Rovnice rozřešené vzhledem k 1. derivaci.

Poznámka: Tento paragraf bude věnován technice řešení některých typů diferenciálních rovnic 1. řádu a nebudeme se v detailech zajímat o hledání oborů, ve kterých řešení existují, ani o problém existence, po případě jednoznačnosti řešení.

Definice: Obecným řešením nebo obecným integrálem obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' = f(x,y)\,, \qquad (x,y) \in D = \mathcal{I} \times H$$

rozumíme funkci $y = \varphi(x, C)$, kde C je reálný parametr (libovolná konstanta), která má následující vlastnosti.
1. Je řešením dané rovnice pro libovolné C .
2. Pro libovolný bod $(x_0, y_0) \in D$ existuje taková hodnota C_0 , že funkce $y(x) = \varphi(x, C_0)$ splňuje podmínku $y(x_0) = y_0$.
Funkci $y(x) = \varphi(x, \widetilde{C})$, kde $\widetilde{C}$ je zvoleno pevně, nazýváme partikulárním řešením nebo partikulárním integrálem dané rovnice.

A. Rovnice se separovatelnými proměnnými.

Definice: Rovnici tvaru $\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y)$, kde f_1, f_2 jsou spojité funkce, nazýváme rovnicí se separovatelnými proměnnými.

Řešení: Pro potřeby výpočtu této rovnice vycházíme z předpokladu, že symbol $\frac{dy}{dx}$ je podílem dvou diferenciálů. Separace znamená oddělení, tedy napíšeme v rovnici $\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y)$ na jednu stranu výrazy,které obsahují proměnnou y a na druhou stranu výrazy, obsahující proměnnou x . Tedy

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\, dx\,, \quad f_2(x) \neq 0\,.$$

Tím jsme dostali rovnost dvou diferenciálů, tedy příslušné funkce se liší o konstantu.

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\, dx + C \Longrightarrow \psi(y) = \varphi(x) + C\,.$$

Výsledně dostáváme funkci, zadanou implicitně a v tomto tvaru většina řešení zůstává. Výhoda takového vyjádření spočívá v symetrii, tedy není a priori zřejmé, která z proměnných je nezávislá a která závislá.

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice $y' = -\frac{x(y^2-1)}{y(x^2-1)}$.

Řešení: Jestliže v rovnici $\frac{dy}{dx} = -\frac{x(y^2-1)}{y(x^2-1)}$ odseparujeme proměnné, dostaneme

$$\frac{y\, dy}{y^2-1} = -\frac{x\, dx}{x^2-1} \quad \text{a odtud} \quad \frac{1}{2}\ln|\,y^2-1\,| = -\frac{1}{2}\ln|\,x^2-1\,| + \frac{1}{2}\ln|\,C\,|\,.$$

Odlogaritmováním této rovnosti dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$(y^2-1)(x^2-1) = C\,,$$

kde C je libovolná konstanta. Na prvý pohled může překvapit předvedený postup, tedy, že integrační konstantu píšeme ve tvaru $\frac{1}{2}\ln|\,C\,|$. Tento postup budeme v dalším výkladu používat poměrně často; jeho účelnost je zřejmá, ušetříme si komplikace při následné úpravě, tedy odlogaritmování a oprávněnost tohoto vyjádření plyne ze skutečnosti, že obor hodnot funkce ln je interval $(-\infty, +\infty)$, neboli $\frac{1}{2}\ln|\,C\,|$ je libovolná konstanta.

Poznámka: Na rovnici se separovatelnými proměnnými převedeme snadno rovnici tvaru $y' = f(ax+by+c)$, kde f je spojitá funkce a, b, c jsou konstanty, $a, b \neq 0$. Stačí zavést novou neznámou funkci předpisem $z = ax + by + c$. Potom platí $z' = a + by'$, neboli $y' = \frac{1}{b}(z' - a)$ a po dosazení do rovnice dostáváme

$$\frac{1}{b}z' = \frac{a}{b} + f(z) \quad \text{a tedy} \quad z' = a + b\,f(z)\,,$$

což je rovnice se separovatelnými proměnnými.

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice $y' = \cos(x-y)$.

Řešení: Zavedeme-li substituci $x - y = z$, dostaneme

$$z' = 1 - y'\,, \quad 1 - z' = \cos z\,, \quad z' = 1 - \cos z\,, \quad \int \frac{dz}{1-\cos z} = x + C\,.$$

Poněvadž je

$$\int \frac{dz}{1-\cos z} = \int \frac{dz}{2\sin^2 \frac{z}{2}} = -\mathrm{cotg}\frac{z}{2}\,,$$

plyne odtud, že hledané řešení je

$$\mathrm{cotg}\frac{x-y}{2} + x + C = 0\,.$$

B. <u>Homogenní rovnice</u>.

Definice: Řekneme, že funkce $f(x,y)$ je homogenní, nebo homogenní nultého stupně, jestliže pro libovolné $\alpha \neq 0$ platí $f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)$.
Diferenciální rovnici tvaru $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ nazveme homogenní, je-li f homogenní funkce.

Poznámky: 1. Pojem homogenity můžeme zobecnit na libovolný počet proměnných a pro libovolné reálné číslo r. Řekneme, že funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbf{N}$ je homogenní stupně r, jestliže pro libovolné $\alpha > 0$ platí

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^r\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

2. Homogenní rovnici můžeme převést na rovnici se separovatelnými proměnnými, jak ukážeme v následujícím výpočtu.

Řešení: Zvolme $\alpha = \frac{1}{x}$. Potom platí

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)\,.$$

To tedy znamená, že homogenní rovnici můžeme vždy převést na tvar $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$, neboli pravá strana závisí pouze na podílu $\frac{y}{x}$.

Do rovnice $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ zavedeme novou neznámou funkci předpisem $\frac{y}{x} = u$. Odtud dostaneme

$$y = x\,u\,, \quad y' = u + x\,u'$$

a po dosazení do rovnice

$$u + x\,u' = g(u)\,, \quad x\,u' = g(u) - u\,.$$

Dostáváme tím rovnici se separovatelnými proměnnými; je totiž

$$\frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}, \quad g(u) \neq u\,.$$

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$.

Řešení: Snadno se přesvědčíme, že daná rovnice je homogenní. Jestliže zavedeme novou neznámou funkci $\frac{y}{x} = u$, dostaneme

$$y = xu\,, \quad y' = u + xu'\,, \quad u + xu' = \frac{2u}{1-u^2}\,, \quad xu' = \frac{2u - u + u^3}{1-u^2}\,.$$

Po separaci proměnných dostáváme dále

$$\frac{1-u^2}{u(u^2+1)}\,du = \frac{dx}{x}\,.$$

Poněvadž je

$$\frac{1-u^2}{u(u^2+1)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+1} \quad \text{a odtud} \quad 1-u^2 = A(u^2+1)+Bu^2+Cu \Longrightarrow A = 1\,,\ B = -2\,,\ C = 0\,.$$

Po integraci tedy máme

$$\ln|\,u\,| - \ln(u^2+1) = \ln|\,x\,| + \ln|\,C\,| \Longrightarrow \frac{u}{u^2+1} = Cx\,.$$

a po dosazení za $u = \frac{y}{x}$ dostaneme

$$\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2+x^2}{x^2}} = Cx\,, \quad \text{neboli} \quad y = C(x^2+y^2)\,.$$

Je-li $C = 0$, je $y = 0$ řešení, jak se snadno přesvědčíme.

Pro $C \neq 0$ položme $K = \frac{1}{C}$. Potom je $K \neq 0$ libovolná konstanta a integrální křivky mají tvar $x^2+y^2 = Ky$, což jsou kružnice se středem v bodě $S\left[0, \frac{K}{2}\right]$ a poloměrem $R = \frac{|\,K\,|}{2}$. Pro zajímavost ověříme, že křivky $x^2+y^2 = Ky$ jsou skutečně řešením dané rovnice. Platí $2x + 2y\,y' = K\,y'$, tedy $y' = \frac{2x}{K-2y}$. Dále z rovnosti $x^2+y^2 = Ky$ plyne, že $x^2 = K\,y - y^2$ a po dosazení do původní rovnice dostáváme

$$\frac{2x}{K-2y} = y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{2xy}{Ky-y^2-y^2} = \frac{2x}{K-2y}$$

a rovnice je splněna.

Jestliže si načrtneme několik integrálních křivek

$$x^2 + \left(y - \frac{K}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{4}\,,$$

je vidět, že vyplňují celou rovinu. Navíc všechny procházejí bodem $[0,0]$, což je právě ten bod, kde nejsou splněny předpoklady o existenci a jednoznačnosti řešení. Takových bodů je sice více (obě přímky $y = \pm x$), ale ukazuje se, že to nemusí vždy vadit. Jak se snadno můžeme přesvědčit, každým bodem $[x_0, y_0]$, kde $[x_0, y_0] \neq [0,0]$ prochází právě jedna integrální křivka. Situace je ilustrována na následujícím obrázku.

Poznámka: Ukazuje se, že na homogenní rovnici můžeme převést rovnici tvaru

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

kde f je daná spojitá funkce jedné proměnné a $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ dané konstanty. Je-li $c_1 = c_2 = 0$, dostaneme rovnou homogenní rovnici. Jestliže tomu tak není, budeme rozeznávat dva případy.

1. Nechť $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Potom existuje λ tak, že $a_2 = \lambda a_1$, $\quad b_2 = \lambda b_1$ a rovnice je tvaru

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right).$$

Do této rovnice stačí zavést novou neznámou funkci předpisem $z = a_1x + b_1y$, abychom dostali rovnici se separovatelnými proměnnými. Skutečně

$$z' = a_1 + b_1y', \quad y' = \frac{1}{b_1}(z' - a_1) \Longrightarrow \frac{1}{b_1}z' = \frac{a_1}{b_1} + f\left(\frac{z + c_0}{\lambda z + c_2}\right),$$

což je rovnice se separovatelnými proměnnými.

2. Je-li $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, pak zavedeme novou nezávisle proměnnou i novou neznámou funkci předpisem $x = \xi + h$, $dx = d\xi$; $\quad y = \eta + k$, $dy = d\eta$, kde h a k jsou zatím neznámé parametry. Odtud dostaneme, že

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1h + b_1k + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2h + b_2k + c_2}\right).$$

Nyní stačí volit h a k tak, aby splňovaly soustavu lineárních rovnic

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0, \qquad a_2h + b_2k + c_2 = 0,$$

což můžeme vzhledem k podmínce $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ splnit a dostaneme homogenní rovnici.

Příklady: 1. Najděte obecné řešení rovnice $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$.

Řešení: Poněvadž je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3},$$

stačí zavést novou neznámou funkci

$$z = 2x + y, \ \ y' = z' - 2 \Longrightarrow z' - 2 = \frac{z + 1}{2z - 3} \Longrightarrow z' = \frac{5(z - 1)}{2z - 3}.$$

Jestliže odseparujeme proměnné, dostaneme dále

$$\frac{2z - 3}{5(z - 1)}\,dz = \frac{1}{5}\cdot\frac{2(z - 1) - 1}{z - 1}\,dz = dx \Longrightarrow \frac{2}{5}z - \frac{1}{5}\ln|\,z - 1\,| = x + \frac{1}{5}\ln|\,C\,|.$$

Po dosazení je tedy

$$4x + 2y - \ln|\,2x + y - 1\,| = 5x + \ln|\,C\,| \Longrightarrow 2y - x = \ln|\,C(2x + y - 1)\,|$$

a obecné řešení je

$$e^{2y - x} = C(2x + y - 1).$$

2. Řešte rovnici
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-7x + 3y + 7}{3x - 7y - 3} .$$

Řešení: Položme $x = \xi + h$, $y = \eta = k$. Jestliže dosadíme do dané rovnice, dostaneme
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-7\xi + 3\eta - 7h + 3k + 7}{3\xi - 7\eta + 3h - 7k - 3}$$
a odtud $-7h + 3k + 7 = 0$, $3h - 7k - 3 = 0$ s řešením $h = 1$, $k = 0$. Do rovnice
$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-7\xi + 3\eta}{3\xi - 7\eta}$$
zavedeme substituci
$$\frac{\eta}{\xi} = u\,,\ \eta = \xi\,u\,,\ \frac{d\eta}{d\xi} = u + \xi\frac{du}{d\xi} \Longrightarrow u + \xi\frac{du}{d\xi} = \frac{-7 + 3u}{3 - 7u} \Longrightarrow \xi\frac{du}{d\xi} = \frac{7(u^2 - 1)}{3 - 7u} .$$
Jestliže odseparujeme proměnné, dostaneme dále
$$\frac{3 - 7u}{7(u^2 - 1)}\,du = \frac{d\xi}{\xi}\,,\quad \frac{3 - 7u}{u^2 - 1} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1} \Longrightarrow 3 - 7u = A(u + 1) + B(u - 1)\,,$$
což pro $u = 1$ dává $-4 = 2A \Rightarrow A = -2$ a pro $u = -1$ dostaneme $10 = -2B \Rightarrow B = -5$. Po intergaci máme
$$-\frac{2}{7}\ln|\,u{-}1\,| - \frac{5}{7}\ln|\,u{+}1\,| = \ln|\,\xi\,| + \frac{1}{7}\ln|\,C\,| \Longrightarrow C\xi^7(u{-}1)^2(u{+}1)^5 = 1 \Longrightarrow C(\eta{-}\xi)^2(\eta{+}\xi)^5 = 1 .$$
Poněvadž je $\xi = x - 1$, $\eta = y$, dostaneme, že obecné řešení má tvar
$$C(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = 1 .$$
Snadno se přesvědčíme, že tato implicitně zadaná funkce je skutečně řešením dané rovnice. Je
$$2C(y - x + 1)(y + x - 1)^5(y' - 1) + 5C(y - x + 1)^2(y + x - 1)^4(y' + 1) = 0$$
a odtud
$$y'\left\{2(y + x - 1) + 5(y - x + 1)\right\} = 2(y + x - 1) - 5(y - x + 1)\,,\quad \text{neboli}\quad y' = \frac{7x - 3y - 7}{-3x + 7y + 3} .$$

C. Lineární rovnice prvého řádu.

Definice: Lineární rovnicí prvého řádu nazýváme diferenciální rovnici tvaru
$$y' = p(x)y + q(x)\,,$$
kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou dané spojité funkce.

Řešení: Řešení lineární rovnice rozdělíme do dvou kroků.
1. Nejdříve řešíme tzv. zkrácenou rovnici nebo rovnici bez pravé strany
$$y' = p(x)y .$$
To je rovnice se separovatelnými proměnnými. Jestliže ji tedy vyřešíme, dostaneme
$$\frac{dy}{dx} = p(x)y\,,\ \frac{dy}{y} = p(x)dx\,,\ \ln|\,y\,| = \int p(x)\,dx + \ln|\,C\,| \Longrightarrow y = Ce^{\int p(x)\,dx} .$$

Poslední rovnost representuje obecné řešení rovnice bez pravé strany.

2. V dalším kroku použijeme postupu, který se nazývá metoda variace konstanty. Jejím účelem je nalezení jednoho partikulárního řešení původní rovnice. Konstantu C v obecném řešení zkrácené rovnice nahradíme neznámou funkcí proměnné x a budeme požadovat, aby funkce

$$y = C(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

vyhovovala původní rovnici. Platí tedy

$$y' = C'(x)e^{\int p(x)\,dx} + C(x)e^{\int p(x)\,dx}p(x)$$

a dosadíme-li do původní rovnice, dostaneme

$$C'(x)e^{\int p(x)\,dx} + C(x)e^{\int p(x)\,dx}p(x) = p(x)C(x)e^{\int p(x)\,dx} + q(x) \quad \text{a odtud} \quad C'(x) = q(x)e^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

Tedy

$$C(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)\,dx}dx + K\,, \quad \text{neboli} \quad y = \left\{\int q(x)e^{-\int p(x)\,dx}dx + K\right\}e^{\int p(x)\,dx}\,.$$

Obecné řešení dané rovnice je tedy tvaru

$$y = \widehat{y} + y_p = Ke^{\int p(x)\,dx} + e^{\int p(x)\,dx}\cdot\int q(x)e^{-\int p(x)\,dx}dx\,.$$

Poznámka: Ukazuje se, že obecné řešení lineární diferenciální rovnice prvého řádu je součtem obecného řešení rovnice bez pravé strany $\widehat{y}$ a jednoho pevného (partikulárního) řešení původní rovnice y_p. V následující kapitole bude tato záležitost formulována přesně a navíc ukážeme, že takováto situace je typická pro lineární diferenciální (a nejen diferenciální) rovnice, po případě soustavy lineárních diferenciálních rovnic.

Příklad: Řešte rovnici $y' = \frac{y}{2(x+1)} + e^x\sqrt{x+1}\,$.

Řešení: 1. Rovnice bez pravé strany je

$$y' = \frac{y}{2(x+1)}\,, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2(x+1)}\,, \quad \ln|\,y\,| = \frac{1}{2}\ln|\,x+1\,| + \ln|\,C\,|\,, \quad \text{neboli} \quad y = C\sqrt{x+1}$$

je obecné řešení zkrácené rovnice.

2. Jestliže využijeme metodu variace konstanty, můžeme psát

$$y = C(x)\sqrt{x+1} \Longrightarrow y' = C'(x)\sqrt{x+1} + \frac{C(x)}{2\sqrt{x+1}}$$

a po dosazení do dané rovnice máme

$$C'(x)\sqrt{x+1} + \frac{C(x)}{2\sqrt{x+1}} = \frac{C(x)\sqrt{x+1}}{2(x+1)} + e^x\sqrt{x+1}\,, \quad \text{neboli} \quad C'(x) = e^x \Longrightarrow C(x) = e^x + K$$

a obecné řešení je

$$y = (e^x + K)\sqrt{x+1}\,.$$

Definice: Rovnici tvaru

$$y' = p(x)\,y + q(x)\,y^{\alpha}\,,$$

kde $p(x)$ a $q(x)$ jsou dané spojité funkce a $\alpha \in \mathbf{R}$ je libovolné, nazýváme Bernoulliho rovnicí.

Poznámka: Je-li $\alpha = 0$, dostaneme lineární rovnici prvého řádu, je-li $\alpha = 1$, je dané rovnice rovnicí se separovatelnými proměnnými.

Ukazuje se však, že pro libovolnou hodnotu α můžeme Bernoulliho rovnici převést na lineární rovnici prvého řádu. Skutečně, jestliže rovnici $y' = p(x)\,y + q(x)\,y^\alpha$ vydělíme y^α, dostaneme

$$y'\,y^{-\alpha} = p(x)\,y^{1-\alpha} + q(x)\,.$$

do této rovnice zavedeme novou neznámou funkci $z = y^{1-\alpha}$. Potom platí

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\,y' \quad \text{tedy} \quad z' = (1-\alpha)p(x)\,z + (1-\alpha)q(x) = 0\,,$$

což je lineární rovnice.

Příklad: Řešte rovnici $y' = \frac{1}{2x}\,y - \frac{1}{2y}$.

Řešení: Daná rovnice je Bernoulliho ($\alpha = -1$) a nejdříve ji upravíme. Je $y\,y' = \frac{y^2}{2x} - \frac{1}{2}$ a tedy zavedeme novou neznámou funkci předpisem $z = y^2$. Poněvadž je $z' = 2y\,y'$, dostaneme po dosazení rovnici $z' = \frac{z}{x} - 1$. To je lineární rovnice se zkrácenou rovnicí $z' = \frac{z}{x}$ a řešením $z = Cx$. Jestliže použijeme variace konstanty, dostaneme dále

$$z' = C'(x)\,x + C(x) \Longrightarrow C'(x)\,x + C(x) = C(x) - 1 \Longrightarrow C'(x) = -\frac{1}{x} \Longrightarrow C(x) = -\ln|\,x\,| + K$$

a obecné řešení je tedy

$$z = y^2 = x(\,K - \ln|\,x\,|\,)\,.$$

D. <u>Exaktní rovnice</u>.

Definice: Exaktní diferenciální rovnicí nazýváme rovnici tvaru

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\,,$$

kde levá strana je totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x,y)$.

Poznámka: Obecné řešení exaktní diferenciální rovnice má tvar

$$F(x,y) = C\,,$$

kde $F(x,y)$ je tzv. primitivní funkce k totálnímu diferenciálu $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. To je zřejmé. Co však není na prvý pohled jasné je způsob, jak máme poznat, že výraz $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ je skutečně totální diferenciál. Odpověď na tuto otázku nám dá následující věta.

Věta: Předpokládejme, že funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ mají spojité parciální derivace prvého řádu. Potom je výraz

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

totálním diferenciálem nějaké funkce $F(x,y)$ právě když

$$\frac{\partial\,P(x,y)}{\partial\,y} = \frac{\partial\,Q(x,y)}{\partial\,x}\,.$$

Důkaz: Nechť existuje funkce $F(x,y)$ tak, že

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,.$$

Potom platí

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)\,.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,.$$

Obrácenou implikaci nebudeme dokazovat, poněvadž vyžaduje znalost křivkového integrálu. S ním se seznámíme v textu MA3.

Příklad: Najděte řešení rovnice

$$x(x^2+y^2-a^2) + y(x^2+y^2+a^2)y' = 0\,.$$

Řešení: Je

$$P(x,y) = x(x^2+y^2-a^2)\,,\; Q(x,y) = y(x^2+y^2+a^2) \quad \text{a odtud} \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,.$$

Jedná se tedy o exaktní diferenciální rovnici a potřebujeme vypočítat primitivní funkci (potenciál) $F(x,y)$. Poněvadž je $P(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, plyne odtud, že

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{a^2x^2}{2} + L(y)\,.$$

Integrační konstanta závisí na proměnné y, vzhledem k tomu, že se chová při derivování podle x jako konstanta. Dále musí platit

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2y + L'(y) = Q(x,y) = y(x^2+y^2+a^2)\,, \quad \text{tedy} \quad L'(y) = y(y^2+a^2)\,.$$

Odtud dostaneme $L(y) = \frac{y^4}{4} + \frac{a^2y^2}{2} + K$, kde K je konstanta. Tedy funkce $F(x,y)$ je tvaru

$$F(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2)}{4} + K$$

a obecné řešení je

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = C\,.$$

Poznámka: Není-li výraz $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ totálním diferenciálem, můžeme si někdy pomoci tak, že rovnici $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ vynásobíme tzv. integračním faktorem, což je funkce $\mu(x,y)$ taková, že rovnice

$$\mu(x,y)\,P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0$$

je již exaktní. Musí tedy platit

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \quad \text{tj.} \quad P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\,\frac{\partial P}{\partial y} = Q\,\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial Q}{\partial x}$$

a dostaneme parciální diferenciální rovnici 1. řádu

$$Q\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\,\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0\,.$$

Vyřešit tuto rovnici se nám ve většině případů nepodaří, jediný případ, kdy máme šanci na úspěch, je, pokud náhodou funkce μ je funkcí pouze jedné proměnné. Dostaneme totiž obyčejnou diferenciální rovnici prvého řádu.

5.1.3 Rovnice nerozřešené vzhledem k 1. derivaci.

Poznámka: V tomto paragrafu si všimneme rovnice tvaru $f(x, y, y') = 0$, tedy rovnice nerozřešené vzhledem k 1. derivaci. Ukazuje se, že v těchto případech bývá často porušena podmínka jednoznačnosti a objevuje se tzv. fenomen singulárního řešení. Následující definice nám situaci trochu přiblíží.

Definice: Buď dána diferenciální rovnice $f(x, y, y') = 0$. Soustavu řešení tvaru $F(x, y, C) = 0$, kde C je libovolná konstanta, nazveme obecným řešením dané rovnice. Je-li hodnota C zvolena pevně (např. $C = C_0$), pak křivku $F(x, y, C_0) = 0$ nazveme partikulárním řešením.
Řešení $G(x, y) = 0$, které nelze získat z obecného řešení žádnou volbou parametru C, nazveme singulárním řešením dané diferenciální rovnice.

Poznámka: Je-li $G(x, y) = 0$ řešením rovnice $f(x, y, y') = 0$, které nemůžeme získat z obecného řešení žádnou volbou konstanty, bude mít toto řešení společný bod s každým řešením $F(x, y, C) = 0$, bude tedy tato řešení „obalovat.“ Řekneme, že je obálkou jednoparametrické soustavy křivek $F(x, y, C) = 0$. Platí následující věta.

Věta: Diferenciální rovnice $f(x, y, y') = 0$ má singulární řešení právě když má soustava jejích partikulárních integrálů obálku.

Příklad: Soustava parabol $y = \frac{1}{2}(x - a)^2$, $a \in \mathbf{R}$ má obálku $y = 0$. Je totiž $y' = x - a$ a odtud $y = \frac{1}{2}y'^2$, což má řešení $y = 0$. viz obrázek.

Rovnice $y = \frac{1}{2}y'^2$ je tzv. Lagrangeova rovnice, jak uvedeme později, ale již nyní stojí za to se na ni podívat trochu podrobněji. Paraboly $y = \frac{1}{2}(x - a)^2$ mají tu vlastnost, že každým bodem $[x_0, y_0]$, $y_0 > 0$ procházejí právě dvě. Skutečně, je-li $y_0 = \frac{1}{2}(x_0 - a)^2$, pak

$$a^2 - 2ax_0 + x_0^2 - 2y_0 = 0 \Longrightarrow a_{1,2} = x_0 \pm \sqrt{2y_0}\,.$$

Jestliže se zeptáme, za jakých podmínek existuje jediné řešení, musíme danou rovnici vyřešit vzhledem k y'. Dostaneme dvě rovnice
1. $y' = \sqrt{2y}$ s řešením $\sqrt{2y} = x + C$ pro $x \in \langle -C, +\infty)$ a
2. $y' = -\sqrt{2y}$ s řešením $\sqrt{2y} = K - x$ pro $x \in (-\infty, K\rangle$.

Poznámka: V dalším se budeme zabývat otázkou nalezení obálky jednoparametrické soustavy křivek $F(x, y, \alpha) = 0$.

Věta: Buď dána jednoparametrická soustava křivek $F(x, y, \alpha) = 0$. Potom obálku dané sostavy získáme vyloučením parametru α ze soustavy rovnic

$$F(x, y, \alpha) = 0\,, \quad \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha}\,.$$

Důkaz: Jsou-li $F(x, y, \alpha)$ a $F(x, y, \alpha + h)$ dvě křivky daného systému, potom je

$$\frac{1}{h}\{F(x, y, \alpha + h) - F(x, y, \alpha)\} = 0 \text{ a tedy } \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{F(x, y, \alpha + h) - F(x, y, \alpha)\} = 0\,.$$

Příklad: Najděte obálku soustavy kružnic $x^2 + (y-a)^2 - \frac{1}{2}\,a^2 = 0$.

Řešení: Musí platit

$$F(x,y,a) = x^2 + (y-a)^2 - \frac{1}{2}\,a^2 = 0\,, \qquad \frac{\partial\, F(x,y,a)}{\partial\, a} = -2(y-a) - a = 0\,.$$

Z druhé rovnice dostaneme $a = 2y$ a dosazením do prvé rovnice

$$x^2 + y^2 - 2y^2 = 0 \Longrightarrow y^2 = x^2 \quad \text{a obálkou je tedy dvojice přímek} \quad y = \pm x\,.$$

A. Clairautova rovnice.

Definice: Diferenciální rovnici tvaru

$$y = x\,y' + f(y')\,,$$

kde f je diferencovatelná funkce, nazýváme Clairautovou rovnicí.

Řešení: Položme $y' = p$. Potom je

$$y = xp + f(p) \quad \text{a po zderivování} \quad p = p + xp' + f'(p)\,p'\,, \quad \text{neboli} \quad p'(x + f'(p)) = 0\,.$$

1. Nechť $p' = 0$. Potom je $y' = C$ a obecné řešení je jednoparametrická soustava přímek

$$y = Cx + f(C)\,.$$

2. Singulární řešení dané rovnice dostaneme řešením rovnice $x + f'(p) = 0$.

Věta: Obecným řešením Clairautovy rovnice je jednoparametrický systém přímek, který má vždy obálku, tvořící singulární řešení dané rovnice.

Příklad: Řešte rovnici $y = xy' + y'^2$.

Řešení: Obecné řešení je tvaru $y = Cx + C^2$, kde C je libovolná konstanta. Jestliže tuto rovnost zderivujeme podle parametru C, dostaneme $x + 2C = 0$ a po dosazení do první rovnice $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$, což je singulární řešení. Jak je vidět z obrázku, jednotlivé partikulární integrály tvoří tečny k singulárnímu řešení.

B. Lagrangeova rovnice.

Definice: Diferenciální rovnici tvaru

$$y = x\varphi(y') + \psi(y')\,,$$

kde φ a ψ jsou diferencovatelné funkce, nazýváme Lagrangeovou rovnicí.

Řešení: Při řešení Lagrangeovy rovnice postupujeme analogicky jako v případě rovnice Clairautovy. Označíme-li opět $y' = p$, dostaneme

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \Longrightarrow p = \varphi(p) + x\,\varphi'(p)\,\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\,\frac{dp}{dx}\,.$$

Odtud plyne

$$\frac{dx}{dp} = x \cdot \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}\,.$$

To je lineární rovnice prvého řádu pro nezávisle proměnnou p a neznámou funkci x. Po vyřešení této rovnice dosadíme do rovnice $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ a dostaneme parametrické rovnice integrálních křivek. Výsledek nyní shrneme do věty.

Věta: Řešení Lagrangeovy rovnice lze převést na řešení lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci x.

Příklad: Řešte rovnici $y = (x+1)y'^2$.

Řešení: Jestliže položíme $y' = p$, dostaneme

$$y = (x+1)p^2 \Longrightarrow p = p^2 + 2p\,(x+1)\,\frac{dp}{dx}\,.$$

Je-li $p = 0$, dostáváme řešení $y = 0$ a ukážeme, že to je singulární integrál. Jinak pro $p \neq 0$ máme

$$(1-p)\,\frac{dx}{dp} = 2x + 2 \quad \text{a pro} \quad p \neq 1 \quad \text{platí} \quad \frac{dx}{dp} = \frac{2x}{1-p} + \frac{2}{1-p}\,.$$

Je-li $p = 1$, potom $y = x + 1$ je řešení, jak se ukáže, partikulární.

1. Nechť $\frac{dx}{dp} = \frac{2x}{1-p}$. Potom

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dp}{1-p} \Longrightarrow \ln|\,x\,| = \ln|\,C\,| - 2\ln|\,1-p\,| \Longrightarrow x(p) = \frac{2}{(1-p)^2}\,.$$

2. Předpokládejme, že $x(p) = \frac{C(p)}{(1-p)^2}$. Pak

$$x'(p) = \frac{C'(p)}{(1-p)^2} + \frac{2\,C(p)}{(1-p)^3} \text{ a po dosazení } \frac{C'(p)}{(1-p)^2} = \frac{2}{1-p} \Rightarrow C'(p) = 2(1-p)\,;\; C(p) = K - (1-p)^2\,.$$

Obecné řešení v parametrickém tvaru je tedy

$$x(p) = \frac{K}{(1-p)^2} - 1\,, \qquad y(p) = \frac{K\,p^2}{(1-p)^2}\,.$$

Jestliže se budeme zajímat o to, zda lze nalézt řešení v explicitním tvaru, musíme rozeznávat několik možností. Je

$$y'^2 = \frac{y}{x+1} \quad \text{a odtud} \quad y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}\,.$$

1. Buď $y' = \sqrt{\frac{y}{x+1}}$ a nechť

α) $x > -1$, $y > 0$. Potom

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x+1}}\,, \quad 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x+1} + 2C\,, \quad y = (\sqrt{x+1} + C)^2\,.$$

Pro $C = 0$ dostaneme řešení $y = x + 1$.

β) Je-li $x < -1$, $y < 0$, pak

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = \frac{dx}{\sqrt{-(x+1)}}\,, \quad -2\sqrt{-y} = -2\sqrt{-(x+1)} - 2K\,, \quad y = -\left(\sqrt{-(x+1)} + K\right)^2$$

a pro $K = 0$ dostaneme opět $y = x + 1$.
2. Nechť $y' = -\sqrt{\frac{y}{x+1}}$ a předpokládejme, že
α) $x > -1$, $y > 0$. Potom

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{dx}{\sqrt{x+1}}\,, \quad 2\sqrt{y} = -2\sqrt{x+1} + 2L\,, \quad y = (L - \sqrt{x+1})^2\,.$$

Pro $L = 0$ dostaneme řešení $y = x + 1$.
β) Je-li $x < -1$, $y < 0$, pak

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = -\frac{dx}{\sqrt{-(x+1)}}\,, \quad -2\sqrt{-y} = 2\sqrt{-(x+1)} - 2M\,, \quad y = -\left(M - \sqrt{-(x+1)}\right)^2$$

a pro $M = 0$ dostaneme opět $y = x + 1$.
Vyloučením parametru ze soustavy rovnic

$$F(x, y, \alpha) = 0\,, \qquad \frac{\partial\, F(x, y, \alpha)}{\partial\, \alpha} = 0$$

dostaneme ve všech čtyřech případech singulární řešení $y = 0$. (α je postupně rovno C, K, L, M) .
Můžeme se též pokusit o vyloučení parametru p z rovnic

$$x + 1 = \frac{K}{(1-p)^2}\;; \qquad y = \frac{K\,p^2}{(1-p)^2}\,.$$

To již nebudeme provádět detailně, platí však, že pro případ $K > 0$ dostaneme případy 1α) a 2α) , pro $K < 0$ nastávají případy 1β) a 2β) .
Uvedený příklad ukazuje s jakými problémy se setkáváme, jestliže se snažíme řešit rovnici tvaru $f(x, y, y') = 0$. I když bylo zadání poměrně jednoduché, řešení není zcela triviální. Ve většině případů se nám však nepodaří vůbec takovou rovnici vyřešit.

5.2 Lineární rovnice $n-$tého řádu.

5.2.1 Struktura řešení.

Definice: Diferenciální rovnici tvaru

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)\,,$$

kde $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t), g(t)$ jsou dané komplexní funkce, definované v jistém intervalu $\mathcal{I}$, $a_n(t) \neq 0$ v $\mathcal{I}$, nazveme lineární diferenciální rovnicí $n-$tého řádu. Je-li $f(t) \equiv 0$ v $\mathcal{I}$, řekneme, že daná rovnice je homogenní (nebo bez pravé strany, po případě zkrácená).

Poznámky: 1. Poněvadž je $a_n(t) \neq 0$, můžeme lineární diferenciální rovnici $n-$tého řádu vždy převézt na tvar

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t)\,.$$

V tomto tzv. normovaném tvaru se lineární rovnice $n-$tého řádu také nejčastěji vyskytuje.

2. V následující větě uvedeme bez důkazu existenční větu.

Věta: Nechť jsou funkce $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t), f(t)$ spojité v intervalu $\mathcal{I}$. Buď $t_0 \in \mathcal{I}$ a $y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}$ daná komplexní čísla. Potom platí

1. Rovnice

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

má řešení $y = y(t)$ (komplexní) v intervalu $\mathcal{I}$ takové, že platí

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

2. Toto řešení je jediné v intervalu $\mathcal{I}$, tj. je-li $z(t)$ řešením dané rovnice v intervalu $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$. pro něž

$$z(t_0) = y_0, z'(t_0) = y_0', \dots, z^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)},$$

pak $z(t) = y(t)$ v $\mathcal{I}_1$.
Jsou-li $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t), f(t)$ reálné funkce, $y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}$ reálná čísla, je i řešení $y(t)$ reálné.

Poznámka: Funkce $y(t)$, vyhovující předchozí větě, se nazývá řešení počáteční nebo Cauchyovy úlohy.

Definice: Symbol

$$L = a_n(t)\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t)\frac{d}{dt} + a_0(t)$$

nazveme lineárním diferenciálním operátorem a výraz $L[y]$, definujeme předpisem

$$L[y] = a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y.$$

Lemma: Jsou-li $y_1, y_2, \dots, y_r$ funkce, které mají $n-$tou derivaci, $C_1, C_2, \dots, C_r$ konstanty, potom

$$L\left[\sum_{j=1}^{r} C_j y_j\right] = \sum_{j=1}^{r} C_j L[\,y_j].$$

Důkaz: Je zřejmý; stačí použít vlastností derivování.

Poznámka: V dalším výkladu si všimneme vlastností homogenní rovnice. Tu můžeme pomocí našeho zápisu vyjádřit stručně ve tvaru $L[y] = 0$.

Věta: Jsou-li $y_1, y_2, \dots, y_r$ řešení diferenciální rovnice $L[y] = 0$, $C_1, C_2, \dots, C_r$ libovolné konstanty (komplexní), pak je i funkce $y = \sum\limits_{j=1}^{r} C_j y_j$ řešením dané rovnice.

Důkaz: Plyne okamžitě z vlastností diferencovatelných funkcí.

Věta: Má-li lineární diferenciální rovnice $L[y] = 0$ s reálnými koeficienty $a_j(t)$ komplexní řešení $y(t) = u(t) + iv(t)$, pak jsou funkce $u(t)$ a $v(t)$ řešením dané rovnice.

Důkaz: Platí $0 = L[y] = L[u + iv] = L[u] + iL[v]$ a vzhledem k tomu, že $L[u]$ i $L[v]$ jsou reálná, plyne odtud, že $L[u] = L[v] = 0$.

Definice: Buďte $f_1(t), f_2(t), \dots, f_r(t)$ funkce, které jsou definovány v intervalu $\mathcal{I}$. Řekneme, že jsou tyto funkce lineárně závislé na $\mathcal{I}$, jestliže existují konstanty $C_1, C_2, \dots, C_r$, které nejsou všechny nulové tak, že pro všechna $t \in \mathcal{I}$ platí

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) + \cdots + C_r f_r(t) = 0 .$$

Jestliže je tuto rovnost možné splnit jedině tak, že $C_1 = C_2 = \cdots = C_r = 0$, pak řekneme, že jsou tyto funkce lineárně nezávislé.

Definice: Nechť mají funkce $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ v intervalu $\mathcal{I}$ derivace až do řádu $n-1$. Potom funkci

$$W(t) = W_{f_1,\dots,f_r}(t) = \begin{vmatrix} f_1(t), & f_2(t), & \dots, & f_n(t) \\ f_1'(t), & f_2'(t), & \dots, & f_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(t), & f_2^{(n-1)}(t), & \dots, & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

nazýváme Wronského determinantem nebo wronskiánem.

Věta: Jsou-li funkce $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ lineárně závislé v intervalu $\mathcal{I}$, je $W(t) \equiv 0$ v $\mathcal{I}$.

Důkaz: Zřejmý.

Poznámka: Obrácené tvrzení neplatí. Je-li např. $f_1(t) = t^3$, $f_2(t) = |t|^3$, $\mathcal{I} = (-a, a)$ $a > 0$, je $W(t) \equiv 0$ v $\mathcal{I}$, i když jsou funkce f_1, f_2 lineárně nezávislé v $\mathcal{I}$. Jak však ukazuje následující věta, toto se nemůže stát, jestliže jsou funkce $f_1, f_2, \dots, f_n$ lineárně nezávislá řešení lineární diferenciální rovnice.

Věta: Jsou-li $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineárně nezávislá řešení rovnice $L[y] = 0$ v intervalu $\mathcal{I}$, kde $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ jsou spojité v $\mathcal{I}$, pak je wronskián

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \dots, & y_n \\ y_1', & y_2', & \dots, & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \dots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{pro všechna} \quad t \in \mathcal{I} .$$

Důkaz: Předpokládejme, že $W(t_0) = 0$ a zvolme čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tak aby tvořila netriviální řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 y_1(t_0) & +\alpha_2 y_2(t_0) & + \dots & +\alpha_n y_n(t_0) & = 0 \\ \alpha_1 y_1'(t_0) & +\alpha_2 y_2'(t_0) & + \dots & +\alpha_n y_n'(t_0) & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(t_0) & +\alpha_2 y_2^{(n-1)}(t_0) & + \dots & +\alpha_n y_n^{(n-1)}(t_0) & = 0 . \end{array}$$

Označme $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n$. Potom je y řešením rovnice $L[y] = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $y(t_0) = y'(t_0) = \cdots = y^{(n-1)}(t_0) = 0$. Podle věty o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy je $y \equiv 0$ v $\mathcal{I}$. To je však spor s lineární nezávislostí funkcí $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Věta: Buď

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t) y' + p_n(t) y = 0$$

diferenciální rovnice $n-$tého řádu, $y_1, y_2, \dots, y_n$ n jejích řešení v intervalu $\mathcal{I}$, $t_0 \in \mathcal{I}$. Potom platí

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p_1(\tau)\, d\tau} .$$

Důkaz: Platí

$$W'(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ -\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(t) y_1^{(n-j)} & -\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(t) y_2^{(n-j)} & \dots & -\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(t) y_n^{(n-j)} \end{vmatrix} = -p_1(t) W(t) .$$

Jestliže vyřešíme tuto diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými, dostaneme tvrzení věty.

Poznámka: Důkaz předchozí věty se opírá o základní vlastnosti determinantů a větu o derivování determinantu. Tuto větu pro osvěžení zopakujeme. Je-li

$$F(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix} ,$$

kde funkce $f_{ij}(t)$ mají derivaci, potom

$$F'(t) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{k1}'(t) & \dots & f_{kn}'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix} .$$

Pro důkaz tohoto tvrzení si stačí vzpomenout na definici determinantu a pravidlo pro derivování součinu n funkcí.

Definice: Buďte $y_1, y_2, \dots, y_n$ řešení lineární diferenciální rovnice $n-$tého řádu $L]y] = 0$ v intervalu $\mathcal{I}$. Řekneme, že tato řešení tvoří fundamentální systém, jsou-li v intervalu $\mathcal{I}$ lineárně nezávislá.

Věta: Nechť $y_1, y_2, \dots, y_n$ tvoří v intervalu $\mathcal{I}$ fundamentální systém řešení rovnice $L[y] = 0$. Potom lze každé řešení y této rovnice vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí $y_1, y_2, \dots, y_n$ ve tvaru

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j\, y_j ,$$

kde konstanty C_j jsou určeny jednoznačně.

Důkaz: Označme $\widehat{y}(t)$ libovolné řešení v intervalu $\mathcal{I}$ a buď $t_0 \in \mathcal{I}$. Potom má soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(t_0) &= c_1\, y_1(t_0) + c_2\, y_2(t_0) + \cdots + c_n\, y_n(t_0) \\
\widehat{y}'(t_0) &= c_1\, y_1'(t_0) + c_2\, y_2'(t_0) + \cdots + c_n\, y_n'(t_0) \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \\
\widehat{y}^{(n-1)}(t_0) &= c_1\, y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2\, y_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n\, y_n^{(n-1)}(t_0)
\end{aligned}$$

jediné řešení $\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \dots\,,\ \alpha_n$ a stačí položit

$$\widehat{y}(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, y_j\,.$$

Důsledek: Všechna řešení lineární diferenciální rovnice $n-$ tého řádu $L[y] = 0$ tvoří vektorový prostor dimense n. Libovolný fundamentální systém řešení tvoří v tomto prostoru bázi.

Poznámka: Někdy se nám podaří pomocí různých metod nalézt partikulární řešení rovnice $L[y] = 0$. To nám pak umožní snížit řád dané rovnice o jednu. Popis tohoto snížení je dán v důkazu následující věty.

Věta: Je-li y_1 nenulové řešení lineární diferenciální rovnice $n-$tého řádu $L[y] = 0$, pak je možmo řešení této rovnice převézt na řešení lineární diferenciální rovnice $(n-1)-$ho řádu.

Důkaz: Buď rovnice tvaru

$$a_n(t)\, y^{(n)} + a_{n-1}\,(t) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t)\, y = 0\,.$$

Substitucí $y = y_1\, z$ zavedeme novou neznámou funkci z. Platí

$$y' = y_1' z + y_1 z'\,, \quad y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''\,,\ \dots\,,\ y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_1^{(n-k)}\, z^{(k)}\,.$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$\begin{gathered}
a_n(t)\, y_1 z^{(n)} + \{\, n a_n(t)\, y_1' + a_{n-1}(t)\, y_1 \}\, z^{(n-1)} + \cdots + \\
+ \Big\{\, a_n(t)\, y_1^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y_1' + a_0(t)\, y_1 \Big\}\, z = 0\,.
\end{gathered}$$

Vzhledem k tomu, že koeficient u z je roven 0 (y_1 je řešení), dostaneme rovnici

$$b_n(t)\, z^{(n)} + b_{n-1}(t)\, z^{(n-1)} + \cdots + b_1(t)\, z' = 0\,.$$

Položíme-li nyní $z' = u$, dostáváme lineární rovnici $(n-1)-$ho řádu.

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice $y'' + \frac{2}{x}\, y' + y = 0$, jestliže víte, že $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ je partikulární integrál.

Řešení: Poněvadž je

$$y_1' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\,, \quad y_1'' = -\frac{\sin x}{x} - \frac{2\cos x}{x^2} + \frac{2\sin x}{x^3}\,,$$

snadno zjistíme, že y_1 je skutečně partikulární řešení. Jestliže označíme $y = y_1\, z$, potom je

$$y' = y_1'\, z + y_1\, z'\,, \quad y'' = y_1''\, z + 2y_1'\, z' + y_1\, z''$$

a po dosazení do rovnice dostaneme

$$y_1\, z'' + \left\{2y_1' + \frac{2}{x}\, y_1\right\} z' + \left\{y_1'' + \frac{2}{x}\, y_1' + y_1\right\} z = 0\,.$$

Položíme-li $z' = u$, dostaneme

$$y_1\, u' + \left\{2y_1' + \frac{2}{x}\, y_1\right\} u = 0\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\sin x}{x} u' + \left\{\frac{2\cos x}{x} - \frac{2\sin x}{x^2} + \frac{2\sin x}{x^2}\right\} u = 0\,.$$

Odtud dále

$$u'\,\sin x + 2u\,\cos x = 0\,, \quad \frac{du}{u} = -\frac{2\cos x}{\sin x}\, dx\,, \quad \ln|u| = \ln|C| - 2\ln|\sin x|\,,$$

tedy

$$z' = u = \frac{C}{\sin^2 x} \Longrightarrow z = -C\mathrm{cotg}\, x$$

a pro $C = -1$ dostaneme druhé řešení $y_2 = \frac{\cos x}{x}$. Obecné řešení má tedy tvar

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}\,.$$

Poznámka: Ve zbývající části tohoto paragrafu se budeme zabývat rovnicí $L[y] = f(t)$, kde $f(t)$ je spojitá funkce v intervalu $\mathcal{I}$, která není identicky rovna 0. Ukážeme, jak vypadá struktura řešení takové rovnice.

Lemma: Buďte y_1, y_2 dvě řešení rovnice $L[y] = f(t)$. Potom je funkce $y = y_1 - y_2$ řešením rovnice homogenní $L[y] = 0$.

Důkaz: Tvrzení je zřejmé.

Věta: Buď $y_1, y_2, \dots, y_n$ fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice $n-$tého řádu $L[y] = 0$. Potom má obecné řešení rovnice $L[y] = f(t)$ tvar

$$y = y_p + \sum_{j=1}^{n} C_j\, y_j\,,$$

kde y_p je jedno pevné partikulární řešení rovnice $L[y] = f(t)$.

Důkaz: Je-li y libovolné řešení rovnice $L[y] = f(t)$, pak $z = y - y_p$ je řešením rovnice homogenní $L]y] = 0$, tedy

$$z = \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_k \quad \text{a odtud} \quad y = y_p + \sum_{j=1}^{n} C_j\, y_j\,.$$

Poznámka: Předchozí věta ukazuje, před jakým úkolem stojíme, když chceme vyřešit lineární diferenciální rovnici $n-$tého řádu $L[y] = f(t)$. Úloha má dvě části:

1. Musíme nalézt fundamentální systém řešení homogenní rovnice $L[y] = 0$. Tento úkol se nám však obecně vyřešit nepodaří. V následujícím paragrafu ukážeme, jak toho lze dosáhnout pro rovnice s konstantními koeficienty a v kapitole, věnované metodám řešení lineárních diferenciálních rovnic pomocí řad, ukážeme, jak postupovat v některých případech u rovnice druhého řádu.

2. Musíme nalézt jedno partikulární řešení rovnice s pravou stranou $L]y] = f(t)$. Tuto úlohu lze sice úplně vyřešit, jak bude ukázáno v následující větě, popsaná metoda je však početně těžkopádná a tedy ne ve všech případech vhodná. Proto ukážeme v následujícím paragrafu efektivnější postup odhadu partikulárního integrálu. Zaplatíme však za to tím, že tuto metodu budeme moci použít pouze pro tzv. „harmonické“ pravé strany.

Lemma: Je-li y_1 partikulární řešení rovnice $L[y] = f_1(t)$ a y_2 partikulární řešení rovnice $L[y] = f_2(t)$, potom je $z = y_1 + y_2$ partikulární řešení rovnice $L[y] = f_1(t) + f_2(t)$.

Důkaz: Zřejmý.

Věta: Je-li $y_1, y_2, \dots, y_n$ fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice $n-$tého řádu $L[y] = f(t)$, pak existují funkce $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$ (určené jednoznačně až na aditivní konstantu) tak, že
$$y_p = \alpha_1(t)\, y_1 + \alpha_2(t)\, y_2 + \cdots + \alpha_n(t)\, y_n$$
je partilulární řešení rovnice $L[y] = f(t)$.

Důkaz: Hledejme partikulární řešení ve tvaru
$$y_p = C_1(t)\, y_1 + C_2(t)\, y_2 + \cdots + C_n(t)\, y_n\,,$$
kde $C_j(t)$ jsou zatím neznámé funkce. Jediná podmínka, kterou máme k disposici, je, že y_p musí splňovat danou rovnici $L[y] = f(t)$. Zbývajících $n-1$ podmínek si dodáme sami tak, abychom si nekoplikovali postupné derivování funkce y_p. Chceme se zbavit derivací funkcí $C_j(t)$, což lze realizovat následujícím způsobem. Požadujeme, aby platilo
$$\begin{array}{ccccc}
C_1'(t)\, y_1 & +C_2'(t)\, y_2 & + \dots & +C_n'(t)\, y_n & = 0 \\
C_1'(t)\, y_1' & +C_2'(t)\, y_2' & + \dots & +C_n'(t)\, y_n' & = 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
C_1'(t)\, y_1^{(n-2)} & +C_2'(t)\, y_2^{(n-2)} & + \dots & +C_n'(t)\, y_n^{(n-2)} & = 0 \\
C_1'(t)\, y_1^{(n-1)} & +C_2'(t)\, y_2^{(n-1)} & + \dots & +C_n'(t)\, y_n^{(n-1)} & = f(t)
\end{array}$$
Tato soustava má jediné řešení $C_1'(t), C_2'(t), \dots, C_n'(t)$, poněvadž její determinant je wronskián $W(t) \neq 0$. Stačí nyní položit $\alpha_j(t) = \int C_j'(t)\, dt + K_j$.

Poznámka: Metoda výpočtu partikulárního integrálu, předvedená v důkazu předchozího tvrzení, se nazývá metoda variace konstant.

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

Řešení: Nejdříve řešíme odpovídající rovnici bez pravé strany $y'' + y = 0$, která má zřejmě 2 nezávislá řešení $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, která tedy tvoří fundamentální systém řešení. Způsob, jak se k těmto řešením dostat, si ukážeme v následujícím paragrafu. Obecné řešení homogenní rovnice je tedy $\widehat{y} = C_1\, \cos x + C_2\, \sin x$.

Předpokládejme nyní, že
$$y_p = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x\,.$$
Potom je
$$y_p' = C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x - C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x$$
a jestliže položíme
$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0\,,$$

dostaneme dále

$$y_p'' = -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x - C_1(x)\cos x - C_2(x)\sin x\,.$$

Po dosazení do původní rovnice získáme soustavu lineárních rovnic

$$C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0$$

$$-C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\sin x}\,.$$

Pro determinant této soustavy platí

$$D = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

a odtud

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -1\,, \quad C_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = \operatorname{cotg} x$$

s řešením $C_1(x) = K_1 - x\,, \quad C_2(x) = K_2 + \ln|\sin x|\,.$ Obecné řešení je tedy tvaru

$$y = (K_1 - x)\cos x + (K_2 + \ln|\sin x|)\sin x = K_1\cos x + K_2\sin x + \sin x\ln|\sin x| - x\cos x\,.$$

5.2.2 Rovnice s konstantními koeficienty.

Poznámky: 1. Tento paragraf bude věnován vyšetřování lineární diferenciální rovnice $n-$tého řádu s konstantními koeficienty, tedy rovnici

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t)\,,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou konstanty. Tuto rovnici budeme opět pro stručnost označovat $L[y] = f(t)$.

2. Začneme vyšetřováním rovnice homogenní, neboli $L[y] = 0$ a pokusíme se nalézt řešení ve tvaru $y = e^{\lambda t}$. Jestliže dosadíme do rovnice $L[y] = 0$, dostaneme $L\left[e^{\lambda t}\right] = e^{\lambda t}F(\lambda) = 0$, kde $F(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Poněvadž je vždy $e^{\lambda t} \neq 0$, musí platit $F(\lambda) = 0$.

Definice: Polymon

$$F(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

nazýváme charakteristickým polynomem, příslušným lineární diferenciální rovnici

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

a algebraickou rovnici $F(\lambda) = 0$ charakteristickou rovnicí příslušné diferenciální rovnice.

Poznámka: Předchozí obrat ukazuje, že hledání fundamentálního systému řešení rovnice $L[y] = 0$ lze pro rovnice s konstantními koeficienty převézt na řešení algebraické rovnice $F(\lambda) = 0$. Základní věta algebry zaručuje, že každá takováto rovnice má právě n kořenů, jestliže každý počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost, ale už neříká nic o tom, jak tyto kořeny nalézt. Navíc je známo, že rovnice stupně pátého a vyššího nelze obecně algebraicky řešit. To je další praktické omezení naší snahy o řešení rovnice $L[y] = 0$, ale poskytuje nám alespoň možnost popsat strukturu řešení. Jak se v dalším ukáže, bude jistý rozdíl mezi případem, kdy charakteristická rovnice má pouze jednonásobné kořeny a případem vícenásobných kořenů.

Věta: Předpokládejme, že charakteristická rovnice $F(\lambda) = 0$ lineární diferenciální rovnice $n-$tého řádu $L[y] = 0$ má jednonásobné kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Potom jsou funkce

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad y_n = e^{\lambda_n t}$$

lineárně nezávislé a tvoří tedy fundamentální systém řešení.

Důkaz: Jestliže vypočteme wronskián, dostaneme

$$W(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}(\lambda_2-\lambda_1)\ldots(\lambda_n-\lambda_{n-1}).$$

Determinant, který jsme dostali je totiž van der Mondův determinant.

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice $y^{IV} - y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^4 - 1 = 0 \quad \text{s kořeny} \quad \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = -1\,,\ \lambda_3 = i\,,\ \lambda_4 = -i$$

a tedy fundamentální systém řešení má tvar

$$y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{-t}, \quad \widetilde{y_3} = e^{it}, \quad \widetilde{y_4} = e^{-it}.$$

Tyto funkce jsou podle předchozí věty skutečně lineárně nezávislé, mají však jednu vadu na kráse. Dvě řešení jsou komplexní, i když daná rovnice má reálné koeficienty. Jak bylo ukázáno v předchozím paragrafu, reálná i imaginární část $\widetilde{y_3}$ jsou též řešením dané rovnice. Poněvadž jsou navíc funkce $\widetilde{y_3}$ a $\widetilde{y_4}$ komplexně sdružené, dostaneme odtud, že reálný fundamentální systém řešení je

$$y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{-t}, \quad y_3 = \cos t, \quad y_4 = \sin t$$

a tedy obecné řešení má tvar

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t.$$

Poznámky: 1. Pokud má rovnice $L[y] = 0$ reálné koeficienty, má charakteristická rovnice $F(\lambda) = 0$ též reálné koeficienty a všechny její komplexní kořeny se vyskytují ve dvojicích tj. s každým komplexním kořenem α, $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$ má daná rovnice i kořen $\overline{\alpha}$, včetně příslušných násobností. To dále znamená, že dvojice funkcí $e^{\alpha t}$, $e^{\overline{\alpha} t}$ jsou funkce komplexně sdružené a odpovídající reálnou dvojici dostaneme tak, že najdeme $\operatorname{Re}\{e^{\alpha t}\}$ a $\operatorname{Im}\{e^{\alpha t}\}$. Obě tyto funkce jsou řešením dané rovnice a jsou navíc lineárně nezávislá. Platí totiž

$$\operatorname{Re}\left\{e^{\alpha t}\right\} = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha t} + e^{\overline{\alpha} t}\right), \quad \operatorname{Im}\left\{e^{\alpha t}\right\} = \frac{1}{2i}\left(e^{\alpha t} - e^{\overline{\alpha} t}\right).$$

Tato transformace má nenulový determinant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \neq 0$$

a převádí tedy lineárně nezávislé funkce na lineárně nezávislé funkce.

2. Reálnou a imaginární část funkce $e^{\alpha t}$ nejdeme snadno, jestliže využijeme Eulerovu identitu. Buď $\alpha = a + bi$, $b \neq 0$. Potom je

$$e^{\alpha t} = e^{(a+bi)t} = e^{at} \cdot e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

a tedy

$$\mathrm{Re}\,\{e^{\alpha t}\} = e^{at}\cos bt\,, \quad \mathrm{Im}\,\{e^{\alpha t}\} = e^{at}\sin bt\,.$$

3. Před tím, než budeme schopni popsat obecnou situaci s násobnými kořeny, musíme nejdříve odvodit, jak se transformuje diferenciální operátor L při zavedení nové neznámé funkce.

Lemma: Buď

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

lineární diferenciální operátor s konstantními koeficienty a charakteristickým polynomem $F(\lambda)$. Zavedeme-li novou neznámou funkci z předpisem $y(t) = e^{\mu t}\,z(t)$, kde μ je komplexní číslo, potom je $L[y] = e^{\mu t} M[z]$, kde $M[z]$ je opět lineární diferenciální operátor. Jeho charakteristický polynom G je dán vztahem $G(\lambda) = F(\lambda + \mu)$.

Důkaz: Je

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_n\, y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_n \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j\, e^{\mu t}\, z^{(k-j)} = e^{\mu t} \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j\, z^{(k-j)} = e^{\mu t} M[z]\,.$$

Dále

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j\, \lambda^{k-j} = F(\lambda + \mu)\,.$$

Lemma: Je-li λ $k-$násobným kořenem polynomu F, je $\lambda - \mu$ $k-$násobným kořenem polynomu G.

Důkaz: Je $F(\lambda) = F(\lambda - \mu + \mu) = G(\lambda - \mu)$.

Věta: Buď $L[y] = 0$ lineární diferenciální rovnice $n-$tého řádu s konstantními koeficienty a nechť má příslušná charakteristická rovnice $F(\lambda) = 0$ p různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ s násobnostmi $k_1, k_2, \ldots, k_p$. Potom platí:

1. Rovnice $L[y] = 0$ má těchto n různých řešení

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & t\,e^{\lambda_1 t}, & \ldots, & t^{k_1-1}\,e^{\lambda_1 t} \\
e^{\lambda_2 t}, & t\,e^{\lambda_2 t}, & \ldots, & t^{k_2-1}\,e^{\lambda_2 t} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
e^{\lambda_p t}, & t\,e^{\lambda_p t}, & \ldots, & t^{k_p-1}\,e^{\lambda_p t}\,.
\end{array}$$

2. Tato řešení jsou lineárně nezávislá v libovolném intervalu (a, b).

Důkaz: 1. Uvažme kořen λ_1 a položme $y(t) = e^{\lambda_1 t}\,z(t)$. Potom je $L[y] = e^{\lambda_1 t}\,M[z]$ a pro charakteristické polynomy platí $G(\lambda) = F(\lambda + \lambda_1)$. Odtud plyne, že 0 je k_1-násobným kořenem rovnice $G(\lambda) = 0$ a $G(\lambda)$ je tedy tvaru

$$G(\lambda) = A_n\,\lambda^n + A_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + A_{k_1}\,\lambda^{k_1}\,; \quad A_{k_1} \neq 0\,.$$

Odtud

$$M[z] = A_n z^{(n)} + A_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + A_{k_1} z^{(k_1)}$$

a tudíž rovnice $M[z] = 0$ má řešení $z_1 = 1$, $z_2 = t$, $\ldots$, $z_{k_1} = t^{k_1-1}$. Odtud dostaneme, že rovnice $L[y] = 0$ má řešení

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}\,, \quad y_2 = t\,e^{\lambda_1 t}\,, \quad \ldots\,, \quad y_{k_1} = t^{k_1-1}\,e^{\lambda_1 t}\,.$$

Analogicky se dokáže tvrzení pro ostatní kořeny.

2. Předpokládejme, že dané funkce jsou lineárně závislé, tj. existují polynomy $P_1(t), P_2(t), \dots, P_p(t)$ tak, že platí identicky

$$P_1(t)\, e^{\lambda_1 t} + P_2(t)\, e^{\lambda_2 t} + \cdots + P_p(t)\, e^{\lambda_p t} = 0$$

a nechť na příklad $P_p(t) \neq 0$. Odtud dostaneme

$$P_1(t) + P_2(t)\, e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \cdots + P_p(t)\, e^{(\lambda_p-\lambda_1)t} = 0\,.$$

Jestliže tuto identitu k_1-krát zderivujeme, dostaneme dále

$$0 = Q_2(t)\, e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \cdots + Q_p(t)\, e^{(\lambda_p-\lambda_1)t} = Q_2(t)\, e^{\lambda_2 t} + \cdots + Q_p(t)\, e^{\lambda_p t}\,.$$

Takto budeme pokračovat dále, až dojdeme k rovnosti

$$R_p(t)\, e^{(\lambda_p-\lambda_{p-1})t} = 0\,,$$

kde $R_p(t)$ je nenulový polynom. To však není možné a dostáváme spor s lineární závislostí daných funkcí.

Příklad: Najděte fundamentální systém řešení rovnice

$$y^{(15)} + 2y^{(12)} - y^{(11)} + y^{(9)} - 2y^{(8)} - y^{(5)} = 0\,.$$

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$\lambda^{15} + 2\lambda^{12} - \lambda^{11} + \lambda^9 - 2\lambda^8 - \lambda^5 = 0$$

s kořeny

kořeny	0	1	-1	i	$-i$	$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$
násobnost	5	1	3	1	1	2	2

Hledaný fundamentální systém řešení je tedy

$$y_1 = 1\,,\; y_2 = t\,,\; y_3 = t^2\,,\; y_4 = t^3\,,\; y_5 = t^4\,,\; y_6 = e^t\,,\; y_7 = e^{-t}\,,\; y_8 = t\, e^{-t}\,,\; y_9 = t^2\, e^{-t}\,,$$

$$y_{10} = \cos t\,,\; y_{11} = \sin t\,,\; y_{12} = e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t\,,\; y_{13} = e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\,,$$

$$y_{14} = t\, e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t\,,\; y_{15} = t\, e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\,.$$

Poznámky: 1. Předchozí příklad působí trochu uměle, ale pokud máme ilustrovat situaci, popsanou ve větě, tedy máme uvážit jednonásobné i vícenásobné reálné i komplexní kořeny, nic jiného nám nezbývá. Vzniká otázka, jak danou charakteristickou rovnici

$$\lambda^{15} + 2\lambda^{12} - \lambda^{11} + \lambda^9 - 2\lambda^8 - \lambda^5 = 0$$

řešit. Je zřejmé, že $\lambda_{1,2,3,4,5} = 0$. Po vydělení λ^5 dostaneme rovnici

$$\lambda^{10} + 2\lambda^7 - \lambda^6 + \lambda^4 - 2\lambda^3 - 1 = 0\,,$$

která má kořeny $\lambda_5 = 1$, $\lambda_{7,8,9} = -1$. Po postupném vydělení příslušnými kořenovými činiteli dostaneme algebraickou rovnici 6. stupně

$$\lambda^6 - 2\lambda^5 + 4\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0\,.$$

To je reciproká rovnice 1. druhu a sudého stupně, kterou vydělíme λ^3 a do výsledné rovnice zavedeme substituci $\lambda + \frac{1}{\lambda} = \mu$. Po dosazení dostaneme rovnici $\mu^3 - 2\mu^2 + \mu = 0$, která má kořeny $\mu_1 = 0$, $\mu_{2,3} = 1$ a stačí vyřešit dvě kvadratické rovnice $\lambda + \frac{1}{\lambda} = 0$, $\lambda + \frac{1}{\lambda} = 1$.

2. Zbývající část tohoto paragrafu (s výjimkou poslední části) bude věnována metodě hledání partikulárního integrálu nehomogenní rovnice $L[y] = f(t)$, kde $f(t)$ je speciálního tvaru $f(t) = P(t)\, e^{\mu t}$, $P(t)$ je polynom a μ komplexní parametr, nebo pro reálný případ

$$f(t) = e^{\alpha t}\, \left(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t\right) .$$

Takové pravé strany nazýváme harmonické a v praktických aplikacích se vyskytují nejčastěji. Ukážeme, že partikulární integrál se v tomto případě hledá v analogickém tvaru.

Věta: Buď dána diferenciální rovnice tvaru $L[y] = P(t)\, e^{\mu t}$, kde $P(t)$ je polynom $s-$tého stupně, μ komplexní číslo. Nechť μ je $k-$násobným kořenem charakteristické rovnice $F(\lambda) = 0$. Potom má partikulární integrál tvar

$$y_p(t) = Q(t)\, t^k\, e^{\mu t} ,$$

kde $Q(t)$ je polynom $s-$tého stupně.

Důkaz: Do rovnice $L[y] = P(t)\, e^{\mu t}$ zavedeme novou neznámou funkci $y(t) = e^{\mu t}\, z(t)$. Poněvadž je $L[y] = e^{\mu t}\, M[z]$, dostaneme rovnici $M[z] = P(t)$. Pro charakteristické polynomy platí vztah $G(\lambda) = F(\lambda + \mu)$ a při tom $G(\lambda) = A_n\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + A_k\lambda^k$, kde $A_k \neq 0$. Tedy transformovaná diferenciální rovnice má tvar

$$A_n z^{(n)} + A_{n-1} z^{(n-1)} + \cdots + A_k z^{(k)} = p_s\, t^s + p_{s-1}\, t^{s-1} + \cdots + p_1\, t + p_0 .$$

Hledejme nyní partikulární integrál ve tvaru

$$z = q_s \frac{t^{s+k}}{(s+k)!} + q_{s-1} \frac{t^{s+k-1}}{(s+k-1)!} + \cdots + q_1 \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + q_0 \frac{t^k}{k!} .$$

Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme

$$A_k \left(q_s \frac{t^s}{s!} + \cdots + q_0 \right) + A_{k+1} \left(q_s \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} + \cdots + q_1 \right) + \cdots = p_s\, t^s + p_{s-1}\, t^{s-1} + \cdots + p_1\, t + p_0 .$$

Začneme-li srovnávat koeficienty od nejvyšší mocniny, dostaneme

$$A_k \frac{q_s}{s!} = p_s \quad \text{a odtud} \quad q_s = \frac{s!\, p_s}{A_k} \neq 0 , \quad A_k \frac{q_{s-1}}{(s-1)!} + A_{k+1} \frac{q_s}{(s-1)!} = p_{s-1} .$$

Z poslední rovnosti můžeme vypočítat q_{s-1} a takto pokračovat dále. Poněvadž je $y(t) = e^{\mu t}\, z(t)$, dostaneme odtud, že

$$y_p(t) = Q(t)\, t^k\, e^{\mu t} ,$$

kde $Q(t)$ je polynom stupně $s-$tého.

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice $y''' - 5y'' + 6y' = e^{2x}$.

Řešení: Nejdříve vyřešíme odpovídající rovnici bez pravé strany $y''' - 5y'' + 6y' = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$, která má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Fundamentální systém řešení je tedy $y_1 = 1$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ a obecné řešení zkrácené rovnice

$$\widehat{y} = C_1 + C_2\, e^{2x} + C_3\, e^{3x} .$$

Poněvadž je pravá strana harmonická, můžeme odhadnout partikulární integrál podle tvaru pravé strany a kořenů charakteristické rovnice. Pravá strana je součin polynomu nultého stupně a exponenciely, navíc 2 je jednonásobným kořenem charakteristické rovnice. Partikulární integrál je tedy tvaru

$$y_p = a \cdot x \cdot e^{2x} . \quad \text{Odtud} \quad y_p' = (a + 2ax)e^{2x} , \, y_p'' = (4a + 4ax)e^{2x} , \, y_p''' = (12a + 8ax)e^{2x}$$

Po dosazení do původní rovnice a zkrácení e^{2x} dostaneme

$$12a + 8ax - 5(4a + 4ax) + 6(a + 2ax) = 1 , \quad \text{neboli} \quad -2a = 1 , \, a = -\frac{1}{2} .$$

Hledané obecné řešení je tedy tvaru

$$y = \widehat{y} + y_p = C_1 + C_2 \, e^{2x} + C_3 \, e^{3x} - \frac{1}{2} x \, e^{2x} .$$

Důsledek: Buď

$$L[y] = p(t) \cos \beta t$$

diferenciální rovnice $n-$tého řádu s reálnými konstantními koeficienty, $p(t)$ reálný polynom $s-$tého stupně, β reálné číslo. Nechť $i\beta$ je $k-$násobným kořenem charakteristické rovnice $F(\lambda) = 0$. Potom má partikulární integrál tvar

$$y(t) = t^k \, \{ \, P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t \, \} ,$$

kde P a Q jsou polynomy takové, že $\operatorname{st} P \leq s$, $\operatorname{st} Q \leq s$.

Důkaz: Je

$$L[y] = \frac{p(t)}{2} e^{i\beta t} + \frac{p(t)}{2} e^{-i\beta t} .$$

Poněvadž L má reálné koeficienty, má charakteristická rovnice též $k-$násobný kořen $-i\beta$. Partikulátní integrál má tedy tvar

$$y = \widetilde{P}(t) \, e^{i\beta t} \, t^k + \widetilde{Q}(t) \, e^{-i\beta t} \, t^k .$$

Jestliže zpětně vyjádříme $e^{i\beta t}$ a $e^{-i\beta t}$ pomocí Eulerovy identity, dostaneme požadovaný tvar.

Poznámka: Analogický tvar má odhad partikulárního integrálu pro pravou stranu $p(t) \sin \beta t$. Všimněte si, že v odhadu partikulárního integrálu figurují obě funkce sin , cos , i když na pravé straně je pouze jedna. Může se dokonce stát, že na pravé straně je pouze funkce cos a v partikulárním integrálu pouze funkce sin . To však předem neumíme rozhodnout.

Lemma: Buď

$$L[y] = e^{\alpha t} \, \{ \, p_1(t) \, \cos \beta t + p_2(t) \, \sin \beta t \}$$

lineární diferenciální rovnice $n-$tého řádu s konstantními reálnými koeficienty α , β reálná čísla, $p_1(t)$, $p_2(t)$ reálné polynomy. Nechť $\alpha + i\beta$ je $k-$násobný kořen charakteristické rovnice $F(\lambda) = 0$. Potom je partikulární integrál tvaru

$$y(t) = t^k \cdot e^{\alpha t} \cdot \{ \, q_1(t) \cos \beta t + q_2(t) \sin \beta t \, \} ,$$

kde q_1 , q_2 jsou polynomy takové, že

$$\operatorname{st} q_1 , \, \operatorname{st} q_2 \leq \max\{ \operatorname{st} p_1 , \, \operatorname{st} p_2 \} .$$

Důkaz: Odhad partikulárního integrálu rozdělíme na dvě části

$$L[y] = p_1(t)\, e^{\alpha t}\, \cos\beta t = \frac{p_1(t)}{2}\, e^{(\alpha+i\beta)t} + \frac{p_1(t)}{2}\, e^{(\alpha-i\beta)t} \qquad \text{a}$$

$$L[y] = p_2(t)\, e^{\alpha t}\, \sin\beta t = \frac{p_2(t)}{2i}\, e^{(\alpha+i\beta)t} - \frac{p_2(t)}{2i}\, e^{(\alpha-i\beta)t}\,.$$

Ty budou mít tvar

$$y_1(t) = P_1(t)\, t^k\, e^{(\alpha+i\beta)t} + P_2(t)\, t^k\, e^{(\alpha-i\beta)t}\,, \quad y_2(t) = Q_1(t)\, t^k\, e^{(\alpha+i\beta)t} + Q_2(t)\, t^k\, e^{(\alpha-i\beta)t}\,.$$

Jestliže nyní opět použijeme Eulerovu identitu pro vyjádření $e^{(\alpha+i\beta)t}$ a $e^{(\alpha-i\beta)t}$, dostaneme tvrzení lemmatu.

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice

$$y''' - y'' + y' - y = \cos x + 2x - 1\,.$$

Řešení: Charakteristická rovnice $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ a tedy obecné řešení rovnice bez pravé strany je

$$\widehat{y} = C_1\, e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x\,.$$

Vzhledem k tomu, že pravá strana je součtem dvou harmonických pravých stran, budeme partikulární integrál také hledat ve tvaru

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}\,, \quad \text{kde} \quad y_{p_1} = x(a_1 \cos x + a_2 \sin x) \ \ (\text{pro} \ \cos x) \ \ \text{a} \ \ y_{p_2} = b_1 x + b_0 \ \ (\text{pro} \ 2x - 1)\,.$$

Tedy

$$y_p = x\{a_1 \cos x + a_2 \sin x\} + b_1 x + b_0\,, \quad y_p' = a_1 \cos x + a_2 \sin x + x\{-a_1 \sin x + a_2 \cos x\} + b_1\,,$$

$$y_p'' = 2\{-a_1 \sin x + a_2 \cos x\} - x\{a_1 \cos x + a_2 \sin x\}\,,$$
$$y_p''' = -3\{a_1 \cos x + a_2 \sin x\} + x\{a_1 \sin x - a_2 \cos x\}$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$-2(a_1 + a_2) \cos x + 2(a_1 - a_2) \sin x - b_1 x + b_1 - b_0 = \cos x + 2x - 1$$

a odtud srovnáním koeficientů dvě jednoduché soustavy rovnic

$$\begin{array}{rrl} -2a_1 & -2a_2 & = 1 \\ 2a_1 & -2a_2 & = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} -b_1 & & = 2 \\ b_1 & -b_0 & = -1 \end{array} \qquad \text{s řešením} \quad a_1 = a_2 = -\frac{1}{4}\,, \ \ b_1 = -2\,, \, b_0 = -1\,.$$

Obecné řešení dané rovnice je tedy

$$y = \widehat{y} + y_p = C_1\, e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{1}{4} x(\cos x + \sin x) - 2x - 1\,.$$

Poznámka: Poslední část tohoto paragrafu věnujeme Eulerově rovnici, což je lineární rovnice, která sice nemá konstantní koeficienty, ale velmi snadno se na rovnici s konstantními koeficienty převede.

Definice: Diferenciální rovnici tvaru

$$a_n\, x^n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, x^{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x\, y' + a_0\, y = f(x)\,,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou konstanty, f daná spojitá funkce, nazýváme Eulerovou rovnicí.

Věta: Eulerovu rovnici je možno substitucí $x = e^t$ převést na rovnici s konstantními koeficienty.

Důkaz: Je

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t \quad \text{a odtud} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}e^{2t} + \frac{dy}{dx}e^t = \frac{d^2y}{dx^2}e^{2t} + \frac{dy}{dt} \Longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}.$$

Použitím indukce odtud plyne, že

$$\frac{d^ky}{dx^k} = e^{-kt}\left\{\beta_1\frac{dy}{dt} + \beta_2\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + \beta_k\frac{d^ky}{dt^k}\right\}.$$

Jestliže nyní dosadíme do dané rovnice, dostaneme rovnici s konstantními koeficienty.

Poznámka: Při řešení homogenní Eulerovy rovnice je možno vycházet z předpokladu, že řešení je ve tvaru $y = x^\lambda$, kde λ je parametr. Dostaneme tak algebraickou rovnici pro neznámou λ a jak se ukazuje, tato rovnice je právě charakteristická rovnice příslušné transformované rovnice s konstantními koeficienty.

Příklad: Najděte obecné řešení rovnice $x^2\,y'' - x\,y' + 2y = x\ln x$.

Řešení: Jestliže zavedeme novou nezávisle proměnnou předpisem $x = e^t$, dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}, \; \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

a po dosazení do rovnice

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = t\,e^t.$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ s kořeny $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ a tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$\widehat{y}(t) = e^t\{\,C_1\cos t + C_2\sin t\,\}.$$

Partikulární integrál je tvaru $y_p(t) = (a+bt)e^t$ a odtud $y_p'(t) = (a+b+bt)e^t$, $y_p''(t) = (a+2b+bt)e^t$. Jestliže dosadíme do rovnice (v proměnné t) dostaneme rovnost $a + bt = t$ a tedy $a = 0$, $b = 1$ a obecné řešení dané rovnice je

$$y(t) = \widehat{y}(t) + y_p(t) = e^t\{\,C_1\cos t + C_2\sin t\,\} + t\,e^t,$$

v původní proměnné

$$y(x) = x\{\,C_1\cos\ln x + C_2\sin\ln x\,\} + x\ln x.$$

Kdybychom začali hledat řešení ve tvaru $y = x^\lambda$, nebude výpočet o mnoho kratší. Je-li $y = x^\lambda$, potom $y' = \lambda\,x^{\lambda-1}$, $y'' = \lambda(\lambda-1)\,x^{\lambda-2}$ a po dosazení dostaneme charakteristickou rovnici $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 2 = 0$ neboli $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ a stojíme před problémem, co znamená x^{1+i}. Z předchozího výpočtu plyne, že $x^{1+i} = e^{(1+i)\ln x}$; v dalším kroku však musíme použít metody variace konstant k nalezení partikulárního integrálu, což je další komplikace. Zdá se tedy, že nejrychlejší postup je v kombinaci předpokladu, že $y = x^\lambda$ spolu se skutečností, že $x = e^t$.

5.3 Okrajová úloha.

Poznámka: V celém paragrafu budeme uvažovat lineární diferenciální rovnici 2. řádu tvaru

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = f(x)\,,$$

kde $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ jsou spojité funkce proměnné x na intervalu $\langle a, b\rangle$. Obecné řešení této rovnice má tvar

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_p\,,$$

kde y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice, tedy dvojici lineárně nezávislých řešení rovnice bez pravé strany a y_p je jedno pevné řešení původní rovnice.

Cauchyova úloha pro rovnici

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = f(x)$$

spočívá v nalezení takového řešení $y(x)$, pro něž $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, kde $x_0 \in \langle a.b\rangle$ a y_0, y_0' jsou dané konstanty. Existenční věta pro tuto rovnici zaručuje jednoznačnost řešení této úlohy.

Poněkud jiná je situace, jestliže požadujeme, aby dané řešení vyhovovalo jiným podmínkám, které se v aplikacích vyskytují velmi často. Na příklad budeme vyžadovat, aby dané řešení mělo předepsané hodnoty ve dvou různých bodech intervalu $\langle a, b\rangle$, tedy, aby hledaná integrální křivka procházela dvěma danými body. Tím se dostaneme k formulaci okrajové úlohy. Ukazuje se, že v tomto případě nelze dokázat žádnou analogii věty o existenci a jednoznačnosti řešení.

Definice: Buď $L[y] = p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y$ diferenciální operátor se spojitými koeficienty $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom okrajovou úlohou nazýváme problém stanovení funkce $y(x)$, která vyhovuje rovnici $L[y] = f(x)$ pro $x \in (a, b)$ a danou spojitou funkci $f(x)$ a podmínkám

$$\alpha_1\,y(a) + \alpha_2\,y'(a) = A\,, \qquad \beta_1\,y(b) + \beta_2\,y'(b) = B\,,$$
$$\text{kde} \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0\,, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0\,.$$

Výše uvedené podmínky nazýváme okrajovými podmínkami.

Je-li $f(x) \equiv 0$ na $\langle a, b\rangle$ a $A = B = 0$, pak danou okrajovou úlohu nazýváme homogenní.

Poznámky: 1. Nejdůležitější bude pro nás v dalším homogenní okrajová úloha, kterou se budeme také zabývat podrobněji.

2. Okrajové podmínky nemusí mít vždy tvar, uvedený v předchozí definici, ale mohou mít třeba tvar

$$y(a) = y(b)\,, \quad y'(a) = y'(b) \qquad \text{požadavky periodičnosti}$$

nebo

$$y(x) \quad \text{je omezená pro} \quad x \to a_+\,, \quad \beta_1\,y(b) + \beta_2\,y'(b) = B\,, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0\,.$$

a podobně.

3. Ukazuje se, že okrajová úloha může být jednoznačně řešitelná, může však mít též nekonečně mnoho řešení nebo vůbec žádné. Situace bude ilustrována na následujících příkladech.

Příklady: 1. Okrajová úloha

$$y'' + y = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \quad x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

má jediné řešení $y = \cos x$.

Důkaz: Obecné řešení je tvaru $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ a odtud po dosazení okrajových podmínek dostaneme $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

2. Úloha

$$y'' + y = 0\,, \quad y(0) = 0\,,\, y(\pi) = 1\,, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle$$

nemá řešení.

3. Úloha

$$y'' + y = 0\,, \quad y(0) = 0\,,\, y(\pi) = 0\,, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle$$

má nekonečně mnoho řešení $y = C\sin x$, kde C je libovolná konstanta.

Poznámka: V dalším zavedeme pojem adjungovaného operátotu k danému diferenciálnímu operátotu L.

Uvažme prostor $\mathbf{L}_2(a,b)$, (pro definici a základní vlastnosti odkazujeme na paragraf, věnovaný Fourierovým řadám) operátor $L[y] = p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y$ a nechť uvedené funkce mají tolik derivací, kolik je třeba. Potom pro $u, v \in \mathbf{L}_2(a,b)$ platí

$$(Lu, v) = \int_a^b [\,p_0u'' + p_1u' + p_2u\,]\,v\,dx = \int_a^b [\,u''(p_0v) + u'(p_1v) + u(p_2v)\,]\;dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ccccc} u'' = f' & p_0v = g & ; & u' = h' & p_1v = l \\ u' = f & (p_0v)' = g' & ; & u = h & (p_1v)' = l' \end{array}\right| = [\,u'p_0v + up_1v\,]_a^b -$$

$$-\int_a^b [\,u'(p_0v)' + u(p_1v)' - u(p_2v)\,]\;dx = \left|\begin{array}{cc} u' = f' & (p_0v)' = g \\ u = f & (p_0v)'' = g' \end{array}\right| = [\,u'p_0v + up_1v - u(p_0v)'\,]_a^b +$$

$$+\int_a^b u\,[\,(p_0v)'' - (p_1v)' + p_2v\,]\;dx = [\,u'p_0v + up_1v - u(p_0v)'\,]_a^b + (u, L^*v)$$

Odtud dostaneme

Definice: Buď $L[y] = p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y$ diferenciální operátor druhého řádu. Potom operátor L^*, definovaný předpisem

$$L^*[y] = [p_0(x)\,y(x)]'' - [p_1(x)\,y(x)]' + p_2(x)\,y(x)$$

nazýváme adjungovaným operátorem. Řekneme, že operátor L je symetrický, jestliže platí

$$(Lu, v) = (u, Lv) \quad \forall\, u, v\,.$$

Poznámka: Ze způsobu, jak byl odvozen tvar adjungovaného operátoru, vyplývá, že vlastnost symetrie daného operátoru L nezávisí pouze na jeho formálním předpisu, ale i na tvaru okrajových podmínek, které se při integraci per partes objeví. Nicméně je zajímavé se podívat, jaký tvar má operátor, pro nějž platí $L = L^*$. Poněvadž

$$L[y] = p_0y'' + p_1y' + p_2y \quad \text{a} \quad L^*[y] = (p_0y)'' - (p_1y)' + p_2y = p_0y'' + y'(2p_0' - p_1) + y(p_0'' - p_1' + p_2)\,,$$

musí platit

$$2p_0' - p_1 = p_1\,; \quad p_0'' - p_1' + p_2 = p_2\,, \quad \text{neboli} \quad p_1 = p_0'\,.$$

Odtud dostaneme

Věta: Operátor

$$L[y] = p_0y'' + p_1y' + p_2y\,,$$

pro nějž platí $L = L^*$ je tvaru

$$L[y] = (p(x)y')' + q(x)y\,.$$

Důkaz: Stačí položit $p_0 = p$; $p_2 = q$.

Poznámka: Ukazuje se, že každý operátor lze převést na formální symetrický, jak bude ukázáno v následující větě. Tvar, se kterým budeme v dalším pracovat, se historicky ustálil na formě $-(py')' + qy = 0$. Toho snadno dosáhneme, jestliže v předchozí větě položíme $p = -p_0$.

Věta: Buď dána lineární homogenní rovnice 2. řádu

$$p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0$$

a předpokládejme, že koeficienty p_0, p_1, p_2 jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť p_0 má spojitou 1. derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$ a buď $p_0 \neq 0$ na $\langle a, b\rangle$. Potom je možno danou rovnici převést na tvar

$$-[\,py'\,]' + qy = 0\,.$$

Důkaz: Rovnici $p_0y'' + p_1y' + p_2y = 0$ vynásobíme jistou funkcí ρ tak, aby platilo

$$\rho\,p_0 = -p\ ,\ \rho\,p_1 = -p'\ ,\ \text{ neboli }\ -p' = \rho'\,p_0 + \rho\,p_0' = \rho\,p_1\,.$$

To dává diferenciální rovnici 1.řádu pro neznámou funkce ρ

$$\rho'\,p_0 = \rho(p_1 - p_0') \quad \text{s řešením} \quad \rho(x) = C\,e^{\int \frac{p_1 - p_0'}{p_0}\,dx} = \frac{C}{p_0}\cdot e^{\int \frac{p_1}{p_0}\,dx}\,.$$

Stačí tedy položit

$$\rho(x) = \frac{1}{p_0}\cdot e^{\int \frac{p_1}{p_0}\,dx}\,.$$

Příklad: Převeďte na symetrický tvar Besselovu rovnici

$$x^2\,y'' + x\,y' + (x^2 - \nu^2)y = 0\,, \quad x \geq a > 0\,.$$

Řešení: Platí

$$p_0(x) = x^2\ ;\ p_1(x) = x\ ;\ p_2(x) = x^2 - \nu^2 \quad \text{a tedy} \quad \rho(x) = \frac{1}{x^2}\cdot e^{\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}\,.$$

Odtud

$$(xy')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)\,y = 0\,, \quad \text{nebo} \quad -\,(xy')' + \left(\frac{\nu^2}{x} - x\right)\,y = 0\,.$$

Poznámka: V dalším výkladu se zaměříme na tzv. spektrální vlastnosti diferenciálního operátoru L . Zavedeme pojem vlastního čísla a vlastní funkce (vektoru) analogicky tomu, jak jste se s těmito pojmy seznámili v lineární algebře.

Definice: Buď L lineární diferenciální operátor. Číslo λ (obecně komplexní) nazveme <u>vlastním číslem</u> operátoru L , jestliže má rovnice

$$L[y] = \lambda\,y$$

nenulové řešení. Každé nenulové řešení této rovnice nazveme vlastní funkcí operátoru L, příslušnou vlastnímu číslu λ.

Věta: Jsou-li y_1, y_2 vlastní funkce operátotu L, příslušné vlastnímu číslu λ, pak je i funkce $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ vlastní funkcí L, příslušnou λ.

Důkaz: Tvrzení je zřejmé.

Věta: Je-li operátor L symetrický, pak jsou všechna jeho vlastní čísla reálná a vlastní funkce příslušné různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Důkaz: Poněvadž $(Lu, v) = (u, Lv)$, dostaneme pro vlastní funkci y:

$$\lambda(y,y) = (\lambda\, y, y) = (Ly, y) = (y, Ly) = (y, \lambda\, y) = \overline{\lambda}(y,y) \quad \text{a odtud} \quad \lambda = \overline{\lambda}\,.$$

Nechť nyní $Ly_1 = \lambda_1 y_1$, $Ly_2 = \lambda_2 y_2$ a předpokládejme, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Potom platí

$$\lambda_1(y_1, y_2) = (\lambda_1 y_1, y_2) = (Ly_1, y_2) = (y_1, Ly_2) = (y_1, \lambda_2 y_2) = \lambda_2(y_1, y_2)\,.$$

Vzhledem k tomu, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$, plyne odtud, že $(y_1, y_2) = 0$.

Poznámka: Z předchozích vět je zřejmé, že není třeba rozlišovat mezi vlastními funkcemi y a Cy, (C je konstanta) a stačí se zabývat pouze nezávislými vlastními funkcemi. Nejčastěji se vyskytující problém je Sturm-Liouvillova úloha, kterou budeme nyní definovat.

Definice: Buď operátor $L[y] = -(py')' + qy$ definován na třídě funkcí, splňujících homogenní okrajové podmínky

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0\,, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0\,, \quad \text{kde} \quad |\,\alpha_1\,| + |\,\alpha_2\,| > 0\,, |\,\beta_1\,| + |\,\beta_2\,| > 0\,.$$

Potom úlohu nalézt vlastní čísla a vlastní funkce tohoto operátoru nazýváme Sturm-Liouvilleovou úlohou. Příslušný diferenciální operátor nazveme Sturm-Liouvilleovým operátorem.

Věta: Sturm-Liouvilleův operátor je symetrický.

Důkaz: Platí

$$(Lu,v)-(u,Lv) = \int_a^b [\,vqu - v(pu')'\,]\,dx - \int_a^b [\,uqv - u(pv')'\,]\,dx = \int_a^b [\,p(uv''-vu'') + p'(uv'-vu')\,]\,dx =$$

$$= \int_a^b [\,p(uv' - vu')\,]'\,dx = p(b)[\,u(b)v'(b) - v(b)u'(b)\,] - p(a)[\,u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\,]\,.$$

Poněvadž platí

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 & \qquad \alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 & \qquad \beta_1 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0\,, \end{array}$$

je možno vyjádřit (na příklad)

$$u'(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,u(a)\,, \quad v'(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,v(a)\,, \quad u(b) = -\frac{\beta_2}{\beta_1}\,u'(b)\,, \quad v(b) = -\frac{\beta_2}{\beta_1}\,v'(b)\,.$$

Po dosazení dostaneme

$$(Lu,v)-(u,Lv)=p(b)\left[-\frac{\beta_2}{\beta_1}\,u'(b)\,v'(b)+\frac{\beta_2}{\beta_1}\,v'(b)\,u'(b)\right]-p(a)\left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,u(a)\,v(a)+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,v(a)\,u(a)\right]=0$$

Věta: Každému vlastnímu číslu Sturm-Liouvilleovy úlohy odpovídá právě jedna vlastní funkce.

Důkaz: Předpokládejme, že vlastnímu číslu λ odpovídají dvě lineárně nezávislé vlastní funkce y_1, y_2. Potom platí

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(a)+\alpha_2 y_1'(a)&=0 \\ \alpha_1 y_2(a)+\alpha_2 y_2'(a)&=0\,, \end{aligned} \qquad \text{kde} \quad |\,\alpha_1|+|\,\alpha_2|>0\,.$$

Poněvadž y_1 i y_2 jsou řešeními rovnice $L[y]=\lambda\,y$, musí platit

$$W(a)=\begin{vmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix}=0 \qquad \text{a tedy} \quad W(x)\equiv 0\,.$$

To je však spor s lineární nezávislostí funkcí y_1, y_2.

Věta: (Stěklov)
Vlastních čísel Sturm-Liouvilleovy úlohy je nekonečně mnoho a tvoří posloupnost čísel tak, že

$$\min_{x\in\langle a,b\rangle} q(x)\le\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\ldots \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty\,.$$

Je-li $\varphi_n(x)$ vlastní funkce, příslušná vlastnímu číslu λ_n, pak $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří ortogonální systém funkcí. Je-li navíc $f(x)$ funkce spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, která má po částech spojitou derivaci a vyhovuje okrajovým podmínkám

$$\alpha_1 f(a)+\alpha_2 f'(a)=0\,, \qquad \beta_1 f(b)+\beta_2 f'(b)=0\,,$$

potom

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\varphi_n(x)\,, \quad \text{kde} \quad c_n=\frac{(f,\varphi_n)}{\|\,\varphi_n\|^2}$$

a daná řada konverguje absolutně a stejnoměrně na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Důkaz: Nebudeme provádět. Pro bližší informaci o ortogonálních systémech funkcí se můžete podívat na paragraf, věnovaný Fourierovým řadám nebo do textu MA5.

Poznámka: Ukazuje se, že vlastní funkce Sturm-Liouvilleovy úlohy tvoří úplný ortogonální systém funkcí ve třídě funkcí, které splňují dané homogenní okrajové podmínky. Tato vlastnost bude využita v dalším při řešení úloh parciálních diferenciálních rovnic.

Příklad: Najděte vlastní čísla a vlastní funkce úlohy

$$y''+\lambda\,y=0\,, \quad y(0)=y(\pi)=0\,; \quad x\in\langle 0,\pi\rangle\,.$$

Řešení: Poněvadž se jedná o Sturm-Liouvilleovu úlohu ($q=0$), stačí uvažovat pouze $\lambda\ge 0$. Pro tato λ má obecné řešení tvar

$$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x\,.$$

Jestliže užijeme okrajových podmínek, dostaneme $y(0) = C_1 = 0$, $y(\pi) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$. Máme-li dostat netriviální řešení, musí být $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$ a tedy $\sqrt{\lambda}\,\pi = k\pi \quad (k \in \mathbf{N})$. Vlastní čísla jsou tedy $\lambda_k = k^2 \quad k = 1, 2, \dots$ a vlastní funkce $\varphi_k(x) = \sin kx$.

Poznámky: 1. Jestliže použijeme Stěklovovy věty, dostáváme, že systém funkcí

$$\sin x\,,\ \sin 2x\,,\ \sin 3x\,,\ \dots$$

je ortogonální na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. To je však známý výsledek z teorie Fourierových řad.

2. Jestliže se nechceme spolehnout na Stěklovovu větu, můžeme v předchozí úloze vyšetřit všechny možné případy. Ukáže se, že netriviální řešení dává pouze případ $\lambda > 0$. Pro $\lambda = 0$ je obecné řešení tvaru $y = C_1 + C_2 x$ a pro $\lambda < 0$ platí $y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$.

5.4 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic.

Poznámka: Uvážíme-li diferenciální rovnici $n-$tého řádu, rozřešenou vzhledem k nejvyšší derivaci

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right)\,,$$

ukazuje se, že tato soustava je ekvivalentní s jistou soustavou diferenciálních rovnic prvého řádu. Platí totiž následující lemma.

Lemma: Diferenciální rovnice $n-$tého řádu tvaru

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right)$$

je ekvivalentní se soustavou n diferenciálních rovnic prvého řádu.

Důkaz: Položíme-li $x = x_1$, $x_2 = x_1'$, $\dots$, $x_{n-1}' = x_n$, pak ekvivalentní soustava má tvar

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\dots\dots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\,. \end{aligned}$$

Poznámka: Vyšetřováním soustav diferenciálních rovnic zahrneme i jednu rovnici $n-$tého řádu a můžeme se zeptat, proč to neudělat od samého začátku. Důvod je jednoduchý. Vyšetřování jedné rovnice je formálně i myšlenkově jednodušší.

Definice: Buďte $f_1, f_2, \dots, f_n$ funkce $n+1$ proměnných $t, x_1, x_2, \dots, x_n$. Potom soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \tfrac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\ &\ \dots\ \dots \\ \tfrac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

nazveme soustavou v <u>normálním tvaru</u>.

Buďte
$$t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$$
daná čísla. Potom problém nalezení řešení $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ dané soustavy diferenciálních rovnic takového, že
$$x_1(t_0) = x_1^{(0)}\,,\; x_2(t_0) = x_2^{(0)}\,,\; \ldots\,,\; x_n(t_0) = x_n^{(0)}$$
nazýváme Cauchyovou úlohou.

Poznámka: Ukazuje se, že pro soustavu diferenciálních rovnic v normálním tvaru a Cauchyovu úlohu lze vyslovit a dokázat analogickou existenční větu jako pro jednu rovnici tvaru
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)\,.$$
Je však třeba říci, co to znamená, že funkce f_i splňují Lipschitzovu podmínku v dané oblasti.

Definice: Buď
$$D\,:\; t_0 - a \le t \le t_0 + a\,,\; x_i^{(0)} - b \le x_i \le x_i^{(0)} + b\,;\; a, b > 0\;\; (i = 1, 2, \ldots, n)$$
podmnožina $(n+1)-$rozměrného prostoru $\mathbf{R}^{n+1}$. Řekneme, že funkce $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ splňuje v oboru D Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnným $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jestliže existuje konstanta $K > 0$ tak, že pro libovolné dva body $(t, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, $(t, x_1^{**}, x_2^{**}, \ldots, x_n^{**}) \in D$ platí
$$|\, f(t, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) - f(t, x_1^{**}, x_2^{**}, \ldots, x_n^{**})\,| \le K\,(\,|\,x_1^* - x_1^{**}\,| + |\,x_2^* - x_2^{**}\,| + \cdots + |\,x_n^* - x_n^{**}\,|\,)\;.$$

Věta: Nechť jsou funkce $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ spojité v uzavřené množině
$$D\,:\; t_0 - a \le t \le t_0 + a\,,\; x_i^{(0)} - b \le x_i \le x_i^{(0)} + b\,;\; a, b > 0\;\; (i = 1, 2, \ldots, n)$$
a splňují v D Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnným $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Potom existuje takové číslo $\alpha > 0$, že pro $t \in \langle t_0 - \alpha, t_0 + \alpha \rangle$ existuje jediné řešení soustavy
$$\begin{aligned} \tfrac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \tfrac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\quad & \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ \tfrac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \end{aligned}$$
vyhovující počátečním podmínkám
$$x_1(t_0) = x_1^{(0)}\,,\; x_2(t_0) = x_2^{(0)}\,,\; \ldots\,,\; x_n(t_0) = x_n^{(0)}\,.$$

Poznámky: 1. Analogicky jako v případě jedné rovnice je možno ukázat, že $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, kde M je taková konstanta, že $|\,f_i\,| \le M$ pro všechny body D a pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Důkaz je zcela analogický jako pro jednu rovnici, tedy řešení se sestrojí pomocí metody postupných aproximací. Poněvadž je formálně složitější, nebudeme jej provádět.

3. Zbytek tohoto paragrafu bude věnován metodám řešení lineárních soustav. K obecným soustavám se vrátíme v paragrafu, který bude věnován základům teorie stability.

Definice: Soustavu diferenciálních rovnic nazvene lineární, je-li tvaru

$$\begin{aligned}
\tfrac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n + f_1(t)\\
\tfrac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \cdots + a_{2n}(t)\,x_n + f_2(t)\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
\tfrac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n + f_n(t)\,,
\end{aligned}$$

kde $a_{11}(t), a_{12}(t), \ldots, a_{nn}(t), f_1(t), \ldots, f_n(t)$ jsou dané spojité funkce, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ neznámé funkce.

Řekneme, že soustava je homogenní, je-li $f_1(t) = f_2(t) = \cdots = f_n(t) \equiv 0$.

Poznámka: Pro soustavu lineárních diferenciálních rovnic jako speciální případ soustavy diferenciálních rovnic v normálním tvaru platí věta o existenci a jednoznačnosti řešení, která byla uvedena v úvodu tohoto paragrafu.

Označení: Pro stručnost a přehlednost využijeme vektorového zápisu. Buď

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} \quad A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Pak lze danou soustavu

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j + f_i(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

zapsat stručně ve tvaru

$$\frac{dX}{dt} = A\,X + F\,.$$

Všechny vektory jsou brány jako sloupce, tedy matice typu $(n, 1)$. Formálně je tento zápis stejný jako zápis jedné lineární rovnice.

Zavedeme dále tzv. lineární operátor L předpisem

$$L[X] = \frac{dX}{dt} - A\,X\,.$$

Pak má daná soustava tvar $L[X] = F$ a je-li $F \equiv 0$, je tato soustava homogenní.

Lemma: Operátor L má následující vlastnosti:

$$a)\ L[cX] = cL[X] \qquad b)\ L[X_1 + X_2] = L[X_1] + L[X_2]$$

a odtud

$$L\left[\sum_{i=1}^{p} c_i\,X_i\right] = \sum_{i=1}^{p} c_i L[X_i]\,,$$

kde $p \in \mathbf{N}$, a $c, c_1, \ldots, c_p$ jsou konstanty.

Důkaz: Zřejmý.

Poznámka: V dalším si všimneme vlastností homogenní soustavy $L[X] = 0$. Ukazuje se, že celá řada vlastností lineární diferenciální rovnice $n-$tého řádu je shodná s vlastnostmi soustavy, jen řešeními jsou vektotové funkce.

Věta: Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_k$ řešení homogenní soustavy $L[X] = 0$, $c_1, c_1, \ldots, c_k$ libovolné konstanty, pak je i funkce $X = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i\, X_i$ řešením dané soustavy.

Důkaz: Podle předchozího lemmatu platí

$$L[X] = L\left[\sum_{i=1}^{k} c_i\, X_i\right] = \sum_{i=1}^{k} c_i\, L[X_i] = 0\,.$$

Důsledek: Je-li $L[X] = 0$ homogenní soustava s reálnými koeficienty $a_{ij}(t)$ a $X = U + iV$ komplexní řešení, pak jsou i funkce U a V řešením dané soustavy.

Důkaz: Poněvadž platí

$$0 = L[X] = L[U + iV] = L[U] + iL[V]\,,$$

plyne odtud, že $L[U] = L[V] = 0$.

Definice: Buď

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

systém n řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic $L[X] = 0$. Potom determinant

$$W = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

nazýváme Wronského determinantem (nebo wronskiánem) dané soustavy řešení.

Věta: Předpokládejme, že funkce $a_{ij}(t)$ jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ a buď $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n řešení homogenní soustavy $L[X] = 0$. Nechť je wronskián W těchto řešení roven 0 v bodě $t_0 \in \langle a, b\rangle$. Potom jsou řešení $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lineárně závislá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a tedy $W \equiv 0$ v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz: Poněvadž je $W(t_0) = 0$, má homogenní soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{lllll} c_1\, x_{11}(t_0) & + c_2\, x_{12}(t_0) & + \ldots & + c_n\, x_{1n}(t_0) & = 0 \\ c_1\, x_{21}(t_0) & + c_2\, x_{22}(t_0) & + \ldots & + c_n\, x_{2n}(t_0) & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1\, x_{n1}(t_0) & + c_2\, x_{n2}(t_0) & + \ldots & + c_n\, x_{nn}(t_0) & = 0 \end{array}$$

netriviální řešení $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \ldots, \widetilde{c}_n$. Tuto soustavu lze zapsat vektorově ve tvaru

$$c_1\, X_1(t_0) + c_2\, X_2(t_0) + \cdots + c_n\, X_n(t_0) = 0\,.$$

Označme nyní $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{c}_i\, X_i(t)$. Potom je $X(t)$ řešením soustavy $L[X] = 0$, které vyhovuje počátečním podmínkám $X(t_0) = \mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0)$. Podle věty o existenci a jednoznačnosti

řešení musí být $X(t) = 0 \ \forall t \in \langle a, b\rangle$. Odtud plyne, že $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{c}_i \, X_i(t) = 0 \ \forall t \in \langle a, b\rangle$ a funkce $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou lineárně závislé.

Definice: Libovolný systém n lineárně nezávislých řešení $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soustavy $L[X] = 0$ nazveme fundamentální systém řešení.

Poznámka: Je-li $X_1, X_2, \ldots, X_n$ fundamentální systém řešení pro $t \in \langle a, b\rangle$, potom je $W \neq 0$ pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$.

Věta: Buď X libovolné řešení soustavy $L[X] = 0$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ fundamentální systém řešení této soustavy. Potom existují jednoznačně určené konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tak, že

$$X = \sum_{i-1}^{n} c_i \, X_i \, .$$

Důkaz: Nechť řešení X vyhovuje počáteční podmínce $X(t_0) = X_0$. Poněvadž je $W \neq 0$, existuje jediné řešení soustavy lineárních rovnic

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \, X_i(t_0) = X_0 \, , \ \text{tedy} \ X = \sum_{i=1}^{n} c_i \, X_i \, .$$

Poznámka: Předchozí věta ukazuje, že k tomu, abychom našli obecné řešení soustavy $L[X] = 0$, stačí najít nějaký fundamentální systém řešení. Otázkou nalezení takového fundamentálního systému se budeme zabývat v dalším pro speciální případ soustavy s konstantními koeficienty.

Příklad: Najděte obecné řešení soustavy $\frac{dx}{dt} = y$; $\frac{dy}{dt} = -x$.

Řešení: Je-li daná soustava tak jednoduchá jako je tato, můžeme z ní jednu (nebo více) neznámých funkcí vyloučit a řešit jednu rovnici druhého (nebo vyššího) řádu. Jestliže prvou rovnici znovu zderivujeme, dostaneme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = -x \, , \ \text{tedy} \ \frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \, .$$

Odtud plyne, že

$$x(t) = c_1 \, \cos t + c_2 \, \sin t \ ; \ y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -c_1 \, \sin t + c_2 \, \cos t \, .$$

Později se seznámíme se standardním postupem. Toto vyjádření je ve složkách, neboli vektorově

$$X = (c_1 \, \cos t + c_2 \, \sin t \ , \ -c_1 \, \sin t + c_2 \, \cos t) \, .$$

Odtud také získáme fundamentální systém řešení jestliže postupně volíme (na příklad)

$$c_1 = 1 \, , \, c_2 = 0 \quad \text{a} \quad c_1 = 0 \, , \, c_2 = 1 \, ,$$

tedy

$$X_1 = (\cos t, -\sin t) \ ; \quad X_2 = (\sin t, \cos t) \, .$$

Wronskián je roven $W = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, což znovu potvrzuje, že se jedná o fundamentální systém řešení.

Poznámka: Zbývá odpověď na otázku, jak nalézt obecné řešení nehomogenní soustavy $L[X] = F$.

Lemma: Buďte X_1, X_2 dvě řešení soustavy $L[X] = F$. Potom je $X = X_1 - X_2$ řešením odpovídající homogenní soustavy $L[X] = 0$.

Důkaz: Platí $L[X_1 - X_2] = L[X_1] - L[X_2] = F - F = 0$.

Věta: Obecné řešení soustavy $L[X] = F$ je tvaru

$$X = X_p + \sum_{i=1}^{n} c_i\, X_i\,,$$

kde X_p je jedno partikulární řešení dané soustavy a $\sum_{i=1}^{n} c_i\, X_i$ je obecné řešení homogenní soustavy $L[X] = 0$.

Důkaz: Buď X libovolné řešení soustavy $L[X] = F$. Potom je $X - X_p$ řešením soustavy homogenní $L[X] = 0$. Existují tedy jednoznačně určené konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tak, že

$$X - X_p = \sum_{i=1}^{n} c_i\, X_i\,, \quad \text{neboli} \quad X = X_p + \sum_{i=1}^{n} c_i\, X_i\,.$$

Věta: (Princip superpozice řešení)

Řešení soustavy diferenciálních rovnic $L[X] = \sum_{i=1}^{k} F_i$ je tvaru $X_p = \sum_{i=1}^{k} X_{p_i}$, kde X_{p_i} je řešení soustavy $L[X] = F_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Důkaz: Platí

$$L\left[\sum_{i=1}^{k} X_{p_i}\right] = \sum_{i=1}^{k} L\left[X_{p_i}\right] = \sum_{i=1}^{k} F_i\,.$$

Poznámka: Problém nalezení obecného řešení soustavy $L[X] = F$ se tedy skládá ze dvou částí.

1. Nalezení fundamentálního systému řešení homogenní soustavy $L[X] = 0$.
2. Nalezení jednoho partikulárního řešení soustavy $L[X] = F$.

Prvý problém bude řešen později pro soustavy rovnic s konstantními koeficienty, druhý problém se řeší metodou variace konstant.

Věta: Buď $X_1, X_2, \ldots, X_n$ fundamentální systém řešení homogenní soustavy $L[X] = 0$. Potom existují funkce $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ tak, že

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, X_i$$

je řešením soustavy $L[X] = F$.

Důkaz: Buď $X = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(t)\, X_i$. Potom po dosazení do rovnice $\frac{dX}{dt} = A\,X + F$ dostaneme

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, X_i + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, \frac{dX_i}{dt} = A \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, X_i + F = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, A\, X_i + F\,.$$

Poněvadž $\frac{dX_i}{dt} = A\,X_i$, dostaneme, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, X_i = F\,.$$

To je soustava n lineárních rovnic pro n neznámých $c_1'(t)$, $c_2'(t)$, $\dots$, $c_n'(t)$, která má nenulový determinant (wronskián) a tedy jediné řešení. Jestliže si příslušnou soustavu rozepíšeme, dostaneme

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1'(t)\, x_{11} & + & c_2'(t)\, x_{12} & + & \dots & + & c_n'(t)\, x_{1n} & = & f_1(t) \\ c_1'(t)\, x_{21} & + & c_2'(t)\, x_{22} & + & \dots & + & c_n'(t)\, x_{2n} & = & f_2(t) \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ c_1'(t)\, x_{n1} & + & c_2'(t)\, x_{n2} & + & \dots & + & c_n'(t)\, x_{nn} & = & f_n(t) \end{array}.$$

Hledané funkce $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ získáme pak integrací.

Příklad: Najděte obecné řešení soustavy $\frac{dx}{dt} = y$; $\frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t}$.

Řešení: Jak již bylo ukázáno, obecné řešení odpovídající homogenní soustavy je tvaru

$$x = c_1\, \cos t + c_2\, \sin t\, ; \quad y = -c_1\, \sin t + c_2\, \cos t$$

Jestliže tedy hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$x(t) = c_1(t)\, \cos t + c_2(t)\, \sin t\, ; \quad y(t) = -c_1(t)\, \sin t + c_2(t)\, \cos t\,,$$

dostaneme po dosazení do původní soustavy rovnice

$$c_1'(t)\, \cos t + c_2'(t)\, \sin t = 0\, ; \quad -c_1'(t)\, \sin t + c_2'(t)\, \cos t = \frac{1}{\cos t}$$

s řešením $c_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}$, $c_2'(t) = 1$. Odtud $c_1(t) = \ln|\cos t| + k_1$, $c_2(t) = t + k_2$ a obecné řešení je tvaru

$$x = k_1\, \cos t + k_2\, \sin t + \cos t\, \ln|\cos t| + t\, \sin t\, ;$$
$$y = -k_1\, \sin t + k_2\, \cos t - \sin t\, \ln|\cos t| + t\, \cos t\,.$$

Definice: Lineární soustavou s konstantními koeficienty nazveme soustavu diferenciálních rovnic tvaru

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + f_i(t)\,, \quad i = 1, 2, \dots, n\,,$$

kde všechny koeficienty a_{ij} jsou konstanty.

Poznámka: Zápis takové soustavy bude stejný, jen příslušná matice A je konstantní, tedy

$$\frac{dX}{dt} = A\,X + F\,.$$

Stačí nyní nalézt obecné řešení homogenní soustavy $\frac{dX}{dt} = A\,X$. Tato soustava bude řešena analogicky jako jedna rovnice (lineární) $n-$tého řádu.

Řešení: Uvažme soustavu

$$\begin{array}{lcccccccc} \frac{dx_1}{dt} = & a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1n}\,x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = & a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2n}\,x_n \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = & a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \dots & + & a_{nn}\,x_n \end{array} \tag{1}$$

a předpokládejme řešení ve tvaru

$$x_1 = \alpha_1\, e^{\lambda t}\,,\; x_2 = \alpha_2\, e^{\lambda t}\,,\; \dots\,,\; x_n = \alpha_n\, e^{\lambda t}\,,$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou konstanty, λ parametr. Dosazením do dané soustavy a zkrácením $e^{\lambda t}$ dostáváme dále

$$\begin{array}{ccccccc} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 & + \; a_{12}\,\alpha_2 & + & \dots & + \; a_{1n}\,\alpha_n & = 0 \\ a_{21}\,\alpha_1 & +(a_{22}-\lambda)\alpha_2 & + & \dots & + \; a_{2n}\,\alpha_n & = 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\,\alpha_1 & + \; a_{n2}\,\alpha_2 & + & \dots & +(a_{nn}-\lambda)\alpha_n & = 0 \end{array} \tag{2}$$

Abychom dostali netriviální řešení této soustavy lineárních algebraických rovnic, musí být determinant této soustavy roven 0 . Odtud dostaneme definici tzv. charakteristické rovnice.

Definice: Rovnici

$$\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

nazýváme <u>charakteristickou rovnicí</u> dané soustavy.

Poznámky: 1. Kořeny charakteristické rovnice jsou vlastní nebo charakteristická čísla matice A , jak je dobře známo z lineární algebry.

2. Charakteristická rovnice $\triangle(\lambda) = 0$ je algebraická rovnice $n-$tého stupně a má tedy v oboru komplexních čísel právě n kořenů, ovšem každý kořen je třeba počítat tolikrát, kolik je jeho násocnost. Podle toho budeme též rozlišovat dva případy.

<u>I. Charakteristická rovnice má jednonásobné kořeny.</u>

Nechť jsou tyto kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Dosadíme-li do soustavy (2) kořen λ_j , dostaneme

$$\begin{array}{ccccccc} (a_{11}-\lambda_j)\alpha_1 & + \; a_{12}\,\alpha_2 & + & \dots & + \; a_{1n}\,\alpha_n & = 0 \\ a_{21}\,\alpha_1 & +(a_{22}-\lambda_j)\alpha_2 & + & \dots & + \; a_{2n}\,\alpha_n & = 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\,\alpha_1 & + \; a_{n2}\,\alpha_2 & + & \dots & +(a_{nn}-\lambda_j)\alpha_n & = 0 \end{array} \tag{3}$$

a tato soustava má netriviální řešení

$$\alpha_1^{(j)}\,,\; \alpha_2^{(j)}\,,\; \dots\,,\; \alpha_n^{(j)} \quad j = 1, 2, \dots, n\,.$$

(Vlastní vektor matice A). Jestliže tyto výsledky shrneme, dostaneme.

Věta: Buď $\frac{dX}{dt} = A\,X$ homogenní soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a předpokládejme, že její charakteristická rovnice $\triangle(\lambda) = 0$ má n různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Potom vektorové funkce

$$X_j = \left(\alpha_1^{(j)}\, e^{\lambda_j t}\,,\, \alpha_2^{(j)}\, e^{\lambda_j t}\,,\, \dots\,,\, \alpha_n^{(j)}\, e^{\lambda_j t}\right) = \left(\alpha_1^{(j)}\,,\, \alpha_2^{(j)}\,,\, \dots\,,\, \alpha_n^{(j)}\right) e^{\lambda_j t}\ ;\ \ j = 1, 2, \dots, n\,,$$

kde $\alpha_1^{(j)}\,,\, \alpha_2^{(j)}\,,\, \dots\,,\, \alpha_n^{(j)}$ je netiviální řešení soustavy (3), tvoří fundamentální systém řešení soustavy (1).

Důkaz: Z předchozích úvah plyne, že X_j jsou řešení soustavy (1), zbývá pouze ukázat, že tato řešení jsou lineárně nezávislá. Nechť tedy

$$\sum_{j=1}^{n} \varrho_j\, X_j = 0\,,\ \text{ neboli }\ \sum_{j=1}^{n} \varrho_j\, \alpha_1^{(j)}\, e^{\lambda_j t} = 0\,,\ \sum_{j=1}^{n} \varrho_j\, \alpha_2^{(j)}\, e^{\lambda_j t} = 0\,,\ \dots\,,\ \sum_{j=1}^{n} \varrho_j\, \alpha_n^{(j)}\, e^{\lambda_j t} = 0\,.$$

Poněvadž jsou funkce $e^{\lambda_1 t}\,,\, e^{\lambda_2 t}\,,\, \dots\,,\, e^{\lambda_n t}$ lineárně nezávislé, plyne odtud, že

$$\begin{array}{llll}
\varrho_1\, \alpha_1^{(1)} = 0\,, & \varrho_2\, \alpha_1^{(2)} = 0\,, & \dots\,, & \varrho_n\, \alpha_1^{(n)} = 0 \\
\varrho_1\, \alpha_2^{(1)} = 0\,, & \varrho_2\, \alpha_2^{(2)} = 0\,, & \dots\,, & \varrho_n\, \alpha_2^{(n)} = 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\varrho_1\, \alpha_n^{(1)} = 0\,, & \varrho_2\, \alpha_n^{(2)} = 0\,, & \dots\,, & \varrho_n\, \alpha_n^{(n)} = 0\,.
\end{array}$$

Vzhledem k tomu, že $\alpha_1^{(j)}\,,\, \alpha_2^{(j)}\,,\, \dots\,,\, \alpha_n^{(j)}$ je netriviální řešení soustavy (3), musí být

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \dots = \varrho_n = 0\,.$$

Poznámka: Kdybychom využili věty z lineární algebry, že vlastní vektory, odpovídající různým vlastním číslům, jsou lineárně nezávislé, mohli jsme si předchozí důkaz ušetřit. Platí totiž

$$W = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \dots & \alpha_1^{(n)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{(1)} & \alpha_n^{(2)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} \neq 0$$

a ve sloupcích příslušného determinantu figurují vlastní vektory matice A. Nebo to můžeme také chápat tak, že důkazem předchozí věty jsme mimochodem dokázali příslušnou větu z lineární algebry. V dalším se pokusíme minimálně odkazovat na lineární algebru, i když to bude někdy znamenat o něco delší výpočty.

Příklad: Najděte obecné řešení soustavy $\frac{dx}{dt} = 2x + y$; $\frac{dy}{dt} = 3x + 4y$.

Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}\,,\quad \text{neboli } (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0\,,\ \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0\ ;\ \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 5\,.$$

Je-li $\lambda = 1$, dostaneme pro výpočet 1. vlastního vektoru soustavu

$$\begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{array} \quad \text{s řešením } \alpha_1^{(1)} = 1\,,\ \alpha_2^{(1)} = -1\,.$$

Pro $\lambda = 5$ soustavu

$$\begin{array}{c} -3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{array} \quad \text{s řešením } \alpha_1^{(2)} = 1\,,\ \alpha_2^{(2)} = 3\,.$$

Fundamentální systém je tedy

$$X_1 = \left(e^t\,,\ -e^t \right) = (1,-1)\, e^t\ ;\ X_2 = \left(e^{5t}\,,\ 3\, e^{5t} \right) = (1,3)\, e^{5t}$$

a obecné řešení

$$X = c_1\, X_1 + c_2\, X_2 \quad \text{neboli} \quad \begin{array}{c} x = c_1\, e^t + c_2\, e^{5t} \\ y = -c_1\, e^t + 3c_2\, e^{5t} \end{array} \ .$$

Poznámka: V případě, že je některý kořen charakteristické rovnice $\triangle(\lambda) = 0$ komplexní, pak dostaneme také komplexní řešení. Jsou-li však všechna čísla $a_{ij}\quad i,j = 1,2,\ldots,n$ reálná a je-li na příklad $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ komplexní kořen, má charakteristická rovnice i kořen komplexně sdružený $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Této dvojici komplexně sdružených kořenů odpovídá dvojice řešení tvaru

$$\widetilde{X_1} = \left(\alpha_1^{(1)}\, e^{(\alpha+i\beta)t}\,,\ \alpha_2^{(1)}\, e^{(\alpha+i\beta)t}\,,\ \ldots\,,\ \alpha_n^{(1)}\, e^{(\alpha+i\beta)t} \right)\ ;$$

$$\widetilde{X_2} = \left(\alpha_1^{(2)}\, e^{(\alpha-i\beta)t}\,,\ \alpha_2^{(2)}\, e^{(\alpha-i\beta)t}\,,\ \ldots\,,\ \alpha_n^{(2)}\, e^{(\alpha-i\beta)t} \right) .$$

Ukazuje se, že i čísla $\alpha_j^{(1)}$ a $\alpha_j^{(2)}$ (vlastní vektory) lze zvolit tak, aby byla komplexně sdružená. Místo komplexních řešení $\widetilde{X_1}$ a $\widetilde{X_2} = \overline{\widetilde{X_1}}$ lze zvolit reálná řešení

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(\widetilde{X_1} + \overline{\widetilde{X_1}} \right) = \left(\operatorname{Re}\left\{ \alpha_1^{(1)}\, e^{(\alpha+i\beta)t} \right\}\,,\ \operatorname{Re}\left\{ \alpha_2^{(1)}\, e^{(\alpha+i\beta)t} \right\}\,,\ \ldots\,,\ \operatorname{Re}\left\{ \alpha_n^{(1)}\, e^{(\alpha+i\beta)t} \right\} \right)\,,$$

$$X_2 = \frac{1}{2i}\left(\widetilde{X_1} - \overline{\widetilde{X_1}} \right) = \left(\operatorname{Im}\left\{ \alpha_1^{(1)}\, e^{(\alpha+i\beta)t} \right\}\,,\ \operatorname{Im}\left\{ \alpha_2^{(1)}\, e^{(\alpha+i\beta)t} \right\}\,,\ \ldots\,,\ \operatorname{Im}\left\{ \alpha_n^{(1)}\, e^{(\alpha+i\beta)t} \right\} \right) .$$

Příklad: Najděte obecné řešení soustavy $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x \end{array}$.

Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0\,, \quad \text{neboli}\ \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0\ \text{ s kořeny }\ \lambda_{1,2} = 2 \pm i\,.$$

Pro $\lambda_1 = 2 + i$ dostaneme soustavu

$$\begin{array}{r} (-1-i)\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + (1-i)\alpha_2 = 0 \end{array} \quad \text{s řešením}\ \alpha_1^{(1)} = 1\,,\ \alpha_2^{(1)} = 1 + i\,.$$

Pro $\lambda_2 = 2 - i$ dostaneme soustavu

$$\begin{array}{r} (-1+i)\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + (1+i)\alpha_2 = 0 \end{array} \quad \text{s řešením}\ \alpha_1^{(2)} = 1\,,\ \alpha_2^{(2)} = 1 - i\,.$$

Tedy příslušný komplexní fundamentální systém je

$$\widetilde{X_1} = \left(e^{(2+i)t}\,,\ (1+i)e^{(2+i)t} \right)\ ;\ \widetilde{X_2} = \left(e^{(2-i)t}\,,\ (1-i)e^{(2-i)t} \right) .$$

Odtud dostaneme reálný fundamentální systém

$$X_1 = \left(e^{2t}\ \cos t\,,\ e^{2t}(\cos t - \sin t) \right)\ ;\ X_2 = \left(e^{2t}\ \sin t\,,\ e^{2t}(\cos t + \sin t) \right)$$

a obecné řešení je tedy tvaru

$$x = e^{2t}\,(c_1\ \cos t + c_2\ \sin t)\ ;\ y = e^{2t}\left\{ (c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\sin t \right\} .$$

II. Charakteristická rovnice má vícenásobné kořeny.

Nechť je třeba λ_1 $k-$násobným kořenem charakteristické rovnice $\triangle(\lambda) = 0$. Potom má soustava rovnic

$$(4) \qquad \begin{array}{ccccc} (a_{11}-\lambda_1)\alpha_1 & + \; a_{12}\,\alpha_2 & + \; \dots & + \; a_{1n}\,\alpha_n & = 0 \\ a_{21}\,\alpha_1 & +(a_{22}-\lambda_1)\alpha_2 & + \; \dots & + \; a_{2n}\,\alpha_n & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\,\alpha_1 & + \; a_{n2}\,\alpha_2 & + \; \dots & +(a_{nn}-\lambda_1)\alpha_n & = 0 \end{array}$$

netriviální řešení.

a) Jestliže existuje k lineárně nezávislých řešení této soustavy (vlastních vektorů), na příklad

$$\left(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}\right) \; ; \; \left(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)}\right) \; ; \; \dots \; ; \; \left(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \dots, \alpha_n^{(k)}\right) ,$$

je situace jednoduchá v tom smyslu, že získáme k lineárně nezávislých řešení

$$X_1 = \left(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}\right) e^{\lambda_1 t} \; ; \; X_2 = \left(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)}\right) e^{\lambda_1 t} \; ; \; \dots \; ;$$

$$X_k = \left(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \dots, \alpha_n^{(k)}\right) e^{\lambda_1 t} .$$

b) V případě, že existuje méně než k lineárně nezávislých řešení soustavy (4), je situace poněkud komplikovanější. V tomto případě je možno hledat řešení podobným způsobem jako v případě vícenásobného kořene charakteristické rovnice diferenciální rovnice $n-$tého řádu. Hledejme v tom případě řešení, odpovídající kořenu λ_1 ve tvaru

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \; , \; \text{ kde } \; x_j(t) = \left(\alpha_0^{(j)} + \alpha_1^{(j)}\,t + \dots + \alpha_{k-1}^{(j)}\,t^{k-1}\right) e^{\lambda_1 t}$$

pro $j = 1, 2, \dots, n$, kde koeficienty

$$\alpha_l^{(j)} \qquad j = 1, 2, \dots, n \; ; \; l = 0, 1, \dots, k-1 .$$

jsou zatím neurčité. Dosadíme-li do soustavy (1), ukazuje se, že tyto koeficienty lze vypočítat. Tuto situaci nebudeme vyšetřovat obecně, předvedeme ji jen na příkladech.

Poznámka: Ten, kdo se seznámil s Jordanovým tvarem matice, ví, že výše uvedeným postupem vlastně hledáme zobecněné vlastní vektory matice A a tedy ne vždy musíme jít až k polynomu stupně $(k-1)-$vého. Skutečný stupeň neznámého polynomu je roven $l-1$, kde l je délka příslušné Jordanovy klece. (Přidat tvar těchto řešení.) To však bude zřejmé i z postupu, který předvedeme i za cenu toho, že výpočet bude v tom případě nepříjemně dlouhý.

Příklady: 1. Najděte obecné řešení soustavy $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y - 3z \\ \frac{dz}{dt} = 2z - x + y \end{array}$.

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 , \quad \text{neboli } \; \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0 \; \text{ s kořeny } \; \lambda_1 = 0 , \; \lambda_{2,3} = 1 .$$

Je-li $\lambda = 0$, dostáváme soustavu

$$\begin{array}{r} 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{array} \quad \text{ s řešením } \; u = (1, 3, -1) \quad \left(\alpha_1^{(1)} = 1 , \; \alpha_2^{(1)} = 3 , \; \alpha_3^{(1)} = -1\right)$$

Tomu odpovídá řešení $X_1 = (1, 3, -1)$.

Je-li $\lambda = 1$, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \quad ,$$

která má dvě lineárně nezávislá řešení $v = (1, 1, 0)$ a $w = (1, 0, 1)$. Tomu odpovídají řešení

$$X_2 = v \cdot e^t = \left(e^t, e^t, 0\right) \;;\; X_3 = w \cdot e^t = (e^t, 0, e^t)\,.$$

Pro kontrolu, vypočteme-li wronskián, dostaneme

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ e^t & e^t & 0 \\ e^t & 0 & e^t \end{vmatrix} = -e^{2t} \neq 0\,.$$

Obecné řešení je tedy tvaru

$$x = c_1 + c_2\, e^t + c_3\, e^t \;;\; y = 3c_1 + c_2\, e^t \;;\; z = -c_1 + c_3\, e^t\,.$$

2. Řešte soustavu

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y - z \;;\; \frac{dy}{dt} = 2x - y - 2z \;;\; \frac{dz}{dt} = 2z - x + y\,.$$

Řešení: Charakteristické rovnice je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{neboli} \;\; (\lambda - 1)^3 = 0 \;\; \text{s kořeny} \;\; \lambda_{1,2,3} = 1\,.$$

Této hodnotě odpovídá soustava lineárních rovnic tvaru

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & -\,\alpha_2 & -\,\alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_1 & -\,2\alpha_2 & -\,2\alpha_3 & = 0 \\ -\,\alpha_1 & +\,\alpha_2 & +\,\alpha_3 & = 0 \end{array}$$

se dvěma nezávislými řešeními $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$. Jim odpovídající řešení dané soustavy jsou

$$X_1 = (e^t, e^t, 0) \;;\; X_2 = (e^t, 0, e^t)\,.$$

Třetí řešení budeme nyní hledat ve tvaru

$$x(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t)e^t \;;\; y(t) = (\beta_0 + \beta_1 t)e^t \;;\; z(t) = (\gamma_0 + \gamma_1 t)e^t\,.$$

Je evidentní, že nemusíme vyžadovat polynomy 2. stupně, i když je daný kořen trojnásobný. Odtud

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_1 t)e^t \;;\; \frac{dy}{dt} = (\beta_0 + \beta_1 + \beta_1 t)e^t \;;\; \frac{dz}{dt} = (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_1 t)e^t\,.$$

Dosazením do dané soustavy a zkrácením e^t dostaneme dále

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_1 t &= 2\alpha_0 + 2\alpha_1 t - \beta_0 - \beta_1 t - \gamma_0 - \gamma_1 t \\ \beta_0 + \beta_1 + \beta_1 t &= 2\alpha_0 + 2\alpha_1 t - \beta_0 - \beta_1 t - 2\gamma_0 - 2\gamma_1 t \\ \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_1 t &= -\alpha_0 - \alpha_1 t + \beta_0 + \beta_1 t + 2\gamma_0 + 2\gamma_1 t \end{aligned}$$

neboli 2 soustavy

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0 \\ \beta_1 &= 2(\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0) \\ \gamma_1 &= -\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 &= 0 \end{aligned}$$

Z prvé soustavy plyne, že $\beta_1 = 2\alpha_1$, $\gamma_1 = -\alpha_1$ a stačí tedy položit

$$\alpha_1 = 1\,,\ \beta_1 = 2\,,\ \gamma_1 = -1\,,\ \alpha_0 = 1\,,\ \beta_0 = 0\,,\ \gamma_0 = 0\,.$$

Třetí řešení je tedy tvaru $X_3 = \left((1+t)e^t, 2t\,e^t, -t\,e^t\right)$. Snadno se přesvědčíme, že wronskián je roven

$$W = \begin{vmatrix} e^t & e^t & 0 \\ e^t & 0 & e^t \\ (1+t)e^t & 2t\,e^t & -t\,e^t \end{vmatrix} = e^{3t} \neq 0\,.$$

obecné řešení je tedy

$$x(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^t + c_3(1+t)e^t\ ;\ y(t) = c_1\,e^t + 2c_3t\,e^t\ ;\ z(t) = c_2\,e^t - c_3t\,e^t\,.$$

Poznámka: Ukazuje se, že v některých případech při speciálním tvaru dané soustavy se můžeme vyhnout nepříjemnému počítání se součiny polynomu a exponenciely. Je to tehdy, když se nám bez velkých potíží podaří převést danou soustavu na jednu rovnici vyššího řádu. Následující příklad tuto situaci ilustruje.

3. Řešte soustavu $\frac{dx}{dt} = 2x + y\ ;\ \frac{dy}{dt} = 2y + z\ ;\ \frac{dz}{dt} = 2z\,.$

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{neboli}\ \ (2-\lambda)^3 = 0\ \ \text{a}\ \ \lambda_{1,2,3} = 2\,.$$

Po dosazení této hodnoty dostaneme soustavu $\alpha_2 = 0\ ;\ \alpha_3 = 0$, která má jediné nezávislé řešení $(1,0,0)$. Dostaneme tedy pouze jediné řešení $\left(e^{2t},0,0\right)$. Zbývající dvě nezávislá řešení bychom tedy museli hledat ve tvaru součinu polynomů 2. stupně a exponenciely.

Na druhé straně je však vidět, že 3. rovnice dává okamžitě $z(t) = c_1\,e^{2t}$. Dosazením do 2. rovnice dostaneme

$$\frac{dy}{dt} = 2y + c_1\,e^{2t} \quad \text{s řešením} \quad y(t) = (c_2 + c_1t)e^{2t}$$

a opětovným dosazením do 1. rovnice dostáváme

$$\frac{dx}{dt} = 2x + (c_2 + c_1t)e^{2t} \quad \text{s řešením} \quad x(t) = \left(c_3 + c_2t + \frac{c_1}{2}\,t^2\right)e^{2t}\,.$$

Tato trojice tvoří obecné řešení dané soustavy. Jestliže nyní postupně volíme

$$c_1 = c_2 = 0, c_3 = 1\ ;\ c_1 = c_3 = 0, c_2 = 1\ ;\ c_2 = c_3 = 0, c_1 = 2\,,$$

dostaneme fundamentální systém řešení

$$X_1 = \left(e^{2t}\,,\,0\,,\,0\right)\ ;\ X_2 = \left(t\,e^{2t}\,,\,e^{2t}\,,\,0\right)\ ;\ X_3 = \left(t^2\,e^{2t}\,,\,2t\,e^{2t}\,,\,2\,e^{2t}\right)\,.$$

4. Řešte soustavu

$$\frac{dx}{dt} = 4x - y\ ;\ \frac{dy}{dt} = 3x + y - z\ ;\ \frac{dz}{dt} = x + z\,.$$

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{neboli} \quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0 \; ; \; \lambda_{1,2,3} = 2 \, .$$

Odpovídající soustava lineárních algebraických rovnic má tvar

$$\begin{array}{llll} 2\alpha_1 & -\alpha_2 & & = 0 \\ 3\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & & -\alpha_3 & = 0 \, , \end{array}$$

která má pouze jediné nezávislé řešení $(1,2,1)$. Další řešení musíme tedy hledat ve tvaru

$$x(t) = \left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right) e^{2t} \; ; \; y(t) = \left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\right) e^{2t} \; ; \; z(t) = \left(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2\right) e^{2t} \, .$$

Pro derivace tedy platí

$$\frac{dx}{dt} = \left(2\alpha_0 + \alpha_1 + (2\alpha_1 + 2\alpha_2)t + 2\alpha_2 t^2\right) e^{2t} \; ;$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(2\beta_0 + \beta_1 + (2\beta_1 + 2\beta_2)t + 2\beta_2 t^2\right) e^{2t} \; ;$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(2\gamma_0 + \gamma_1 + (2\gamma_1 + 2\gamma_2)t + 2\gamma_2 t^2\right) e^{2t} \, .$$

Dosazení do soustavy a zkrácením e^{2t} dostaneme

$$2\alpha_0 + \alpha_1 + (2\alpha_1 + 2\alpha_2)t + 2\alpha_2 t^2 = 4\alpha_0 + 4\alpha_1 t + 4\alpha_2 t^2 - \beta_0 - \beta_1 t - \beta_2 t^2 \; ;$$

$$2\beta_0 + \beta_1 + (2\beta_1 + 2\beta_2)t + 2\beta_2 t^2 = 3\alpha_0 + 3\alpha_1 t + 3\alpha_2 t^2 + \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 - \gamma_0 - \gamma_1 t - \gamma_2 t^2 \; ;$$

$$2\gamma_0 + \gamma_1 + (2\gamma_1 + 2\gamma_2)t + 2\gamma_2 t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 \, .$$

Srovnáním koeficientů dostaneme soustavy

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 2\alpha_0 - \beta_0 & \qquad 2\alpha_2 = 2\alpha_1 - \beta_1 & \qquad 0 = 2\alpha_2 - \beta_2 \\ \beta_1 = 3\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0 & \qquad 2\beta_2 = 3\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 & \qquad 0 = 3\alpha_2 - \beta_2 - \gamma_2 \\ \gamma_1 = \alpha_0 \qquad\quad - \gamma_0 & \qquad 2\gamma_2 = \alpha_1 \qquad\quad - \gamma_1 & \qquad 0 = \alpha_2 \qquad\quad - \gamma_2 \, . \end{array}$$

Je-li $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$, dostaneme vlastní vektor $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 2$, $\gamma_0 = 1$, který již známe. Odpovídá mu řešení

$$X_1 = \left(e^{2t} \, , \, 2e^{2t} \, , \, e^{2t}\right) \, .$$

Buď nyní $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$. Potom je $\gamma_1 = \alpha_1$, $\beta_1 = 2\alpha_1$, tedy $\begin{array}{l} \alpha_1 = 2\alpha_0 - \beta_0 \\ 2\alpha_1 = 3\alpha_0 - \beta_0 - \gamma_0 \\ \alpha_1 = \alpha_0 \qquad\quad - \gamma_0 \, . \end{array}$

Pro $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\gamma_1 = 1$ dostaneme $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = 0$. To dává další řešení

$$X_2 = \left((1+t)e^{2t} \, , \, (1+2t)e^{2t} \, , \, t\, e^{2t}\right) \, .$$

Položíme-li nyní $\alpha_2 = 1$; $\beta_2 = 2$; $\gamma_2 = 1$, dostaneme $\begin{array}{l} 2 = 2\alpha_1 - \beta_1 \\ 2 = \alpha_1 \qquad - \gamma_1 \end{array}$, tedy na příklad $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 2$, $\gamma_1 = 0$. Dále $\begin{array}{l} 2 = 2\alpha_0 - \beta_0 \\ 0 = \alpha_0 \qquad - \gamma_0 \end{array}$ a odtud např $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$, $\beta_0 = 2$. Třetí řešení má nyní tvar

$$X_3 = \left((2t + t^2)e^{2t} \, , \, (-2 + 2t + 2t^2)e^{2t} \, , \, t^2\, e^{2t}\right) \, .$$

Jestliže výsledek rozepíšeme do složek, dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$x(t) = \left\{\, c_1 + c_2(1+t) + c_3(2t+t^2) \,\right\} e^{2t} \; ;$$
$$y(t) = \left\{\, 2c_1 + c_2(1+2t) + c_3(-2+2t+2t^2) \,\right\} e^{2t} \; ;$$
$$z(t) = \left\{\, c_1 + c_2 t + c_3 t^2 \,\right\} e^{2t} \, .$$

Poznámka: Při řešení nehomogenní soustavy bývá někdy prospěšné převedení na jednu rovnici vyššího řádu, u které je pak možno partikulární integrál odhadnout. Tím se vyhneme nepříjemnější metodě variace konstant.

5. Řešte soustavu $\frac{dx}{dt} = y + 2e^t$; $\frac{dy}{dt} = x + t^2$.

Řešení: Jestliže 1. rovnici ještě jednou zderivujeme, dostaneme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + 2e^t = x + t^2 + 2e^t \, .$$

Řešení příslušné homogenní rovnice je $\widehat{x}(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t}$, odhad partikulárního integrálu $x_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + bt\, e^t$. Jestliže vypočítáme neznámé konstanty a_0, a_1, a_2, b dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 2 - t^2 + t\, e^t \; ; \; y(t) = (c_1 - 1)e^t - c_2 e^{-t} - 2t + t\, e^t \, .$$

Poznámka: Je-li postup z předchozího příkladu příliš komplikovaný nebo pravé strany nejsou harmonické, nezbývá nic jiného než metoda variace konstant.

6. Řešte soustavu $\frac{dx}{dt} = 2y - x$; $\frac{dy}{dt} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}$.

Řešení: Charakteristická rovnice odpovídající homogenní soustavy je

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{neboli } \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \; ; \; \lambda_1 = 1 \, , \, \lambda_2 = 2 \, .$$

Fundamentální systém řešení je $X_1 = (1,1)e^t$; $X_2 = (2,3)e^{2t}$ a obecné řešení homogenní soustavy

$$\widehat{x}(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} \; ; \; \widehat{y}(t) = c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} \, .$$

Jestliže nyní předpokládáme, že partikulární integrál je ve tvaru

$$x_p(t) = c_1(t)e^t + 2c_2(t)e^{2t} \; ; \; y_p(t) = c_1(t)e^t + 3c_2(t)e^{2t}$$

a dosadíme do dané soustavy, dostaneme

$$c_1'(t)\, e^t + 2c_2'(t)\, e^{2t} = 0 \; ; \quad c_1'(t)\, e^t + 3c_2'(t)\, e^{2t} = \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \, .$$

Odtud $c_2'(t) = \frac{e^t}{e^{2t}+1}$ a tedy $c_2(t) = \operatorname{arctg} e^t + k_2$. Z prvé rovnice dále plyne, že $c_1'(t) = -\frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1}$, tedy $c_1(t) = k_1 - \ln\left(e^{2t}+1\right)$. Obecné řešení dané soustavy má tedy tvar

$$x(t) = k_1\, e^t + 2k_2\, e^{2t} - e^t \ln\left(e^{2t}+1\right) + 2e^{2t} \operatorname{arctg} e^t \; ;$$
$$y(t) = k_1\, e^t + 3k_2\, e^{2t} - e^t \ln\left(e^{2t}+1\right) + 3e^{2t} \operatorname{arctg} e^t \, .$$

Kapitola 6

Funkční řady.

6.1 Stejnoměrná konvergence.

Definice: Buď $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost funkcí, definovaných na číselné množině M. Řekneme, že tato posloupnost je konvergentní v M, jestliže pro každé $x \in M$ existuje vlastní limita

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Poznámka: Je-li dána funkční řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, pak řekneme, že tato řada konverguje, je-li konvergentní posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ jejích částečných součtů

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Znamená to, že věty, které dokážeme pro funkční posloupnosti, můžeme okamžitě využít pro funkční řady.

Příklady: 1. Definujme

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2} \quad \text{pro } n \in \mathbf{N} \text{ a } x \in (-\infty, +\infty).$$

Všechny funkce $f_n(x)$ jsou spojité pro $x \in (-\infty, +\infty)$ a jestliže označíme $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, je $f(0) = 1$ a $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$. Situace je znázorněna na následujícím obrázku.

2. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ není spojitá pro $x \in \mathbf{R}$, přesto ji lze napsat jako limitu posloupnosti spojitých funkcí. Platí

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad \text{kde } f_n(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} nx.$$

Načrtněte obrázek funkcí f_1, f_2, f_3, f_4.

Poznámka: Jestliže budeme požadovat, aby si limitní funkce $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ zachovala dobré vlastnosti funkcí f_n, musíme zavést silmější pojem konvergence, t.zv. stejnoměrnou konvergenci.

Definice: (Stejnoměrná konvergence.)
Buď $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost funkcí, definovaných na číselné množině M. Definujme funkci $f(x)$ předpisem $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ pro všechna $x \in M$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní na množině M, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in M$ platí $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

O funkční řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ řekneme, že je stejnoměrně konvergentní na množině M, je-li posloupnost jejích částečných součtů stejnoměrně konvergentní na M.

Příklady: 1. Buď $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$. Potom je $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$ a dále

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ stejnoměrně pro $x \in \langle 0,1\rangle$. Chování dané posloupnosti je ilustrováno na následujícím obrázku.

2. Označme $g_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ pro $x \in \langle 0,1\rangle$. Potom je opět $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pro všechna $x \in \langle 0,1\rangle$. Poněvadž ale platí $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$, nekonverguje daná posloupnost stejnoměrně. Rozdíl je patrný, když srovnáme následující obrázek s obrázkem z předchozího příkladu.

Poznámky: 1. V souvislosti s předchozími příklady vzniká otázka, jak se máme v konkrétních případech rozhodnout, zda daná posloupnost konverguje stejnoměrně, či nikoliv. Uvedeme postup, který vede ve většině praktických příkladů k cíli. Jestliže si pozorně přečteme definici stejnoměrné konvergence, je vidět, že hlavní úkol zpočívá v odhadu $|f(x) - f_n(x)|$ nezávisle na proměnné x. Pro všechna $x \in M$ však platí

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x\in M} \ |f(x) - f_n(x)| = a_n$$

a jestliže $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, konverguje daná posloupnost stejnoměrně. Suprémum můžeme v celé řadě příkladů nahradit maximem.

2. Nejlépe můžeme porovnat obyčejnou, tedy bodovou konvergenci a stejnoměrnou konvergenci, jestliže si jejich definice zapíšeme pomocí kvantifikátorů.

Bodová konvergence

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in M \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Stejnoměrná konvergence

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in M \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Podstatný je rozdíl v závislosti n_0. Zatímco pro bodovou konvergenci je $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, pro stejnoměrnou konvergenci platí, že $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Věta: (Bolzano-Cauchyovo kritérium.)
Posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní na množině M právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \forall m, n \geq n_0 \text{ a } \forall x \in M \text{ platí } |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz: 1. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně na M. Potom

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_0 \text{ a } \forall x \in M \text{ platí } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Je-li nyní $m, n \geq n_0$, potom pro všechna $x \in M$ platí

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2. Nechť

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \forall m, n \geq n_0 \text{ a } \forall x \in M \text{ platí } |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom je pro každé $x \in M$ splněna Bolzano-Caucyova podmínka a tedy existuje $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Neboli platí

$$\lim_{n\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Poznámka: Pro nekonečné řady má toto kritérium tvar

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \forall m, n \geq n_0 \, (m \leq n) \text{ a } \forall x \in M \text{ platí } |u_{m+1}(x) + \cdots + u_n(x)| < \varepsilon.$$

Definice: Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ funkční řada. Řekneme, že tato řada je majorantní k řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, jestliže pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a pro všechna $x \in M$ platí $|u_n(x)| \leq v_n(x)$.

Věta: Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ majorantní k řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ v M. Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ stejnoměrně konvergentní v M, je i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ stejnoměrně konvergentní v M.

Důkaz: Podle Bolzano-Cauchyovy podmínky platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \forall m, n \geq n_0 \, (m \leq n) \text{ a } \forall x \in M \text{ platí}$$

$$|v_{m+1}(x) + \cdots + v_n(x)| = v_{m+1}(x) + \cdots + v_n(x) < \varepsilon.$$

Tedy

$$|u_{m+1}(x) + \cdots + u_n(x)| \leq |u_{m+1}(x)| + \cdots + |u_n(x)| \leq v_{m+1}(x) + \cdots + v_n(x) < \varepsilon \ \forall x \in M$$

a tvrzení věty je dokázáno.

! Důsledek: (Weierstrassovo kritérium)
Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní číselná řada a nechť $|u_n(x)| \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a pro všechna $x \in M$. Potom je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ stejnoměrně konvergentní v M.

Příklad: Ukažte, že jsou následující řady stejnoměrně konvergentní pro $x \in \mathbf{R}$.

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \qquad\qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2} \qquad\qquad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}.$$

Řešení: a) Stačí si uvědomit, že $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

b) Využijeme-li známé nerovnosti $\frac{2|ab|}{a^2+b^2} \le 1$, dostaneme okamžitě

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right| = \frac{n|x|}{1+n^5x^2} = \frac{1}{2n^{3/2}} \cdot \frac{2n^{5/2}|x|}{1+n^5x^2} \le \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ je však konvergentní, což dokazuje tvrzení.

c) Užitím odhadu $|\operatorname{arctg} t| \le |t|$, který platí pro všechna $t \in \mathbf{R}$, dostaneme

$$\left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}\right| \le \frac{2|x|}{x^2+n^3} \le \frac{1}{n^{3/2}}$$

a daná řada tedy konverguje stejnoměrně.

Poznámka: Se stejnoměrnou konvergencí úzce souvisí slavná Weierstrassova věta o aproximaci spojité funkce polynomem.

! Věta: (Weierstrass)
Buď f spojitá funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje polynom $P_n(x)$ stupně $n = n(\varepsilon)$ tak, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$.

Důkaz: Předvedený důkaz pochází od Bernsteina z roku 1912. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$. Jinak vezmeme funkci $g(x) = f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, která je již definována na $\langle 0, 1\rangle$. Pro $n \ge 1$ definujme Bernsteinovy polynomy

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$ stejnoměrně na $\langle 0, 1\rangle$. Platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

Odtud zderivováním dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k-1} = 0 \quad \Big| \cdot (1-x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 0$$

Jednoduchou úpravou odtud dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x.$$

Dalším zderivováním dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n}\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k-1} = 1 \Big| \cdot (1-x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k} = \frac{1}{n}\,x + \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2.$$

Tedy shrnutím těchto výrazů dostáváme

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Dále platí

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right\} \binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k} = \sum{}' + \sum{}'',$$

kde v sumě $\sum'$ sčítáme přes ty indexy k, pro něž je

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \le \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \quad \text{pro pevné } x \in \langle 0,1\rangle.$$

a $\sum''$ je sčítání přes ostatní indexy; pro tyto indexy je $\left|\frac{k}{n} - x\right| > \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$. Poněvadž je f spojitá na $\langle 0,1\rangle$, existuje konstanta M tak, že $|f(x)| \le M$ pro všechna $x \in \langle 0,1\rangle$. Nyní

$$\left|\sum{}''\right| \le 2M \sum{}'' \binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k} = 2M \sum{}'' \frac{(k-nx)^2}{(k-nx)^2}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k} \le$$

$$\le 2M \sum{}'' \frac{(k-nx)^2}{\sqrt{n^3}}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k} \le \frac{2M}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k} = \frac{2M}{\sqrt{n^3}}nx(1-x) \le \frac{2M}{\sqrt{n}}.$$

Dále

$$\left|\sum{}'\right| \le \varepsilon_n \sum{}' \binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k} \le \varepsilon_n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}(1-x)^{n-k} = \varepsilon_n,$$

kde

$$\varepsilon_n = \max_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \le \frac{1}{\sqrt[4]{n}}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|.$$

Ze stejnoměrné spojitosti f na $\langle 0,1\rangle$ plyne, že $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ a tedy

$$|f(x) - B_n(x)| \le \varepsilon_n + \frac{2M}{\sqrt{n}}.$$

Poznámka: V další části uvedeme základní věty, týkající se stejnoměrné konvergence.

Věta: Buď posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní v intervalu $(c-\delta, c+\delta)$, kde $\delta > 0$. Pro $x \in (c-\delta, c+\delta)$ definujme funkci $f(x)$ předpisem $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Nechť pro všechna $n \in \mathbf{N}$ existuje vlastní limita $\lim_{x\to c} f_n(x) = b_n$. Potom existují též vlastní limity

$$\lim_{x\to c} f(x)\,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n$$

a platí

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Tento vztah je možno zapsat rovností

$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c} f_n(x).$$

Důkaz: 1. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Platí totiž

$$|b_n - b_m| \le |f_n(x) - b_n| + |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| + |f_m(x) - b_m|.$$

Nyní ke každému $\varepsilon > 0$ existují $n_0 \in \mathbf{N}$ a $\eta > 0$ tak, že pro všechna $m, n \ge n_0$ a pro všechna $x \in (c-\eta, c+\eta)$ platí

$$|f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{4}\,, \ \ |f_m(x) - b_m| < \frac{\varepsilon}{4} \ \text{ a též } |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}\,, \ \ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Prvé dvě nerovnosti plynou z existence $\lim\limits_{x\to c} f_n(x) = b_n$ a zbývající dvě z předpokladu stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Tedy posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ existuje.

2. Je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = b$. Můžeme psát

$$|f(x) - b| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b|.$$

Tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existují $n_0 \in \mathbf{N}$ a $\eta > 0$ tak, že pro všechna $n \ge n_0$ a pro všechna $x \in (c-\eta, c+\eta)$ je

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \ \ |f_n(x) - b_n| < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ a } \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tím je důkaz věty dokončen.

Poznámka: Analogická věta platí pro jednostranné limity.

Věta: Funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... nechť jsou spojité v intervalu $\mathcal{I}$ a předpokládejme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně v $\mathcal{I}$. Potom je v intervalu $\mathcal{I}$ spojitá také funkce

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Důkaz: Buď $c \in \mathcal{I}$ vnitřní bod. Dokážeme, že $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$. Ze spojitosti funkcí f_n plyne existence $\lim\limits_{x\to c} f_n(x) = f_n(c)$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Podle předchozí věty existují $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(c)$ a jsou si rovny. Tedy

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) = \lim_{x\to c} f(x).$$

Analogicky se dokáže spojitost v krajních bodech intervalu $\mathcal{I}$.

Věta: Funkce $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ nechť mají vlastní derivace $f_n'(x)$ v omezeném intervalu (a, b). Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje alespoň v jednom bodě $c \in (a, b)$ a posloupnost $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně v (a, b). Potom platí

1. Posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně v (a, b).

2. Definujeme-li funkci $f(x)$ rovností $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ pro $x \in (a, b)$, má funkce f v (a, b) derivaci

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Důkaz: 1. Podle předpokladu posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje v bodě $c \in (a,b)$, tedy

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_1 \in \mathbf{N} \;\text{ tak, že }\; \forall\, m,n \ge n_1 \;\text{ platí }\; |f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dále $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně, tedy

$$\exists\, n_2 \in \mathbf{N} \;\text{ tak, že }\; \forall\, m,n \ge n_2 \;\text{ a }\; \forall\, x \in (a,b) \;\text{ platí }\; |f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Jestliže nyní zvolíme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, potom

$$\forall\, m,n \ge n_0 \;\text{ a }\; \forall\, x \in (a,b) \;\text{ platí }\; \{f_m(x) - f_n(x)\} - \{f_m(c) - f_n(c)\} = (x-c)\{f'_m(\xi) - f'_n(\xi)\},$$

kde ξ leží mezi body c a x. Tedy pro $x \in (a,b)$ platí

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(c) - f_n(c)| + (b-a)|f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| < \varepsilon,$$

a posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně v (a,b).

2. Označme

$$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x_0+h) - f_n(x_0)}{h}\,,\;\; \varphi(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

kde $x_0, x_0 + h \in (a,b)$. Je $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(h) = \varphi(h)$ a ukážeme, že tato limita existuje stejnoměrně vzhledem k h. Platí

$$\varphi_m(h) - \varphi_n(h) = \frac{1}{h}\{[f_m(x_0+h) - f_n(x_0+h)] - [f_m(x_0) - f_n(x_0)]\} = f'_m(\xi) - f'_n(\xi),$$

kde ξ leží mezi x_0 a $x_0 + h$. Tedy

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \;\text{ tak, že }\; \forall\, m,n \ge n_0 \;\text{ je }\; |\varphi_m(h) - \varphi_n(h)| = |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| < \varepsilon.$$

Dále $\lim\limits_{h\to 0} \varphi_n(h) = f'_n(x_0)$ existuje pro každé $n \in \mathbf{N}$. Tedy existují i $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x_0)\,,\;\; \lim\limits_{h\to 0} \varphi(h)$ a jsou si rovny, neboli

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x_0) = \lim_{h\to 0} \varphi(h) = f'(x_0).$$

Věta: Nechť funkce $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ mají v omezeném intervalu (a,b) primitivní funkce $F_n(x)$, jež zvolíme tak, aby posloupnost $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergovala alespoň v jednom bodě $c \in (a,b)$. Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně v (a,b). Potom je též posloupnost $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní v (a,b) a položíme-li

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,,\;\; F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x),$$

je F primitivní funkcí k f v (a,b).

Důkaz: Tvrzení věty plyne okamžitě z předchozí věty. Zbývá pouze ukázat, že posloupnost $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ lze vždy zvolit tak, aby konvergovala v bodě $c \in (a,b)$. To je ale snadné. Buďte $G_n(x)$ nějaké primitivní funkce k $f_n(x)$ a položme $F_n(x) = G_n(x) - G_n(c)$.

Poznámka: Příslušné věty pro nekonečné funkční řady dostaneme okamžitě z předchozích vět. Jen pro úplnost je sepíšeme.

Věta: Funkce $u_1(x)$, $u_2(x)$, … nechť jsou spojité v intervalu $\mathcal{I}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ stejnoměrně konvergentní v $\mathcal{I}$. Potom je součet této řady spojitá funkce v $\mathcal{I}$.

Věta: Funkce $u_k(x)$, $(k = 1, 2, \dots)$ nechť mají v intervalu (a, b) derivace $u_k'(x)$. Předpokládejme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě intervalu (a, b) a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ konverguje stejnoměrně v (a, b). Potom je též řada $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ stejnoměrně konvergentní v (a, b) a platí $s'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Věta: Funkce $u_k(x)$, $(k = 1, 2, \dots)$ nechť mají v intervalu (a, b) primitivní funkce $U_k(x)$, jež zvolíme tak, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě (a, b). Předpokládejme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverguje stejnoměrně v (a, b). Potom je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ stejnoměrně konvergentní v (a, b) a její součet je v (a, b) primitivní funkcí k součtu řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Příklady: 1. Najděte rozvoj funkce $y = \operatorname{arctg} x$ v nekonečnou řadu.

Řešení: Je $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$ a tato řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$. (Je to geometrická řada s kvocientem $-x^2$). Je-li nyní $x \in (-1, 1)$ libovolné a $q \in (0, 1)$ pevné a takové, že $|x| \le q$, pak je řada $1 + q^2 + q^4 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^{2n}$ majorantní číselné řada k řadě $1 - x^2 + x^4 - \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ a podle Weierstrassova kritéria je tedy stejnoměrně konvergentní. Podle předchozí věty je tedy řada $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ stejnoměrně konvergentní (konverguje pro $x = 0$) v intervalu $(-1, 1)$ a její součet je primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{1+x^2}$. Tedy $\operatorname{arctg} x + C = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$. Jestliže dosadíme $x = 0$, dostaneme, že $C = 0$. Tedy

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Poznámka: V následujícím paragrafu uvedeme efektivnější metodu pro vyjádření funkce pomocí nekonečné řady. K tomu však musíme vybudovat základy teorie nekonečných mocninných řad.

2. Ukažte, že posloupnost $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$, $n = 1, 2, \dots$, konverguje stejnoměrně pro $x \in \mathbf{R}$, ale

$$\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]'_{x=1} \ne \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

Řešení: Zřejmě platí $|f_n(x)| \le \frac{\pi}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ stejnoměrně pro $x \in \mathbf{R}$. Dále $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$; tato posloupnost se však nechová již pěkně. Platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{a tedy} \quad \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]'_{x=1} = 0\,.$$

Na druhé straně je

$$f_n'(1) = \frac{1}{2} \ \ \forall\, n \in \mathbf{N} \quad \text{a odtud} \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(1) = \frac{1}{2}\,.$$

6.2 Mocninné řady.

Definice: Buďte $z_0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ komplexní čísla. Mocninnou řadou se středem v bodě z_0 nazveme každou řadu tvaru

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Poznámky: 1. Pro začátek budeme uvažovat mocninné řady v komplexním oboru, vzhledem k tomu, že hlavní věta o konvergenci takové řady platí i v komplexním oboru. Navíc je její geometrická interpretace názornější a při důkazu nic nezískáme, pokud se omezíme pouze na reálný obor. Až budeme tyto řady derivovat, zůstaneme již v reálném oboru.

2. Mocninná řada je speciálním případem funkční řady $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$, kde $u_n(z) = a_n(z - z_0)^n$.

Věta: Existuje číslo $R \in \langle 0, +\infty)$ [resp. $R = +\infty$], nazývané poloměrem konvergence dané mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ tak, že tato řada konverguje pro $|z - z_0| < R$ a diverguje pro $|z - z_0| > R$.

V daném kruhu $|z - z_0| < R$ konverguje řada absolutně a v každém kruhu $|z - z_0| \leq r$, kde $r < R$ konverguje stejnoměrně.

Důkaz: Jestliže si načrtneme obrázek, Obrázek je vidět, že věta má velmi názornou geometrickou interpretaci.

Dále je zřejmé, že stačí předpokládat, že $z_0 = 0$, jinak zavedeme substituci $z - z_0 = u$.
1. Označme

$$R = \sup \left\{ |z| \,;\ \text{řada } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konverguje} \right\}$$

Je zřejmé, že řada diverguje pro $|z| > R$. Buď nyní z takové, že $|z| < R$. Potom existuje z_1 tak, že $|z| < |z_1| \leq R$ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ konverguje. Existuje tedy konstanta M tak, že $|a_n z_1^n| \leq M$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Dále

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \cdot \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{z_1} \right|^n.$$

Poněvadž je $\left| \frac{z}{z_1} \right| < 1$, řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje absolutně.

2. Buď $r < R$. Potom existuje z_1 tak, že $|z_1| > r$ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ konverguje. Dále pro $|z| \leq r$ platí

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \cdot \left| \frac{z}{r} \right|^n \cdot \left| \frac{r}{z_1} \right|^n \leq M \left| \frac{r}{z_1} \right|^n.$$

Poněvadž je $\left| \frac{r}{z_1} \right| < 1$, dostáváme konvergentní číselnou majorantu a podle Weierstrassova kritéria daná řada konverguje stejnoměrně.

Poznámka: V dalším se budeme věnovat pouze mocninným řadám v reálném oboru, i když většina tvrzení platí i v komplexním oboru. Museli bychom však zavést pojem spojitosti, derivace a integrálu pro funkce komplexní proměnné. Obor konvergence se nyní redukuje na interval

$(x_0 - R, x_0 + R)$, kde $x_0 \in \mathbf{R}$ je střed dané mocninné řady a R je poloměr konvergence.

Věta: Součet mocninné řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

je funkce spojitá v libovolném uzavřeném intervalu, obsaženém v intervalu konvergence.

Důkaz: Tvrzení je zřejmé, poněvadž je každá z funkcí $a_n(x-x_0)^n$ spojitá a řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně.

Věta: Součet mocninné řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

je funkce, která má uvnitř intervalu konvergence derivace všech řádů, které dostaneme derivováním dané mocninné řady člen po členu. Přitom poloměr konvergence každé řady, vyjadřující příslušnou derivaci, je roven poloměru konvergence původní řady.

Důkaz: Předpokládejme opět, že $x_0 = 0$. Řadu $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formálně zderivujeme, tedy $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ a ukážeme, že tato řada konverguje stejnoměrně v intervalu $\langle -r, r\rangle$, kde $r < R$. Buď $r < R_1 < R$ a $|x| \le r$. Potom platí

$$|n\, a_n x^{n-1}| \le n|a_n| r^{n-1} = \frac{n|a_n|R_1^n}{r} \left(\frac{r}{R_1}\right)^n .$$

Poněvadž je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R_1^n$ konvergentní, existuje $M \ge 0$ tak, že

$$|a_n R_1^n| \le M \ \ \forall n \in \mathbf{N} \ \text{ a odtud } \ |n a_n x^{n-1}| \le n\frac{M}{r} q^n, \ \text{ kde } \ q = \frac{r}{R_1} < 1.$$

Ukážeme, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\frac{M}{r}q^n$ konverguje. Podle d'Alembertova kritéria platí

$$\frac{\frac{M}{r}(n+1)q^{n+1}}{\frac{M}{r} n q^n} = \frac{n+1}{n} \cdot q \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} q < 1$$

a podle Weierstrassova kritéria řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^n$ konverguje stejnoměrně.

Poznámky: 1. Předchozí věta umožňuje psát rovnou tvar libovolné derivace

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k} \ \text{ pro } \ k = 1, 2, \dots .$$

Přitom je poloměr konvergence každé z výše uvedených řad stejný jako poloměr konvergence původní řady.

2. Je-li $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$, potom platí $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$, neboli $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Tedy daná řada má pro $|x - x_0| < R$ tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

což je Taylorova řada.

Věta: Buď $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Potom pro $|x - x_0| < R$ platí

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

Důkaz: Plyne okamžitě z příslušné obecné věty o integraci nekonečné funkční řady.

Poznámka: Jestliže potřebujeme pro danou mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nalézt její poloměr konvergence, můžeme využít skutečnosti, že pro mocninné řady je konvergence a absolutní konvergence totéž. To nám dovoluje použití některého kritéria pro konvergenci řad s nezápornými členy.

Věta: Buď $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mocninná řada a nechť existuje $\varrho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Potom je poloměr konvergence R této mocninné řady roven $R = \frac{1}{\varrho}$, kde $R = 0$, je-li $\varrho = +\infty$ a $R = +\infty$, je-li $\varrho = 0$.

Důkaz: Užijeme-li Cauchyova limitního kritéria na řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, kde $u_n = |a_n(x-x_0)^n|$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = \varrho\, |x - x_0|.$$

a odtud plyne tvrzení věty.

Věta: Buď $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mocninná řada a nechť existuje $\varrho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Potom je poloměr konvergence R této řady roven $R = \frac{1}{\varrho}$, kde $R = 0$, je-li $\varrho = +\infty$ a $R = +\infty$, je-li $\varrho = 0$.

Důkaz: Výsledek dostaneme okamžitě, využijeme-li d'Alembertova kritéria na řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ z předchozí věty.

Poznámky: 1. Je-li $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje, ale $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom je daná řada konvergentní. Odtud dostaneme předpis pro poloměr konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Platí $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

2. Na závěr uvedeme bez důkazu Abelovu větu, která nám dovoluje rozšířit obor stejnoměrné konvergence mocninné řady až do krajního bodu oboru konvergence.

Věta: (Abel)
Předpokládejme, že řada $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence $R = 1$. Potom platí

1. Je-li řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentní, je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stejnoměrně konvergentní v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dále existuje $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

2. Jestliže navíc $\lim\limits_{n\to\infty} n\, a_n = 0$ a existuje $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x)$, je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentní (a její součet je samozřejmě roven $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x)$).

Poznámky: 1. Prvá část předchozí věty je prototypem tzv. vět Abelova typu, druhá část je nazývána větou Tauberova typu. Ta ukazuje, za jakých podmínek lze prvou část tvrzení obrátit. Jak ukazuje příslušná podmínka, stačí k tomu, aby posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergovala dostatečně rychle k 0.

2. Ukazuje se, že předpoklad $R = 1$ není v předchozí větě podstatný, stačí totiž zavést novou proměnnou $y = \frac{x}{R}$. Stejně tak substitucí $y = -x$ můžeme dostat analogický výsledek v levém krajním bodě. Pro případ, že $x_0 \neq 0$, můžeme odpovídající tvrzení formulovat pro bod $x_0 + 1$, resp. $x_0 + R$.

Příklady: 1. Najděte poloměr konvergence následujících řad

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{a}\right)^n x^n\,, \;\; a > 0.$$

Řešení: a) Podle d'Alembertova kritéria platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n+3)!}{2^{n+1}\left[(n+1)!\right]^2}\right]^p = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n+2)(2n+3)}{2(n+1)^2}\right]^p = 2^p\,.$$

b) Podle téhož kritéria dostaneme

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{a}\right)^n \cdot (n+1)! \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n+1} = a \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}\,.$$

2. Najděte poloměr konvergence následujících řad

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n\,, \;\; (a, b > 0) \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{3^n + 4^n}.$$

Řešení: a) Užijeme-li Cauchyova kritéria, dostaneme

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} = \begin{cases} a \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \left(\frac{b}{a}\right)^n \frac{1}{n^2}} = a & \text{pro} \quad a \geq b \\ b \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = b & \text{pro} \quad a \leq b\,. \end{cases}$$

Jestliže výsledek shrneme, dostaneme, že $R = \min\left\{\frac{1}{a}\,;\,\frac{1}{b}\right\}$.

b) Poněvadž je $a_{2n-1} = 0$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$, neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ani $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Je však

$$\sqrt[2n-1]{|a_{n2-1}|} = 0\,, \; \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^n}{3^n + 4^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{4^n}{3^n + 4^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a tedy $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \sqrt{2}$. Jestliže se chceme vyhnout použití $\limsup$, můžeme postupovat následujícím způsobem. Označme $u = x^2$. Potom má řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+4^n} \cdot u^n$ poloměr konvergence $\varrho = 2$ a tedy $x^2 \in (-2, 2)$, neboli $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Poznámka: V dalším se budeme zajímat o vyjádření funkce $f(x)$ pomocí Taylorovy řady. Platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + R_{n+1}(x) \quad \text{(Maclaurinův vzorec).}$$

Jestliže pro $|x| < R$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$, lze psát

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{pro } |x| < R.$$

Lemma: Pro každé $a \in (-\infty, +\infty)$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Důkaz: Poněvadž platí $|\, a^n \,| = |\, a \,|^n$, stačí předpokládat, že $a > 0$. Dále je

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot (n-1)n \quad \text{nebo} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \ldots \cdot (n-1)n\,,$$

podle toho, je-li n sudé nebo liché. V obou případech však platí, že $n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$. Dále

$$\frac{a^n}{n!} \leq \frac{a^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \quad \text{a odtud} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n \ln a}}{e^{\frac{n}{2} \ln \frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left\{\ln a - \frac{1}{2} \ln \frac{n}{2}\right\}} = 0\,.$$

Věta: Má-li funkce $f(x)$ v intervalu $(-R, R)$ $(R > 0)$ derivace všech řádů a tyto derivace jsou pro $x \in (-R, R)$ omezeny číslem, nezávislým na n, tj. existuje $M > 0$ tak, že $|f^{(n)}(x)| \leq M$ platí pro všechna $n = 1, 2, \ldots$ a pro všechna $x \in (-R, R)$, potom v celém intervalu $(-R, R)$ platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Důkaz: Pro zbytek v Maclaurinově vzorci platí

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| \leq M \cdot \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$$

a poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ podle předchozího lemmatu, platí tvrzení věty.

Poznámka: Pro funkce $e^x, \sin x, \cos x$ platí pro $x \in (-\infty, +\infty)$

$$f^{(n)}(x) = e^x\,, \quad \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\,, \quad \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\,,$$

a odtud plyne okamžitě znění následující věty.

Věta: Pro všechna $x \in (-\infty, +\infty)$ platí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Poznámka: Jestliže do vzorce pro rozvoj funkce e^x dosadíme $x = i\varphi$, dostaneme

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots + i\left\{\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right\} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Tím jsme dokázali Eulerovu identitu $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Provedené přerovnání řady si můžeme dovolit, poněvadž je absolutně konvergentní.

Příklady: 1. Ukažte, že pro $x \in (-\infty, +\infty)$ platí

$$\mathrm{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \mathrm{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Řešení: Platí

$$\mathrm{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - \left[1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Analogicky

$$\mathrm{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

2. Ukažte, že pro $x \in (-1, 1\rangle$ platí

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

Řešení: Označíme-li $f(x) = \ln(1+x)$, potom platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Odtud integrací dostaneme

$$\ln(1+x) + C = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Jestliže dosadíme $x = 0$, dostaneme, že $C = 0$. Pro $x = 1$ dostáváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, která konverguje podle Leibnizova kritéria. Podle Abelovy věty tedy platí $\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ a daná mocninná řada konverguje v intervalu $(-1, 1\rangle$.

3. Binomický rozvoj .

Ukažte, že pro $m \in \mathbf{R}$ a $x \in (-1,1)$ platí

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k\,, \quad \text{kde} \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}.$$

Řešení: Podle Taylorova vzorce (MA1) platí

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k + R_{n+1}(x), \quad \text{kde} \quad R_{n+1}(x) = (n+1)\binom{m}{n+1} x^{n+1}(1-\vartheta)^n\,(1+\vartheta x)^{m-n-1};$$

$\vartheta \in (0,1)$, (Cauchyův tvar zbytku). Buď nyní $x \in (-1,1)$. Potom platí

$$|\,R_{n+1}(x)\,| = |\,x\,|^{n+1}(1+\vartheta\,x)^{m-1}\,\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta\,x}\right)^n \left|\,\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}\,\right|.$$

Poněvadž $(1+\vartheta\,x)^{m-1}$ leží mezi 1 a $(1+x)^{m-1}$ a $0 < \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta\,x} < 1$, dostaneme dále

$$|\,R_{n+1}(x)\,| \le \max\left\{1\,,\,(1+x)^{m-1}\right\}\,|\,x\,|^{n+1}\,\left|\,\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{n!}\,\right| = \alpha_n\,.$$

Vzhledem k tomu, že $\alpha_n > 0$ a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = |\,x\,|\lim_{n\to\infty}\left|\,\frac{n+1-m}{n+1}\,\right| = |\,x\,| < 1\,,$$

Plyne odtud, že $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ pro $x \in (-1,1)$.

4. Ukažte, že platí

a) $\quad (1+x^2)\operatorname{arctg} x = x + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,x^{2n+1} \qquad$ pro $\quad x \in \langle -1,1\rangle$,

b) $\quad \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n \qquad$ pro $\quad x \in (-1,1)$,

c) $\quad e^x \sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\,x^n \qquad$ pro $\quad x \in (-\infty,+\infty)$.

Řešení: a) V předchozím paragrafu jsme ukázali, že pro $x \in (-1,1)$ platí

$$\operatorname{arctg}\,x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Jestliže tento rozvoj vynásobíme výrazem $1+x^2$, dostaneme pro $x \in (-1,1)$

$$(1+x^2)\operatorname{arctg}\,x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+3}}{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\,\frac{x^{2k+1}}{2k-1} = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\left\{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right\}x^{2n+1} =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{2}{4n^2-1}\,x^{2n+1} = x + 2\,\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}\,.$$

Jestliže dosadíme krajní body, dostaneme pro $x=1$ řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$ a pro $x=-1$ řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{4n^2-1}$, které jsou obě konvergentní (dokonce absolutně) a tedy daný rozvoj konverguje pro $x \in \langle -1, 1\rangle$.

b) Využitím rozvojů funkcí $\ln(1+x)$ a $\frac{1}{1+x}$ dostaneme pro $x \in (-1,1)$

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots) =$$

$$= x - x^2\left(1+\frac{1}{2}\right) + x^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - x^4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \dots$$

a odtud indukcí dostaneme, že

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot x^n .$$

c) Jestliže opět využijeme rozvojů funkcí e^x a $\sin x$, můžeme pro $x \in (-\infty, +\infty)$ psát

$$e^x \sin x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) =$$

$$= \frac{x}{0!\cdot 1!} + \frac{x^2}{1!\cdot 1!} + x^3\left(\frac{1}{1!\cdot 2!} - \frac{1}{0!\cdot 3!}\right) + x^4\left(\frac{1}{1!\cdot 3!} - \frac{1}{1!\cdot 3!}\right) + x^5\left(\frac{1}{1!\cdot 4!} - \frac{1}{2!\cdot 3!} + \frac{1}{0!\cdot 5!}\right) + \dots$$

a máme problém. Předpis pro $n-$tý koeficient budeme hledat jen se značnými potížemi. Existuje však jiná, efektivnější metoda postupu. Užitím Eulerovy identity dostaneme

$$e^x \cdot \sin x = e^x \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left\{\, e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x} \,\right\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n\, x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n\, x^n}{n!} \right\} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\{\, (1+i)^n - (1-i)^n \,\}\, \frac{x^n}{n!} .$$

Dále platí

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \;; \quad 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} \;,$$

neboli

$$\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}}\left\{\, e^{\frac{in\pi}{4}} - e^{\frac{-in\pi}{4}} \,\right\}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n/2}\,\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\, x^n .$$

5. Ukažte, že

a) $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!}\, x^n = e^{x/2}\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right)$,

b) $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\, x^{2n} = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$.

Řešení: a) Není těžké se přesvědčit, že poloměr konvergence dané řady je $R = +\infty$. Dále platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+1} + e^{\frac{x}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+1} + \frac{x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!} + e^{\frac{x}{2}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2}}{m!} + e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{x^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m}}{m!} + e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}+1\right) = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right).$$

b) Poloměr konvergence dané řady je roven 1. Označme nyní

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\, x^{2n}.$$

Potom pro $x \in (-1,1)$ platí

$$f'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\, x^{2n-1} \ ; \quad f''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, x^{2n-2}$$

a dostáváme geometrickou řadu se součtem $\frac{2}{1+x^2}$. Platí tedy $f'(x) = 2\text{arctg}\, x + C$ a poněvadž $f'(0) = 0$, plyne odtud, že $C = 0$. Dále

$$f(x) = 2\int \text{arctg}\, x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \text{arctg}\, x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = x \end{array} \right| = 2x\, \text{arctg}\, x - 2\int \frac{x\, dx}{1+x^2} =$$

$$= 2x\, \text{arctg}\, x - \ln(1+x^2) + K.$$

Platí opět, že $f(0) = 0$, tedy $K = 0$. Tím dostáváme požadované vyjádření. Navíc je tento rozvoj konvergentní stejnoměrně v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, což mimo jiné znamená, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} \quad \text{má součet} \quad 2\text{arctg}\, 1 - \ln 2 = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

6. Vypočtěte integrály

$$a)\ \int_0^x e^{-t^2}\, dt \qquad\qquad b)\ \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Řešení: a) Je známo, že tento integrál existuje (integrál ze spojité funkce), ale nelze jej vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Nicméně snadno jej vyjádříme pomocí nekonečné mocninné řady. Pro $t \in (-\infty, +\infty)$ platí

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-t^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$$

a odtud

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

b) Jestliže využijeme binomický rozvoj $\left(m = -\frac{1}{2}\right)$, můžeme pro $t \in (-1,1)$ psát

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-t^4\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k\, t^{4k}.$$

Pro výpočet binomického koeficientu platí

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = \frac{(-1)^k \cdot 1\cdot 3 \ldots (2k-1)}{2^k\, k!} = \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{(2k)!!}$$

a tedy

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} t^{4k} \,.$$

Integrací této řady člen po členu dostaneme

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \int_0^x t^{4k}\, dt = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\, \frac{x^{4k+1}}{4k+1} \,.$$

Jestliže dosadíme krajní body $x = \pm 1$, dostaneme řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(4k+1)(2k)!!}$, pro niž platí podle Raabeova kritéria

$$\lim_{k\to\infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = \lim_{k\to\infty} k \left(\frac{(2k-1)!!}{(4k+1)(2k)!!} \cdot \frac{(4k+5)(2k+2)!!}{(2k+1)!!} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} k \left(\frac{(4k+5)(2k+2)}{(4k+1)(2k+1)} - 1 \right) = \lim_{k\to\infty} \frac{12k^2 + 9k}{(4k+1)(2k+1)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} > 1$$

a daný rozvoj tedy konverguje pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$. O Raabeově kritériu se můžete poučit v textu Seminář z matematické analýzy II, který bude brzy k disposici.

6.3 Fourierovy řady.

6.3.1 Ortogonální systémy funkcí.

Definice: Množinu všech reálných nebo komplexních funkcí takových, že $\int\limits_a^b |\, f(x)\, |^2\, dx < \infty$, označíme $\mathbf{L}_2(a,b)$ a nazveme Hilbertovým prostorem funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Definice: Jsou-li $f, g \in \mathbf{L}_2(a,b)$, potom jejich skalárním součinem (f,g) rozumíme výraz

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \,.$$

Normou funkce $f \in \mathbf{L}_2(a,b)$ nazveme výraz

$$\|\, f \,\| = \sqrt{(f,f)} = \left\{ \int_a^b |\, f(x)\, |^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \,.$$

Poznámky: 1. Položíme-li si otázku, jaké funkce tvoří Hilbertův prostor $\mathbf{L}_2(a,b)$, zjistíme velmi brzy, že nejsme schopni uspokojivě na tuto otázku odpovědět. Ta totiž vyžaduje zavedení obecnějšího pojmu integrálu, tzv. Lebesgueova integrálu, což přesahuje zatím naše možnosti. Zájemce se může poučit v textu MA5 Lebesgueův integrál. Pro naši potřebu bude stačit, když si pod prvky $\mathbf{L}_2(a,b)$ představíme libovolnou funkci f, pro niž daný Newtonův integrál konverguje, ať vlastní nebo nevlastní.

2. Z definice skalárního součinu neplyne, že integrál $\int\limits_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$ vůbec existuje. Je to však důsledek Hölderovy nerovnosti pro integrály. $(p = q = 2)$.

Věta: Skalární součin má následující vlastnosti:
1. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g) \quad \forall f_1, f_2, g \in \mathbf{L}_2(a,b)$.
2. $(\alpha f, g) = \alpha (f, g) \quad \forall f, g \in \mathbf{L}_2(a,b)$; $\forall \alpha \in \mathbf{C}$.
3. $(g, f) = \overline{(f, g)} \quad \forall f, g \in \mathbf{L}_2(a,b)$.
4. $(f, \alpha g) = \overline{\alpha} (f, g) \quad \forall f, g \in \mathbf{L}_2(a,b)$; $\forall \alpha \in \mathbf{C}$.
5. $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2) \quad \forall f, g_1, g_2 \in \mathbf{L}_2(a,b)$.

Důkaz: Všechna tvrzení se snadno ověří přímým výpočtem a nebudeme je provádět. Jedinou výjimkou je tvrzení 3, v souvislosti s nímž je třeba si uvědomit, že

$$(g, f) = \int_a^b g(x)\, \overline{f(x)}\, dx = \int_a^b \overline{f(x)\, \overline{g(x)}}\, dx = \overline{\int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx} = \overline{(f, g)}\,.$$

Přechod k „pruhu“ nad celým integrálem, tedy třetí rovnost je možná proto, že integrál jako takový je definován jako limita integrálních součtů.

Věta: Jsou-li $f, g \in \mathbf{L}_2(a,b)$, potom je i $f + g \in \mathbf{L}_2(a,b)$ a platí
1. $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$ - trojúhelníková nerovnost
2. $| (f, g) | \leq \| f \| \cdot \| g \|$ - Cauchyova nerovnost.

Důkaz: Skutečnost, že $f + g \in \mathbf{L}_2(a,b)$ jakmile je $f, g \in \mathbf{L}_2(a,b)$ je důsledek Minkowského nerovnosti pro integrály. Ta nám též zároveň dokazuje platnost trojúhelníkové nerovnosti. Stejně tak z poznámky za definicí skalárního součinu plyne platnost Cauchyovy nerovnosti.

Poznámky: 1. Pro osvěžení uvedeme integrální tvary Hölderovy a Minkowského nerovnosti. Platí

$$\int_a^b | f(x)\, g(x) |\, dx \leq \left\{ \int_a^b | f(x) |^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_a^b | g(x) |^q\, dx \right\}^{\frac{1}{q}} , \quad \text{kde } p > 1\,,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

jakmile je pravá strana konečná.

$$\left\{ \int_a^b | f(x) + g(x) |^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b | f(x) |^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b | g(x) |^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} , \quad \text{kde } p \geq 1\,,$$

jakmile je pravá strana konečná. Důkaz obou nerovností se provede analogicky jako pro konečné součty.

2. Z předchozí věty plyne, že s libovolnou dvojicí $f, g \in \mathbf{L}_2(a,b)$ je $f + g \in \mathbf{L}_2(a,b)$. Dále je zřejmé, že $\alpha f \in \mathbf{L}_2(a,b)$ pro libovolný skalár $\alpha \in \mathbf{C}$. To však znamená, že $\mathbf{L}_2(a,b)$ tvoří vektorový prostor. Je samozřejmě $\dim \mathbf{L}_2(a,b) = +\infty$.

Definice: Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in \mathbf{L}_2(a,b)$ konverguje k funkci $f \in \mathbf{L}_2(a,b)$, podle středu, jestliže platí

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \| = 0\,.$$

Definice: O dvou funkcích $f, g \in \mathbf{L}_2(a,b)$ řekneme, že jsou ortogonální, jestliže $(f,g) = 0$.

O posloupnosti $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in \mathbf{L}_2(a,b)$ řekneme, že tvoří ortogonální systém funkcí, jestliže platí

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0 \quad \text{pro } n \neq m\,.$$

Tento systém nazveme ortonormální, jestliže navíc

$$\|\,\varphi_n\,\| = 1 \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots\,.$$

Poznámka: Ortonormální systém funkcí $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze charakterizovat předpisem

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m}\,,$$

kde $\delta_{n,m}$ je tzv. Croneckerovo delta, tedy číslo, které je rovno 0 pro $n \neq m$ a rovno 1 pro $n = m$.

Definice: Ortogonální systém funkcí $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme úplný v $\mathbf{L}_2(a,b)$, jestliže platí:
Je-li pro nějakou funkci $f \in \mathbf{L}_2(a,b)$ $\quad (f, \varphi_n) = 0$ pro $n = 1, 2, \ldots$, potom je $\|\,f\,\| = 0$.

Poznámky: 1. Požadavek $\|\,f\,\| = 0$ neznamená, že f je identicky nulová funkce, ale pouze to, že $\int_a^b |\,f(x)\,|^2\,dx = 0$. Tedy na příklad dvě funkce, které se od sebe liší v konečně mnoha bodech, mají tu vlastnost, že $\|\,f - g\,\| = 0$. To mimo jiné znamená, že prvky $\mathbf{L}_2(a,b)$ nejsou funkce, ale třídy funkcí, které se od sebe „příliš neliší“. Přesto s nimi budeme zacházet jako s funkcemi. Pro přesný výklad musíme opět sahnout po Lebesgueově integrálu.

2. V dalším výkladu ukážeme, že je-li $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ úplný ortonormální systém funkcí v $\mathbf{L}_2(a,b)$, potom je možné každou funkci $f \in \mathbf{L}_2(a,b)$ vyjádřit ve tvaru

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\varphi_k\,,$$

kde daná řada konverguje podle středu, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\, f - \sum_{k=1}^{n} c_k\,\varphi_k \,\right\| = 0\,.$$

To odpovídá v konečnědimensionélním eukleidovském prostoru vlastnosti, že každý vektor lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů ortonormální báze. Fourierovy řady můžeme tedy z tohoto hlediska chápat jako přímé zobecnění těchto vlastností na prostory nekonečné dimense. Jejich uplatnění však bude mnohem širší.

3. Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonální systém funkcí v $\mathbf{L}_2(a,b)$, který neobsahuje nulovou funkci $(\|f_n\| \neq 0)$, potom $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\varphi_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$ tvoří ortonormální systém.

4. Položme si následující otázku. Jak máme aproximovat danou funkci $f \in \mathbf{L}_2(a,b)$ pomocí ortonormálního systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$? Buď $n \in \mathbf{N}$ a označme

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\,\varphi_k\,.$$

Budeme hledat podmínky na koeficienty γ_k (zatím neznámé) tak, aby odchylka $\delta_n = \|\,f - \sigma_n\,\|^2$ byla minimální. Platí

$$\delta_n = (f - \sigma_n, f - \sigma_n) = \|\,f\,\|^2 - (f, \sigma_n) - (\sigma_n, f) + \|\,\sigma_n\,\|^2 = \|\,f\,\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma_k}(f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(\varphi_k, f) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma_k\overline{\gamma_j}(\varphi_k,\varphi_j) = \|\, f\,\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\overline{\gamma_k}(f,\varphi_k) - \sum_{k=1}^{n}\gamma_k(\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^{n}|\,\gamma_k\,|^2\,\|\,\varphi_k\,\|^2 =$$

$$= \|\, f\,\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k\,\overline{\gamma_k} - \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\,\overline{c_k} + \sum_{k=1}^{n}|\,\gamma_k|^2 = \|\, f\,\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(c_k-\gamma_k)(\overline{c_k-\gamma_k}) - \sum_{k=1}^{n}|\,c_k|^2\,,$$

kde $c_k = (f,\varphi_k)$. Vzhledem k tomu, že prostřední člen v posledním součtu je vždy nezáporný, bude δ_n minimální, jestliže

$$\gamma_k = c_k = (f,\varphi_k) = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\,dx\,.$$

Definice: Buď $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém funkcí v $\mathbf{L}_2(a,b)$, $f\in\mathbf{L}_2(a,b)$. Potom čísla

$$c_k = (f,\varphi_k) = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\,dx$$

nazýváme Fourierovými koeficienty funkce f vzhledem k ortonormálnímu systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Věta: Je-li $f\in\mathbf{L}_2(a,b)$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém funkcí v $\mathbf{L}_2(a,b)$, $n\in\mathbf{N}$, potom mnohočlen $n-$tého řádu $\sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\,\varphi_k$, který f nejlépe aproximuje, je Fourierův mnohočlen. Aproximaci rozumíme ve smyslu normy v $\mathbf{L}_2(a,b)$, tedy $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\,\varphi_k\right\|$ je pro Fourierův mnohočlen minimální.

Důkaz: Plyne okamžitě z poznámky 4.

Věta: Buď $f\in\mathbf{L}_2(a,b)$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém funkcí v $\mathbf{L}_2(a,b)$, $n\in\mathbf{N}$, c_k Fourierovy koeficienty f vzhledem k systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Potom platí tzv. Besselova nerovnost

$$\int_a^b |\,f(x)\,|^2\,dx \ge \sum_{k=1}^{\infty}|\,c_k\,|^2\,,\quad \text{neboli}\quad \|\,f\,\|^2 \ge \sum_{k=1}^{\infty}|\,c_k\,|^2\,.$$

Důkaz: Pro každé $n\in\mathbf{N}$ platí podle poznámky 4

$$0 \le \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\,\varphi_k\right\|^2 = \|\,f\,\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\,c_k\,|^2$$

a odtud přechodem k limitě pro $n\to\infty$ dostaneme $\|\,f\,\|^2 \ge \sum\limits_{k=1}^{\infty}|\,c_k\,|^2$.

Důsledky: 1. Jsou-li $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ Fourierovy koeficienty funkce $f\in\mathbf{L}_2(a,b)$ vzhledem k ortonormálnímu systému funkcí $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, potom je $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$.

2. Je-li $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém funkcí v $\mathbf{L}_2(a,b)$, pak Fourierova řada libovolné funkce $f\in\mathbf{L}_2(a,b)$ konverguje podle středu, tedy existuje

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\,\varphi_k\right\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\,c_k\,|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\,.$$

Věta: Buď $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém funkcí v $\mathbf{L}_2(a,b)$. Potom je tento systém úplný právě když pro každou funkci $f \in \mathbf{L}_2(a,b)$ platí tzv. Parsevalova rovnost

$$\| f \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2 ,$$

kde c_k jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

Důkaz: 1. Buď $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ úlpný systém, $f \in \mathbf{L}_2(a,b)$. Označme $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$. Potom platí

$$(f-g,\varphi_j) = \left(f - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \varphi_j \right) = (f,\varphi_j) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varphi_k,\varphi_j) = (f,\varphi_j) - c_j = 0 \quad \text{pro } j = 1,2,\dots .$$

Z úplnosti systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ plyne, že $\| f-g \| = 0$, tedy $\| f \|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} | c_k |^2$.

2. Nechť $(f,\varphi_k) = 0$ pro $k = 1,2,\dots$. Potom je $c_k = (f,\varphi_k) = 0$, neboli $\| f \|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} | c_k |^2 = 0$ a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je úlpný ortonormální systém funkcí.

Příklady úplných ortogonálních systémů funkcí.

Poznámka: Ověřit skutečnost, že daný systém je ortogonální, je rutinní záležitost a u několika následujících systémů tuto skutečnost opravdu ověříme. Dokázat, že takový systém je úplný, přesahuje zatím naše možnosti a nebudeme jej provádět.

1. Systém $\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ je ortogonální na libovolném intervalu délky 2π.
Systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ je ortonormální. Je-li

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{inx} \quad \text{Fourierova řada } f\,, \text{ potom} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\,.$$

Důkaz: Platí

$$(e^{inx}, e^{ikx}) = \int_a^{a+2\pi} e^{inx}\, e^{-ikx}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{i(n-k)}\, e^{i(n-k)x}\Big|_a^{a+2\pi} = 0 & \text{je-li} \quad n \neq k\,, \\ \int\limits_a^{a+2\pi} dx = 2\pi = \| e^{inx} \|^2 & \text{je-li} \quad n = k\,. \end{cases}$$

Je totiž

$$e^{i(n-k)(a+2\pi)} = \cos(n-k)(a+2\pi) + i\sin(n-k)(a+2\pi) = \cos(n-k)a + i\sin(n-k)a = e^{i(n-k)a}\,.$$

Označme nyní

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}\,,\ c_n^* = (f,\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{a+2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\,.$$

Potom můžeme psát

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* \varphi_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{a+2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \cdot e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{inx}\,,$$

kde $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$ je tvar Fourierova koeficientu.

Poznámky: 1. Fourierův koeficient c_n, se kterým budeme dále počítat, není sice přesně skalární součin (f, φ_n), ale má tu výhodu, že v sobě zahrne konstanty, které by se jinak objevovaly ve vyjádření. Stejný postup zvolíme i pro následující systémy.

2. Jestliže se vám zápis $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{inx}$ zdá nesrozumitelný, stačí si uvědomit, že

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,,$$

kde obě řady na pravé straně musí konvergovat.

3. V dalším postupu si formálně zjednodušíme značení a budeme předpokládat, že $a = -\pi$. Jak se ukazuje, není to žádné omezení obecnosti, poněvadž dané funkce budou $2\pi-$periodické, po případě $2l-$periodické $(l > 0)$.

2. Systém $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ je ortogonální na libovolném intervalu délky 2π. Systém $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x\,,\ \dots \right\}$ je ortonormální. Je-li

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\, a_k\, \cos kx + b_k\, \sin kx\,)$$

Fourierova řada funkce f, potom

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \cos kt\, dt\ ;\ k = 0, 1, 2, \dots\,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \sin kt\, dt\ ;\ k = 1, 2, \dots\,.$$

Důkaz: Je třeba dokázat, že

$$\forall\, n, k \in \mathbf{N} \quad \text{platí} \quad (1, \cos nx) = (1, \sin nx) = (\sin nx, \cos kx) = 0$$

a dále

$$(\sin nx, \sin kx) = (\cos nx, \cos kx) = \pi\, \delta_{n,k}\,,$$

kde $\delta_{n,k}$ je Croneckerovo delta. Skutečně platí

$$\|\, 1\, \|^2 = (1, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = 2\pi\ ;$$

$$\|\, \cos kx\, \|^2 = (\cos kx, \cos kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx)\, dx = \pi + \frac{1}{4k} \sin 2kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi\,.$$

Analogicky $\| \sin kx \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) \, dx = \pi$. Dále

$$(\sin kx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin(k+n)x + \sin(k-n)x \} \, dx = 0 \, ;$$

$$(\cos kx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(k+n)x + \cos(k-n)x \} \, dx = 0 \, , \; n \neq k \, ;$$

$$(\sin kx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos(k-n)x - \cos(k+n)x \} \, dx = 0 \, , \; k \neq n \, .$$

Označme nyní

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, , \quad \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \, , \quad \psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \; ; \; k = 1, 2, \dots \; ;$$

$$a_k^* = (f, \varphi_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \; ; \qquad b_k^* = (f, \psi_k) \quad k = 1, 2, \dots \, .$$

Nyní platí

$$f \sim a_0^* \, \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^* \, \varphi_k(x) + b_k^* \, \psi_k(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \cos kt \, dt \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \sin kt \, dt \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \cos kt \, dt \cdot \cos kx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \sin kt \, dt \cdot \sin kx \right\} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \, \cos kx + b_k \, \sin kx) \, .$$

Poznámka: Mezi systémy 1 a 2 existuje vzájemná souvislost, kterou dostaneme okamžitě využitím Eulerovy identity. Platí

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \, \cos kx + b_k \, \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \, \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \, \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right\} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \, \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} - i b_k \, \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \right\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k - i b_k}{2} \, e^{ikx} + \frac{a_k + i b_k}{2} \, e^{-ikx} \right\}$$

a odtud $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$. Obráceně, jestliže známe koeficienty c_k , snadno vypočteme koeficienty a_k a b_k . Platí totiž $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Při praktickém rozhodování, který ze systémů použít k vyjádření dané funkce, se většinou rozhodneme tak, že pro komplexní funkci f použijeme systému $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{=\infty}$ a pro reálnou f systém $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \}$.

3. Systém $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ je ortogonální na intervalu $(0,\pi)$.
Systém $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x\,,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x\,,\ \dots$ je ortonormální. Je-li

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,, \quad \text{potom } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \text{ pro } n = 0,1,2,\dots\,.$$

Důkaz: Snadno ověříme, že $(\cos kx, \cos nx) = 0$ pro $k,n = 0,1,2,\dots, n \neq k$. Je-li $k = n$, dostaneme

$$\|\cos nx\|^2 = (\cos nx, \cos nx) = \int_0^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Použijeme-li postupu z předchozího příkladu, odvodíme bez problémů tvar Fourierovy řady i Fourierových koeficientů.

Poznámka: Předchozí systém můžeme též chápat jako rozvoj sudé funkce na intervalu $(-\pi,\pi)$. Skutečně, buď f funkce, definovaná na intervalu $(0,\pi)$ a rozšiřme ji na interval $(-\pi,\pi)$ tak, aby byla sudá. Označme toto rozšíření $\widetilde{f}$. Potom pro Fourierovy koeficienty $\widetilde{f}$ platí

$$\widetilde{a_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{f}(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = a_n \quad n = 0,1,2,\dots\,.$$

(Integrand je sudá funkce). Podobně

$$\widetilde{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(t)\sin nt\,dt = 0 \quad n = 1,2,\dots\,,$$

poněvadž integrand je lichá funkce.

4. Systém $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální na intervalu $(0,\pi)$.
Systém $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ortonormální. Je-li

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,, \quad \text{potom } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \text{ pro } n = 1,2,\dots\,.$$

Důkaz: Provede se analogicky jako v předchozím případu. Stejně tak můžeme zopakovat poznámku k předchozímu příkladu s tím rozdílem, že tentokrát se jedná o Fourierův rozvoj lichého pokračování funkce f na intervalu $(-\pi,\pi)$.

5. Systém $\{e^{in\frac{\pi x}{l}}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ je ortogonální na libovolném intervalu délky $2l$ $(l > 0)$.
Systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}\,e^{in\frac{\pi x}{l}}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ je ortonormální. Je-li

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,e^{in\frac{\pi x}{l}}\,, \quad \text{potom } c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,e^{-in\frac{\pi t}{l}}\,dt\,; \quad n \in \mathbf{Z}\,.$$

Důkaz: Provedeme zcela analogicky jako v příkladu 1. Stačí si uvědomit, že

$$\left\| e^{in\frac{\pi x}{l}} \right\|^2 = \left(e^{in\frac{\pi x}{l}}\,,\, e^{in\frac{\pi x}{l}}\right) = \int\limits_{-l}^{l} e^{in\frac{\pi x}{l}}\, e^{-in\frac{\pi x}{l}}\, dx = 2l\,.$$

6. Systém $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$; $n \in \mathbf{N}$ je ortogonální na libovolném intervalu délky $2l$ $(l > 0)$.
Systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos x\,,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin x\,,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos 2x\,,\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin 2x\,,\ \dots\right\}$ je ortonormální. Je-li

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\,\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\,\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

Fourierova řada funkce f, potom

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt\ ;\ \ k \in \mathbf{N}\cup\{0\} \qquad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt\ ;\ \ k \in \mathbf{N}\,.$$

7. Systém $\left\{\cos\frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je ortogonální na intervalu $(0, l)$ $(l > 0)$.
Systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}\,,\ \sqrt{\frac{2}{l}}\,\cos\frac{\pi x}{l}\,,\ \sqrt{\frac{2}{l}}\,\cos\frac{2\pi x}{l}\,,\ \dots\right\}$ je ortonormální. Je-li

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\cos\frac{k\pi x}{l}\,, \quad \text{potom je} \quad a_k = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(t)\,\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt \ \text{ pro } \ k = 0, 1, 2, \dots\,.$$

8. Systém $\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ortogonální na intervalu $(0, l)$ $(l > 0)$.
Systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}\,,\ \sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin\frac{\pi x}{l}\,,\ \sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin\frac{2\pi x}{l}\,,\ \dots\right\}$ je ortonormální. Je-li

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin\frac{k\pi x}{l}\,, \quad \text{potom je} \quad b_k = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(t)\,\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt \ \text{ pro } \ k = 1, 2, \dots\,.$$

Poznámka: Systémy 5 - 8 jsou analogií systémů 1 - 4 pro funkce, které mají libovolnou periodu $2l$ $(l > 0)$ a není na nich nic principiálně nového. Mohl by tedy vzniknout mylný dojem, že všechny ortogonální systémy funkcí jsou více či méně tvořeny goniometrickými funkcemi. Existuje však mnoho dalších systémů, jejichž základ není tvořen funkcemi goniometrickými, i když systémy 1 - 8 jsou používány nejčastěji. Na ukázku uvedeme jeden systém tvořený polynomy.

9. Systém Legendreových polynomů $P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2 - 1)^n$ tvoří pro $n = 0, 1, 2, \dots$ úplný ortogonální systém funkcí na intervalu $(-1, 1)$.
Systém $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ je ortonormální.

6.3.2 Klasická teorie Fourierových řad.

Poznámka: Konvergence Fourierovy řady podle středu nezaručuje konvergenci dané řady pro konkrétní hodnotu x, neboli konvergenci bodovou. Touto otázkou se budeme zabývat ve zbývající části. Pro zjednodušení řady výpočtů zvolíme opět výchozí interval $\langle -\pi, \pi \rangle$, i když závěry budou většinou platit na libovolném intervalu délky 2π.

Lemma: Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2\,\sin\frac{x}{2}}\,; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2\,\sin\frac{x}{2}}\, dx = 1\,.$$

Důkaz: Jestliže využijeme Eulerovy identity, dostaneme

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx = \frac{1}{2}\left(1 + e^{ix} + e^{-ix} + \cdots + e^{inx} + e^{-inx}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-inx} + \cdots + e^{-ix} + 1 + e^{ix} + \cdots + e^{inx}\right)\,.$$

V závorce posledního členu figuruje součet $2n+1$ členů geometrické posloupnosti s prvým členem e^{-inx} a kvocientem $q = e^{ix}$, tedy

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx = \frac{1}{2}\, e^{-inx}\, \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} = \frac{1}{2}\, \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2\,\sin\frac{x}{2}}\,.$$

Jestliže obě strany dané rovnosti vynásobíme $\frac{1}{\pi}$ a zintegrujeme přes interval $\langle -\pi, \pi \rangle$, dostaneme na levé straně $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$, což je jediný nenulový integrál.

Lemma: Buď

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\, a_k\, \cos kx + b_k\, \sin kx\,)$$

Fourierova řada $2\pi-$periodické funkce f na intervalu $(-\pi, \pi)$. Položme

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\, a_k\, \cos kx + b_k\, \sin kx\,)\,.$$

Potom platí

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\, \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2\,\sin\frac{u}{2}}\, du\,.$$

Tento integrál nazýváme Dirichletovým integrálem.

Důkaz: Dosazením za Fourierovy koeficienty do $s_n(x)$ dostaneme

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \cos kt\, \cos kx\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \sin kt\, \sin kx\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \, \cos kx + \sin kt \, \sin kx) \right\} f(t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right\} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2 \, \sin \frac{t-x}{2}} \, dt \, .$$

Jestliže zavedeme substituci $t - x = u$, dostaneme

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \, \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \, \sin \frac{u}{2}} \, du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \, \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \, \sin \frac{u}{2}} \, du \, ,$$

poněvadž integrand je $2\pi-$periodická funkce.

Poznámka: K odvození alespoň jedné z vět o bodové konvergenci budeme potřebovat tzv. Riemannovo lemma, jednu ze základních vět teorie Fourierových řad. Vzhledem k tomu, že její důkaz přesahuje naše možnosti, bude uvedena bez důkazu.

! Věta: (Riemannovo lemma)
Buď f integrovatelná funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$; $\quad (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$. Potom je

$$\lim_{t \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, \sin tx \, dx = \lim_{t \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, \cos tx \, dx = 0$$

stejnoměrně pro $a \leq \alpha < \beta \leq b$.

Věta: Buď f funkce, která má v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ omezenou derivaci a nechť

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \, \cos kx + b_k \, \sin kx)$$

je její Fourierova řada. Potom pro každé $x \in (-\pi, \pi)$ platí $s(x) = f(x)$.

Důkaz: Podle předchozího lemmatu stačí dokázat, že pro $x \in (-\pi, \pi)$ je

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \, \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \, \sin \frac{u}{2}} \, du \, ,$$

neboli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - f(x)] \, \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) u}{2 \, \sin \frac{u}{2}} \, du = 0 \, .$$

Z předpokladu existence derivace funkce f plyne, že existuje konstanta $M > 0$ tak, že platí

$$\left| \frac{f(x+u) - f(x)}{2 \sin \frac{u}{2}} \right| = \left| \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \cdot \frac{\frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right| \leq M \quad \text{na } (-\pi, \pi)$$

a tvrzení nyní plyne z Riemannova lemmatu.

Poznámka: V dalším výkladu zformulujeme Dirichlet-Jordanovo kritérium, které nám poskytne uspokojivou odpověď na problém bodové a stejnoměrné konvergence Fourierovy řady. Budeme k tomu však potřebovat pojem funkce s konečnou variací, který nyní zavedeme a stručně popíšeme vlastnosti funkcí s konečnou variací.

Definice: Buď f funkce, definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$ $(a,b\in\mathbf{R})$ a označme

$$D\ :\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Nechť

$$v(D)=\sum_{i=1}^{n}|\,f(x_i)-f(x_{i-1})\,|\quad \text{a označme}\quad V(f)=V(f\,;\,\langle a,b\rangle)=\sup_D v(D)\,,$$

kde suprémum bereme přes všechna dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$. Číslo $V(f)$ nazveme variací funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$. Je-li $V(f)<\infty$, řekneme, že f má konečnou variaci.

Věta: Platí: 1. Je-li f monotonní, je $V(f)<\infty$.
2. f má konečnou variaci v $\langle a,b\rangle$ právě když $f=f_1-f_2$, kde f_1 a f_2 jsou neklesající funkce v $\langle a,b\rangle$.
3. Je-li $V(f\,;\,\langle a,b\rangle)<\infty$, pak f má nejvýše spočetnou množinu bodů nespojitosti. Všechny body nespojitosti jsou 1. druhu.
4. Má-li f v intervalu $\langle a,b\rangle$ omezenou derivaci, potom $V(f\,;\,\langle a,b\rangle)<\infty$.

Důkaz: Nebudeme provádět, zájemce se může poučit v textu MA5, věnovanému Lebesgueovu integrálu. Pro zajímavost uvádíme, že existuje spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, která nemá konečnou variaci. Stejně tak existuje spojitá funkce na intervalu $\langle -\pi,\pi\rangle$, tak, že její Fourierova řada nekonverguje k funční hodnotě $f(x)$.

Věta: (Dirichlet-Jordanovo kritérium)
Buď f $2\pi-$periodická funkce, která má v intervalu $\langle -\pi,\pi\rangle$ konečnou variaci a nechť

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\,a_k\,\cos kx+b_k\,\sin kx\,)$$

je její Fourierova řada. Potom platí

1. $s(x)$ konverguje v každém bodě intervalu $\langle -\pi,\pi\rangle$ a je

$\alpha)$

$$s(x)=\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}\qquad \text{pro}\quad x\in(-\pi,\pi)\,,$$

kde $f(x_+)=\lim\limits_{t\to x_+}f(t)$, $f(x_-)=\lim\limits_{t\to x_-}f(t)$.

$\beta)$

$$s(x)=\frac{f(-\pi_+)+f(\pi_-)}{2}\qquad \text{pro}\quad x=\pm\pi\,.$$

Speciálně je $s(x)=f(x)$ v každém bodě spojitosti f.

2. Je-li f spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle\subset(-\pi,\pi)$, potom $s(x)$ konverguje stejnoměrně v $\langle a,b\rangle$.

Důkaz: Přesahuje naše současné možnosti a nebudeme jej provádět.

Poznámka: Na závěr uvedeme větu o integraci Fourierovy řady člen po členu, vzhledem k tomu, že ji lze výhodně použít při praktickém výpočtu Fourierovy řady.

Věta: (Integrace Fourierovy řady)
Buď f $2\pi-$periodická absolutně integrovatelná funkce na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ a nechť

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\, a_k \, \cos kx + b_k \, \sin kx \,)$$

je její Fourierova řada. Potom je funkce $F(x) = \int_0^x \{\, f(t) - \frac{a_0}{2} \,\} \, dt$ $2\pi-$periodická a pro její Fourierovu řadu platí

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k \, \cos kx + a_k \, \sin kx}{k} \,, \quad \text{kde} \quad \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \,.$$

Fourierova řada funkce F konverguje navíc stejnoměrně pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

Důkaz: Platí

$$F(x + 2\pi) = \int_0^{x+2\pi} \left\{ f(t) - \frac{a_0}{2} \right\} dt = \int_0^{x} \left\{ f(t) - \frac{a_0}{2} \right\} dt + \int_x^{x+2\pi} \left\{ f(t) - \frac{a_0}{2} \right\} dt =$$

$$= F(x) + \int_x^{x+2\pi} f(t) \, dt - \pi \, a_0 = F(x) \,.$$

Poněvadž je $F(x)$ spojitá, plyne odtud podle Dirichlet-Jordanova kritéria, že její Fourierova řada konverguje stejnoměrně na celé reálné přímce. Dále pro $k \in \mathbf{N}$ platí

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \, \cos kx \, dx = \frac{1}{k\pi} \, F(x) \, \sin kx \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \frac{a_0}{2} \right\} \sin kx \, dx = -\frac{b_k}{k} \,.$$

Analogicky

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \, \sin kx \, dx = -\frac{1}{k\pi} \, F(x) \, \cos kx \bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \frac{a_0}{2} \right\} \cos kx \, dx = \frac{a_k}{k}$$

a platí tedy

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k \, \cos kx + a_k \, \sin kx}{k} \,.$$

Dále $F(0) = 0 = \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$, což je poslední tvrzení věty.

Příklad: Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$ pro $x \in (-\pi, \pi)$ a načrtněte její graf. Výsledku využijte k nalezení Fourierovy řady funkce $g(x) = x^2$ a načrtněte též její graf. Užitím tohoto rozvoje sečtěte řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

Řešení: f je lichá funkce a tedy $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dále

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, \sin kx \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin kx \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{2x}{k\pi}\cos kx\Big|_0^\pi + \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos kx\,dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k},$$

tedy

$$x \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}.$$

Grafem je $2\pi-$periodická funkce, která je rovna x pro $x \in (-\pi, \pi)$ a rovna 0 pro $x = \pm\pi$. graf

Integrací této řady dostaneme

$$\frac{x^2}{2} = \frac{A_0}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}, \text{ kde } A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Fourierova řada funkce g je tedy

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kx}{k^2}.$$

To je opět $2\pi-$peridická funkce, která je rovna x^2 pro $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Její graf vypadá následovně. graf

Jestliže využijeme Dirichlet-Jordanova kritéria, dostaneme

$$g(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos k\pi}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad \text{a tedy} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Analogicky

$$g(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos 0}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \quad \text{a odtud} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Kapitola 7

Cvičení.

7.1 Vektorové funkce.

7.2 Diferenciální počet funkcí více proměnných.

1. Buď $z = \frac{x\,\cos y - y\,\cos x}{1+\sin x + \sin y}$. Najděte $\frac{\partial\, z(0,0)}{\partial\, x}$ a $\frac{\partial\, z(0,0)}{\partial\, y}$. $[\,1\,;\,-1\,]$

2. Buď $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$. Najděte $\frac{\partial\, u\left(0,0,\frac{\pi}{4}\right)}{\partial\, z}$. $\left[\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\right]$

3. Buď $z = x^3 y - y^3 x$. Najděte $\frac{\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}$ pro $x = 1$, $y = 2$. $\left[\,-\frac{13}{22}\,\right]$

4. Vypočtěte parciální derivace prvého řádu pro následující funkce.

   (a) $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ $\left[\,\frac{\partial\, z}{\partial\, x} = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\ ;\ \frac{\partial\, z}{\partial\, y} = \frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\,\right]$

   (b) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$ $\left[\,\frac{\partial\, z}{\partial\, x} = \sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\ ;\ \frac{\partial\, z}{\partial\, y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\right]$

   (c) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$ $\left[\,\frac{\partial\, z}{\partial\, x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ \frac{\partial\, z}{\partial\, y} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}\,\right]$

   (d) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ $\left[\,\frac{\partial\, z}{\partial\, x} = \frac{y}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{\partial\, z}{\partial\, y} = -\frac{x}{x^2+y^2}\,\right]$

   (e) $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\left[\,\frac{\partial\, z}{\partial\, x} = \frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\ ;\ \frac{\partial\, z}{\partial\, y} = -\frac{\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,\right]$

   (f) $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ $\left[\,\frac{\partial\, z}{\partial\, x} = \frac{2}{y\,\sin\frac{2x}{y}}\ ;\ \frac{\partial\, z}{\partial\, y} = -\frac{2x}{y^2\,\sin\frac{2x}{y}}\,\right]$

   (g) $u = \operatorname{arctg} \frac{v+w}{v-w}$ $\left[\,\frac{\partial\, u}{\partial\, v} = -\frac{w}{v^2+w^2}\ ;\ \frac{\partial\, u}{\partial\, w} = \frac{v}{v^2+w^2}\,\right]$

   (h) $z = (1+xy)^y$ $\left[\,\frac{\partial\, z}{\partial\, x} = y^2(1+xy)^{y-1}\ ;\ \frac{\partial\, z}{\partial\, y} = xy(1+xy)^{y-1} + (1+xy)^y \cdot \ln(1+xy)\,\right]$

   (i) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\left[\,\frac{1}{x}\,\frac{\partial\, u}{\partial\, x} = \frac{1}{y}\,\frac{\partial\, u}{\partial\, y} = \frac{1}{z}\,\frac{\partial\, u}{\partial\, z} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\right]$

   (j) $u = \sin(x^2+y^2+z^2)$ $\left[\,\frac{1}{x}\,\frac{\partial\, u}{\partial\, x} = \frac{1}{y}\,\frac{\partial\, u}{\partial\, y} = \frac{1}{z}\,\frac{\partial\, u}{\partial\, z} = 2\cos(x^2+y^2+z^2)\,\right]$

   (k) $u = \frac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\left[\,\frac{1}{x}\,\frac{\partial\, u}{\partial\, x} = \frac{1}{y}\,\frac{\partial\, u}{\partial\, y} = \frac{1}{z}\,\frac{\partial\, u}{\partial\, z} = \frac{2}{r(r^2-1)}\ ,\ \text{kde } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\right]$

5. Najděte totální diferenciál funkce

   (a) $z = \frac{x+y}{x-y}$ $\left[\,\frac{2(x\,dy - y\,dx)}{(x-y)^2}\,\right]$

(b) $z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ $\left[\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}\right]$

(c) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ $\left[\frac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}\right]$

(d) $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ $\left[\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}\right]$

(e) $u = \frac{z}{x^2+y^2}$ $\left[\frac{(x^2+y^2)dz-2z(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}\right]$

(f) $u = x^{yz}$ $\left[x^{yz-1}\left(yz\,dx+xz\,\ln x\,dy+xy\,\ln x\,dz\right)\right]$

6. Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližně

(a) $\ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right)$ $[0,005]$

(b) $1,002\cdot 2,003^2\cdot 3,004^3$ $[108,972]$

(c) $\sqrt{1,02^3+1,97^3}$ $[2,95]$

(d) $\frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98\cdot\sqrt[4]{1,05^3}}}$ $[1,055]$

(e) $0,97^{1,05}$ $[0,97]$

(f) $\sin 29^o\cdot\operatorname{tg}46^o$ $[0,502]$

7. Najděte rovnici tečné roviny a normály plochy v bodě.

(a) $z = xy$; $[1,1,?]$ $[x+y-z=1\ ;\ x-1=y-1=1-z]$

(b) $z = x^2+y^2$; $[1,2,?]$ $\left[2x+4y-z-5=0\ ;\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=5-z\right]$

(c) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; $[1,1,?]$ $\left[2x-2y+4z=\pi\ ;\ x-1=1-y=\frac{4z-\pi}{8}\right]$

(d) $z = \frac{x^3-3axy+y^3}{a^2}$; $[a,a,?]$ $[z+a=0\ ;\ x=a\,,\ y=a]$

8. Ukažte, že tečné roviny k ploše $xyz = a^3$ $(a>0)$ tvoří s rovinami souřadnými jehlan o konstantním objemu.

9. Najděte příslušné parciální derivace.

(a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$; (druhé derivace)

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

(b) $z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$; (druhé derivace)

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}\left\{x+\sqrt{x^2+y^2}\right\}^2}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right]$$

(c) $z = e^{(xe^y)}$; (druhé derivace)

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{xe^y+2y}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(1+xe^y)e^{xe^y+y}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(1+xe^y)e^{xe^y+y}\right]$$

(d) $z = \frac{x-y}{x+y}$; (druhé derivace) $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}\,,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}\right]$

(e) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)$ $\left[\frac{(x-z)y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2-2xz)^3}}\right]$

(f) $z = \ln(x^2+y^2)$; $\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\right)$ $\left[\frac{4x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}\right]$

(g) $u = x^3\sin y+y^3\sin x$; $\left(\frac{\partial^6 z}{\partial x^3\,\partial y^3}\right)$ $[-6(\cos x+\cos y)]$

(h) $u = \operatorname{arctg} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$; $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\right)$ $[\,0\,]$

(i) $u = e^{xyz}$; $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\right)$ $\left[\,(1+3xyz+x^2y^2z^2)\,e^{xyz}\,\right]$

(j) $u = (x-x_0)^p(y-y_0)^q$; $p, q \in \mathbf{N}$; $\left(\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p\, \partial y^q}\right)$ $[\,p!\,q!\,]$

(k) $u = (x^2+y^2)e^{x+y}$; $\left(\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m\, \partial y^n}\right)$ $\left[\,\left\{x^2+y^2+2(mx+ny)+m(m-1)+n(n-1)\right\}\,e^{x+y}\right]$

(l) $u = xyz\, e^{x+y+z}$; $\left(\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p\, \partial y^q\, \partial z^r}\right)$ $\left[\,(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}\,\right]$

10. Ukažte, že dané funkce vyhovují uvedené rovnici.

(a) $z = \ln(e^x+e^y)$; $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$.

(b) $u = e^x\,(x\cos y - y\sin y)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(c) $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

(d) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

(e) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$, $\frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}$.

(f) $z = \frac{y}{y^2-a^2x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2\, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(g) $v = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\, \partial x}\right) = 0$.

(h) $v = x\,\ln(x+r) - r$, kde $r^2 = x^2+y^2$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{x+r}$.

(i) $u = x\,e^y + y\,e^x$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = x\,\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} + y\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y}$.

(j) $u = \ln \frac{x^2-y^2}{xy}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 2\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right)$.

11. Vypočtěte uvedené diferenciály.

(a) $d^2 z$; $z = \ln(x-y)$ $\left[-\frac{(dx-dy)^2}{(x-y)^2}\right]$

(b) $d^2 z$; $z = x\,\sin^2 y$ $\left[\,2\sin 2y\,dx\,dy + 2x\,\cos 2y\,dy^2\,\right]$

(c) $d^3 u$; $u = x^3+y^3-3xy(x-y)$ $\left[\,6(dx^3-3dx^2\,dy+3dx\,dy^2+dy^3)\,\right]$

(d) $d^3 u$; $u = \sin(x^2+y^2)$
$\left[\,-8(x\,dx+y\,dy)^3\,\cos(x^2+y^2) - 12(x\,dx+y\,dy)(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2)\,\right]$

(e) $d^{10} u$; $u = \ln(x+y)$ $\left[-\frac{9!\,(dx+dy)^{10}}{(x-y)^{10}}\right]$

(f) $d^3 u$; $u = xyz$ $[\,6dx\,dy\,dz\,]$

(g) $d^4 u$; $u = \ln(\,x^x\,y^y\,z^z\,)$ $\left[\,2\left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3}\right)\right]$

(h) $d^n u$; $u = e^{ax+by}$ $\left[\,(adx+bdy)^n\,e^{ax+by}\,\right]$

(i) $d^n u$; $u = X(x)\cdot Y(y)$ $\left[\,\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{(n-k)}(x)\,Y^{(k)}(y)\,dx^{n-k}\,dy^k\,\right]$

12. Najděte totální diferenciál složených funkcí.

(a) $u = f\,(t)$; $t = x+y$ $\left[\,(dx+dy)\,f'(t)\,\right]$

(b) $u = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ $\left[\,\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]$

(c) $u = f\,(xyz)$ $\quad [\,(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)\,f'(xyz)\,]$

(d) $u = f\,(ax, by)$ $\quad [\,a\,f_1'(ax, by)\,dx + b\,f_2'(ax, by)\,dy\,]$

(e) $u = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$ $\quad \left[(y\,dx + x\,dy)f_1' + \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\,f_2'\right]$

(f) $u = f\left(x + y + y, x^2 + y^2 + z^2\right)$ $\quad [\,(dx + dy + dz)\,f_1' + 2(x\,dx + y\,dy + z\,dz)\,f_2'\,]$

(g) $u = f\left(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy\right)$ $\quad [\,2\,\{(x\,dx + y\,dy)\,f_1' + (x\,dx - y\,dy)\,f_2' + (y\,dx + x\,dy)\,f_3'\}\,]$

13. Užitím věty o derivacích složené funkce najděte:

(a) $\frac{du}{dt}$, kde $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$ $\quad \left[e^{\sin t - 2t^3}\,(\cos t - 6t^2)\right]$

(b) $\frac{du}{dt}$, kde $u = z^2 + y^2 + yz$, $z = \sin t$, $y = e^t$ $\quad \left[\sin 2t + 2e^{2t} + e^t(\sin t + \cos t)\right]$

(c) $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, kde $z = x^2y - y^2x$, $x = u\,\cos v$, $y = u\,\sin v$

$\left[\,\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2\,\sin v\,\cos v(\cos v - \sin v)\,,\ \frac{\partial z}{\partial v} = u^3(\sin v + \cos v)(1 - 3\sin v\,\cos v)\,\right]$

(d) $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, kde $z = u\,e^{\frac{u}{v}}$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$

$\left[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2y}\,e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\,(x^4 - y^4 + 2x^3y)\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x\,y^2}\,e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\,(y^4 - x^4 + 2xy^3)\right]$

14. Buďte f a g dvě libovolné jednou nebo dvakrát diferencovatelné funkce. Ukažte, že platí:

(a) $y\,\frac{\partial z}{\partial x} - x\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, kde $z = f\left(x^2 + y^2\right)$

(b) $x^2\,\frac{\partial z}{\partial x} - xy\,\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$, kde $z = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$

(c) $(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\,\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$, kde $z = e^y\,f\left(y\,e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$

(d) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, kde $u = f(x - at) + g(x + at)$

(e) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, kde $u = x\,f(x + y) + y\,g(x + y)$

(f) $\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, kde $z = f\,\{\,x + g(y)\,\}$

15. Zavedením nové nezávisle proměnné transformujte rovnici:

(a) $x^2\,y'' + x\,y' + y = 0$; $x = e^t$ $\quad \left[\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0\right]$

(b) $x^2\,y'' - 4x\,y' + y = 0$; $x = e^z$ $\quad \left[\frac{d^2y}{dz^2} - 5\frac{dy}{dz} + y = 0\right]$

(c) $x^4\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\,\frac{dy}{dx} + y = 0$; $x = \frac{1}{t}$ $\quad \left[\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0\right]$

(d) $y''' = \frac{6y}{x^3}$; $t = \ln|x|$ $\quad \left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 6y = 0\right]$

(e) $(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0$; $x = \cos t$ $\quad \left[\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda^2 y = 0\right]$

(f) $y'' + y'\,\mathrm{th}x + \frac{\mu^2}{\mathrm{ch}^2 x}\,y = 0$; $x = \ln \mathrm{tg}\frac{t}{2}$

$\left[\frac{d^2y}{dt^2} + \mu^2\,y = 0\,;\ \text{vypočtěte } t \text{ ze vztahu } x = \ln \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right]$

16. Zavedením nových nezávisle proměnných transformujte a řešte následující rovnice.

(a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$; $\xi = x + y$, $\eta = x - y$

[$z = \varphi(x + y)$, kde φ je libovolná diferencovatelná funkce]

(b) $y\,\frac{\partial z}{\partial x} - x\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$ $\quad \left[\,z = \varphi\left(x^2 + y^2\right)\,\right]$

(c) $x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z$; $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{x}$ $\quad \left[\,z = x\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\,\right]$

17. Zavedením nových nezávisle proměnných transformujte rovnici.

(a) $x\,\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\,\frac{\partial z}{\partial y}=xy$; $u=\ln x$, $v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ $\quad\left[\,\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\,\mathrm{sh}v\,\right]$

(b) $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$; $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $\quad\left[\,\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=0\,\right]$

(c) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=0$; $x=uv$, $y=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$ $\quad\left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=0\right]$

(d) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$; $u=x$, $v=y-x$, $w=z-x$ $\quad\left[\,\frac{\partial u}{\partial u}=0\,\right]$

(e) $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$; $u=x+2y+2$, $v=x-y-1$ $\quad\left[3\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=0\right]$

(f) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0\right]$

(g) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$; $u=x-2\sqrt{y}$, $v+x+2\sqrt{y}$ $\quad\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0\right]$

(h) $x^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\,\sin y\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\sin^2 y\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $u=x\,\mathrm{tg}\frac{y}{2}$, $v=x$ $\quad\left[\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\,\frac{\partial z}{\partial u}\right]$

18. Transformujte následující operátory do polárních souřadnic $x=r\,\cos\varphi$, $y=r\,\sin\varphi$.

(a) $x\,\frac{\partial u}{\partial y}-y\,\frac{\partial u}{\partial x}$ $\quad\left[\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\right]$

(b) $x\,\frac{\partial u}{\partial x}+y\,\frac{\partial u}{\partial y}$ $\quad\left[\,r\,\frac{\partial u}{\partial r}\,\right]$

(c) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ $\quad\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2\right]$

(d) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $\quad\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right]$

19. Najděte $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{d^2y}{dx^2}$ pro následující implicitně zadané funkce.

(a) $x^2+y^2=25$ $\quad\left[-\frac{x}{y}\,,\,-\frac{25}{y^3}\right]$

(b) $x^2+2xy-y^2=a^2$ $\quad\left[-\frac{x+y}{x-y}\,,\,\frac{2a^2}{(x-y)^3}\right]$

(c) $x^2+y^2=a\,e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; $a>0$ $\quad\left[\frac{x+y}{x-y}\,,\,\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}\right]$

(d) $y=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $\quad\left[\,\frac{y}{x}\,,\,0\,\right]$

(e) $y=\mathrm{tg}(x+y)$ $\quad\left[-1-\frac{1}{y^2}\,,\,-\frac{2(y^2+1)}{y^5}\right]$

(f) $x^3+y^3-3axy=0$ $\quad\left[\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\,,\,-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}\right]$

(g) $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$ (jen y') $\quad\left[-\frac{x}{y}\cdot\frac{2(x^2+y^2)-a^2}{2(x^2+y^2)+a^2}\right]$

(h) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $\quad\left[-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\,,\,\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}{3x\,\sqrt[3]{xy}}\right]$

20. Najděte rovnici tečny k dané křivce v bodě T .

(a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; $T[6\,;\,6{,}4]$ $\quad[3x+5y-50=0]$

(b) $xy+\ln y=1$; $T[1,1]$ $\quad[x+2y-3=0]$

21. Ukažte, že tečna ke křivce $\frac{(x-m)^2}{a^2}\pm\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ v jejím bodě $T\,[x_0,y_0]$ má tvar

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2}\pm\frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2}=1\,.$$

22. Ukažte, že u astroidy $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$ je úsek tečny, omezený osami souřadnými, konstantní.

23. Ukažte, že množiny hyperbol $x^2 - y^2 = a^2$ a $xy = b$ tvoří tzv. ortogonální síť, tj. systém navzájem kolmých křivek.

24. Najděte parciální derivace prvého a druhého řádu následujících implicitně zadaných funkcí.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $\left[z_x = -\frac{x}{z}\,,\ z_y = -\frac{y}{z}\,,\ z_{xx} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}\,,\ z_{xy} = -\frac{xy}{z^3}\,,\ z_{yy} = -\frac{y^2+z^2}{z^3} \right]$

(b) $z^3 - 3xyz = a^3$

$\left[z_x = \frac{yz}{z^2-xy}\,,\ z_y = \frac{xz}{z^2-xy}\,,\ z_{xx} = -\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}\,,\ z_{xy} = \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}\,,\ z_{yy} = -\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3} \right]$

(c) $z = \sqrt{x^2 - y^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$

$\left[z_x = \frac{xz}{x^2-y^2}\,,\ z_y = -\frac{yz}{x^2-y^2}\,,\ z_{xx} = -\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}\,,\ z_{xy} = \frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}\,,\ z_{yy} = -\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}\,, \right]$

25. Najděte rovnici tečné roviny a normály plochy v daném bodě.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; $[3, 4, 12]$ $\left[3x + 4y + 12z = 169\ ;\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12} \right]$

(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\left[\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3} \right]$

$\left[\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}\ ;\ a\left(x - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) = b\left(y - \frac{b\sqrt{3}}{3}\right) = c\left(z - \frac{c\sqrt{3}}{3}\right) \right]$

(c) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 1$; $[2, 2, 1]$ $\left[x + y - 4z = 0\ ;\ x - 2 = y - 2 = \frac{1-z}{4} \right]$

(d) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$; $[1, 2, -1]$ $\left[x + 11y + 5z - 18 = 0\ ;\ x - 1 = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5} \right]$

(e) $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$; $[2, 3, 6]$ $\left[5x + 4y + z - 28 = 0\ ;\ \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = z - 6 \right]$

(f) $z = y + \ln \frac{x}{z}$; $[1, 1, ?]$ $\left[x + y - 2z = 0\ ;\ x - 1 = y - 1 = \frac{1-z}{2} \right]$

26. Najděte tečnou rovinu plochy, rovnoběžnou s danou rovinou.

(a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$; $x + 4y + 6z = 0$ $[x + 4y + 6z = \pm 21]$

(b) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$; $x + y - z = 0$ $[x + y - z = \pm 9]$

27. Rozložte funkci f podle Taylorova vzorce x okolí bodu a.

(a) $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$; $a = (1, -2)$

$\left[5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2 \right]$

(b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; $a = (1, 1, 1)$

$\left[3\left\{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)\right\} + \right.$

$\left. +(x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1) \right]$

28. Funkci f rozložte v okolí bodu a podle Taylorova vzorce až do daného stupně. Výsledku použijte k přibližnému výpočtu funkční hodnoty.

(a) $f(x, y) = e^x \sin y$; $a = (0, 0)$; do 5. stupně ; $e^{0,1} \sin 0,49\pi$

$\left[y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{6}x^3y - \frac{1}{6}xy^3 + \frac{1}{24}x^4y - \frac{1}{12}x^2y^3 + \frac{1}{120}y^5\ ;\ 1,1015 \right]$

(b) $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$; $a = (0, 0)$; do 3. stupně ; $e^{0,05} \ln 1,01$

$\left[y + \frac{1}{2!}(2xy - y^2) + \frac{1}{3!}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)\ ;\ 0,0104603 \right]$

(c) $f(x, y) = x^y$; $a = (1, 1)$; do 3. stupně ; $1,1^{1,02}$

$\left[1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2(y-1)\ ;\ 1,1021 \right]$

(d) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $a = (0, 0)$; do 4. stupně ; $\sqrt{0,9899}$

$\left[1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2\ ;\ 0,99493725 \right]$

(e) $f(x, y) = e^x \sin y$; $a = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; do 3. stupně ; $e^{0,1} \sin 0,49\pi$

$\left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2\ ;\ 1,104624 \right]$

7.3 Optimalizace.

1. Najděte extrémy následujících funkcí.

   (a) $z = x^2 + (y-1)^2$ [minimum $z = 0$ v bodě $(0,1)$]

   (b) $z == x^2 - (y-1)^2$ [nemá extrém]

   (c) $z = (x - y + 1)^2$ [neostré minimum $z = 0$ v bodech přímky $x - y + 1 = 0$]

   (d) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ [minimum $z = -1$ v bodě $(1,1)$]

   (e) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ [minimum $z = 0$ v bodech $(1,1)\,,\,(-1,-1)$]

   (f) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
   $\Big[$ maximum v bodě $(0,0)$; minimum $z = -\frac{9}{8}$ pro $x = \pm\frac{1}{2}\,,\, y = \pm 1\Big]$

   (g) $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $\quad a, b > 0$
   $\Big[$ maximum $z = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$ pro $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; minimum $z = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ pro $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\Big]$

   (h) $z = (8x^2 - 6xy + 3y^2)\, e^{2x+3y}$ [minimum $z = 0$ v bodě $(0,0)$]

   (i) $z = \sin x \,\sin y\, \sin(x+y)$ $\Big[$ maximum $z = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ v bodech $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi\ \frac{\pi}{3} + l\pi\right]$, $k, l \in \mathbf{Z}$;
   minimum $z = -3\sqrt{3}$ v bodech $\left[\frac{2\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + l\pi\right]$, $k, l \in \mathbf{Z}\Big]$

   (j) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ [minimum $u = -14$ v bodě $(-1,-2,3)$]

   (k) $u = x\,y^2\,z^3(a - x - 2y - 3z)\,,\; a > 0$ $\Big[$ maximum $u = \left(\frac{a}{7}\right)^7$ v bodě $\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right)$;
   neostrý extrém $u = 0$ pro $y = 0\,,\, x \neq 0\,,\, z \neq 0\,,\, x + 2y + 3z \neq a\Big]$

2. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce na dané množině.

   (a) $z = x - 2y - 3$; $x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, x + y \leq 1$ [-2 ; -5]

   (b) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$; $x^2 + y^2 \leq 25$ [125 ; -75]

   (c) $z = x^2 - xy + y^2$; $|\,x\,| + |\,y\,| \leq 1$ [1 ; 0]

3. Řešte následující úlohy na extrém

   (a) V rovině $3x - 2z = 0$ najděte bod trak, aby součet druhých mocnin jeho vzdáleností od bodů $A[1,1,1]$, $B[2,3,4]$ byl minimální. $\left[\left[\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right]\right]$

   (b) Najděte objem největšího kvádru, který je možno vepsat do elipsoidu o poloosách a, b, c . $\left[\frac{8\,abc}{3\sqrt{3}}\right]$

   (c) Vana ve tvaru kvádru má objem V . Určete její rozměry tak, aby měla minimální povrch. $\left[\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}\right]$

   (d) Těleso se skládá z rotačního válce ukončeného kuželem. Najděte jeho rozměry tak, aby jeho objem byl maximální, jestliže víte, že jeho povrch je S .
   $\Big[r = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{\pi(3+\sqrt{5})}}\,,\; v = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{5\,\pi(3+\sqrt{5})}}\,,\; h = \sqrt{\frac{S}{5}}\,\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{\pi(3+\sqrt{5})}}\,,$
   kde r je poloměr podstavy, v výška válce a h výška kužele]

   (e) Kolmý průřez zavodňovacím kanálem má tvar rovnoramenného lichoběžníka daného obsahu S . Najděte jeho rozměry tak, aby plocha smáčená vodou byla minimální.
   $\Big[a = l = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3^3}}\,,\; \alpha = \frac{\pi}{3}\,,$ kde l je rameno, a základna a α úhel odklonu ramena $\Big]$

7.4 Regulární zobrazení.

1. Ukažte, že jsou následující zobrazení regulární a najděte jejich jakobiány.

   (a) $x = ar\,\cos\varphi\,,\ y = br\,\sin\varphi\,,\ z = z\,;\ a, b > 0$ konstanty ;
   $r > 0\,,\ \varphi \in (0, 2\pi)\,,\ z \in \mathbf{R}$ $[\,abr\,]$

   (b) $x = ar\,\cos^{\alpha}\varphi\,,\ y = br\,\sin^{\alpha}\varphi\,;\ a, b$ konstanty ; $r > 0\,,\ \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
   $\left[\,\alpha abr\,\cos^{\alpha-1}\varphi\,\sin^{\alpha-1}\varphi\,\right]$

   (c) $x = ar\,\cos\varphi\,\cos\vartheta\,,\ y = br\,\sin\varphi\,\cos\vartheta\,,\ z = cr\,\sin\vartheta\,;\ a, b.c$ konstanty ;
   $r > 0\,,\ \varphi \in (0, 2\pi)\,,\ \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left[\,abcr^2\,\cos\vartheta\,\right]$

   (d) $x = a\,\mathrm{chu}\,\sin v\,,\ y = a\,\mathrm{shu}\,\sin v\,;\ a$ konstanta ; $u > 0\,,\ v \in (0, 2\pi)$ $\left[\,a^2(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 v)\,\right]$

   (e) $x = e^u\,\cos v\,,\ y = e^u\,\sin v\,;\ u \in \mathbf{R}\,,\ v \in (0, 2\pi)$ $\left[\,e^{2u}\,\right]$

7.5 Obyčejné diferenciální rovnice.

7.5.1 Rovnice prvého řádu.

1. Řešte rovnice

   (a) $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2 y)\,dy = 0$ $\left[\,1 + y^2 = C(1 - x^2)\,\right]$

   (b) $x\,y\,y' = 1 - x^2$ $\left[\,x^2 + y^2 = \ln\left(|\,C\,|x^2\right)\,\right]$

   (c) $y'\,\mathrm{tg}\,x - y = a$ $[\,y = C\sin x - a\,]$

   (d) $x\,y\,dx + (x + 1)\,dy = 0$ $[\,y = C(x + 1)e^{-x}\,]$

   (e) $\sqrt{y^2 + 1}\,dx = x\,y\,dy$ $\left[\,\ln|\,x\,| = C + \sqrt{y^2 + 1}\,\right]$

   (f) $e^y(1 + x^2)\,dy - 2x(1 + e^y)\,dx = 0$ $\left[\,1 + e^y = C(1 + x^2)\,\right]$

   (g) $(x^2 - 1)\,y' + 2x\,y^2 = 0\,;\ y(0) = 1$ $\left[\,y\left\{\,\ln(1 - x^2) + 1\right\} = 1\,\right]$

   (h) $y'\,\sin x = y\,\ln y\,;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ $\left[\,y = e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\,\right]$

   (i) $\sin y\,\cos x\,dy = \cos y\,\sin x\,dx = 0\,;\ y(0) = \frac{\pi}{4}$ $\left[\,\cos x = \sqrt{2}\,\cos y\,\right]$

   (j) $y'\,\mathrm{cotg}\,x + y = 2\,;\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ $[\,y = 2 - 4\cos x\,]$

2. Převedením na rovnici se separovatelnými proměnnými řešte

   (a) $y' - y = 2x - 3$ $[\,2x + y - 1 = Ce^x\,]$

   (b) $y' = \sin(x - y)$ $\left[\,x + C = \mathrm{cotg}\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\,\right]$

   (c) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$ $\left[\,\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\left(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2\right) = x + C\,\right]$

   (d) $y' = \cos(x - y - 1)$ $[\,y = x - 1 - 2\mathrm{arctg}\,(C - x) + 2k\pi\,;\ k \in \mathbf{Z}\,]$

   (e) $y'\,\sqrt{1 + x + y} = x + y - 1$
   $\left[\,x + C = 2u + \frac{2}{3}\ln|\,u - 1\,| - \frac{8}{3}\ln(\,u + 2\,)\,;\ u = \sqrt{1 + x + y}\,\right]$

3. Řešte rovnice

   (a) $y' = \frac{x+y}{x-y}$ $\left[\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = \ln\left(|C|\sqrt{x^2 + y^2}\right)\,\right]$

   (b) $x\,y' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\left[\,x^2 = C^2 + 2C\,y\,\right]$

   (c) $(3y^2 + 3xy + x^2)\,dx = (x^2 + 2xy)\,dy$ $\left[\,(x + y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}\,\right]$

   (d) $(x^2 + y^2)\,y' = 2xy$ $\left[\,y^2 - x^2 = Cy\,;\ y = 0\,\right]$

(e) $x\,y' = y\,\cos\ln\frac{y}{x}$ $\left[\ln(|C|x) = \operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)\ ;\ y = x\,e^{2k\pi}\ ,\ k\in\mathbf{Z}\right]$

(f) $y+\sqrt{x^2+y^2}-x\,y' = 0\ ;\ y(1)=0$ $\left[y = \frac{x^2-1}{2}\right]$

(g) $(x\,y'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x\ ;\ y(1)=0$ $\left[\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\right]$

(h) $(y^2-3x^2)\,dy+2xy\,dx = 0\ ;\ y(0)=1$ $\left[y^3 = y^2-x^2\right]$

(i) $y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}\ ;\ y(1)=1$ $[y=-x]$

4. Převedením na homogenní rovnici řešte

(a) $(2x-4y+6)\,dx+(x+y-3)\,dy = 0$ $\left[(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2\right]$

(b) $(x+4y)\,y' = 2x+3y-5$ $\left[(y-x+5)^5\,(x+2y-2) = C\right]$

(c) $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$ $\left[y+2 = Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}\right]$

(d) $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy = 0$ $[x+2y+3\ln|\,x+y-2\,| = C]$

5. Řešte rovnice

(a) $x\,y'-2y = 2x^4$ $\left[y = Cx^2+x^4\right]$

(b) $x\,y'+y+1 = 0$ $[xy = C-\ln|\,x\,|]$

(c) $x\,y'+(x+1)\,y = 3x^2\,e^{-x}$ $\left[xy = (x^3+C)e^{-x}\right]$

(d) $(xy+e^x)\,dx-x\,dy = 0$ $[y = e^x(\ln|\,x\,|+C)]$

(e) $y = x(y'-x\,\cos x)$ $[y = x(C+\sin x)]$

(f) $(xy'-1)\ln x = 2y$ $\left[y = C\,\ln^2 x-\ln x\right]$

(g) $y\,\sin x+y'\,\cos x = 1$ $[y = \sin x+C\cos x]$

(h) $(2e^y-x)\,y' = 1$ $[x = e^y+Ce^{-y}]$

(i) $y' = \frac{y}{3x-y^2}$ $\left[x = Cy^3+y^2\right]$

(j) $y' = \frac{1}{x\,\sin y+2\sin 2y}$ $\left[x = 8\sin^2\frac{y}{2}+Ce^{-\cos y}\right]$

(k) $y'+\frac{3}{x}\,y = \frac{2}{x^3}\ ;\ y(1)=1$ $\left[y = -\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}\right]$

(l) $y'-2xy = 1\ ;\ y(0)=0$ $\left[y = e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt\right]$

(m) $2\sqrt{x}\,y'-y = -\sin\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}\ ;\ y$ je omezená pro $x\to\infty$ $[y = \cos\sqrt{x}]$

(n) $2x^2\,y'-xy = 2x\,\cos x-3\sin x\ ;\ y\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ $\left[y = \frac{\sin x}{x}\right]$

(o) $(1+x^2)\ln(1+x^2)\,y'-2xy = \ln(1+x^2)-2x\operatorname{arctg}\,x\ ;\ y\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-\frac{\pi}{2}$ $[y = \operatorname{arctg}\,x]$

6. Převedením na lineární rovnici řešte

(a) $y'+2y = y^2\,e^x$ $\left[y\left(e^x+Ce^{2x}\right) = 1\ ,\ y=0\right]$

(b) $x\,y'-2x^2\,\sqrt{y} = 4y$ $\left[y = x^4\ln^2(|C|x)\ ,\ y=0\right]$

(c) $x\,y'+2y+x^5\,y^3\,e^x = 0$ $\left[y^{-2} = x^4(2e^x+C)\ ,\ y=0\right]$

(d) $(1+x^2)y' = xy+x^2\,y^2$ $\left[\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C-\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\ ,\ y=0\right]$

7. Řešte rovnice

(a) $2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy = 0$ $\left[3x^2\,y-y^3 = C\right]$

(b) $e^{-y}\,dx-(2y+x\,e^{-y})\,dy = 0$ $\left[x\,e^{-y}-y^2 = C\right]$

(c) $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)\,dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0$ $\left[\,x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=C\,\right]$

(d) $(1+y^2\,\sin 2x)\,dx-2y\,\cos^2 x\,dy=0$ $\left[\,x-y^2\,\cos^2 x=C\,\right]$

(e) $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)\,dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}\,dy=0$ $\left[\,x^2+1=2(C-2x)\sin y\,\right]$

(f) $3x^2(1+\ln y)\,dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)\,dy$ $\left[\,x^3+x^3\ln y-y^2=C\,\right]$

(g) $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$ $\left[\,\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C\,\right]$

(h) $\frac{y+\sin x\,\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\,dx+\frac{x}{\cos^2(xy)}\,dy+\sin y\,dy=0$ $[\,\mathrm{tg}(xy)-\cos x-\cos y=C\,]$

(i) $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\,dx+\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)y\,dy=0$ $\left[\,\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-\frac{1}{2}y^2=C\,\right]$

(j) $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)\,dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\,dy=0$

$\left[\,\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{x}{y}+x-\frac{1}{y}=C\,\right]$

8. Najděte obálku soustavy křivek

(a) $y=Cx^2-C^2$ $[\,4y=x^4\,]$

(b) $C\,y=(x-C)^2$ $[\,y=0\,,\ y=-4x\,]$

(c) $y=C(x-C)$ $[\,y=0\,,\ 27y=4x^3\,]$

(d) $xy=Cy-C^2$ $[\,y=4x\,]$

9. Řešte rovnice

(a) $y=x\,y'+\sqrt{1+y'^2}$ $\left[\,y=C\,x+\sqrt{1+C^2}\ ;\ x^2+y^2=1\,\right]$

(b) $y=x\,y'-y'^2$ $[\,y=C\,x-C^2\ ;\ 4y=x^2\,]$

(c) $x\,y'-y=\ln y'$ $[\,y=C\,x-\ln C\ ;\ y=\ln x+1\,]$

(d) $y=y'(x+1)+y'^2$ $\left[\,y=C\,x+C+C^2\ ;\ y=-\frac{1}{4}(x+1)^2\,\right]$

(e) $y=x\,y'+\sin y'$ $\left[\,y=C\,x+\sin C\ ;\ y=x(\pi-\arccos x)+\sqrt{1-x^2}\,\right]$

(f) $y=x\,y'+\frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$ $\left[\,y=C\,x+\frac{C\,a}{\sqrt{1+C^2}}\ ;\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\,\right]$

10. Řešte rovnice

(a) $2y'^2(y-xy')=1$ $[\,2C^2(y-Cx)=1\ ;\ 8y^3=27x^2\,]$

(b) $y=2xy'-4y'^3$ $[\,x=3p^2+Cp^{-2}\,,\ y=2p^3+2Cp^{-1}\ ;\ y=0\,]$

(c) $2xy'-y=\ln y'$ $[\,xp^2=p+C\,,\ y=2+2Cp^{-1}-\ln p\,]$

(d) $y=x(1+y')+y'^2$ $[\,x=2(1-p)+Ce^{-p}\,,\ y=\{2(1-p)+Ce^{-p}\}\,(1+p)+p^2\,]$

7.5.2 Lineární rovnice n−tého řádu.

1. Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti systémů funkcí

(a) $4\ ;\ x$ [nezávislé]

(b) $1\ ;\ 2\ ;\ x\ ;\ x^2$ [závislé]

(c) $e^x\ ;\ x\,e^x\ ;\ x^2\,e^x$ [nezávislé]

(d) $\sin x\ ;\ \cos x\ ;\ \cos 2x$ [nezávislé]

(e) $5\ ;\ \cos^2 x\ ;\ \sin^2 x$ [závislé]

(f) $\cos x$; $\cos(x+1)$; $\cos(x-2)$ [závislé]

(g) 1 ; $\arcsin x$; $\arccos x$ [závislé]

2. Najděte wronskián funkcí

(a) 1 ; x $[1]$

(b) e^{-x} ; $x\,e^{-x}$ $[e^{-x}]$

(c) 2 ; $\cos x$; $\cos 2x$ $[-8\sin^3 x]$

(d) 4 ; $\sin^2 x$; $\cos 2x$ $[0]$

(e) $e^{-3x}\sin 2x$; $e^{-3x}\cos 2x$ $[-2e^{-6x}]$

3. Najděte obecné řešení následujících rovnic, jestliže znáte partikulární integrál

(a) $(\sin x-\cos x)\,y''-2\sin x\,y'+(\cos x+\sin x)\,y=0$; $y_1=e^x$ $[y=C_1e^x+C_2\sin x]$

(b) $(1-x^2)\,y''-x\,y'+\frac{1}{4}\,y=0$; $y_1=\sqrt{1+x}$ $[y=C_1\sqrt{1+x}+C_2\sqrt{1-x}]$

(c) $x^2(x+1)\,y''-2y=0$; $y_1=1+\frac{1}{x}$ $\left[y=C_1\left(1+\frac{1}{x}\right)+C_2\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x+1}{x}\ln|x+1|\right)\right]$

(d) $x\,y''+2y'-x\,y=0$; $y_1=\frac{e^x}{x}$ $[xy=C_1e^{-x}+C_2e^x]$

(e) $y''-2(1+\mathrm{tg}^x)\,y=0$; $y_1=\mathrm{tg}\,x$ $[y=C_1\mathrm{tg}\,x+C_2(1+x\,\mathrm{tg}\,x)]$

(f) $(e^x+1)\,y''-2y'-e^x\,y=0$; $y_1=e^x-1$ $\left[y=C_1(e^x-1)+\frac{C_2}{e^x+1}\right]$

(g) $x^2(2x-1)\,y'''+(4x-3)\,y''-2x\,y'+2y=0$; $y_1=x$, $y_2=\frac{1}{x}$
$\left[y=C_1x+\frac{C_2}{x}+C_3(x\ln|x|+1)\right]$

(h) $(x^2-2x+3)\,y'''-(x^2+1)y''+2x\,y'-2y=0$; $y_1=x$, $y_2=e^x$
$[y=C_1x+C_2e^x+C_3(x^2-1)]$

4. Najděte obecné řešení následujících rovnic. Hledejte partikulární integrál ve tvaru $y=e^{\lambda x}$ nebo ve tvaru polynomu.

(a) $(2x+1)\,y''+4x\,y'-4y=0$ $[y=C_1x+C_2e^{-x}]$

(b) $x\,y''-(2x+1)\,y'+(x+1)\,y=0$ $[y=(C_1x^2+C_2)\,e^x]$

(c) $x(x-1)\,y''-x\,y'+y=0$ $[y=C_1(1+x\ln|x|)+C_2x]$

(d) $(x^2-1)\,y''+(x-3)\,y'-y=0$ $\left[y=C_1(x-3)+\frac{C_2}{x+1}\right]$

(e) $x\,y''-(x+1)\,y'-2(x-1)\,y=0$ $[y=C_1e^{2x}+C_2(3x+1)e^{-x}]$

5. Řešte rovnice

(a) $3y''-2y'-8y=0$ $\left[y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}\right]$

(b) $y'''+6y''+11y'+6y=0$ $[C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}]$

(c) $y''-4y'+3y=0$; $y(0)=6$, $y'(0)=10$ $[y=4e^x+2e^{3x}]$

(d) $y'''-3y''+3y'-y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=3$ $[y=(1+x)e^x]$

(e) $y^{(6)}+2y^{(5)}+y^{(4)}=0$ $[y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+(C_5+C_6x)e^{-x}]$

(f) $4y''-8y'+5y=0$ $\left[y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)\right]$

(g) $y'''-8y=0$ $\left[y=C_1e^{2x}+e^{-x}\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)\right]$

(h) $y^{(4)}+4y'''+10y''+12y'+5y=0$ $[y=(C_1+C_2x)e^{-x}+(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)e^{-x}]$

(i) $y''-2y'+2y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$ $[y=e^x\sin x]$

(j) $y''-2y'+3y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=3$ $\left[y=e^x\left(\cos\sqrt{2}x+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}x\right)\right]$

6. Sestavte lineární homogenní diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, je-li její fundamentální systém

   (a) e^{-x} ; e^{x} $[\,y'' - y = 0\,]$
   (b) 1 ; e^{x} $[\,y'' - y' = 0\,]$
   (c) e^{-2x} ; xe^{-2x} $[\,y'' + 4y' + 4y = 0\,]$
   (d) $\sin 3x$; $\cos 3x$ $[\,y'' + 9y = 0\,]$
   (e) e^{x} ; xe^{x} ; e^{2x} $[\,y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0\,]$
   (f) 1 ; $e^{-x}\sin x$; $e^{-x}\cos x$ $[\,y''' + 2y'' + 2y' = 0\,]$

7. Napište lineární homogenní diferenciální rovnici s reálnými konstantními koeficienty nejmenšího možného řádu tak, aby měla řešení

   (a) $y_1 = x^2 e^x$ $[\,y''' - 3y'' + 3y' - y = 0\,]$
   (b) $y_1 = e^{2x}\cos x$ $[\,y'' - 4y' + 5y = 0\,]$
   (c) $y_1 = x\,\sin x$ $\left[\,y^{IV} + 2y'' + y = 0\,\right]$
   (d) $y_1 = x\,e^x\,\cos 2x$ $\left[\,y^{IV} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0\,\right]$
   (e) $y_1 = x\,,\ y_2 = \sin x$ $\left[\,y^{IV} + y'' = 0\,\right]$

8. Řešte rovnice

   (a) $y'' - 2y' + y = f(x)$, kde
      i. $f(x) = \frac{e^x}{x}$ $[\,y = e^x(x\ln|x| + C_1 x + C_2)\,]$
      ii. $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ $\left[\,y = e^x\left(C_1 x + C_2 - \ln\sqrt{x^2+1} + x\operatorname{arctg} x\right)\right]$
   (b) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$ $\left[\,y = \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln(e^x+1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}\,\right]$
   (c) $y'' + y + \operatorname{cotg}^2 x = 0$ $\left[\,y = 2 + C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\,\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right]$
   (d) $y'' - y' = f(x)$, kde
      i. $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ $[\,y = e^x(x + C_1) - (e^x+1)\ln(e^x+1) + C_2\,]$
      ii. $f(x) = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$
      $$\left[\,y = \tfrac{1}{2}e^x\left\{\arcsin e^x + e^x\sqrt{1-e^{2x}} + C_1\right\} + \tfrac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + C_2\,\right]$$
      iii. $e^{2x}\,\cos e^x$ $[\,C_1 e^x - \cos e^x + C_2\,]$

9. Řešte rovnice

   (a) $y'' + y = 4x\,e^x$ $[\,y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x-2)e^x\,]$
   (b) $y'' - y = 2e^x - x^2$ $\left[\,y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x\,e^x + x^2 + 2\,\right]$
   (c) $y'' + y' - 2y = 3x\,e^x$ $\left[\,y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)e^x\,\right]$
   (d) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ $\left[\,y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10}(\sin x + 3\cos x)\right]$
   (e) $y'' + y = 4\sin x$ $[\,y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\,\cos x\,]$
   (f) $y'' - 3y' + 2y = x\,\cos x$ $[\,y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (0,1\,x - 0,12)\cos x - (0,3\,x + 0,34)\sin x\,]$
   (g) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + x\,e^{-x}$ $\left[\,y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5}e^{-4x} - \frac{1}{36}(6x+1)e^{-x}\,\right]$
   (h) $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$ $\left[\,y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{37}\,e^{3x}(6\sin x - \cos x)\right]$
   (i) $y'' - 2y' + y = 6x\,e^x$ $\left[\,y = (C_1 + C_2 x + x^3)e^x\,\right]$
   (j) $y'' + y = x\,\sin x$ $\left[\,y = \left(C_1 - \frac{x^2}{4}\right)\cos x + \left(C_2 + \frac{x}{4}\right)\sin x\right]$

10. Řešte úlohy

(a) $y'' + 9y = 6e^{3x}$; $y(0) = y'(0) = 0$ $\left[\frac{1}{3}(e^{3x} - \cos 3x - \sin 3x\right]$

(b) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ $\left[y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + (x+1)^2e^x\right]$

(c) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$; $y(0) = y'(0) = 0$ $\left[y = \left(x + \frac{3}{5}\right)e^{-3x} + \frac{1}{5}(4\sin x - 3\cos x)\right]$

(d) $y'' + 4y = \sin x$; $y(0) = y'(0) = 1$ $\left[y = \cos x + \frac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)\right]$

(e) $y'' + y = 2\cos x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ $[y = \cos x + x\,\sin x]$

11. Odhadněte partikulární integrály následujících rovnic

(a) $y'' - 7y' = (x-1)^2$ $\left[y_p = A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x\right]$

(b) $y'' + 7y' = e^{-7x}$ $\left[y_p = Ax\,e^{-7x}\right]$

(c) $y'' - 8y' + 16y = (10 - x)e^{4x}$ $\left[y_p = \left(A_1x^3 + A_2x^2\right)e^{4x}\right]$

(d) $y'' + 25y = \cos 5x$ $[y_p = x(\,A\cos 5x + B\sin 5x)]$

(e) $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ $\left[y_p = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x}\right]$

(f) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ $\left[y_p = x(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x}\right]$

(g) $y'' + 4y = \sin x\,\sin 2x$ $[y_p = A_1\cos x + B_1\sin x + A_2\cos 3x + B_2\sin 3x]$

(h) $y^{IV} - y''' = 4$ $\left[y_p = Ax^3\right]$

(i) $y''' + 2y'' + y' = (2x+1)\sin x + (x^2 - 4x)\cos x$
$\left[y_p = (Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x\right]$

(j) $y''' - y' = e^x\,\sin x + 2x^2$ $\left[y_p = e^x(A\cos x + B\sin x) + x(Cx^2 + Dx + E)\right]$

(k) $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x(x\,\cos x + \sin x)$; $\lambda_1 = 1 + i$
$\left[y_p = x^2e^x\,\{(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\}\right]$

(l) $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 3\cos 2x + 1$ $\left[y_p = x^2(A\cos 2x + B\sin 2x) + C\right]$

12. Vypočtěte partikulární integrál rovnice $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, je-li

(a) $f(x) = 10e^{-x}$ $\left[y_p = \frac{5}{3}e^{-x}\right]$

(b) $f(x) = 3e^{2x}$ $\left[y_p = 3xe^{2x}\right]$

(c) $f(x) = 2\sin x$ $\left[y_p = \frac{1}{5}(3\cos x + \sin x)\right]$

(d) $f(x) = 2x^3 - 30$ $\left[y_p = \frac{1}{4}(4x^3 + 18x^2 + 42x - 15)\right]$

(e) $f(x) = 2e^x\cos\frac{x}{2}$ $\left[y_p = -\frac{8}{5}e^x\left(\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right)\right]$

(f) $f(x) = x - e^{-2x} + 1$ $\left[y_p = \frac{1}{12}(6x + 15 - e^{-2x})\right]$

(g) $f(x) = e^x(3 - 4x)$ $\left[y_p = (2x^2 + x)e^x\right]$

(h) $f(x) = 3x + 5\sin 2x$ $\left[y_p = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}(9 + 3\cos 2x - \sin 2x)\right]$

(i) $f(x) = 2e^x - e^{-2x}$ $\left[y_p = -2xe^x - \frac{1}{12}e^{-2x}\right]$

(j) $f(x) = \sin x\,\sin 2x$ $\left[y_p = \frac{1}{20}(\cos x - 3\sin x) + \frac{1}{260}(7\cos 3x + 9\sin 3x)\right]$

(k) $f(x) = \mathrm{sh}x$ $\left[y_p = -\frac{1}{12}e^{-x} - \frac{1}{2}x\,e^x\right]$

13. Vypočtěte partikulární integrál rovnice $2y'' + 5y' = f(x)$, je-li

(a) $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$ $\left[y_p = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x\right]$

(b) $f(x) = e^x$ $\left[y_p = \frac{1}{7}e^x\right]$

(c) $f(x) = 29\cos x$ $[y_p = 5\sin x - 2\cos x]$

(d) $f(x) = \cos^2 x$ $\left[\, y_p = \frac{1}{10}x + \frac{5}{164}\sin 2x - \frac{1}{41}\cos 2x \,\right]$

(e) $f(x) = 0,1\, e^{-2,5x} - 25\sin 2,5x$ $\left[\, y_p = \cos 2,5x + \sin 2,5x - 0,02\, x\, e^{-2,5x} \,\right]$

(f) $f(x) = 29x\, \sin x$ $\left[\, y_p = -\left(5x + \frac{16}{29}\right)\cos x - \left(2x - \frac{185}{29}\right)\sin x \,\right]$

(g) $f(x) = 100x\, e^{-x}\, \cos x$ $\left[\, y_p = \frac{1}{169}e^{-x}\{\, (650x + 2650)\sin x - (3250x - 400)\cos x \,\} \,\right]$

(h) $f(x) = 3\mathrm{ch}\frac{5}{2}x$ $\left[\, y_p = \frac{3}{10}\left\{ \frac{1}{5}e^{5x/2} - x\, e^{-5x/2} \right\} \,\right]$

14. Vypočtěte partikulární integrál rovnice $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, je-li

(a) $f(x) = 1$ $\left[\, y_p = \frac{1}{4} \,\right]$

(b) $f(x) = e^{-x}$ $\left[\, y_p = \frac{1}{9}e^{x} \,\right]$

(c) $f(x) = 3e^{2x}$ $\left[\, y_p = \frac{3}{2}\, x^2\, e^{2x} \,\right]$

(d) $f(x) = 2(\sin 2x + x)$ $\left[\, y_p = \frac{1}{4}(\cos 2x + 2x + 2) \,\right]$

(e) $f(x) = \sin x\, \cos 2x$ $\left[\, y_p = \frac{1}{338}(12\cos 3x - 5\sin 3x) + \frac{1}{50}(4\cos x + 3\sin x) \,\right]$

(f) $f(x) = \sin^3 x$ $\left[\, y_p = \frac{3}{100}(3\sin x + 4\cos x) + \frac{1}{676}(5\sin 3x - 12\cos 3x) \,\right]$

(g) $f(x) = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$ $\left[\, y_p = 2x^2 + 4x + 3 + 4x^2\, e^{2x} + \cos 2x \,\right]$

(h) $f(x) = \mathrm{sh}2x$ $\left[\, y_p = \frac{1}{32}(8x^2\, e^{2x} - e^{-2x}) \,\right]$

(i) $f(x) = \mathrm{sh}x + \sin x$ $\left[\, y_p = \frac{1}{18}(9e^{x} - e^{-x}) + \frac{1}{25}(3\sin x + 4\cos x) \,\right]$

(j) $f(x) = e^{x} - \mathrm{sh}(x-1)$ $\left[\, y_p = e^{x} - \frac{1}{2}e^{x-1} + \frac{1}{18}e^{1-x} \,\right]$

15. Vypočtěte partikulární integrál rovnice $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, je-li

(a) $f(x) = 5\, e^{3x/5}$ $\left[\, y_p = \frac{25}{16}\, e^{3x/5} \,\right]$

(b) $f(x) = \sin\frac{4}{5}x$ $\left[\, y_p = \frac{15}{219}\, \sin\frac{4}{5}x + \frac{40}{219}\, \cos\frac{4}{5}x \,\right]$

(c) $f(x) = e^{2x} + 2x^3 - x + 2$ $\left[\, y_p = \frac{1}{13}e^{2x} + \frac{1}{5}\left(2x^3 + \frac{36}{5}\, x^2 + \frac{107}{25}\, x - \frac{1118}{25}\,\right) \,\right]$

(d) $f(x) = e^{3x/5}\, \cos x$ $\left[\, y_p = -\frac{5}{9}\, e^{3x/5}\, \cos x \,\right]$

(e) $f(x) = e^{3x/5}\, \sin\frac{4}{5}x$ $\left[\, y_p = -\frac{1}{8}\, x\, e^{3x/5}\, \cos\frac{4}{5}x \,\right]$

(f) $f(x) = e^{x}\, \mathrm{ch}x$ $\left[\, y_p = \frac{1}{26}\, e^{2x} + \frac{1}{10} \,\right]$

16. Řešte rovnice

(a) $x^2\, y'' - 3x\, y' + 3y = 0$ $\left[\, y = C_1 x + C_2 x^3 \,\right]$

(b) $x\, y''' + y'' = 0$ $\left[\, y = C_1 + x(C_2 + C_3\, \ln x) \,\right]$

(c) $x^3\, y''' - 3x^2\, y'' + 6x\, y' - 6y = x$ $\left[\, y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \frac{1}{2}\, x\, \ln x \,\right]$

(d) $x^2\, y'' - x\, y' + y = 6x\, \ln x$ $\left[\, y = x\, \ln^3 x + x(C_1 + C_2 \ln x) \,\right]$

(e) $x^2\, y'' + x\, y' + y = 2\sin(\ln x)$ $\left[\, y = -\ln x\, \cos(\ln x) + C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) \,\right]$

7.5.3 Okrajová úloha.

1. Převeďte následující rovnice na symetrický tvar

(a) $y'' + 3y' = 0$ $\left[\, \left(e^{3x}\, y'\right)' = 0 \,\right]$

(b) $y'' - 7y' = 0$ $\left[\, \left(e^{-7x}\, y'\right)' = 0 \,\right]$

(c) $4y'' - 3y' = 0$ $\left[\, \left(e^{-\frac{3}{4}x}\, y'\right)' = 0 \,\right]$

(d) $y'' + 25y = 0$ $\left[\, y'' + 25y = 0 \,\right]$

(e) $ay'' + by' + cy = 0$; a, b jsou konstanty $\left[\left(e^{\frac{b}{a}x}\, y' \right)' + \frac{c}{a}\, e^{\frac{b}{a}x} = 0 \right]$

(f) $x^2 y'' + xy' - y = 0$ $\left[(xy')' - \frac{y}{x} = 0 \right]$

(g) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ $\left[\left(x^3 y' \right)' + xy = 0 \right]$

(h) $ax^2\, y'' + bx\, y' + cy = 0$; a, b jsou konstanty $\left[\left(a\, x^{\frac{b}{a}}\, y' \right)' + c\, x^{\frac{b-2a}{a}} = 0 \right]$

(i) $(2x+1)^2 y'' + 2(2x+1)y' + y = 0$ $\left[\{(2x+1)y'\}' + \frac{y}{2x+1} = 0 \right]$

(j) $(x^2 - 1)y'' - 6y = 0$ $\left[y'' - \frac{6}{x^2-1} = 0 \right]$

(k) $x^2 \ln x\, y'' - xy' + y = 0$ $\left[\left(\frac{y'}{\ln x} \right)' + \frac{y}{x^2 \ln^2 x} = 0 \right]$

(l) $y'' - y' \operatorname{tg} x = 0$ $\left[(y' \cos x)' = 0 \right]$

2. Řešte následující okrajové úlohy.

(a) $y'' - y = 0$; $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$ $\left[y = \frac{\mathrm{sh} x}{\mathrm{sh} 2\pi} \right]$

(b) $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$ [nemá řešení]

(c) $y'' - k^2\, y = 0$; $y(0) = v_1$, $y(x_0) = v_2$ $\left[y = \frac{1}{\mathrm{sh} k x_0} (v_1\, \mathrm{sh} k(x_0 - x) + v_2\, \mathrm{sh} kx) \right]$

(d) $y'' - \alpha^2\, y = 0$; $y(0) = v$, $y'(x_0) = 0$ $\left[y = v \cdot \frac{\mathrm{ch}\, \alpha(x_0 - x)}{\mathrm{ch}\, \alpha x_0} \right]$

(e) $y'' \alpha^2\, s\, y = 0$; $y(0) = \frac{1}{s}$, $y'(x_0) = 0$

$\Big[s < 0$; $y = \frac{\cos\, \alpha \sqrt{-s}\, (x_0 - x)}{s\, \cos\, \alpha \sqrt{-s}\, x_0}$ pro $x_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha\, \sqrt{-s}}$ $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$;

pro $x_0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha\, \sqrt{-s}}$ nemá řešení : $s > 0$; $y = \frac{\mathrm{ch}\, \alpha \sqrt{s}\, (x_0 - x)}{s\, \mathrm{ch}\, \alpha \sqrt{s}\, x_0} \Big]$

(f) $y'' - \lambda^2\, y = 0$; $\lambda \neq 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{1}{\lambda}\, \frac{\mathrm{sh}\, \lambda\, x}{\mathrm{sh}\, \lambda} \right]$

(g) $y'' - \lambda^2\, y = 0$; $\lambda \neq 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{1}{\lambda^2}\, \frac{\mathrm{sh}\, \lambda\, x}{\mathrm{ch}\, \lambda} \right]$

(h) $y'' - \lambda^2\, y = 0$; $\lambda \neq 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{1}{\lambda}\, \frac{\mathrm{ch}\, \lambda\, x}{\mathrm{ch}\, \lambda} \right]$

(i) $y'' - \alpha^2\, s^2\, y = \alpha^2\, gl$; $y(0) = y(x_0) = 0$

$\left[y = \frac{gl}{s^2\, \mathrm{sh}\, \alpha\, s\, x_0} (\, \mathrm{sh}\, \alpha\, s\, x - \mathrm{sh}\, \alpha\, s\, x_0 + \mathrm{sh}\, \alpha\, s(x_0 - x)) \right]$

(j) $x\, y'' + y' = 0$; $y(1) = \alpha\, y'(1)$, $y(x)$ je omezená pro $x \to \infty$ $[\, y = 0\,]$

(k) $y^{IV} - \lambda^4\, y = 0$; $y(0) = y''(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi) = 0$

$[\, y = C \sin kx$ pro $\lambda = k\, (k \in \mathbf{N})$; $y = 0$ pro ostatní $\lambda\,]$

3. Najděte vlastní čísla a vlastní funkce úlohy $y'' + \lambda\, y = 0$, je-li

(a) $x \in \langle 0, \pi \rangle$; $y(0) = y(\pi) = 0$ $\left[\lambda_k = k^2,\ y_k = \sin kx,\ k \in \mathbf{N} \right]$

(b) $x \in \langle 0, \pi \rangle$; $y(0) = y'(\pi) = 0$ $\left[\lambda_k = \frac{(2k-1)^2}{4},\ y_k = \sin \frac{2k-1}{2} x,\ k \in \mathbf{N} \right]$

(c) $x \in \langle 0, \pi \rangle$; $y'(0) = y(\pi) = 0$ $\left[\lambda_k = \frac{(2k-1)^2}{4},\ y_k = \cos \frac{2k-1}{2} x,\ k \in \mathbf{N} \right]$

(d) $x \in \langle 0, \pi \rangle$; $y'(0) = y'(\pi) = 0$ $\left[\lambda_k = k^2,\ y_k = \cos kx,\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \right]$

(e) $x \in \langle 1, 2 \rangle$; $y(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_k = k^2 \pi^2,\ y_k = \sin k\pi x,\ k \in \mathbf{N} \right]$

(f) $x \in \langle 1, 2 \rangle$; $y(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_k = \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4},\ y_k = \cos \frac{2k-1}{2} \pi x,\ k \in \mathbf{N} \right]$

(g) $x \in \langle 1, 2 \rangle$; $y'(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_k = \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4},\ y_k = \sin \frac{2k-1}{2} \pi x,\ k \in \mathbf{N} \right]$

(h) $x \in \langle 1,2 \rangle$; $y'(1) = y'(2) = 0$ $\left[\, \lambda_k = k^2\pi^2 \,,\; y_k = \cos k\pi x \,,\; k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \,\right]$

(i) $x \in \langle a,b \rangle$; $y(a) = y(b) = 0$ $\left[\, \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2} \,,\; y_k = \sin \frac{k\pi(x-a)}{b-a} \,,\; k \in \mathbf{N} \,\right]$

(j) $x \in \langle a,b \rangle$; $y(a) = y'(b) = 0$ $\left[\, \lambda_k = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2} \,,\; y_k = \sin \frac{(2k-1)\pi(x-a)}{2(b-a)} \,,\; k \in \mathbf{N} \,\right]$

(k) $x \in \langle a,b \rangle$; $y'(a) = y(b) = 0$ $\left[\, \lambda_k = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2} \,,\; y_k = \cos \frac{(2k-1)\pi(x-a)}{2(b-a)} \,,\; k \in \mathbf{N} \,\right]$

(l) $x \in \langle a.b \rangle$; $y'(a) = y'(b) = 0$ $\left[\, \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2} \,,\; y_k = \cos \frac{k\pi(x-a)}{b-a} \,,\; k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \,\right]$

4. Najděte vlastní čísla a vlastní funkce následujících okrajových úloh

(a) $y'' + 2y' + \lambda\, y = 0 \,,\; x \in \langle 0, l \rangle$; $y(0) = y(l) = 0$
$\left[\, \lambda_k = 1 + \frac{k^2\pi^2}{l^2} \,,\; y_k = e^{-x} \sin \frac{k\pi x}{l} \,,\; k \in \mathbf{N} \,\right]$

(b) $x^2\, y'' + x\, y' + \lambda\, y = 0 \,,\; x \in \langle 1, l \rangle$; $y(1) = y(l) = 0$ $\left[\, \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{\ln^2 l} \,,\; y_k = \sin \frac{k\pi \ln x}{\ln l} \,,\; k \in \mathbf{N} \,\right]$

(c) $y'' + (\lambda + 1)y = 0 \,,\; x \in \langle 0, 1 \rangle$; $y(0) - y'(0) = 0 \,,\; y(1) = y'(1) = 0$
$\left[\, \lambda_k = k^2\pi^2 - 1 \,,\; y_k = \sin(\operatorname{arctg} k\pi + k\pi x) \,,\; k \in \mathbf{N} \,\right]$

(d) $y'' + \frac{2}{x}\, y' + \lambda\, y = 0 \,,\; x \in (0, l \rangle$; $y(l) = 0 \,,\; y$ je omezená pro $x \to 0_+$
$\left[\, \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2} \,,\; y_k = \frac{1}{x} \sin \frac{k\pi x}{l}\right.$; převeďte danou rovnici na symetrický tvar $\left.\right]$

7.5.4 Soustavy lineárních rovnic.

1. Řešte následující soustavy diferenciálních rovnic.

(a) $\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 3x + 4y \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^{t} + C_2 e^{5t} \\ y &= -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t} \end{aligned}\right]$

(b) $\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= y - 4x \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ y &= 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{aligned}\right]$

(c) $\begin{aligned} x' + x - 8y &= 0 \\ y' - x - y &= 0 \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t} \\ y &= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} \end{aligned}\right]$

(d) $\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 3y - 2x \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ y &= e^{2t}\,\{\, (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t \,\} \end{aligned}\right]$

(e) $\begin{aligned} x' &= x - 3y \\ y' &= 3x + y \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= e^{t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) \\ y &= e^{t}(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t) \end{aligned}\right]$

(f) $\begin{aligned} x' + x + 5y &= 0 \\ y' - x - y &= 0 \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t \\ y &= C_1 \cos 2t + C_1 \sin 2t \end{aligned}\right]$

(g) $\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 4y - x \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t)e^{3t} \\ y &= (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t} \end{aligned}\right]$

(h) $\begin{aligned} x' &= 3x - y \\ y' &= 4x - y \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t)e^{t} \\ y &= (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^{t} \end{aligned}\right]$

(i) $\begin{aligned} x' &= x + z - y \\ y' &= x + y - z \\ z' &= 2x - y \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t} \\ y &= C_1 e^{t} - 3C_3 e^{-t} \\ z &= C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t} \end{aligned}\right]$

(j) $\begin{aligned} x' &= 3x - y + z \\ y' &= x + y + z \\ z' &= 4x - y + 4z \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t} \\ y &= C_1 e^{t} - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t} \\ z &= -C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t} \end{aligned}\right]$

(k) $\begin{aligned} x' &= 4y - 2z - 3x \\ y' &= z + x \\ z' &= 6x - 6y + 5z \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^{t} + C_3 e^{-t} \\ y &= C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} \\ z &= 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t} \end{aligned}\right]$

(l) $\begin{aligned} x' &= x - y - z \\ y' &= x + y \\ z' &= 3x + z \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= e^t(2C_2 \sin 2t + 2C_3 \cos 2t) \\ y &= e^t(C_1 - C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t) \\ z &= e^t(-C_1 - 3C_2 \cos 2t + 3C_3 \sin 2t) \end{aligned}\right]$

(m) $\begin{aligned} x' &= 4x - y - z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= x - y + 2z \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3) e^{3t} \\ y &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \\ z &= C_1 e 2t + C_3 e^{3t} \end{aligned}\right]$

(n) $\begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= 2z - y \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t) e^t + C_3 e^{2t} \\ y &= (C_1 - 2C_2 + C_2 t) e^t \\ z &= (C_1 - C_2 + C_2 t) e^t + C_3 e^{2t} \end{aligned}\right]$

(o) $\begin{aligned} x' &= 4x - y \\ y' &= 3x + y - z \\ z' &= x + z \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^{2t} \\ y &= \left\{2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3 t^2\right\} e^{2t} \\ z &= \left\{C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)t + C_3 t^2\right\} e^{2t} \end{aligned}\right]$

2. Řešte následující soustavy diferenciálních rovnic.

(a) $\begin{aligned} x' &= y + 2e^t \\ y' &= x + t^2 \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t e^t - t^2 - 2 \\ y &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t-1) e^t - 2t \end{aligned}\right]$

(b) $\begin{aligned} x' &= y - 5\cos t \\ y' &= 2x + y \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - 2\sin t - \cos t \\ y &= 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + \sin t + 3\cos t \end{aligned}\right]$

(c) $\begin{aligned} x' &= 4x + y - e^{2t} \\ y' &= y - 2x \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + (t+1) e^{2t} \\ y &= -2C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} - 2t e^{2t} \end{aligned}\right]$

(d) $\begin{aligned} x' &= 2y - x + 1 \\ y' &= 3y - 2x \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= (C_1 + 2C_2 t) e^t - 3 \\ y &= (C_1 + C_2 + 2C_2 t) e^t - 2 \end{aligned}\right]$

(e) $\begin{aligned} x' &= 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' &= x + y + 5e^{-t} \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t} \\ y &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t} \end{aligned}\right]$

(f) $\begin{aligned} x' &= 2x - 4y \\ y' &= x - 3y + 3e^t \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= 4C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - 4t e^t \\ y &= C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - (t-1) e^t \end{aligned}\right]$

(g) $\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= y - 2x + 18t \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^{3t} + 3t^2 + 2t + C_2 \\ y &= -C_1 e^{3t} + 6t^2 - 2t + 2C_2 - 2 \end{aligned}\right]$

(h) $\begin{aligned} x' &= x + 2y + 16t e^t \\ y' &= 2x - 2y \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - (12t + 13) e^t \\ y &= C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-3t} - (8t + 6) e^t \end{aligned}\right]$

(i) $\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= x + 2e^t \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= \left(C_1 + C_2 t - t^2\right) e^t \\ y &= \left\{C_1 - C_2 + (C_2 + 2)t - t^2\right\} e^t \end{aligned}\right]$

(j) $\begin{aligned} x' &= x - y + 8t \\ y' &= 5x - y \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 \cos 2t - C_2 \sin 2t + 2t + 2 \\ y &= (C_1 + 2C_2) \cos 2t + (2C_1 - C_2) \sin 2t + 10t \end{aligned}\right]$

(k) $\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= 2y - x - 5e^t \sin t \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^t + C_2 e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t) \\ y &= C_1 e^t - C_2 e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t) \end{aligned}\right]$

(l) $\begin{aligned} x' &= y + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ y' &= -x + \operatorname{tg} t \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t \\ y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2 \end{aligned}\right]$

(m) $\begin{aligned} x' &= -4x - 2y + \tfrac{2}{e^t - 1} \\ y' &= 6x + 3y - \tfrac{3}{e^t - 1} \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 + 2C_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln|\,e^t - 1\,| \\ y &= -2C_1 - 3C_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln|\,e^t - 1\,| \end{aligned}\right]$

(n) $\begin{aligned} x' &= x - y + \tfrac{1}{\cos t} \\ y' &= 2x - y \end{aligned}$

$\left[\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t) \ln|\cos t| \\ y &= (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t + 2\cos t \ln|\cos t| + 2t \sin t \end{aligned}\right]$

(o) $\begin{aligned} x' &= 2x + y - 2z - t + 2 \\ y' &= 1 - x \\ z' &= x + y - z - t + 1 \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} x &= C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t \\ y &= t - C_1 e^t + C_2 \cos t - C_3 \sin t \\ z &= 1 + C_2 \sin t + C_3 \cos t \end{aligned}\right]$

3. Řešte následující Cauchyovy úlohy.

(a) $y' = y + z\,; \quad y(0) = 0$; $z' = -2y + 4z\,; \quad z(0) = -1$ $\quad \left[\begin{array}{l} y = e^{2t} - e^{3t} \\ z = e^{2t} - 2e^{3t} \end{array}\right]$

(b) $y' = 3y - z\,; \quad y(0) = 1$; $z' = 10y - 4z\,; \quad z(0) = 5$ $\quad \left[\begin{array}{l} y = e^{-2t} \\ z = 5e^{-2t} \end{array}\right]$

(c) $x' = 3x + 8y\,; \quad x(0) = 6$; $y' = -3y - x\,; \quad y(0) = -2$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = 2(2e^{t} + e^{-t}) \\ y = -e^{t} - e^{-t} \end{array}\right]$

(d) $x' = e^{t} - y - 5x\,; \quad x(0) = \frac{119}{900}$; $y' = e^{2t} + x - 3y\,; \quad y(0) = \frac{211}{900}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{25}e^{t} - \frac{1}{36}e^{2t} \\ y = \frac{1}{25}e^{t} + \frac{7}{36}e^{2t} \end{array}\right]$

(e) $x' = y\,; \quad x(0) = 1$; $y' = -x\,; \quad y(0) = 1$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = \cos t + \sin t \\ y = \cos t - \sin t \end{array}\right]$

(f) $x' = 4x - 5y\,; \quad x(0) = 0$; $y' = x\,; \quad y(0) = 1$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = (1 - 2t)e^{-2t} \\ y = t\,e^{-2t} \end{array}\right]$

(g) $x' = x + y + t\,; \quad x(0) = -\frac{7}{9}$; $y' = x - 2y + 2t\,; \quad y(0) = -\frac{5}{9}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{4}{3}t - \frac{7}{9} \\ y = \frac{1}{3}t - \frac{5}{9} \end{array}\right]$

(h) $x' = x + 5y\,; \quad x(0) = -2$; $y' = -3y - x\,; \quad y(0) = 1$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = (\sin t - 2\cos t)e^{-t} \\ y = e^{-t}\,\cos t \end{array}\right]$

(i) $2x' = 6x - y - 6t^{2} - t + 3\,; \quad x(0) = 2$; $y' = 2y - 2t - 1\,; \quad y(0) = 3$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = e^{2t} + e^{3t} + t^{2} + t \\ y = 2e^{2t} + t + 1 \end{array}\right]$

7.6 Funkční řady.

7.6.1 Základní vlastnosti.

1. Najděte obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, je-li

(a) $u_n(x) = \ln^n x$ $\quad [\,\frac{1}{e} < x < e\,]$

(b) $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ $\quad [\,x \in \langle 0, +\infty)\,]$

(c) $u_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ $\quad [\,x \in \mathbf{R} - \langle -1, 1\rangle\,]$

(d) $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ $\quad [\,x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}\,]$

(e) $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n}$ $\quad [\,|\,x\,| > 1\,]$

(f) $u_n(x) = e^{-nx}$ $\quad [\,x > 0\,]$

(g) $u_n(x) = \frac{\cos nx}{e^{nx}}$ $\quad [\,x \in (0, +\infty)\,]$

(h) $u_n(x) = \left(5 - x^2\right)^n$ $\quad \left[\,2 < |\,x\,|\sqrt{6}\,\right]$

(i) $u_n(x) = n^{-\ln x^2}$ $\quad [\,|\,x\,| > \sqrt{e}\,]$

(j) $u_n(x) = n^2\,e^{-nx^2}$ $\quad [\,x \in \mathbf{R} - \{0\}\,]$

(k) $u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ $\quad [\,x \in (-1, 1)\,]$

2. Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, je-li

(a) $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}\,;\ x \in \mathbf{R}\,,\ x \in \langle -1, 1\rangle$ $\quad$ [nestejnoměrně ; stejnoměrně]

(b) $f_n(x) = x^n\,;\ x \in \langle 0, 1\rangle\,,\ x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ $\quad$ [nestejnoměrně ; stejnoměrně]

(c) $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}\,nx}{\sqrt{n+x}}\,;\ x \in \langle 0, +\infty)$ $\quad$ [stejnoměrně]

(d) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$; $x \in \langle 0, 1 \rangle$ [stejnoměrně]

(e) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$; $x \in \langle 0, 1 \rangle$ [nestejnoměrně]

(f) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$; $x \in \langle 0, 2 \rangle$ [nestejnoměrně]

(g) $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$; $x \in \mathbf{R}$ [stejnoměrně]

(h) $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}$; $x \in \langle 0, +\infty)$ [stejnoměrně]

(i) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$; $x \in (0, 1)$ [nestejnoměrně]

(j) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$; $x \in (0, +\infty)$ [nestejnoměrně]

(k) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$; $x \in (0, +\infty)$ [stejnoměrně]

3. Dokažte stejnoměrnou konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, je-li

(a) $u_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$; $x \in \mathbf{R}$

(b) $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+2^n}$; $x \in \langle 0, +\infty)$

(c) $u_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$; $x \in \mathbf{R}$

(d) $u_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$; $x \in \mathbf{R}$

(e) $u_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$; $x \in \mathbf{R}$

(f) $u_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$; $x \in \mathbf{R}$

(g) $u_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$; $x \in \mathbf{R}$

(h) $u_n(x) = \frac{x^2 \sin n\sqrt{x}}{1+n^3x^4}$; $x \in \langle 0, +\infty)$

(i) $u_n(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^2} \right)^2$; $x \in \langle 0, +\infty)$

(j) $u_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right)$; $n \geq 2$; $|\, x \,| \leq a$, $(a > 0)$

(k) $u_n(x) = \frac{\sin \frac{x^2}{n}}{x^2 \sqrt{n+1}}$; $|\, x \,| \leq a$, $(a > 0)$

(l) $u_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{n} \sin 2nx}{x^2+4n}$; $x \in \mathbf{R}$

(m) $u_n(x) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n})$; $\frac{1}{2} \leq |\, x \,| \leq 2$

(n) $u_n(x) = x^2 e^{-nx}$; $\varepsilon \leq x \leq a$ $(\varepsilon, a > 0\,, \varepsilon < a)$

7.6.2 Mocninné řady.

1. Najděte poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, je-li

(a) $a_n = \frac{1}{n^2}$ [1]

(b) $a_n = \frac{1}{n!}$ [$+\infty$]

(c) $a_n = \frac{(1+i)^n}{n\, 2^n}$ [$\sqrt{2}$]

(d) $a_n = \alpha^{n^2}$, $(0 < \alpha < 1)$ [$+\infty$]

(e) $a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}$, $(a, b > 0)$ [$\min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$]

(f) $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$ [1]

(g) $a_n = \frac{1}{a^n+b^n}$, $(a, b > 0)$ [$\max(a, b)$]

(h) $a_n = (-1)^{n-1} \left\{ \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right\}^p$ [2^p]

(i) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ $[\,1\,]$

(j) $a_n = \frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdot\ldots\cdot(b+n-1)}{n!\,c(c+1)\cdot\ldots\cdot(c+n-1)}$, $c \notin \mathbf{Z} - \mathbf{N}$ $[\,1\,]$

2. Najděte poloměr konvergence následující řady.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[\,3+(-1)^n]^n}{n} x^n$ $\left[\,\frac{1}{4}\,\right]$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n\, x^{3n}$ $\left[\,\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\,\right]$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n} x^{2n}$ $\left[\,\sqrt{\frac{e}{2}}\,\right]$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n(n^3+2)\,x^{2n}$ $\left[\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\right]$

3. Najděte obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, je-li

(a) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$; $x_0 = 1$ $[\,\langle 0,2\rangle\,]$

(b) $a_n = \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$; $x_0 = -1$ $\left[\,\left(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)\,\right]$

(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$; $x_0 = 0$ $[\,(-1,1\rangle\,]$

(d) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}\,3^n}$; $x_0 = 1$ $[\,\langle -1,4)\,]$

(e) $a_n = \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}$; $x_0 = -2$ $[\,(-3,-1)\,]$

(f) $a_n = \frac{5^n+(-3)^n}{n+1}$; $x_0 = 0$ $\left[\,\left\langle -\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)\,\right]$

(g) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln\frac{3n-2}{3n+2}$; $x_0 = -1$ $[\,\langle -2,0\rangle\,]$

(h) $a_n = \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}$; $x_0 = -3$ $[\,\langle -4,-2\rangle\,]$

(i) $a_n = \sqrt[n]{a}-1$; $x_0 = 0$; $a>0$, $a \neq 1$ $[\,\langle -1,1)\,]$

(j) $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}}$; $x_0 = 1$ $[\,\langle 0,2\rangle\,]$

4. Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninnou řadu, je-li

(a) $f(x) = e^{-x^2}$ $\left[\,\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}\ ;\ x \in \mathbf{R}\,\right]$

(b) $f(x) = \cos^2 x$ $\left[\,1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}\ ;\ x \in \mathbf{R}\,\right]$

(c) $f(x) = \sin 3x\,\sin 5x$ $\left[\,\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n-1}}{(2n)!}\left(1-2^{4n}\right) x^{2n}\ ;\ x \in \mathbf{R}\,\right]$

(d) $f(x) = \sin^3 x$ $\left[\,\frac{3}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!} x^{2n+1}\ ;\ x \in \mathbf{R}\,\right]$

(e) $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$ $\left[\,\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)x^{n+2}\ ;\ x \in (-1,1)\,\right]$

(f) $f(x) = \frac{5x-4}{x+2}$ $\left[\,-2+7\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} x^n\ ;\ x \in (-2,2)\,\right]$

(g) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$ $\left[\,-\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n\, 3^{n+1}}{3^{n+1}} x^n\ ;\ x \in (-1,1)\,\right]$

(h) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ ;\ x\in(-1,1)\right]$

(i) $f(x)=\ln\frac{3-2x}{2+3x}$ $\left[\ln\frac{3}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\frac{x^n}{n}\ ;\ x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\rangle\right]$

(j) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\ ;\ x\in(-1,1)\right]$

(k) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ $\left[1+\frac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}\ ;\ x\in\langle-1,1\rangle\right]$

(l) $f(x)=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\ ;\ x\in(-1,1)\right]$

(m) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ $\left[x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}\ ;\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$

(n) $f(x)=(1+x^2)\mathrm{arctg}\,x$ $\left[x+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}\ ;\ x\in\langle-1,1\rangle\right]$

5. Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninnou řadu, je-li

(a) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ $\left[x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ ;\ x\in\langle-1,1\rangle\right]$

(b) $f(x)=\arcsin x$ $\left[x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ ;\ x\in\langle-1,1\rangle\right]$

(c) $f(x)=\mathrm{arctg}\,\frac{x+3}{x-3}$ $\left[-\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ ;\ x\in\langle-3,3\rangle\right]$

(d) $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$

$\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ ,\ \text{kde}\ a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right\}\ ;\ |\,x\,|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

(e) $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$ $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}\ ;\ x\in(-1,1)\right]$

(f) $f(x)=\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\cdot\cos n\alpha\ ;\ x\in(-1,1)\right]$

(g) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\ ;\ x\in(-1,1)\right]$

(h) $f(x)=x\,\mathrm{arctg}\,x-\ln\sqrt{1+x^2}$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}\ ;\ x\in\langle-1,1\rangle\right]$

(i) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ $\left[1+\frac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1};\ ;\ x\in\langle-1,1\rangle\right]$

(j) $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\ ;\ x\in(-1,1)\right]$

(k) $f(x)=\frac{e^x}{1-x}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot x^n\ ;\ x\in(-1,1)\right]$

(l) $f(x)=\mathrm{arctg}^2x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}\ ;\ x\in\langle-1,1\rangle\right]$

(m) $f(x)=e^x\sin x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\ ;\ x\in\mathbf{R}\right]$

(n) $f(x)=e^x\cos x$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\ ;\ x\in\mathbf{R}\right]$

(o) $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}\,(n!)^2}{(2n+2)!}\, x^{2n}\ ;\ x \in \langle -1, 1\rangle\right]$

6. Vypočtěte následující integrály.

(a) $\int\limits_0^x e^{-t^2}\, dt$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\, x^{2n+1}\ ;\ x \in \mathbf{R}\right]$

(b) $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}\, x^{2n+1}\ ;\ x \in \mathbf{R}\right]$

(c) $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left[x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(4n+1)(2n)!!}\, x^{4n+1}\ ;\ x \in (-1, 1)\right]$

(d) $\int\limits_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$ $\left[\frac{x^3}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+3)(2n)!!}\, x^{2n+3}\ ;\ x \in \langle -1, 1\rangle\right]$

7. Sečtěte následující řady.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!}$ $[\, x\ ;\ x \in (0, +\infty)\,]$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^n x}{2^n\, n!}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\ ;\ x \in (0, +\infty)\right]$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\left[\ln \frac{1}{1-x}\ ;\ x \in \langle -1, 1)\right]$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, x^{n+1}$ $\left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\ ;\ x \in (-1, 1)\right]$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$ $\left[\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\ ;\ x \in \langle -1, 1\rangle\right]$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+2)\, x^n$ $\left[\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}\ ;\ x \in (-1, 1)\right]$

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{n!}\, x^{3n}$ $\left[(1+3x^2)e^{x^3}\ ;\ x \in \mathbf{R}\right]$

(h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{(2n)!}\, x^{2n}$ $\left[\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\cos x - \frac{x}{2}\sin x\ ;\ x \in \mathbf{R}\right]$

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n\, n!}\, x^n$ $\left[\left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1\right) e^{\frac{x}{2}}\ ;\ x \in \mathbf{R}\right]$

7.6.3 Fourierovy řady.

1. Najděte Fourierovu řadu funkcí $f_n(x) = \sin^n x$ a $g_n(x) = \cos^n x$ pro $n = 2, 3, 4, 5$.

$[\, f_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\ ;\ g_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\ ;\ f_3(x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\ ;$
$g_3(x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x\ ; f_4(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\ ;\ g_4(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\ ;$
$f_5(x) = -\frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{16}\sin 3x - \frac{1}{16}\sin 5x\ ;\ g_5(x) = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x\,]$

2. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, je-li

(a) $f(x) = x$ $\left[2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}\right]$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{pro} \quad -\pi \le x \le 0 \end{cases}$ $\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right]$

(c) $f(x)=|\,x\,|$; výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

$$\left[\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\ ;\ \frac{\pi^2}{8}\right]$$

(d) $f(x)=\pi^2-x^2$; výsledku využijte k sečtení řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$$\left[\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx\ ;\ \frac{\pi^2}{6}\ ,\ \frac{\pi^2}{12}\right]$$

(e) $f(x)=\operatorname{sgn} x$; výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\left[\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$

(f) $f(x)=\sin ax$, $a\notin\mathbf{Z}$ $\left[\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2}\right]$

(g) $f(x)=\cos ax$, $a\notin\mathbf{Z}$ $\left[\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left\{\frac{1}{2a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\right\}\right]$

(h) $f(x)=e^{ax}$, $a\neq 0$ $\left[\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\left\{\frac{1}{2a}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\left(a\cos nx-n\sin nx\right)\right\}\right]$

(i) $f(x)=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$, $|\,q\,|<1$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx\ ;\ \text{zaveďte}\ e^{ix}=z\right]$

3. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

(a) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$; $x\in(0,2\pi)$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\right]$

(b) $f(x)=x$; $x\in(a,a+2l)$ $\left[a+1+\frac{2l}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right]$

(c) $f(x)=x^2$; $x\in(0,2\pi)$ $\left[\frac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\right]$

(d) $f(x)=e^{ax}$; $x\in(-h,h)$ $\left[2\operatorname{sh}ah\left\{\frac{1}{2ah}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos\frac{n\pi x}{h}-n\sin\frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2+(\pi n)^2}\right\}\right]$

(e) $f(x)=x\cos x$; $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $\left[\frac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx\right]$

(f) $f(x)=e^x-1$; $x\in(0,2\pi)$ $\left[\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right\}-1\right]$

4. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

(a) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$; $x\in(0,\pi)$ (kosinová řada) $\left[\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right]$

(b) $f(x)=x^2$; $x\in(0,\pi)$ (sinová řada) $\left[\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^2}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin nx\right]$

(c) $f(x)=\sin ax$, $a\in\mathbf{Z}$; $x\in(0,\pi)$ (kosinová řada)

$$\left[\frac{4a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{a^2-(2n+1)^2}\ \text{pro}\ a\ \text{sudé}\ ;\quad \frac{4a}{\pi}\left\{\frac{1}{2a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{a^2-4n^2}\right\}\ \text{pro}\ a\ \text{liché}\right]$$

(d) $f(x)=\cos ax$, $a\in\mathbf{Z}$; $x\in(0,\pi)$ (sinová řada)

$$\left[-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{a^2-(2n+1)^2}\ \text{pro}\ a\ \text{sudé}\ ;\quad -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{a^2-4n^2}\ \text{pro}\ a\ \text{liché}\right]$$

(e) $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (podle soustavy) $\alpha)$ $\{\cos(2n-1)x\}$, $n \in \mathbf{N}$
$\beta)$ $\{\sin(2n-1)x\}$, $n \in \mathbf{N}$

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha) & -2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left\{1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right\}\cos(2n-1)x \\ \beta) & 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left\{(-1)^n + \frac{4}{2n-1}\right\}\sin(2n-1)x \end{array}\right]$$

5. Integrací Fourierova rozvoje funkce $f(x) = x$ najděte postupně rozvoje funkcí

$$x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5 \quad \text{pro} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

$$\Big[x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\ ;\ x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}\ ;\ x^3 \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6-\pi^2n^2}{n^3}\sin nx\ ;$$
$$x^4 \sim \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6-\pi^2n^2}{n^4}\cos nx\ ;\ x^5 \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{120-20\pi^2n^2+\pi^4n^4}{n^5}\sin nx\Big]$$