Metrické prostory a Lebesgueův integrál

Kubr Milan

5. března 2007

Obsah

Kapitola 1

Metrické prostory.

1.1 Základní vlastnosti.

Definice: Množinu $\mathbf{X}$ nazveme metrickým prostorem, je-li na kartézském součinu $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ definována reálná funkce $\mathbf{d}$ s následujícími vlastnostmi:
1. $\mathbf{d}(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in \mathbf{X}$; $\mathbf{d}(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$.
2. $\mathbf{d}(y,x) = \mathbf{d}(x,y) \quad \forall\, x,y \in \mathbf{X}$.
3. $\mathbf{d}(x,z) \leq \mathbf{d}(x,y) + \mathbf{d}(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbf{X}$ (trojúhelníková nerovnost).
Funkci $\mathbf{d}$ nazýváme metrikou a metrický prostor $\mathbf{X}$ značíme též $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$.

Příklady: 1. Eukleidovský prostor $\mathbf{R}^n$ je množina uspořádaných n-tic reálných čísel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s metrikou

$$\mathbf{d}(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Analogicky je definován prostor $\mathbf{C}^n$, kde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $x_j \in \mathbf{C}$.

2. Prostory $\mathbf{l}_p^n$ a $\mathbf{l}_\infty^n$ tvoří množina všech uspořádaných n-tic reálných nebo komplexních čísel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s metrikou

$$\mathbf{d}_p(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} , \; p \geq 1; \; \mathbf{d}_\infty(x,y) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|.$$

3. Označme $C(a,b)$ množinu všech spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ s metrikou

$$\mathbf{d}(f,g) = \max_{t \in \langle a,b \rangle} |f(t) - g(t)|; \; f,g \in C(a,b).$$

4. Prostor $\mathbf{s}$ je množina všech posloupností reálných nebo komplexních čísel. Je-li $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, potom

$$\mathbf{d}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Poznámka: K ověření axiomů metrického prostoru pro metriku $\mathbf{d}_p(x,y)$ z příkladu 2 budeme potřebovat Minkowského nerovnost, kterou nyní odvodíme.

Lemma: Buďte $a, b > 0,\ p > 1,\ q$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz: Pro $p = 2$ dostaneme známou nerovnost $2ab \le a^2 + b^2$. Je-li $p > 1$ libovolné, uvážíme funkci $\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$ pro $t > 0$. Tato funkce má pro t=1 minimum $\varphi(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (ověřte si detailně) a tedy $1 = \varphi(1) \le \varphi(t) \quad \forall t > 0$. Jestliže položíme $t = a^{\frac{1}{q}} b^{-\frac{1}{p}}$, dostaneme

$$1 \le \frac{a^{\frac{p}{q}} b^{-1}}{p} + \frac{a^{-1} b^{\frac{q}{p}}}{q}$$

a po vynásobení

$$ab \le \frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{p} + \frac{b^{\frac{q}{p}+1}}{q}.$$

Poněvadž platí $1 + \frac{p}{q} = p$, $1 + \frac{q}{p} = q$ (ověřte), plyne odtud tvrzení lemmatu.

Věta: (Hölderova nerovnost)
Buďte $a_1, \dots, a_n,\ \ b_1, \dots, b_n \quad (n \in \mathbf{N})$ nezáporná čísla, $p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Důkaz: Položme $A_k = \frac{a_k}{\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right\}^{\frac{1}{p}}}$, $B_k = \frac{b_k}{\left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i^q \right\}^{\frac{1}{q}}}$. Podle předchozího lemmatu platí

$$A_k B_k \le \frac{A_k^p}{p} + \frac{B_k^q}{q} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

neboli

$$\frac{a_k b_k}{\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q \right\}^{\frac{1}{q}}} \le \frac{a_k^p}{p \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{b_k^q}{q \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}.$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q \right\}^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

a odtud plyne tvrzení.

Věta: (Minkowského nerovnost)
Buďte $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \quad (n \in \mathbf{N})$ nezáporná, $p \ge 1$. Potom platí

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Důkaz: Je-li $p = 1$, je nerovnost zřejmá. Nechť je tedy $p > 1$. Potom můžeme psát

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k + \sum_{k=1}^{n} c_k b_k\,,$$

kde $c_k = (a_k + b_k)^{p-1}$. Podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p \le \left\{\sum_{k=1}^{n} c_k^q\right\}^{\frac{1}{q}} \left[\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right]$$

a odtud

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p}{\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^{q(p-1)}\right\}^{\frac{1}{q}}} \le \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Poněvadž je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, plyne odtud, že $q(p-1) = p$,

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right\}^{1-\frac{1}{q}} \le \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}},$$

což je daná nerovnost.

Poznámka: Hölderova i Minkowského nerovnost platí i pro nekonečné řady nebo integrály. Je však třeba doplnit předpoklady o jejich konvergenci. Tyto skutečnosti později upřesníme, až je budeme používat. Tedy zatím formálně:

Hölderova nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k b_k| \le \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Minkowského nerovnost

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|a_k + b_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\left\{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Definice: Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů metrického prostoru $\mathbf{X}$. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ <u>konverguje k bodu x</u>, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, x) = 0$, nebo stručněji zapsáno $\mathbf{d}(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Poznámka: Ukazuje se, že v prostorech uspořádaných n-tic $[\mathbf{R}^n = \mathbf{l}_2^n, \mathbf{l}_p^n, \mathbf{l}_\infty^n]$ různé předpisy pro metriku neovlivní skutečnost, že nějaká posloupnost bodů konverguje.

Definice: O dvou metrikách $\mathbf{d}$ a $\mathbf{d}'$ na prostoru $\mathbf{X}$ řekneme, že jsou ekvivalentní, jestliže existují konstanty $\alpha, \beta > 0$ tak, že $\forall x, y \in \mathbf{X}$ platí

$$\alpha \mathbf{d}(x, y) \leq \mathbf{d}'(x, y) \leq \beta \mathbf{d}(x, y).$$

Poznámka: Je-li posloupnost $\{x_n\}$ bodů metrického prostoru $\mathbf{X}$ konvergentní v metrice $\mathbf{d}$, je konvergentní i v metrice $\mathbf{d}'$ a obráceně.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $x \in \mathbf{X}$ bod, $\varepsilon > 0$ reálné číslo. Potom ε-okolím bodu x rozumíme množinu

$$S(x; \varepsilon) = \{y \in \mathbf{X}; \mathbf{d}(x, y) < \varepsilon\}.$$

Jsou-li $A, B \subset \mathbf{X}$ dvě neprázdné množiny, pak jejich vzdáleností rozumíme číslo

$$\mathbf{d}(A, B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} \mathbf{d}(x, y).$$

Průměrem množiny A, který budeme značit $\delta(A)$ rozumíme číslo

$$\delta(A) = \sup_{x,\, y \in A} \mathbf{d}(x, y).$$

Je-li $\delta(A) < \infty$, řekneme, že A je omezená množina.

Poznámky: 1. Množinu $S(x; \varepsilon)$ nazýváme také někdy koulí (nebo otevřenou koulí) o středu x a poloměru ε.

2. Místo označení $S(x; \varepsilon)$ se též užívá značení $B(x; \varepsilon)$ nebo $U(x; \varepsilon)$.

Lemma: Sjednocení konečného počtu omezených množin je omezená množina.

Důkaz: Buďte $x, y \in A \cup B$ libovolné dva body, $a \in A$, $b \in B$ pevné body.
Potom platí $\mathbf{d}(x, y) \leq \delta(A)$, je-li $x, y \in A$, $\mathbf{d}(x, y) \leq \delta(B)$, je-li $x, y \in B$.
Pro $x \in A, y \in B$ platí

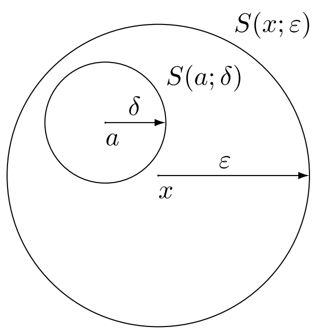
$$\mathbf{d}(x, y) \leq \mathbf{d}(x, a) + \mathbf{d}(a, b) + \mathbf{d}(b, y) \leq \delta(A) + \mathbf{d}(a, b) + \delta(B) < \infty.$$

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor $G, F \subset \mathbf{X}$ jeho podmnožiny. Řekneme, že G je otevřená, jestliže ke každému bodu $x \in G$ existuje okolí $S(x; \varepsilon)$ takové, že $S(x; \varepsilon) \subset G$. O množině F řekneme, že je uzavřená, je-li $\mathbf{X} - F$ otevřená množina.

Poznámky: 1. Platí též obráceně: je-li G otevřená množina, potom je $\mathbf{X} - G$ uzavřená množina. Skutečně je $\mathbf{X} - (\mathbf{X} - G) = G$ a tedy $\mathbf{X} - G$ je uzavřená množina.

2. Uzavřenost a otevřenost množiny se nevylučují. Existují tedy množiny, které jsou zároveň uzavřené i otevřené. Příkladem je celý prostor $\mathbf{X}$ a prázdná množina $\emptyset$.

Lemma: Množina $S(x;\varepsilon)$ je otevřená.



Důkaz: Buď $a \in S(x;\varepsilon)$. Potom je $\mathbf{d}(x,a) < \varepsilon$ a existuje tedy číslo $\delta > 0$ tak, že $\mathbf{d}(x,a) + \delta < \varepsilon$. Dále platí, že $S(a;\delta) \subset S(x;\varepsilon)$. Skutečně, je-li $y \in S(a;\delta)$, platí $\mathbf{d}(x,y) \leq \mathbf{d}(x,a) + \mathbf{d}(a,y) < \mathbf{d}(x,a) + \delta < \varepsilon$ a $S(x;\varepsilon)$ je otevřená množina.

! Věta: Sjednocení libovolného systému a průnik konečného systému otevřených množin je otevřená množina. Průnik libovolného systému a sjednocení konečného systému uzavřených množin je množina uzavřená.

Důkaz: 1. a) Buď $G_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ systém otevřených množin a $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$. Pak existuje α_0 tak, že $x \in G_{\alpha_0}$ a tedy i

$$S(x;\varepsilon) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$$

pro nějaké $\varepsilon > 0$.

b) Je-li $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} G_j$, pak $x \in G_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$ a tedy existují $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tak, že

$$S(x, \varepsilon_j) \subset G_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Položíme-li $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$, potom $S(x;\varepsilon_0) \subset G_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, tedy

$$S(x;\varepsilon_0) \subset \bigcap_{j=1}^{n} G_j .$$

2. Tvrzení pro uzavřené množiny plyne z de Morganových pravidel. Buďte $F_\alpha \quad (\alpha \in \Lambda)$ uzavřené množiny. Potom jsou $G_\alpha = \mathbf{X} - F_\alpha$ otevřené a platí $F_\alpha = \mathbf{X} - G_\alpha$. Odtud

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \mathbf{X} - \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$$

a vzhledem k otevřenosti množiny $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ dostaneme okamžitě tvrzení. Analogicky platí

$$\bigcup_{j=1}^{n} F_j = \mathbf{X} - \bigcap_{j=1}^{n} G_j .$$

Poznámky: 1. Jestliže uvažujeme spočetné průniky otevřených množin, nemusíme již dostat otevřenou množinu. Analogicky spočetné sjednocení uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Dostáváme další systémy množin t. zv. G_δ a F_σ množiny. Tedy řekneme, že A je množina typu G_δ , je-li

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n ,$$

kde G_n jsou otevřené. Analogicky B je množina typu F_σ , je-li

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n ,$$

kde F_n jsou uzavřené.

2. Předchozí věta dává možnost zavedení obecnější struktury na dané množině $\mathbf{X}$, než je metrika, a sice topologie. Topologií τ na množině $\mathbf{X}$ budeme rozumět takový systém podmnožin $\mathbf{X}$, který má první vlastnost z předchozí věty; tedy sjednocení libovolného systému množin z τ a průnik libovolného konečného systému množin z τ je opět množina z τ. Tyto množiny budeme nazývat otevřené a dvojici $(\mathbf{X}, \tau)$ nazveme topologickým prostorem.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $A \subset \mathbf{X}$ podmnožina. Řekneme, že $x \in A$ je vnitřním bodem A , jestliže existuje takové okolí $S(x;\varepsilon)$, že

$$S(x;\varepsilon) \subset A.$$

Množinu všech vnitřních bodů množiny A nazýváme jejím vnitřkem a označíme $\operatorname{Int} A$. Uzávěrem množiny A nazýváme množinu všech bodů $x \in \mathbf{X}$ takových, že

$$\mathbf{d}(x, A) = 0$$

a značíme $\overline{A}$. Hranicí množiny A nazveme množinu

$$F(A) = \partial(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}.$$

Věta: $\operatorname{Int} A$ je otevřená množina. Množina G je otevřená právě když $G = \operatorname{Int} G$.

Důkaz: Prvá část tvrzení je zřejmá.

a) Buď G otevřená množina. Je zřejmé, že $\operatorname{Int} G \subset G$. Dále je každý bod $x \in G$ vnitřním bodem G, neboli

$$G \subset \operatorname{Int} G.$$

b) Nechť obráceně $G \subset \operatorname{Int} G$. Potom s každým bodem $x \in G$ patří do G i jisté okolí $S(x;\varepsilon)$ a to je charakterizace otevřené množiny.

Věta: $\overline{A}$ je uzavřená množina. Množina F je uzavřená právě když $\overline{F} = F$.

Důkaz: Buď $G = \mathbf{X} - \overline{A}$ a $x \in G$ libovolný bod. Potom je $\mathbf{d}(x, A) > 0$ a na příklad

$$S(x; \frac{1}{2}\mathbf{d}(x, A)) \subset G .$$

Množina G je tedy otevřená a $\overline{A}$ je uzavřená. Je zřejmé, že $F \subset \overline{F}$.

a) Je-li $F = \overline{F}$, pak je F uzavřená.

b) Obráceně kdyby F byla uzavřená a existovalo $x \in \overline{F} - F$, je $x \in \mathbf{X} - F$ a existuje okolí

$$S(x;\varepsilon) \subset \mathbf{X} - F.$$

Potom ale nemůže být $\mathbf{d}(x, F) = 0$ a to je spor s definicí uzávěru množiny.

Věta: Buď $x \in \mathbf{X}$, $A \subset \mathbf{X}$ podmnožina. Potom $x \in \overline{A}$ právě když existuje posloupnost

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in A \ \text{ tak, že } \ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Důkaz: a) Je-li $\{x_n\}$ posloupnost bodů z věty, potom $\mathbf{d}(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ a tedy $\mathbf{d}(x, A) = 0$.

b) Je-li $\mathbf{d}(x, A) = 0$, potom ke každému $n \in \mathbf{N}$ existuje takové $x_n \in A$, že $\mathbf{d}(x_n, x) < \frac{1}{n}$, neboli $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $A \subset \mathbf{X}$ podmnožina. Řekneme, že bod $x \in \mathbf{X}$ je hromadným bodem množiny A, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A. Bod množiny A, který není jeho hromadným bodem, nazýváme izolovaným bodem.

Věta: Bod $x \in \mathbf{X}$ je hromadným bodem množiny $A \subset \mathbf{X}$ právě když existuje posloupnost bodů

$$x_n \in A,\ x_n \neq x \text{ tak, že } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Důkaz: a) Buď $x \in \mathbf{X}$ hromadný bod množiny A. Potom koule $S(x; \frac{1}{n})$ obsahuje nekonečně mnoho bodů A a zvolme

$$x_n \in S(x; \frac{1}{n}).$$

Tím dostaneme požadovanou posloupnost.

b) Je-li obráceně

$$x_n \in A,\ x_n \neq x,\ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x,$$

potom je zřejmě $x \in \mathbf{X}$ hromadný bod A.

Poznámka: Z předchozího plyne, že množina A je uzavřená právě když obsahuje všechny své hromadné body.

1.2 Úplné, separabilní a kompaktní prostory.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $A \subset \mathbf{X}$ podmnožina. Řekneme, že A je hustá v $\mathbf{X}$, je-li $\overline{A} = \mathbf{X}$.

Příklad: Buď $\mathbf{X} = \mathbf{R}$, $A = \mathbf{Q}$ (racionální čísla). Potom $\overline{A} = \mathbf{R}$. Existují však i jiné husté podmnožiny (vlastní). Je-li B množina všech iracionálních čísel, je opět $\overline{B} = \mathbf{R}$. Mezi těmito příklady však existuje podstatný rozdíl, který bude v dalším důležitý. Množina A je spočetná, zatímco B není.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů prostoru $\mathbf{X}$ je cauchyovská nebo fundamentální, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna $n, m \geq n_0$ platí $\mathbf{d}(x_n, x_m) < \varepsilon$. Prostor $\mathbf{X}$ nazveme úplným, jestliže každá cauchyovská posloupnost bodů prostoru $\mathbf{X}$ je konvergentní v $\mathbf{X}$.

Poznámka: Není těžké ukázat, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská, obrácené tvrzení však neplatí.

Příklad: Prostor $\mathbf{R}^n$ je úplný.

Důkaz: Buď $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $\mathbf{R}^n$, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. Je-li

$$\lim_{k,l\to\infty} \mathbf{d}(x^{(k)}, x^{(l)}) = 0, \text{ tedy } \lim_{k,l\to\infty} \{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i^{(l)})^2\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

potom je $\lim\limits_{k,l\to\infty} |x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Tedy posloupnost $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská pro $i = 1, 2, \dots, n$ a tudíž konvergentní. Označme $x_i = \lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nyní je zřejmé, že $x = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$.

Věta: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor a nechť $A \subset \mathbf{X}$ je úplná množina. Potom je A uzavřená.

Důkaz: Buď $a \in \overline{A}$. Potom existuje posloupnost

$$x_n \in A \text{ tak, že } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Poněvadž je A úplná množina a $\{x_n\}$ cauchyovská, musí být $a \in A$, tedy $\overline{A} = A$.

Poznámka: Předchozí věta ukazuje, že úplnost množiny je vlastnost nezávislá na prostoru, ve kterém leží. Obrácené tvrzení ale platí pouze v úplných prostorech.

Věta: Buď $\mathbf{X}$ <u>úplný</u> metrický prostor, $A \subset \mathbf{X}$. Potom je A uzavřená právě když je úplná.

Důkaz: a) Je-li A úplná, je podle předchozí věty uzavřená.
b) Buď A uzavřená, tedy

$$\overline{A} = A \text{ a } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ cauchyovská posloupnost, } x_n \in A.$$

Poněvadž $\mathbf{X}$ je úplný prostor, existuje $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $a \in \mathbf{X}$. Z uzavřenosti A plyne, že $a \in A$.

Definice: Metrický prostor $\mathbf{X}$ nazveme <u>separabilní</u>, jestliže v $\mathbf{X}$ existuje hustá spočetná podmnožina.

Příklad: Prostor $\mathbf{R}^n$ je separabilní.

Důkaz: Uvažme množinu všech bodů tvaru $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, kde $r_i \in \mathbf{Q}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Tato množina je spočetná (dokažte) a tvoří hustou podmnožinu.

Věta: Každá podmnožina separabilního metrického prostoru $\mathbf{X}$ je separabilní.

Důkaz: Buď $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$, $A \subset \mathbf{X}$ hustá spočetná podmnožina, neboli

$$\overline{A} = \mathbf{X}, \ A = \{x_1, x_2, \dots\}.$$

Označme

$$S_{m,n} = S(x_m; \frac{1}{n}) \text{ pro } m, n = 1, 2, \dots.$$

Tento systém je spočetný. Je-li $\mathbf{Y} \cap S_{m,n} \neq \emptyset$, zvolme libovolně bod $\xi_{m,n} \in \mathbf{Y} \cap S_{m,n}$. Množina B všech těchto bodů je spočetná a ukážeme, že je hustá v $\mathbf{Y}$. Buď $x \in \mathbf{Y}$ libovolný bod a $n \in \mathbf{N}$ libovolné. Potom existuje x_m tak, že

$$\mathbf{d}(x, x_m) < \frac{1}{n}, \text{ tedy } x \in \mathbf{Y} \cap S_{m,n}.$$

Pro příslušné $\xi_{m,n}$ platí $\mathbf{d}(x_m, \xi_{m,n}) < \frac{1}{n}$ a odtud

$$\mathbf{d}(x, \xi_{m,n}) \leq \mathbf{d}(x, x_m) + \mathbf{d}(x_m, \xi_{m,n}) < \frac{2}{n}.$$

Lemma: Nechť množiny G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ tvoří disjunktní systém neprázdných otevřených množin v separabilním prostoru $\mathbf{X}$. Potom je Λ spočetná množina.

Důkaz: Buď A hustá spočetná podmnožina $\mathbf{X}$. Každému $\lambda \in \Lambda$ přiřaďme bod $x_\lambda \in A$ tak, že $x_\lambda \in G_\lambda$. Tyto body tvoří spočetnou množinu $B \subset A$. Je-li nyní $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak nutně $G_{\lambda_1} \neq G_{\lambda_2}$. Kdyby bylo $x_{\lambda_1} = x_{\lambda_2}$, potom $G_{\lambda_1} \cap G_{\lambda_2} \neq \emptyset$ a tedy $\lambda_1 = \lambda_2$. Tím dostaneme prosté zobrazení Λ na B a Λ je spočetná.

Definice: Buď A množina. Řekneme, že systém množin $B_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ tvoří pokrytí A, jestliže

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda.$$

Věta: (Lindelöfova pokrývací věta)
Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ separabilní podmnožina. Buďte $G_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ otevřené množiny pokrývající $\mathbf{Y}$. Potom existuje spočetná část

$$\Sigma \subset \Lambda \text{ tak, že } \mathbf{Y} \subset \bigcup_{\lambda \in \Sigma} G_\lambda.$$

Důkaz: Buď $A \subset \mathbf{Y}$ hustá spočetná podmnožina tvořená body $x_1, x_2, \dots$ a uvažme koule

$$S_{m,n} = S(x_m, \frac{1}{n}) \ (m, n = 1, 2, \dots).$$

Tyto koule tvoří spočetný systém. Je-li $x \in \mathbf{Y}$, pak existuje $S_{m,n}$ tak, že $x \in S_{m,n} \subset G_\lambda$ pro nějaké λ (G_λ jsou otevřené). Označme odpovídající množinu G_λ jako $G_{m,n}$. Poněvadž takto vybrané koule pokrývají $\mathbf{Y}$, stačí tedy vybrat příslušné množiny $G_{m,n}$ z daného pokrytí tak, že $S_{m,n} \subset G_{m,n}$.

Poznámka: Předchozí věta je topologická charakterizace separabilního prostoru. Tedy separabilní topologický prostor je takový, že z každého jeho pokrytí otevřenými množinami je možné vybrat spočetné pokrytí.

Definice: Metrický prostor $\mathbf{X}$ nazveme kompaktní, jestliže každá posloupnost bodů $\mathbf{X}$ obsahuje vybranou posloupnost konvergentní v $\mathbf{X}$.

Příklad: Libovolný uzavřený interval $\langle a, b \rangle \subset \mathbf{R}$ je kompaktní. Analogicky každý interval

$$I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$$

je kompaktní v $\mathbf{R}^n$.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor. Řekneme, že množina $K(\varepsilon) \subset \mathbf{X}$ tvoří ε-síť prostoru $\mathbf{X}$, je-li

$$\mathbf{d}(x, K(\varepsilon)) < \varepsilon \text{ pro každé } x \in \mathbf{X}.$$

O množině $A \subset \mathbf{X}$ řekneme, že je <u>totálně omezená</u>, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje <u>konečná</u> ε-síť A.

Lemma: Každá totálně omezená podmnožina metrického prostoru je omezená.

Důkaz: Buď $A \subset \mathbf{X}$ totálně omezená. Pak existuje konečná 1-síť

$$K(1) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset A$$

tak, že $\mathbf{d}(x, K(1)) < 1 \ \forall x \in A$. Nyní platí

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{k} S(a_j; 1)$$

a sjednocení omezených množin je omezená množina.

Lemma: Každý totálně omezený metrický prostor je separabilní.

Důkaz: Buď $\mathbf{X}$ totálně omezený. Potom ke každému $n \in \mathbf{N}$ existuje konečná $\frac{1}{n}$-síť $K(\frac{1}{n})$ a označme $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K(\frac{1}{n})$. A je spočetná a zřejmě $\overline{A} = \mathbf{X}$.

! Věta: Metrický prostor $\mathbf{X}$ je kompaktní právě když je úplný a totálně omezený.

Důkaz: 1. Buď $\mathbf{X}$ kompaktní, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná cauchyovská posloupnost. Ta obsahuje konvergentní podposloupnost a je tedy sama konvergentní. Odtud plyne, že $\mathbf{X}$ je úplný metrický prostor.

Nechť pro nějaké $\varepsilon > 0$ neexistuje konečná ε-síť $\mathbf{X}$. Zvolme libovolně $x_1 \in \mathbf{X}$; potom existuje $x_2 \in \mathbf{X}$ tak, že $\mathbf{d}(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Buď $x_{n+1} \in \mathbf{X}$ takový bod, že $\mathbf{d}(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$ pro $j = 1, 2, \dots, n$. Tím dostáváme posloupnost, ze které nelze vybrat konvergentní podposloupnost a to je spor s kompaktností $\mathbf{X}$.

2. Buď $\mathbf{X}$ úplný a totálně omezený a nechť

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbf{X}$$

je libovolná posloupnost. Poněvadž je $\mathbf{X}$ totálně omezený, existuje konečná 1-síť $\mathbf{X}$ a tedy koule S_1, která obsahuje nekonečně mnoho bodů posloupnosti $\{x_n\}$. Označme ji $\{x_n^{(1)}\}$. Poněvadž S_1 je totálně omezená, existuje konečná $\frac{1}{2}$-síť S_1 a tedy koule S_2, která obsahuje nekonečně mnoho bodů $\{x_n^{(1)}\}$. Označme ji $\{x_n^{(2)}\}$. Jestliže budeme takto pokračovat dále, sestrojíme posloupnost $\{x_n^{(k)}\}$, která leží v kouli S_k o poloměru $\frac{1}{k}$. Hledaná vybraná posloupnost je nyní následující:

$$\{x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots\},$$

která je zřejmě cauchyovská (odvoďte detailně) a tedy konvergentní, poněvadž $\mathbf{X}$ je úplný prostor.

Důsledek: Množina $K \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní právě když je omezená a uzavřená.

Důkaz: Poněvadž je $\mathbf{R}^n$ úplný prostor, je uzavřená podmnožina úplná. Další část plyne z toho, že každá omezená podmnožina $\mathbf{R}^n$ je totálně omezená. To je ponecháno jako cvičení.

Věta: Buďte $X_1, X_2, \dots$ neprázdné a kompaktní množiny a nechť

$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots . \text{ Potom je } \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset .$$

Důkaz: Zvolme $x_n \in X_n \quad (n = 1, 2, \dots)$. Pak existuje vybraná posloupnost

$$\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \text{ tak, že } x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X_1$$

(X_1 je kompaktní). Je-li nyní n_0 libovolné, pak pro $k_n \geq n_0$ platí $x_{k_n} \in X_{k_n} \subset X_{n_0}$ a tedy $x \in X_{n_0}$. Poněvadž n_0 bylo libovolné, je $x \in X_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$, tedy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$.

Příklad: Jestliže budeme v předchozí větě předpokládat pouze uzavřenost, věta již neplatí. Buď $X_n = \langle n, \infty)$. Potom je

$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots , \text{ ale } \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset.$$

Věta: (Borelova pokrývací věta)
Buď $\mathbf{X}$ kompaktní metrický prostor, $G_\lambda \ (\lambda \in \Lambda)$ pokrytí otevřenými množinami. Potom existuje konečná část $\Sigma \subset \Lambda$ tak, že

$$\mathbf{X} = \bigcup_{\lambda \in \Sigma} G_\lambda .$$

Důkaz: Poněvadž $\mathbf{X}$ je separabilní, je podle Lindelöfovy věty možno z daného pokrytí vybrat spočetné pokrytí. Označme je

$$H_1, H_2, \cdots \ , \text{ tedy } \bigcup_{p=1}^{\infty} H_p = \mathbf{X} .$$

Buďte

$$K_n = H_1 \cup \cdots \cup H_n, \quad L_n = \mathbf{X} - K_n .$$

Potom jsou množiny L_n uzavřené a tedy kompaktní. Dále

$$L_1 \supset L_2 \supset \cdots \text{ a přitom } \bigcap_{p=1}^{\infty} L_p = \mathbf{X} - \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = \mathbf{X} - \bigcup_{p=1}^{\infty} H_p = \emptyset .$$

Podle předchozí věty musí tedy existovat n_0 tak, že $L_{n_0} = \emptyset$ a tedy $\mathbf{X} = \bigcup_{p=1}^{n_0} H_p$.

Poznámka: Borelova pokrývací věta je topologická charakterizace kompaktnosti. Tedy topologický prostor je kompaktní, jestliže z každého otevřeného pokrytí je možno vybrat konečné pokrytí.

1.3 Zobrazení metrických prostorů.

Definice: Buďte $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ a $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\varrho})$ dva metrické prostory, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité v bodě $x_0 \in \mathbf{X}$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že jakmile $\mathbf{d}(x, x_0) < \delta$, potom $\boldsymbol{\varrho}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Řekneme, že f je spojité na $\mathbf{X}$, je-li spojité v každém bodě $x \in \mathbf{X}$.

Poznámka: Předchozí definice říká, že ke každému okolí

$$V = \{y \in \mathbf{Y}; \boldsymbol{\varrho}(y, f(x_0)) < \varepsilon\} \text{ bodu } f(x_0)$$

existuje okolí

$$U = \{x \in \mathbf{X}; \mathbf{d}(x, x_0) < \delta\} \text{ bodu } x_0$$

tak, že $f(U) \subset V$. Tím dostaneme ekvivalentní formulaci spojitosti f. Jestliže navíc přijmeme dohodu, že okolím bodu v topologickém prostoru budeme rozumět libovolnou otevřenou množinu, obsahující x, dostaneme topologickou charakterizaci spojitosti.

Věta: Zobrazení $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ je spojité v bodě $x_0 \in \mathbf{X}$ právě když ke každému okolí V bodu $f(x_0)$ existuje okolí U bodu x_0 tak, že $f(U) \subset V$.

Poznámka: V metrických prostorech je spojitost v bodě též možno formulovat pomocí posloupností.

Věta: Zobrazení $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ je spojité v bodě $x_0 \in \mathbf{X}$ právě když pro každou posloupnost

$$x_n \in \mathbf{X}, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \text{ platí } f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)\,.$$

Důkaz: a) Buď f spojité v bodě $x_0 \in \mathbf{X}$, $\{x_n\}$ $(x_n \in \mathbf{X})$ taková posloupnost, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že jakmile

$$\mathbf{d}(x, x_0) < \delta, \text{ pak } \boldsymbol{\varrho}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Poněvadž $x_n \to x_0$, existuje index n_0 tak, že pro $\forall n \geq n_0$ platí $\mathbf{d}(x_n, x_0) < \delta$ a tedy

$$\boldsymbol{\varrho}(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon, \text{ neboli } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\,.$$

b) Nechť f není spojité v bodě x_0. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že ke každému $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$ existuje $x_n \in \mathbf{X}$ tak, že

$$\mathbf{d}(x_n, x_0) < \frac{1}{n}, \text{ ale } \boldsymbol{\varrho}(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon\,.$$

Tedy posloupnost $\{f(x_n)\}$ nemůže konvergovat k $f(x_0)$.

Poznámka: V dalším zformulujeme podmínky spojitosti na celém prostoru $\mathbf{X}$.

Definice: Buď f spojité zobrazení metrického prostoru $\mathbf{X}$ na metrický prostor $\mathbf{Y}$. Je-li zobrazení f^{-1} (pokud existuje) spojité, řekneme, že f je <u>homeomorfní</u> nebo topologické zobrazení. O prostorech $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ pak řekneme, že jsou homeomorfní.

! Věta: Buďte $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ metrické prostory, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ zobrazení. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní.

a) f je spojité na $\mathbf{X}$.

b) Je-li $G \subset \mathbf{Y}$ libovolná otevřená množina, pak je $f^{-1}(G)$ otevřená v $\mathbf{X}$. Tedy vzor každé otevřené množiny je množina otevřená.

c) Je-li $F \subset \mathbf{Y}$ uzavřená množina, je $f^{-1}(F)$ uzavřená v $\mathbf{X}$. Tedy vzor každé uzavřené množiny je množina uzavřená.

Důkaz: 1. Buď f spojité na $\mathbf{X}$, $G \subset \mathbf{Y}$ libovolná otevřená množina, $f(x) \in G$, V okolí bodu $f(x)$ takové, že $V \subset G$. Potom existuje okolí U bodu x tak, že

$$f(U) \subset V \subset G, \text{ tedy } U \subset f^{-1}(G)$$

a odtud plyne, že $f^{-1}(G)$ je otevřená množina.

2. Nechť pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbf{Y}$ je $f^{-1}(G)$ otevřená v $\mathbf{X}$ a buď V okolí bodu $f(x)$. Potom je $f^{-1}(V)$ otevřená množina a položme $U = f^{-1}(V)$. Platí tedy $f(U) \subset V$, což jsme chtěli dokázat.

3) Ekvivalence $b) \Leftrightarrow c)$ plyne okamžitě ze vztahu

$$f^{-1}(\mathbf{Y} - G) = \mathbf{X} - f^{-1}(G)\,.$$

Poznámka: Vlastnost b) z předchozí věty je topologická charakterizace spojitého zobrazení a slouží v obecném topologickém prostoru za definici spojitosti.

! Věta: Buďte $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ metrické prostory, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ spojité zobrazení a nechť je $\mathbf{X}$ kompaktní. Potom platí.
a) $f(\mathbf{X})$ je kompaktní.
b) Je-li f prosté, je i f^{-1} spojité, tedy f je homeomorfní zobrazení.

Důkaz: a) Nechť $y_n \in f(\mathbf{X})$ je libovolná posloupnost. Potom existují $x_n \in \mathbf{X}$ tak, že $f(x_n) = y_n$. Posloupnost $\{x_n\}$ obsahuje konvergentní podposloupnost $x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in \mathbf{X}$. Ze spojitosti f plyne, že

$$y_{k_n} = f(x_{k_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

a $f(\mathbf{X})$ je kompaktní.

b) Je $f^{-1} : f(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}$ a buď $F \subset \mathbf{X}$ libovolná uzavřená množina (tedy kompaktní). Potom je $[f^{-1}]^{-1}(F) = f(F)$ a poněvadž je $f(F)$ kompaktní, je automaticky uzavřená. Tedy vzor každé uzavřené množiny je množina uzavřená a f^{-1} je spojité.

Důsledek: Buď f spojité zobrazení metrického prostoru $\mathbf{X}$ do $\mathbf{R}$. Je-li $\mathbf{X}$ kompaktní, pak $f(\mathbf{X})$ obsahuje nejmenší a největší číslo. Jinými slovy každá spojitá reálná funkce na kompaktním metrickém prostoru nabývá své nejmenší a největší hodnoty.

Důkaz: Buď

$$\alpha = \inf f(\mathbf{X}),\quad \beta = \sup f(\mathbf{X})\,.$$

Poněvadž je $\boldsymbol{\varrho}(f(\mathbf{X}), \alpha) = 0$, platí

$$\alpha \in \overline{f(\mathbf{X})} = f(\mathbf{X})\,.$$

Poznámka: V dalším se budeme zabývat otázkou vnoření metrického prostoru do úplného metrického prostoru.

Definice: Buď f zobrazení metrického prostoru $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ na metrický prostor $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\varrho})$. Řekneme, že f je <u>izometrické zobrazení</u> nebo izometrie, jestliže pro všechna $x, y \in \mathbf{X}$ platí

$$\mathbf{d}(x, y) = \boldsymbol{\varrho}(f(x), f(y))\,.$$

Poznámka: Je zřejmé, že každá izometrie je prosté zobrazení. Jednoduché ukázky izometrií jsou na příklad shodná zobrazení známá z elementární geometrie.

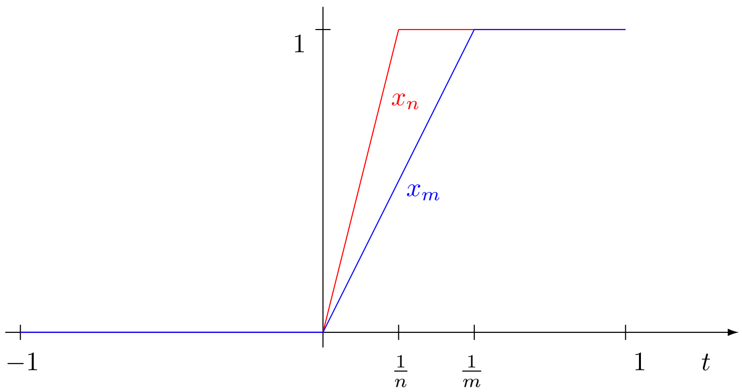
Definice: Buď $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ libovolný metrický prostor. <u>Úplný</u> metrický prostor $(\mathbf{X}^*, \mathbf{d}^*)$ nazveme <u>zúplněním</u> nebo úplným obalem prostoru $\mathbf{X}$, jestliže platí

a) $\mathbf{X}$ je izometrický s podprostorem $\mathbf{X}_0$ prostoru $\mathbf{X}^*$.

b) $\overline{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}^*$, tedy $\mathbf{X}_0$ je hustý v $\mathbf{X}^*$.

Příklad: Buď $\mathbf{X} = C(a,b)$ s metrikou $\mathbf{d}(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)| dt$ a položme $a = -1, b = 1$. Ukážeme, že $\mathbf{X}$ není v této metrice úplný prostor. Uvažme posloupnost

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad -1 \le t \le 0\,, \\ nt & \text{pro} \quad 0 < t \le \frac{1}{n}\,, \\ 1 & \text{pro} \quad \frac{1}{n} < t \le 1. \end{cases}$$



Nechť $n > m$. Potom

$$|x_n(t) - x_m(t)| = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad -1 \le t \le 0, \\ (n-m)t & \text{pro} \quad 0 < t \le \frac{1}{n}, \\ 1 - mt & \text{pro} \quad \frac{1}{n} < t \le \frac{1}{m}, \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{m} < t \le 1. \end{cases}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} |x_n(t) - x_m(t)| dt = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Tedy posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, nekonverguje však v prostoru $C(-1,1)$. Je totiž

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t), \text{ kde} \quad x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad -1 \le t \le 0, \\ 1 & \text{pro} \quad 0 < t \le 1. \end{cases}$$

! Věta: Ke každému metrickému prostoru existuje úplný obal. Všechny úplné obaly k danému metrickému prostoru jsou izometrické.

Důkaz: Důkaz věty je konstruktivní, tedy ukazuje, jak úplný obal vypadá a provedeme jej v několika krocích. Buď $\mathbf{X}$ daný metrický prostor.

1. Množinu všech cauchyovských posloupností prostoru $\mathbf{X}$ rozložíme na třídy pomocí ekvivalence. Dvě posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ nazveme ekvivalentní a označíme $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, jestliže $\mathbf{d}(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (Ukažte, že tento vztah ekvivalence je reflexivní, symetrický a transitivní.) Tím se všechny cauchyovské posloupnosti $\mathbf{X}$ rozpadnou na ekvivalentní třídy, které budeme značit

$x^*, y^*, \dots$ a $\mathbf{X}^*$ množinu všech těchto tříd. Dále $x' = \{x, x, \dots\}$, kde $x \in \mathbf{X}$ značíme tak zvané stacionární posloupnosti, nebo přesněji ekvivalentní třídu posloupností, obsahující x'.

2. V $\mathbf{X}^*$ zavedeme metriku

$$\mathbf{d}^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, y_n)\,,$$

kde $\{x_n\} \in\ x^*$ a $\{y_n\} \in y^*$ jsou libovolné cauchyovské posloupnosti. Ukážeme, že $\mathbf{d}^*$ nezávisí na výběru $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ a že tvoří skutečně metriku. Nejdříve však musíme dokázat, že limita na pravé straně existuje. Platí

$$|\mathbf{d}(x_n, y_n) - \mathbf{d}(x_m, y_m)| = |\mathbf{d}(x_n, y_n) - \mathbf{d}(x_n, y_m) + \mathbf{d}(x_n, y_m) - \mathbf{d}(x_m, y_m)| \le$$

$$\le |\mathbf{d}(x_n, y_n) - \mathbf{d}(x_n, y_m)| + |\mathbf{d}(x_n, y_m) - \mathbf{d}(x_m, y_m)| \le \mathbf{d}(y_n, y_m) + \mathbf{d}(x_n, x_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Je totiž

$$\mathbf{d}(x_n, y_n) \le \mathbf{d}(x_n, y_m) + \mathbf{d}(y_m, y_n) \ \text{ a } \ \mathbf{d}(x_n, y_m) \le \mathbf{d}(x_n, x_m) + \mathbf{d}(x_m, y_m)\,.$$

Tedy číselná posloupnost $s_n = \mathbf{d}(x_n, y_n)$ je cauchyovská a existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, y_n)$.

Buďte

$$\{x_n^{(1)}\},\ \{x_n^{(2)}\} \in x^* \quad \text{a} \quad \{y_n^{(1)}\},\ \{y_n^{(2)}\} \in y^*\,.$$

Potom platí

$$|\mathbf{d}(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) - \mathbf{d}(x_n^{(2)}, y_n^{(2)})| \le \mathbf{d}(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) + \mathbf{d}(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a $\mathbf{d}^*$ nezávisí na výběru posloupností $\{x_n\}, \{y_n\}$. Je totiž

$$\mathbf{d}(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) \le \mathbf{d}(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) + \mathbf{d}(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}) + \mathbf{d}(y_n^{(2)}, y_n^{(1)})\,.$$

Pokud se týče ověření axiomů metriky, je zřejmé, že vlastnosti 1. a 2. platí. Ohledně trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{d}(x_n, z_n) \le \mathbf{d}(x_n, y_n) + \mathbf{d}(y_n, x_n)$$

a odtud

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, z_n) \le \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(y_n, z_n)$$

neboli

$$\mathbf{d}^*(x^*, z^*) \le \mathbf{d}^*(x^*, y^*) + \mathbf{d}^*(y^*, z^*)\,.$$

3. Prostor $\mathbf{X}^*$ obsahuje část $\mathbf{X}_0$, která je izometrická s $\mathbf{X}$. Jestliže jako $\mathbf{X_0}$ označíme množinu všech stacionárních posloupností $x' = \{x, x, \dots\}$ pro $x \in \mathbf{X}$, je zřejmé, že

$$\mathbf{d}(x, y) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x, y) = \mathbf{d}^*(x', y')\,.$$

Tedy zobrazení $x \to x'$ je izometrie.

4. $\overline{\mathbf{X}}_\mathbf{0} = \mathbf{X}^*$. Je-li $x^* \in \mathbf{X}^*$ libovolný bod a $\{x_n\} \in x^*$, pak

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \text{ tak, že } \ \forall m, n \ge n_0 \ \text{ je } \ \mathbf{d}(x_n, x_m) < \varepsilon$$

a položme $x' = \{x_{n_0}\}$. Potom platí

$$x' \in \mathbf{X}_0 \ \text{ a } \ \mathbf{d}^*(x^*, x') = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, x_{n_0}) \le \varepsilon$$

a tedy $\overline{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}^*$.

5. $\mathbf{X}^*$ je úplný prostor. Připomeňme nejdříve, že každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ bodů prostoru $\mathbf{X}$ reprezentuje prvek $x^* \in \mathbf{X}^*$, neboli cauchyovská posloupnost $\{x'_n\}$ prvků $x'_n \in \mathbf{X}_0$ konverguje k prvku $x^* \in \mathbf{X}$. Je-li nyní $\{x^*_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná cauchyovská posloupnost bodů $\mathbf{X}^*$, pak

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists x'_n \in \mathbf{X}_0 \text{ tak, že } \mathbf{d}^*(x^*_n, x'_n) < \frac{1}{n} \ \left(\text{je } \overline{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}^*\right).$$

Odtud plyne, že $\{x^*_n\}$ konverguje a $\lim\limits_{n\to\infty} x^*_n = x^*$.

6. $\mathbf{X}^*$ je určeno jednoznačně až na izometrii. Buďte $\mathbf{X}^*$ a $\mathbf{X}^{**}$ dvě zúplnění prostoru $\mathbf{X}$. Potom platí $\mathbf{X}^* = \overline{\mathbf{X}}_0$ a $\mathbf{X}^{**} = \overline{\mathbf{X}}_0$ a definujme zobrazení $\varphi : \mathbf{X}^* \to \mathbf{X}^{**}$ předpisem $\varphi(x') = x'$ pro $x' \in \mathbf{X}_0$. Je-li $x^* \in \mathbf{X}^*$ libovolný bod, potom existuje posloupnost

$$\{x'_n\}, \quad x'_n \in \mathbf{X}_0 \text{ tak, že } x'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*.$$

Poněvadž $\mathbf{X}^{**}$ je úplný prostor, existuje

$$x^{**} \in \mathbf{X}^{**} \text{ tak, že } x'_n \to x^{**} \text{ a položme } \varphi(x^*) = x^{**}.$$

Ukážeme, že φ je izometrie. Buďte $x^*, y^* \in \mathbf{X}^*$ libovolné body, $\{x'_n\}, \{y'_n\}$; $x'_n, y'_n \in \mathbf{X}_0$ takové, že

$$x'_n \to x^*,\ y'_n \to y^* \text{ v } \mathbf{X}^* \text{ a také } x'_n \to x^{**},\ y'_n \to y^{**} \text{ v } \mathbf{X}^{**}.$$

Potom je

$$\mathbf{d}^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}^*(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}^{**}(x'_n, y'_n) = \mathbf{d}^{**}(x^{**}, y^{**})$$

a φ je izometrie.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ zobrazení. Řekneme, že f je <u>kontraktivní zobrazení</u> nebo <u>kontrakce</u>, jestliže existuje $\alpha \in (0,1)$ tak, že pro všechna $x, y \in \mathbf{X}$ platí

$$\mathbf{d}(f(x), f(y)) \le \alpha \mathbf{d}(x, y).$$

Poznámky: 1. Každá kontrakce je spojité zobrazení. Skutečně, je-li $x_n \to x$, potom $f(x_n) \to f(x)$ podle definice kontrakce.

2. V úplném metrickém prostoru platí t. zv. věta o pevném bodu pro kontraktivní zobrazení, která má velmi důležité aplikace.

! Věta: (Banachova věta o kontrakcích)
Buď $\mathbf{X}$ úplný metrický prostor, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ kontraktivní zobrazení. Potom existuje právě jeden bod $x \in \mathbf{X}$ tak, že $f(x) = x$. Tento bod nazýváme pevným bodem zobrazení f.

Důkaz: 1. <u>Existence</u>
Buď $x_0 \in \mathbf{X}$ libovolný bod a uvažme posloupnost $\{x_n\}$, definovanou předpisem

$$x_n = f(x_{n-1}) \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Ukážeme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská. Buďte $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$. Potom je $m = n+k$, kde $k \in \mathbf{N}$ a platí

$$\mathbf{d}(x_m, x_n) = \mathbf{d}(x_{n+k}, x_n) = \mathbf{d}(f(x_{n+k-1}), f(x_{n-1})) \le \alpha \mathbf{d}(x_{n+k-1}, x_{n-1}).$$

Odtud indukcí plyne, že $\mathbf{d}(x_m, x_n) \le \alpha^n \mathbf{d}(x_k, x_0)$. Ale

$$\mathbf{d}(x_k, x_0) \le \mathbf{d}(x_0, x_1) + \mathbf{d}(x_1, x_2) + \cdots + \mathbf{d}(x_{k-1}, x_k) \le \{1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{k-1}\} \mathbf{d}(x_0, x_1) \le \frac{\mathbf{d}(x_0, x_1)}{1-\alpha}.$$

(Je $\alpha \in (0,1)$). Neboli

$$\mathbf{d}(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\mathbf{d}(x_0, x_1) \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Poněvadž $\mathbf{X}$ je úplný metrický prostor, je posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Vzhledem ke spojitosti f platí

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

a x je tedy pevný bod f.

2. <u>Jednoznačnost</u>
Nechť $f(x) = x$ a $f(y) = y$. Potom platí

$$\mathbf{d}(x, y) = \mathbf{d}(f(x), f(y)) \leq \alpha\mathbf{d}(x, y)\,.$$

Poněvadž je $\alpha \in (0,1)$, platí $\mathbf{d}(x, y) = 0$, tedy $x = y$.

Poznámka: Předpis $x_{n+1} = f(x_n)$ udává metodu přibližného řešení úlohy $f(x) = x$. Zároveň je možno udat chybu po n-té aproximaci. Platí

$$\mathbf{d}(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\mathbf{d}(x_0, x_1)$$

a pro $m \to \infty$ dostaneme

$$\mathbf{d}(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\mathbf{d}(x_0, x_1)\,.$$

Příklad: Uvažme otázku řešitelnosti Cauchyovy úlohy

$$y' = f(t, y), \ \ y(t_0) = y_0 \ \text{ v } \ \mathbf{C}(a, b)\,.$$

Tato úloha je ekvivalentní s řešitelností integrální rovnice

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau\,.$$

Označme

$$T(y) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

a předpokládejme, že spojitá funkce f splňuje Lipschitzovu podmínku

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|\,.$$

Potom platí

$$|T(y) - T(z)| = |\int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, z(\tau))d\tau| \leq \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))|d\tau \leq$$

$$\leq K \int_{t_0}^{t} |y(\tau) - z(\tau)|d\tau \leq K(b-a) \max_{a\leq t\leq b} |y(t) - z(t)|$$

pro $t \geq t_0$. Analogický odhad dostaneme však i pro $t \leq t_0$, jen musíme uvážit

$$\int_t^{t_0} |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))| d\tau .$$

Odtud plyne, že

$$\max_{a \leq t \leq b} |T(y) - T(z)| = \mathbf{d}(T(y), T(z)) \leq K(b-a)\mathbf{d}(y, z) .$$

Je-li $K(a - b) < 1$ (čehož se dá vždy dosáhnout, je-li $t_0 \in (a, b)$ a tento interval je dostatečně malý), dostaneme odtud, že T je kontrakce a daná úloha má jediné řešení.

1.4 Normované a unitární prostory.

Poznámka: V úvodu připomeneme některé známé pojmy z lineární algebry. Pod pojmem číselné těleso budeme rozumět množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ nebo množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$. Těleso budeme obyčejně značit $\mathbf{\Phi}$.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ množina, jejíž prvky budeme značit $x, y, \ldots$, $\mathbf{\Phi}$ těleso, jehož prvky budeme značit $\alpha, \beta, \ldots$. Řekneme, že $\mathbf{X}$ tvoří lineární vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{\Phi}$, jsou-li v $\mathbf{X}$ definovány 2 operace: sčítání vektorů (prvků) $\mathbf{X}$ a násobení prvků $\mathbf{X}$ elementy $\mathbf{\Phi}$ (skaláry), které mají následující vlastnosti:

A_1 Ke každé dvojici $x, y \in \mathbf{X}$ existuje jejich součet $x + y \in \mathbf{X}$.
A_2 $x + y = y + x \ \ \forall x, y \in \mathbf{X}$.
A_3 $x + (y + z) = (x + y) + z \ \ \forall x, y, z \in \mathbf{X}$.
A_4 Existuje prvek $0 \in \mathbf{X}$, nazývaný nulový vektor tak, že $x + 0 = x \ \ \forall x \in \mathbf{X}$.
A_5 Ke každému $x \in \mathbf{X}$ existuje prvek $-x \in \mathbf{X}$, nazývaný opačný vektor tak, že $x + (-x) = 0$.

M_1 Ke každému $x \in \mathbf{X}$ a ke každému $\alpha \in \mathbf{\Phi}$ existuje jejich součin $\alpha x \in \mathbf{X}$.
M_2 $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \ \ \forall \alpha \in \mathbf{\Phi}$, $\forall x, y \in \mathbf{X}$.
M_3 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{\Phi}$, $\forall x \in \mathbf{X}$.
M_4 $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{\Phi}$, $\forall x \in \mathbf{X}$.
M_5 $1 \cdot x = x \ \ 1 \in \mathbf{\Phi}$, $\forall x \in \mathbf{X}$.

Poznámka: Prvky $\mathbf{X}$ nazýváme vektory, prvky $\mathbf{\Phi}$ skaláry. Vektorový prostor složený jen z nulového vektoru 0 budeme značit $\{0\}$.

Definice: Neprázdnou podmnožinu $\mathbf{Y}$ lineárního vektorového prostoru $\mathbf{X}$ nazýváme podprostorem, jestliže

$$x + y \in \mathbf{Y} \ \text{ jakmile } \ x, y \in \mathbf{Y} \ \text{ a } \ \alpha x \in \mathbf{Y} \ \text{ jakmile } \ x \in \mathbf{Y},\ \alpha \in \mathbf{\Phi} .$$

Řekneme, že vektory $x_1, \ldots, x_n$ jsou lineárně závislé, jestliže existují skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, které nejsou všechny nulové tak, že

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0 .$$

Je-li možno tuto rovnost splnit jen tak, že

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 ,$$

řekneme, že vektory $x_1, \ldots, x_n$ jsou lineárně nezávislé. Nekonečnou množinu M nazveme lineárně nezávislou, je-li každá její konečná podmnožina lineárně nezávislá.

O lineárním prostoru $\mathbf{X}$ řekneme, že má konečnou dimensi n, jestliže v $\mathbf{X}$ existuje n lineárně nezávislých vektorů a každá skupina o více než n vektorech je lineárně závislá. Jestliže ke každému přirozenému číslu k existuje v $\mathbf{X}$ k lineárně nezávislých vektorů, řekneme, že $\mathbf{X}$ má nekonečnou dimensi.

Poznámka: Lineární algebra se zabývá vyšetřováním konečnědimensionálních prostorů, funkcionální analýza zkoumá většinou prostory nekonečné dimense. Ty bývají často normované.

Definice: Lineární vektorový prostor $\mathbf{X}$ nazveme lineárním normovaným prostorem, je-li na $\mathbf{X}$ definována reálná nezáporná funkce $\|x\|$, nazývaná norma s následujícími vlastnostmi:

1. $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{X}; \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \ \forall \alpha \in \mathbf{\Phi} \ \forall x \in \mathbf{X}.$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in \mathbf{X}$ (trojúhelníková nerovnost).

Lemma: Každý normovaný prostor je metrický prostor, jestliže definujeme $\mathbf{d}(x,y) = \|x - y\|$. Obráceně lineární metrický prostor je normovaný, jestliže metrika $\mathbf{d}$ má následující 2 vlastnosti:

1. $\mathbf{d}(x,y) = \mathbf{d}(x - y, 0) \ \forall x, y \in \mathbf{X}.$
2. $\mathbf{d}(\alpha x, 0) = |\alpha| \mathbf{d}(x, 0) \ \forall \alpha \in \mathbf{\Phi}, \ \forall x \in \mathbf{X}.$

V tomto případě stačí položit $\|x\| = \mathbf{d}(x, 0)$.

Důkaz: a) Je zřejmé, že $\mathbf{d}(x,y) = \|x - y\|$ má prvé dvě vlastnosti metriky. Pokud se týče trojúhelníkové nerovnosti, platí

$$\mathbf{d}(x,z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \mathbf{d}(x,y) + \mathbf{d}(y,z)\,.$$

b) Obráceně definujeme-li $\|x\| = \mathbf{d}(x, 0)$, je zřejmé, že platí 1. vlastnost normy. Druhá plyne z dodatečné vlastnosti 2. Pro trojúhelníkovou nerovnost platí

$$\|x + y\| = \mathbf{d}(x + y, 0) = \mathbf{d}(x, -y) \leq \mathbf{d}(x, 0) + \mathbf{d}(0, -y) =$$

$$= \|x\| + \mathbf{d}(-y, 0) = \|x\| + |-1| \cdot \mathbf{d}(y, 0) = \|x\| + \|y\|\,.$$

Definice: Řekneme, že normovaný lineární prostor $\mathbf{X}$ je Banachův prostor (nebo B-prostor), jeli úplný v metrice indukované normou $\mathbf{X}$.

Poznámka: Vzhledem k větě o vnoření do úplného metrického prostoru budeme v dalším pracovat většinou s B-prostory. Dalším důležitým případem normovaného prostoru je unitární prostor nebo jeho zúplnění Hilbertův prostor.

Definice: Buď H lineární prostor nad tělesem $\mathbf{\Phi}$. Řekneme, že H je unitární nebo pre-Hilbertův prostor, je-li na $H \times H$ definována funkce (x,y) s hodnotami ve $\mathbf{\Phi}$, nazývaná skalární součin, která má následující vlastnosti:

1. $(x,x) \geq 0 \qquad \forall x \in H; \qquad (x,x) = 0 \ \Leftrightarrow x = 0.$
2. $(y,x) = \overline{(x,y)} \qquad \forall x, y \in H.$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \qquad \forall x_1, x_2, y \in H.$
4. $(\alpha x, y) = \alpha(x,y) \qquad \forall \alpha \in \mathbf{\Phi}; \ \forall x, y \in H.$

Lemma: Pro skalární součin (x,y) platí

$$\begin{array}{ll} 1.\ (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) & \forall x, y_1, y_2 \in H, \\ 2.\ (x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y) & \forall \alpha \in \mathbf{\Phi}\,;\ \forall x, y \in H. \end{array}$$

Důkaz: 1. Je

$$(x, y_1 + y_2) = \overline{(y_1 + y_2, x)} = \overline{(y_1, x) + (y_2, x)} = \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2)\,.$$

2. Analogicky

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha (y, x)} = \overline{\alpha}\,\overline{(y, x)} = \overline{\alpha}(x, y)\,.$$

! Věta: (Cauchyova nerovnost)
Buď H unitární prostor. Potom pro libovolné $x, y \in H$ platí

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)\,.$$

Rovnost platí právě když jsou x a y lineárně závislé.

Důkaz: Pro libovolné $x, y \in H$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{\Phi}$ platí

$$0 \leq (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha\overline{\alpha}(x, x) + \alpha\overline{\beta}(x, y) + \overline{\alpha}\beta\overline{(x, y)} + \beta\overline{\beta}(y, y)\,.$$

Jestliže položíme

$$\alpha = t \in \mathbf{R};\ \ \beta = \begin{cases} \frac{(x,y)}{|(x,y)|} & \text{pro} \quad (x, y) \neq 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

dostaneme

$$0 \leq t^2(x, x) + 2t|(x, y)| + (y, y)\,.$$

Tedy diskriminant tohoto kvadratického trojčlenu musí být menší nebo roven 0. Neboli

$$|(x, y)|^2 - (x, x)(y, y) \leq 0\,.$$

1. Je-li $y = \lambda x$, potom

$$|(x, y)|^2 = |(x, \lambda x)|^2 = |\lambda|^2(x, x)^2 = (x, x)|\lambda|^2(x, x) = (x, x)(\lambda x, \lambda x) = (x, x)(y, y)\,.$$

2. Nechť

$$|(x, y)|^2 = (x, x)(y, y)\,.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} 0 &\leq ((x, y)y - (y, y)x, (x, y)y - (y, y)x) = \\ &= |(x, y)|^2(y, y) - (y, y)|(x, y)|^2 - |(x, y)|^2(y, y) + (y, y)^2(x, x)\,. \end{aligned}$$

Je-li $y = 0$, je tvrzení zřejmé. Pro $y \neq 0$ zkrátíme (y, y) a dostaneme

$$0 \leq (y, y)(x, x) - |(x, y)|^2 = 0$$

a odtud $(x, y)y - (y, y)x = 0$, tedy x a y jsou lineárně závislé.

Definice: Řekneme, že unitární prostor H je Hilbertův prostor, je-li H úplný normovaný prostor v normě

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}\,.$$

Věta: Rovnost $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ definuje normu. V trojúhelníkové nerovnosti

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in H$$

platí rovnost právě když $y = \lambda x$, kde $\lambda \geq 0$.

Důkaz: Je zřejmé, že $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in H$ a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Dále

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha}(x,x)} = |\alpha| \cdot \|x\| .$$

Pokud se týče trojúhelníkové nerovnosti, platí

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 + 2Re(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

podle Cauchyovy nerovnosti.

1. Nechť $y = \lambda x$, kde $\lambda \geq 0$. Potom

$$\|x+y\| = \|(1+\lambda)x\| = \|x\| + \lambda\|x\| = \|x\| + \|y\| .$$

2. Je-li

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| ,$$

potom z předchozí části důkazu plyne, že

$$Re(x,y) = \|x\| \cdot \|y\| .$$

Poněvadž však platí obecně

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| ,$$

dostaneme odtud, že $(x,y) = \|x\| \cdot \|y\|$. Podle předchozí věty platí $y = \lambda x$ a tedy

$$(x,y) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}\|x\|^2 \text{ a zároveň } \|x\| \cdot \|y\| = |\lambda| \cdot \|x\|^2 ,$$

neboli $\overline{\lambda} = |\lambda|$ a $\lambda \geq 0$.

Poznámky: 1. Skalární součin je spojitá funkce 2 proměnných ve smyslu, že pokud

$$x_n \to x, \; y_n \to y, \text{ pak } (x_n, y_n) \to (x,y) .$$

Je totiž

$$|(x_n, y_n) - (x,y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x,y)| \leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq$$

$$\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

2. Skalární součin umožňuje zavést pojem ortogonality nebo kolmosti vektorů, známý z lineární algebry.

Definice: Buď M množina vektorů lineárního prostoru $\mathbf{X}$. Množinu všech konečných lineárních kombinací prvků M nazveme lineárním obalem M a označíme $[M]$.

Podmnožinu S unitárního prostoru H nazveme ortogonální, je-li $(x,y) = 0$, jakmile $x, y \in S$, $x \neq y$. Řekneme, že S je ortonormální, je-li navíc $\|x\| = 1$ pro všechna $x \in S$.

Poznámka: S ortonormální množinou se počítá velmi dobře a ukazuje se, že z libovolného nezávislého systému vektorů v unitárním prostoru lze vytvořit systém ortonormální.

Věta: (Gram-Schmidtova ortogonalizace)

Buď $\{x_n\}$ spočetná lineárně nezávislá množina. Potom existuje ortonormální množina $\{u_n\}$ tak, že pro každé přirozené k platí

$$[\{x_1, \dots, x_k\}] = [\{u_1, \dots, u_k\}] \, .$$

Důkaz: Je $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Definujme $y_1, y_2, \dots \;, u_1, u_2, \dots$ následujícím způsobem

$$\begin{array}{ll} y_1 = x_1 & u_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} \\ y_2 = x_2 - (x_2, u_1)u_1 & u_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \\ \dots & \dots \\ y_{k+1} = x_{k+1} - \sum\limits_{j=1}^{k} (x_{k+1}, u_j)u_j & u_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|} \, . \end{array}$$

Tento proces skončí, je-li $\{x_n\}$ konečná množina, jinak pokračuje do nekonečna. Indukcí dostaneme, že

$$[\{x_1, \dots, x_k\}] = [\{u_1, \dots, u_k\}] \quad \forall k \in \mathbf{N} \, .$$

Dále je zřejmé, že $(u_i, u_j) = 0$ pro $i \neq j, \quad \|u_i\| = 1$.

Věta: Buď H unitární prostor. Nutná a postačující podmínka pro to, aby byly vektory $x_1, \dots, x_n \in H$ lineárně nezávislé je, aby jejich Gramův determinant byl nenulový, t. j.

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1), & \cdots & , (x_n, x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x_1, x_n), & \cdots & , (x_n, x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \, .$$

Důkaz: 1. Jsou-li $x_1, \dots, x_n$ závislé, je zřejmě

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n) = 0 \, .$$

2. Nechť jsou $x_1, \dots, x_n$ nezávislé. Potom má soustava

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

pouze triviální řešení $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ a tedy také soustava

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1(x_1, x_1) + & \cdots & + \lambda_n(x_n, x_1) = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1(x_1, x_n) + & \cdots & + \lambda_n(x_n, x_n) = 0 \end{array} \, .$$

To je však možné pouze když $\Gamma(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Poznámky: 1. Další vlastnosti Hilbertova prostoru budou uvedeny později.

2. Vzájemný vztah mezi prostory, se kterými jsme se zatím setkali, je možno vyjádřit symbolicky inklusemi

„$\mathbf{R}^n \subset$ Hilbertovy prostory $\subset$ Banachovy prostory $\subset$ Metrické prostory $\subset$ Topologické prostory.“

1.5 Zobrazení normovaných prostorů.

Definice: Buďte $\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$ dva lineární vektorové prostory nad týmž tělesem tělesem $\mathbf{\Phi}$. Řekneme, že zobrazení $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ je lineární, jestliže platí:
1. Definiční obor $D(T)$ zobrazení T je podprostor $\mathbf{X}$.
2. $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{\Phi}, \;\; \forall x, y \in D(T)\,.$

Lineární zobrazení nazýváme též někdy lineární operátor.

Poznámky: 1. Úplnou indukcí dostaneme, že pro lineární zobrazení platí

$$T(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j T x_j \quad \forall p \in \mathbf{N}\,.$$

2. Je-li $T : D(T) \to \mathbf{Y}$ lineární operátor, pak jeho obor hodnot $R(T)$ je také lineární vektorový prostor (podprostor $\mathbf{Y}$).

Důkaz: Je-li

$$y_1, y_2 \in R(T), \;\; y_1 = T x_1, \; y_2 = T x_2\,,$$

pak

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 = T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in R(T)\,.$$

3. Je-li T lineární operátor, pak T^{-1} existuje právě když $Tx = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$. Existuje-li T^{-1}, je to opět lineární operátor.

Důkaz: Je-li $y_1 = T x_1$, $y_2 = T x_2$, neboli $x_1 = T^{-1} y_1$, $x_2 = T^{-1} y_2$, potom

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

a tedy

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 T^{-1} y_1 + \alpha_2 T^{-1} y_2 = T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\,.$$

V prostorech nekonečné dimenze je však důležitá otázka spojitosti lineárního zobrazení.

Věta: Lineární zobrazení, které je spojité v jednom bodě svého definičního oboru, je spojité všude.

Důkaz: Buď T spojité v bodě x_0 a nechť $x \in D(T)$ je libovolný bod,

$$x_n \in D(T), \;\; x_n \to x\,.$$

Potom

$$x_n - x + x_0 \to x_0\,,$$

tedy $T(x_n - x + x_0) \to T x_0$. Je však

$$T(x_n - x + x_0) = T x_n - T x + T x_0$$

a odtud

$$T x_n - T x \to 0, \;\; \text{t.j.} \;\; T x_n \to T x\,.$$

Poznámka: Ověření spojitosti T se provádí většinou v bodě $x = 0$.

Definice: Buďte $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ normované prostory, $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ lineární operátor. Řekneme, že T je omezený, jestliže existuje konstanta M tak, že

$$\|Tx\| \le M\|x\| \quad \forall x \in \mathbf{X}\,.$$

Věta: Buďte $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ lineární normované prostory, $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ lineární operátor. Potom je T spojitý právě když je omezený.

Důkaz: 1. Buď T omezený, t. j.

$$\|Tx\| \le M\|x\| \quad \forall x \in \mathbf{X}\,.$$

Potom je T zřejmě spojitý v bodě $x = 0$ a tedy všude.

2. Nechť je obráceně T spojitý v bodě 0. Potom je

$$\|Tx\| < 1 \text{ jakmile } \|x\| < \delta \text{ pro nějaké } \delta > 0\,.$$

Je-li nyní $x \neq 0$ libovolné, pak položme $x_0 = \frac{\delta x}{2\|x\|}$. Poněvadž je

$$\|x_0\| = \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ platí } \|Tx_0\| < 1, \text{ neboli } \|Tx\| \le \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|$$

a stačí položit $M = \frac{2}{\delta}$.

Věta: Buďte $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ lineární normované prostory. Potom množina všech spojitých lineárních operátorů z $\mathbf{X}$ do $\mathbf{Y}$, kterou značíme $\mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, tvoří lineární normovaný prostor, jestliže definujeme

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\|\,.$$

Je-li $\mathbf{Y}$ B-prostor, je i $\mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ B-prostor.

Důkaz: Buďte $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $\alpha \in \mathbf{\Phi}$. Potom definujeme $T_1 + T_2$ a αT předpisem

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x\,, \quad (\alpha T)x = T(\alpha x)\,.$$

Odtud plyne, že $\mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tvoří lineární vektorový prostor.

Ze spojitosti $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ plyne existence konstanty M takové, že

$$\|Tx\| \le M\|x\| \quad \forall x \in \mathbf{X}$$

tedy pro $\|x\| \le 1$ dostaneme

$$\|Tx\| \le M \text{ a odtud } \|T\| \le M < \infty\,.$$

Buď nyní $\|T\| = 0$, neboli

$$\sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| = 0\,.$$

Odtud plyne, že $Tx = 0$ pro $\|x\| \le 1$. Je-li $x \neq 0$ libovolné, pak pro

$$x_0 = \frac{x}{2\|x\|} \text{ platí } \|x_0\| \le 1 \text{ a tedy } 0 = Tx_0 = Tx\,, \text{ neboli } T = 0\,.$$

Poněvadž je

$$\|\alpha Tx\| = |\alpha| \cdot \|Tx\|\,,$$

plyne odtud, že $\|\alpha T\| = |\alpha| \cdot \|T\|$.

Buď $\|x\| \leq 1$. Potom pro trojúhelníkovou nerovnost platí

$$\|(T_1 + T_2)x\| \leq \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

a odtud

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T_1 + T_2)x\| \leq \|T_1\| + \|T_2\| \,.$$

Odtud plyne, že $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ je normovaný prostor.

Předpokládejme nyní, že $\mathbf{Y}$ je B-prostor a buď $\{T_n\}$ libovolná cauchyovská posloupnost v $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbf{N} \;\; \forall m, n \geq n_0 \;\; \Rightarrow \;\; \|T_n - T_m\| < \varepsilon \,.$$

To však znamená, že pro $\|x\| \leq 1$ platí

$$\|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\|$$

a je-li $x \neq 0$ libovolné, dostaneme, že

$$\|(T_n - T_m)\frac{x}{\|x\|}\| \leq \|T_n - T_m\| \,, \;\; \text{neboli} \;\; \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\| \,.$$

Tedy $\forall x \in \mathbf{X}$ je $\{T_n x\}$ fundamentální posloupnost v $\mathbf{Y}$ a tedy konvergentní v $\mathbf{Y}$. Označme

$$Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x \,.$$

Stačí ukázat, že

$$T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \;\; \text{a} \;\; \|T - T_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

T je lineární, poněvadž

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n \to \infty} T_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n \to \infty} \{\alpha_1 T_n x_1 + \alpha_2 T_n x_2\} =$$

$$= \alpha_1 \lim_{n \to \infty} T_n x_1 + \alpha_2 \lim_{n \to \infty} T_n x_2 = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 \,.$$

Z nerovnosti

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\|$$

plyne pro $n \to \infty$, že

$$\|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\| \,,$$

tedy $T - T_m$ je omezené zobrazení a také

$$T = (T - T_m) + T_m \,,$$

neboli $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Z nerovnosti

$$\|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

vyplývá, že $\|T - T_m\| \leq \varepsilon$, tedy

$$T_m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} T$$

a $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ je B-prostor.

Poznámka: Normu lineárního operátoru je možno vyjádřit jedním z následujících způsobů:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \,; \quad \|T\| = \inf\{M; \|Tx\| \leq M\|x\|\} \,;$$
$$\|T\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\| \,; \quad \|T\| = \sup_{x \neq 0} \tfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \,.$$

Důkaz tohoto tvrzení je ponechán do cvičení.

Věta: Buď $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ lineární operátor. Potom T^{-1} existuje a je spojitý právě když existuje konstanta $m > 0$ taková, že

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \;\; \forall x \in \mathbf{X}\,.$$

Důkaz: 1. Buď $Tx = 0$. Potom $x = 0$ a T^{-1} existuje. Je-li $y = Tx$, pak

$$x = T^{-1}y \;\text{ a tedy }\; m\|T^{-1}y\| \leq \|Tx\|\,,$$

neboli

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$$

a T^{-1} je spojitý. Zároveň platí, že

$$\|T^{-1}\|^{-1} = \sup\{m; m\|x\| \leq \|Tx\|\}\,.$$

2. Buď T^{-1} spojitý, neboli

$$\|T^{-1}y\| \leq M\|y\|\,, \;\text{ a tedy }\; \frac{1}{M}\|x\| \leq \|Tx\|\,.$$

Kapitola 2

Míra a Lebesgueův integrál.

2.1 Základy teorie míry.

Poznámky: 1. V této kapitole budeme operovat s reálnými funkcemi, tedy $f : \mathbf{X} \to \mathbf{R}^*$, kde $\mathbf{X}$ může být libovolná množina a $\mathbf{R}^*$ t. zv. rozšířená reálná přímka, tedy hodnoty f mohou být i $+\infty$ nebo $-\infty$. $\mathbf{X}$ bude v praktickém případě $\mathbf{R}^n$, ale pro začátek to není třeba.

2. V celé kapitole definujeme $0 \cdot \infty = 0$.

Definice: Buďte A, B dvě množiny. Potom jejich symetrickou diferencí rozumíme množinu $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

Definice: Buď S množina, Σ nějaký systém jejích podmnožin. Řekneme, že Σ tvoří algebru podmnožin množiny S, jestliže platí:

a) $\emptyset \in \Sigma$.

b) Je-li $A \in \Sigma$, pak $S - A \in \Sigma$.

c) Jsou-li $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$, pak $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \Sigma$.

Řekneme, že Σ tvoří σ-algebru podmnožin množiny S, jestliže platí a), b) a

c') Je-li $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost množin ze Σ, pak $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Lemma: Je-li Σ algebra podmnožin množiny S; $A, B \in \Sigma$, pak $S \in \Sigma$, $A \cap B \in \Sigma$, $A \triangle B \in \Sigma$. Je-li Σ dokonce σ-algebra, $A_k \in \Sigma$ $(k = 1, 2, \dots)$ libovolná posloupnost, pak $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Důkaz: Poněvadž $\emptyset \in \Sigma$, je $S = S - \emptyset \in \Sigma$. $A - B = A \cap (S - B)$, $B - A = B \cap (S - A)$ a odtud $A \triangle B \in \Sigma$. Konečně podle de-Morganových pravidel platí $S - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (S - A_k) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Definice: Je-li S topologický (metrický) prostor, potom nejmenší σ-algebru podmnožin S, obsahující všechny otevřené množiny S nazýváme Borelovskou σ-algebrou S a její prvky Borelovské množiny.

Poznámky: 1. Borelovská σ-algebra obsahuje také všechny uzavřené množiny, ale též všechny množiny typu G_δ (spočetné průniky otevřených množin) a F_σ (spočetná sjednocení uzavřených množin) atd., tedy jejich struktura je velmi bohatá.

2. V dalším sestrojíme Borelovskou σ-algebru podmnožin $\mathbf{R}^n$, které budou sloužit jako základ pro vybudování Lebesgueova integrálu.

Definice: Funkcí množiny nazýváme funkci, definovanou na nějakém systému množin, která nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$ (tedy včetně hodnoty $+\infty$).

Funkci množiny μ nazveme aditivní, je-li $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{p} \mu(A_k)$ pro libovolný konečný systém množin A_k $(k = 1, \dots, p)$ takový, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$. (Takový systém množin nazýváme disjunktní nebo po dvou disjunktní).

Řekneme, že μ je <u>σ-aditivní</u>, je-li $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ pro libovolnou disjunktní posloupnost množin $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Řekneme, že μ je <u>míra</u> na S, je-li μ definována na nějaké σ-algebře Σ podmnožin množiny S a je-li na Σ σ-aditivní. Trojici (S, Σ, μ) nazveme prostorem s mírou a prvky Σ měřitelné (nebo μ-měřitelné) množiny.

Poznámky: 1. Je-li μ míra, potom $\mu(\emptyset) = 0$. Je skutečně $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = 2\mu(\emptyset)$.

2. Je vidět, že míra je monotonní, tedy jsou-li $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$, potom $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Definice: Řekneme, že míra μ na množině S je <u>konečná</u>, je-li $\mu(S) < \infty$. Řekneme, že je <u>σ-konečná</u>, jestliže existuje posloupnost $M_k \in \Sigma$ tak, že $\mu(M_k) < \infty$ a $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$. Je-li $\mu(S) = 1$, řekneme, že μ je <u>pravděpodobnostní míra</u>. Množinu $N \in \Sigma$ nazveme <u>nulovou</u> (nebo μ-nulovou), je-li $\mu(N) = 0$. Řekneme, že μ je <u>úplná</u>, jestliže platí: je-li $M \in \Sigma$ nulová množina a $N \subset M$ libovolná její podmnožina, potom $N \in \Sigma$ (a je tedy $\mu(N) = 0$).

Věta: Buď (S, Σ, μ) prostor s mírou. Potom platí

a) Je-li $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$ posloupnost μ-měřitelných množin, $M = \lim\limits_{k\to\infty} M_k$ [je $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$], potom $\mu(M) = \mu(\lim\limits_{k\to\infty} M_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(M_k)$.

b) Je-li $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, $A = \lim\limits_{k\to\infty} A_k$ [je $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$], $\mu(A_1) < \infty$, potom $\mu(A) = \mu(\lim\limits_{k\to\infty} A_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

c) Jsou-li $B_k \in \Sigma$ $(k = 1, 2, \dots)$, potom $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$.

Důkaz: a) Je-li $\mu(M_k) = +\infty$ pro nějaké k, je zřejmě $\mu(M) = +\infty$. Buď tedy $\mu(M_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbf{N}$. Potom platí

$$M_p = M_1 \cup (M_2 - M_1) \cup \dots \cup (M_p - M_{p-1}), \quad M = M_1 \cup (M_2 - M_1) \cup (M_3 - M_2) \cup \dots$$

a sjednocení vpravo je disjunktní. Tedy

$$\mu(M) = \mu(M_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_{k+1} - M_k) = \lim_{p\to\infty} \left\{ \mu(M_1 + \sum_{k=1}^{p-1} \mu(M_{k+1} - M_k) \right\} = \lim_{p\to\infty} \mu(M_p).$$

b) Položme $A_1 - A_k = M_k$ $(k = 1, 2, \dots)$; $A_1 - A = M$. Podle de Morganových pravidel je

$$M = A_1 - A = A_1 - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 - A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

a navíc $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$. Podle prvé části věty platí $\mu(M) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(M_k)$, tedy $\mu(A_1 - A) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_1 - A_k)$. Spolu se vztahem $\mu(A_1 - A) = \mu(A_1) - \mu(A)$ dostaneme tvrzení věty.

c) Položme

$$C_1 = B_1\,,\;\; C_2 = B_2 - B_1\,,\;\; C_3 = B_3 - (B_1 \cup B_2), \ldots .$$

Potom je $\bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ pro $n = 1, 2, \ldots$, $\mu(C_k) \le \mu(B_k)$ neboli

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)$$

a odtud dostáváme tvrzení. (Množiny C_k jsou po dvou disjunktní).

Poznámky: 1. Předpoklad $\mu(A_1) < \infty$ je ve tvrzení b) předchozí věty podstatný. Je-li $A_n = (n, +\infty)$, je $A = \emptyset$, $\mu(A_n) = +\infty \;\; \forall n \in \mathbf{N}$, tedy věta neplatí.

2. Tvrzení a) a b) předchozí věty ukazují, že míra je jistým způsobem spojitá množinová funkce. Později toto tvrzení upřesníme.

3. Je-li (S, Σ, μ) prostor s mírou, pak obecně míra μ nemusí být úplná. Existuje však vždy její rozšíření na úplnou míru.

Věta: Buď (S, Σ, μ) prostor s mírou. Potom existuje σ-algebra Σ^* obsahující Σ a míra μ^*, která je úplná na Σ^* a na Σ je rovna μ.

Důkaz: Označme $\mathfrak{N}$ systém všech množin $A \subset S$ takových, že existuje $B \in \Sigma$ tak, že $\mu(B) = 0$ a $A \subset B$. Označme Σ^* systém všech množin tvaru $M \cup N$, kde $M \in \Sigma$ a $N \in \mathfrak{N}$. Definujme μ^* na Σ^* předpisem

$$\mu^*(M \cup N) = \mu(M)\,,\;\; M \in \Sigma\,,\;\; N \in \mathfrak{N}.$$

Je zřejmé, že $\Sigma \subset \Sigma^*$. Poněvadž Σ i $\mathfrak{N}$ jsou uzavřené vzhledem ke spočetným sjednocením, platí totéž i pro Σ^*. Je-li nyní $C \in \Sigma^*$, pak existují $M \in \Sigma$, $N \in \mathfrak{N}$ a $B \in \Sigma$ tak, že $N \subset B$, $\mu(B) = 0$ a $C = M \cup N$. Potom platí

$$S - C = \{S - \underbrace{(M \cup B)}_{\in \Sigma}\} \cup \underbrace{(B - N)}_{\in \mathfrak{N}} \in \Sigma^*$$

a je zřejmé, že μ^* je úplná míra na Σ^* taková, že $\mu^* = \mu$ na Σ.

Poznámka: V dalším zavedeme úplnou míru na Borelovské σ-algebře podmnožin $\mathbf{R}^n$.

Definice: Intervalem $\mathcal{I}$ v $\mathbf{R}^n$ rozumíme množinu tvaru

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \times \cdots \times \mathcal{I}_n\,,$$

kde $\mathcal{I}_k$ je jednorozměrný interval libovolného tvaru

$$\langle a_k, b_k \rangle\,,\;\; (a_k, b_k \rangle\,,\;\; \langle a_k, b_k)\,,\;\; (a_k, b_k)\,,$$

kde $a_k, b_k \in \mathbf{R}$, $\;a_k \le b_k$ pro $k = 1, \ldots, n$. Řekneme, že interval $\mathcal{I}$ je <u>zvrhlý</u> nebo <u>degenerovaný</u>, je-li $a_k = b_k$ pro nějaké $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Příklad: Na systému všech intervalů definujme množinovou funkci λ předpisem

$$\lambda(\mathcal{I}) = (b_1 - a_1). \ldots .(b_n - a_n) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Tuto množinovou funkci rozšíříme postupně na úplnou míru na Borelovské σ-algebře podmnožin $\mathbf{R}^n$. Tím dostaneme Lebesgueovu míru. Poněvadž je tento postup možno aplikovat na řadu dalších σ-aditivních množinových funkcí, nebudeme zatím λ preferovat.

Označení: Označme $\mathfrak{C}_n$ systém všech množin $A \subset \mathbf{R}^n$, které lze psát jako sjednocení spočetného systému intervalů, t. j. $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}^{(k)}$, kde $\mathcal{I}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots)$ jsou omezené intervaly libovolného druhu výše uvedeného.

Lemma: Systém $\mathfrak{C}_n$ obsahuje všechny otevřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$, netvoří však σ-algebru.

Důkaz: Buď $G \subset \mathbf{R}^n$ otevřená a užijme metriku $\mathbf{d}(x, y) = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$.
Ke každému $x \in G$ existuje $S(x; \varepsilon_x)$, $\varepsilon_x > 0$ tak, že $S(x; \varepsilon_x) \subset G$ a vzhledem ke zvolené metrice je $S(x; \varepsilon_x)$ interval. Nyní platí $G = \bigcup\limits_{x \in G} S(x; \varepsilon_x)$, což dává pokrytí otevřenými množinami. Poněvadž G je separabilní, je odtud možno vybrat spočetné pokrytí (Lindelöfova věta) a tedy $G \in \mathfrak{C}_n$. Systém $\mathfrak{C}_n$ však neobsahuje všechny uzavřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$ a tedy nemůže tvořit σ-algebru. Buď $n > 1$ a

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n ;\ x_1 = x_2 = \dots = x_n\}.$$

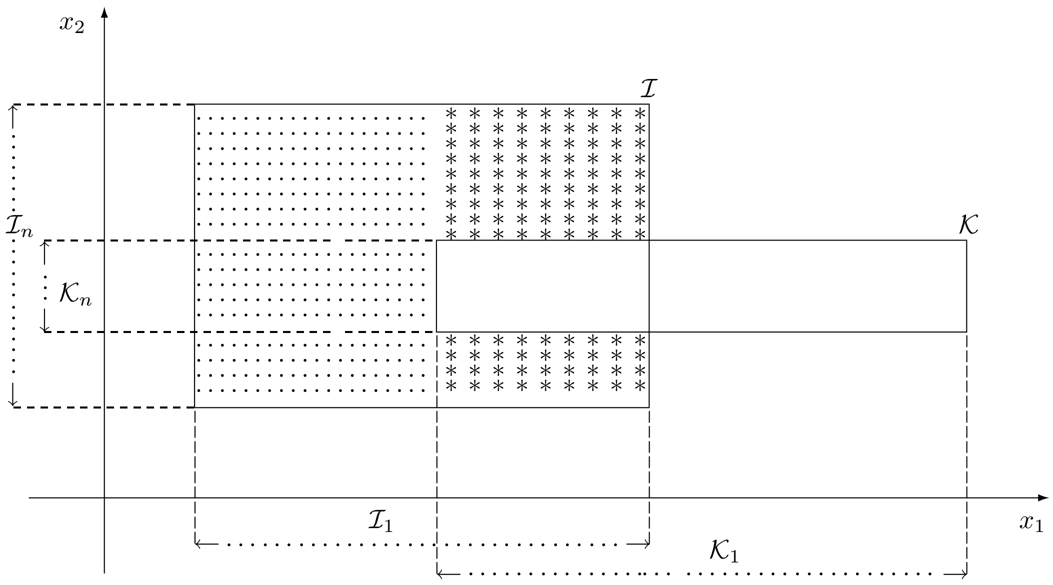
Potom je F uzavřená množina, ale $F \notin \mathfrak{C}_n$. F je totiž nespočetné sjednocení jednobodových intervalů. Pro $n = 1$ je protipříklad složitější a uvedeme jej později. Je to t. zv. Cantorovo diskontinuum.

Lemma: Buďte $\mathcal{I}$, $\mathcal{K}$ intervaly v $\mathbf{R}^n$. Potom lze $\mathcal{I} - \mathcal{K}$ psát jako disjunktní sjednocení konečného počtu intervalů.

Důkaz: Provedeme indukcí. Pro $n = 1$ je lemma zřejmé. Nechť platí pro $n \ge 1$ a buďte $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_n$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_n$ intervaly v $\mathbf{R}^{n+1}$. Potom je

$$\mathcal{I} - \mathcal{K} = \{(\mathcal{I}_1 - \mathcal{K}_1) \times \mathcal{I}_n\} \cup \{\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{K}_1 \times (\mathcal{I}_n - \mathcal{K}_n)\},$$

kde sjednocení na pravé straně je disjunktní a na množiny $\mathcal{I}_1 - \mathcal{K}_1$ a $\mathcal{I}_n - \mathcal{K}_n$ použijeme indukčního předpokladu. Pro ilustraci je načrtnuta jedna z možných situací pro $n = 1$.



Lemma: Buďte $\mathcal{I}, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_p$ intervaly. Potom lze

$$\mathcal{I} - \{\mathcal{K}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_p\}$$

psát jako disjunktní sjednocení konečného počtu intervalů.

Důkaz: Pro $p = 1$ je to tvrzení předchozího lemmatu. Zbytek dostaneme indukcí. Je-li $p > 1$ a platí

$$\mathcal{I} - \{\mathcal{K}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_{p-1}\} = \bigcup_{i=1}^{q} \mathcal{L}_i \,,$$

kde vpravo je disjunktní sjednocení intervalů, potom

$$\mathcal{I} - \{\mathcal{K}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_{p-1} \cup \mathcal{K}_p\} = \bigcup_{i=1}^{q} (\mathcal{L}_i - \mathcal{K}_p)$$

a na každý člen sjednocení na pravé straně použijeme předchozího lemmatu.

Věta: Každou množinu z $\mathfrak{C}_n$ lze psát jako disjunktní sjednocení spočetného systému omezených intervalů.

Důkaz: Buď $A \in \mathfrak{C}_n$. Potom $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}^{(k)} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} L^{(k)}$, kde

$$L^{(1)} = \mathcal{I}^{(1)} \,, \;\; L^{(k+1)} = \mathcal{I}^{(k+1)} - \{\mathcal{I}^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{I}^{(k)}\}$$

a množiny $L^{(k)}$ jsou po dvou disjunktní. Podle předchozího lemmatu lze každou množinu $L^{(k)}$ psát jako disjunktní sjednocení konečného počtu intervalů a důkaz věty je dokončen.

Definice: Buď μ nezáporná σ-aditivní funkce množiny, definovaná na systému $\mathfrak{C}_n$. Funkci množiny $\overline{\mu}$, definovanou na <u>všech</u> podmnožinách R^n předpisem

$$M \subset \mathbf{R}^n \,, \quad \overline{\mu}(M) = \inf_{M \subset C \in \mathfrak{C}_n} \mu(C)$$

nazveme <u>vnější mírou</u> příslušnou množinové funkci μ.

Poznámka: Je-li $M \in \mathfrak{C}_n$, je $\overline{\mu}(M) = \mu(M)$, tedy $\overline{\mu}$ je rozšířením μ na všechny podmnožiny $\mathbf{R}^n$. Není to však míra, poněvadž není na σ-algebře všech podmnožin $\mathbf{R}^n$ σ-aditivní. Příkladem σ-aditivní množinové funkce na $\mathfrak{C}_n$ je funkce λ, která dává Lebesgueovu míru.

Věta: Vnější míra $\overline{\mu}$ má následující vlastnosti
1. $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.
2. Je-li $A \subset B$, pak $\overline{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(B)$.
3. Je-li $M \subset \bigcup\limits_k M_k$, je $\overline{\mu}(M) \leq \sum\limits_k \overline{\mu}(M_k)$.

Důkaz: Vlastnosti 1. a 2. jsou zřejmé.
Ad 3. Je-li $\sum\limits_k \overline{\mu}(M_k) = +\infty$, je tvrzení zřejmé. Buď tedy $\overline{\mu}(M_k) < \infty \;\; \forall k$ a zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Potom existuje $C_k \in \mathfrak{C}_n$ tak, že

$$M_k \subset C_k \,, \;\; \mu(C_k) < \overline{\mu}(M_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Poněvadž je $M \subset \bigcup_k C_k \in \mathfrak{C}_n$, platí

$$\overline{\mu}(M) \leq \mu\left(\bigcup_k C_k\right) \leq \sum_k \mu(C_k) < \sum_k \overline{\mu}(M_k) + \varepsilon\,,$$

tedy $\overline{\mu}(M) \leq \sum_k \overline{\mu}(M_k)$.

! Definice: Buď μ nezáporná σ-aditivní funkce množiny, definovaná na $\mathfrak{C}_n$. Množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ nazveme μ-měřitelnou, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $C \in \mathfrak{C}_n$ tak, že $\overline{\mu}(M \triangle C) < \varepsilon$. Míru μ-měřitelné množiny M budeme značit $\mu(M)$.

Poznámka: Tímto způsobem se podařilo μ rozšířit na systém všech μ-měřitelných množin. Jak se dále ukáže, tyto množiny tvoří σ-algebru, jestliže μ bude splňovat jisté podmínky regularity, které v dalším upřesníme. μ pak bude míra, která navíc bude úplná.

Definice: Řekneme, že množinová funkce μ, definovaná na $\mathfrak{C}_n$ je regulární, jestliže pro libovolný omezený interval $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}^n$ a libovolné $\varepsilon > 0$ existuje omezený otevřený interval $\mathcal{I}_1$ a uzavřený interval $\mathcal{I}_2$ tak, že

$$\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{I}_1 \ \text{ a } \ \mu(\mathcal{I}_2) > \mu(\mathcal{I}) - \varepsilon, \ \ \mu(\mathcal{I}_1) < \mu(\mathcal{I}) + \varepsilon.$$

Lemma: Je-li μ regulární množinová funkce, definovaná na $\mathfrak{C}_n$ a M μ-měřitelná množina, pak existuje množina $A \in \mathfrak{C}_n$, která je sjednocením konečného počtu omezených intervalů tak, že $\overline{\mu}(M \triangle A) < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Důkaz: Předpokládejme nejdříve, že $\overline{\mu}(M) < \infty$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existuje $C \in \mathfrak{C}_n$ tak, že $\overline{\mu}(M \triangle C) < \varepsilon/2$ a dále platí

$$\mu(C) = \overline{\mu}(C) \leq \overline{\mu}(M) + \overline{\mu}(M \triangle C) < \infty.$$

Buď $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k$, kde $\mathcal{I}_k$ jsou disjunktní. Poněvadž je $\mu(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathcal{I}_k) < \infty$, existuje $p \in \mathbf{N}$ tak, že $C = A \cup R$, kde

$$A = \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{I}_k\,, \ \ R = \bigcup_{k=p+1}^{\infty} \mathcal{I}_k \ \text{ a } \ \mu(R) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \mu(\mathcal{I}_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom je $C \triangle A = R$ a tedy

$$\overline{\mu}(M \triangle A) < \overline{\mu}(M \triangle C) + \overline{\mu}(C \triangle A) < \varepsilon.$$

Je-li M libovolná μ-měřitelná množina, aplikujeme předchozí výsledek na množinu $M \cap K_r$, kde K_r je tvaru $\langle r_1, r_1 + 1) \times \langle r_2, r_2 + 1) \times \cdots \times \langle r_n, r_n + 1)$ a $r_i \in \mathbf{Z}$.

! Věta: Buď μ regulární σ-aditivní množinová funkce na $\mathfrak{C}_n$. Potom všechny $\mu-$měřitelné množiny tvoří σ-algebru a μ je na ní úplná míra.

Důkaz: Označme $\mathfrak{M}$ systém všech μ-měřitelných množin. Musíme dokázat 2 tvrzení
1. $\mathfrak{M}$ je σ-algebra
2. μ je σ-aditivní na $\mathfrak{M}$.

Jestliže tato dvě tvrzení dokážeme, není těžké ukázat, že μ je úplná míra. Buď $M \in \mathfrak{M}$, μ-nulová množina, tedy $\mu(M) = 0$ a $N \subset M$ její libovolná podmnožina. Potom je $\overline{\mu}(N) = 0$. Stačí totiž volit $C = \emptyset \in \mathfrak{C}_n$ $\forall \varepsilon > 0$ a tedy $N \in \mathfrak{M}$.

Ad 1. Buď $M \in \mathfrak{M}$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existuje $C \in \mathfrak{C}_n$ tak, že $\overline{\mu}(M \triangle C) < \varepsilon$. Platí $M \triangle C = (\mathbf{R}^n - M) \triangle (\mathbf{R}^n - C)$ a $\mathbf{R}^n - C \in \mathfrak{C}_n$, je-li $C = \bigcup\limits_{k=1}^{p} \mathcal{I}_k$. To však lze vždy zařídit podle předchozího lemmatu. Odtud plyne, že

$$\overline{\mu}\{(\mathbf{R}^n - M) \triangle (\mathbf{R}^n - C)\} < \varepsilon \text{ a } \mathbf{R}^n - M \in \mathfrak{M}.$$

Nechť nyní $M_k \in \mathfrak{M}$ pro $k = 1, 2, \ldots.$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existují $C_k \in \mathfrak{C}_k$ tak, že $\overline{\mu}(M_k \triangle C_k) < \varepsilon/2^k$. Dále platí $\bigcup\limits_k M_k - \bigcup\limits_k C_k \subset \bigcup\limits_k (M_k - C_k)$ a odtud

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \triangle \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) \leq \overline{\mu}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} (M_k \triangle C_k)\right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}(M_k \triangle C_k) < \varepsilon,$$

tedy $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k \in \mathfrak{M}$.

Ad 2. Nechť $M_k \in \mathfrak{M}$ pro $k = 1, 2, \ldots$ jsou po dvou disjunktní množiny, $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$. Je-li $\mu(M_k) = +\infty$ pro nějaké k, je $\mu(M) = +\infty$ a platí tedy $\mu(M) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(M_k)$. Nechť tedy $\mu(M_k) < \infty$ pro $k = 1, 2, \ldots.$ Ukážeme nejdříve, že μ je aditivní. Buď $M = M_1 \cup M_2$, kde $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existují $C_1,\ C_2 \in \mathfrak{C}_n$ tak, že $\mu(M_1 \triangle C_1) < \varepsilon\,, \mu(M_2 \triangle C_2) < \varepsilon\,.$ Dále pro libovolnou dvojici množin A, B platí $A \subset B \cup (A - B)$ a toto sjednocení je disjunktní. Tedy

$$M_i \subset C_i \cup (M_i - C_i)\,; C_i \subset M_i \cup (C_i - M_i)\,, i = 1, 2\,;$$
$$M_1 \cup M_2 \subset (C_1 \cup C_2) \cup \{M_1 \cup M_2 - C_1 \cup C_2\}$$

a analogicky pro $C_1 \cup C_2$. odtud plyne, že

$$\mu(M_i) \leq \mu(C_i) + \varepsilon\,; \quad \mu(C_i) \leq \mu(M_i) + \varepsilon\,; \quad i = 1, 2$$

$$\mu(M_1 \cup M_2) \leq \mu(C_1 \cup C_2) + 2\varepsilon\,; \qquad \mu(C_1 \cup C_2) \leq \mu(M_1 \cup M_2) + 2\varepsilon\,,$$

neboli

$$\mu(C_i) \leq \mu(M_i) + \varepsilon \leq \mu(C_i) + 2\varepsilon\,; \quad i = 1, 2$$
$$\mu(C_1 \cup C_2) \leq \mu(M_1 \cup M_2) + 2\varepsilon \leq \mu(C_1 \cup C_2) + 4\varepsilon$$
$$-\mu(C_i) - 2\varepsilon \leq -\mu(M_i) - \varepsilon \leq -\mu(C_i)\,; \quad i = 1, 2\,.$$

Sečtením dostaneme

$$\mu(C_1 \cup C_2) - \mu(C_1) - \mu(C_2) - 4\varepsilon \leq \mu(M_1 \cup M_2) - \mu(M_1) - \mu(M_2) \leq \mu(C_1 \cup C_2) - \mu(C_1) - \mu(C_2) + 4\varepsilon\,.$$

Dále platí

$$\mu(C_1 \cup C_2) = \mu(C_1) + \mu(C_2) - \mu(C_1 \cap C_2)\,.$$

[Je $C_2 = (C_2 - C_1) \cup (C_1 \cap C_2)\,,\ C_1 \cup C_2 = C_1 \cup (C_2 - C_1)$ a sjednocení vpravo jsou disjunktní.]
Dosazením do předchozích nerovností dostaneme

$$-\mu(C_1 \cap C_2) - 4\varepsilon \leq \mu(M_1 \cup M_2) - \mu(M_1) - \mu(M_2) \leq -\mu(C_1 \cap C_2) + 4\varepsilon\,.$$

Poněvadž

$$C_1 \cap C_2 \subset (C_1 - M_1) \cup (C_2 - M_2) \cup (M_1 \cap M_2)$$

a $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, dostaneme $0 \leq \mu(C_1 \cap C_2) < 2\varepsilon$ neboli $-2\varepsilon < -\mu(C_1 \cap C_2) \leq 0$ a odtud

$$-6\varepsilon \leq \mu(M_1 \cup M_2) - \mu(M_1) - \mu(M_2) \leq 4\varepsilon\,.$$

Indukcí dostaneme okamžitě, že $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p} M_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{p} \mu(M_k)$ pro libovolný disjunktní systém, $p \in \mathbf{N}$. Je-li nyní $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$, platí $\mu(M) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(M_k)$, což je pravda i pro vnější míru. Obráceně poněvadž $\bigcup\limits_{k=1}^{p} M_k \subset M \ \ \forall p \in \mathbf{N}$, tedy $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{p} M_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{p} \mu(M_k) \le \mu(M)$ a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \mu(M_k) \le \mu(M)\,.$$

2.2 Měřitelné funkce a integrál.

Definice: Řekneme, že vlastnost $V(x)$ pro $x \in M \subset \mathbf{R}^n$ platí skoro všude (zkratka s. v.) nebo μ-skoro všude v množině M, jestliže $V(x)$ platí pro $x \in M - N$, kde $\mu(N) = 0$.

Definice: Řekneme, že funkce f je měřitelná v množině M, jestliže platí
1. M je měřitelná.
2. f je definována skoro všude v M.
3. Pro každé $c \in \mathbf{R}$ je množina $\{x \in M; f(x) > c\}$ měřitelná.

Poznámka: Je-li f spojitá v měřitelné množině M, je množina $\{x \in M; f(x) > c\}$ otevřená a tedy měřitelná. Tudíž každá spojitá funkce je měřitelná.

Věta: Buď f funkce definovaná skoro všude v měřitelné množině M. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní.
1. $\forall c \in \mathbf{R}$ je $\{x \in M; f(x) > c\}$ měřitelná,
2. $\forall c \in \mathbf{R}$ je $\{x \in M; f(x) \le c\}$ měřitelná,
3. $\forall c \in \mathbf{R}$ je $\{x \in M; f(x) < c\}$ měřitelná,
4. $\forall c \in \mathbf{R}$ je $\{x \in M; f(x) \ge c\}$ měřitelná.

Důkaz: Je
$$\{x \in M; f(x) \le c\} = M - \{x \in M; f(x) > c\}\,.$$
Odtud plyne ekvivalence $1 \Leftrightarrow 2$. Analogicky dostaneme ekvivalenci $3 \Leftrightarrow 4$. Dále
$$\{x \in M; f(x) > c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in M; f(x) \ge c + \frac{1}{k}\right\}$$
$$\text{a} \ \{x \in M; f(x) \ge c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in M; f(x) > c - \frac{1}{k}\right\},$$
což dokazuje ekvivalenci $1 \Leftrightarrow 4$.

Poznámka: Jsou-li f, g měřitelné v M, $c \in \mathbf{R}$, pak jsou měřitelné i následující množiny.

$$A_1 = \{x \in M; f(x) = c\}\,, \quad A_2 = \{x \in M; f(x) = +\infty\}\,, \quad A_3 = \{x \in M; f(x) = -\infty\}\,,$$

$$A_4 = \{x \in M; f(x) < \infty\}\,, \quad A_5 = \{x \in M; f(x) > -\infty\}\,, \quad A_6 = \{x \in M; f(x) < g(x)\}\,,$$

$$A_7 = \{x \in M; f(x) \geq g(x)\}\,, \quad A_8 = \{x \in M; f(x) = g(x)\}$$

a podobně. Je na příklad

$$A_1 = \{x \in M; f(x) \geq c\} \cap \{x \in M; f(x) \leq c\}\,, \quad A_2 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in M; f(x) > k\}\,.$$

Definice: Buď f reálná funkce. Potom kladnou částí f rozumíme funkci $f^+ = \max\{f, 0\}$ a zápornou částí funkci $f^- = \max\{-f, 0\}$. Řekneme, že χ_A je charakteristická funkce množiny A, jestliže $\chi_A(x) = 1$ pro $x \in A$ a $\chi_A(x) = 0$ pro $x \notin A$.

Poznámka: Je zřejmé, že platí

$$f = f^+ - f^-\,, \ \ |f| = f^+ + f^-\,;$$

pro

$$a > 0 \ \text{ je } \ (a\,f)^+ = a\,f^+\,, \ \ (a\,f)^- = a\,f^-$$

a pro

$$a < 0 \ \text{ platí } \ (a\,f)^+ = -a\,f^-\,, \ \ (a\,f)^- = -a\,f^+.$$

Věta: Buďte f, g měřitelné v M, $a \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$. Potom jsou také funkce

$$a\,f\,, \ \ \max\{f, g\}\,, \ \ \min\{f, g\}\,, \ \ f^+\,, \ \ f^-\,, \ \ f \cdot g\,, \ \text{ a } \ |f|^\alpha$$

měřitelné v M. Funkce $f + g$ a f/g jsou měřitelné v podmnožině M, kde jsou definovány.

Důkaz: 1. Pro $\forall c \in \mathbf{R}$ je

$$\{x \in M; af(x) > c\} = \begin{cases} \left\{x \in M;\ f(x) > \frac{c}{a}\right\} & \text{pro } a > 0, \\ \left\{x \in M;\ f(x) < \frac{c}{a}\right\} & \text{pro } a < 0\,. \end{cases}$$

Pro $a = 0$ je $a\,f(x) = 0$, tedy $a\,f$ je spojitá.

2. $\{x \in M;\ \max\{f, g\} > c\} = \{x \in M;\ f(x) > c\} \cup \{x \in M;\ g(x) > c\}$. Analogicky pro $\min\{f, g\}$ se znaménkem $<$.

3. Tvrzení pro f^+ a f^- plyne okamžitě z 2.

4. $\{x \in M;\ |f(x)|^\alpha < c\} = \left\{x \in M;\ -c^{1/\alpha} < f(x) < c^{1/\alpha}\right\}$ pro $c > 0$ a pro $c < 0$ dostaneme prázdnou množinu.

5. $\{x \in M;\ f(x) + g(x) > c\} = \{x \in M;\ f(x) > c - g(x)\}$ a funkce $c - g(x)$ je měřitelná. Platí totiž $\{x \in M;\ c - g(x) > c_1\} = \{x \in M;\ g(x) < c - c_1\}$.

6. $\left\{x \in M;\ \frac{1}{g(x)} > c\right\} = \left\{x \in M;\ 0 < g(x) < \frac{1}{c}\right\}$ pro $c > 0$,

$$\left\{x \in M;\ \frac{1}{g(x)} > c\right\} = \{x \in M;\ g(x) > 0\} \cup \left\{x \in M;\ g(x) < \frac{1}{c}\right\} \ \text{ pro } \ c < 0$$

a pro $c = 0$ dostaneme $\left\{x \in M;\ \frac{1}{g(x)} > 0\right\} = \{x \in M;\ g(x) > 0\}$.

7. $\{x \in M;\ f(x)\,g(x) > c\} = \left[\left\{x \in M;\ f(x) > \frac{c}{g(x)}\right\} \cap \{x \in M; g(x) > 0\}\right] \cup$
$\cup \left[\left\{x \in M;\ f(x) < \frac{c}{g(x)}\right\} \cap \{x \in M;\ g(x) < 0\}\right]$.

8. Tvrzení pro podíl dostaneme použitím 6 a 7 na součin $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$.

Věta: Buď $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí. Potom jsou také měřitelné funkce

$$\sup_n f_n(x)\,,\ \ \inf_n f_n(x)\,,\ \ \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,,\ \ \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\ \text{ a }\ \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,,$$

pokud existuje.

Důkaz: Označme $h_1 = \sup_n f_n$, $h_2 = \inf_n f_n$, $h_3 = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n$, $h_4 = \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n$. Potom platí

$$\{x \in M;\, h_1(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in M; f_n(x) > c\} \text{ a}$$

$$\{x \in M;\, h_2(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in M;\, f_n(x) < c\}\,,$$

tedy funkce h_1 a h_2 jsou měřitelné.
Označme $g_p(x) = \sup_{n\geq p} f_n(x)$. Potom je $g_p(x) \geq g_{p+1}(x)$ a $h_3(x) = \lim_{p\to\infty} g_p(x) = \inf_{p=1,2,\dots} g_p(x)$ je měřitelná. Analogicky pro h_4 .

Věta: Buď φ měřitelná funkce v množině $M \subset \mathbf{R}^n$ a f spojitá funkce na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}$. Potom je složená funkce $f \circ \varphi$ měřitelná.

Důkaz: Uvažme množinu $G_c = \{u \in \mathbf{R};\, f(u) > c\}$. Tato množina je vzhledem ke spojitosti f otevřená a lze ji napsat ve tvaru $G_c = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, kde I_n jsou otevřené intervaly, na příklad $I_n = (a_n, b_n)$. Množiny $A_n = \{x \in M;\, a_n < \varphi(x) < b_n\}$ jsou měřitelné a platí

$$\{x \in M; f(\varphi(x)) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,.$$

Poznámky: 1. Předchozí věty ukazují, že množina všech měřitelných funkcí je uzavřena vzhledem k operacím s funkcemi, včetně limitních přechodů a je tedy dostatečně široká.

2. Důležitou roli v celém dalším výkladu však budou hrát t.zv. jednoduché funkce.

Definice: Jednoduchou funkcí nazveme funkci tvaru $f = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i \chi_{A_i}$, kde $\alpha_i \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ a A_i jsou měřitelné množiny.

Věta: Buď M měřitelná množina, f měřitelná v M. Potom existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých konečných funkcí s následujícími vlastnostmi.

1. $f_n(x) = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ pro všechna $x \in M$, kde f není definována.
2. Je-li $x \in M$, $f(x) \geq 0$, je $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$.
3. Je-li $x \in M$, $f(x) \leq 0$, je $0 \geq f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f(x)$.
4. Je-li $|f(x)| < n$, je $|f(x) - f_n(x)| < 1/2^n$.
5. Je-li $f(x) \geq n$, je $f_n(x) = n$.
6. Je-li $f(x) \leq -n$, je $f_n(x) = -n$.
7. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro všechna $x \in M$, kde je f definována.

Je-li f omezená v jisté množině $M_1 \subset M$, je dokonce $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně v M_1 .

Důkaz: Důkaz provedeme tak, že příslušnou funkci f_n sestrojíme. Předpokládejme, že $f \geq 0$; v obecném případě napíšeme f ve tvaru $f = f^+ - f^-$ a provedeme konstrukci odděleně pro

f^+ a f^- . Definujme množiny

$$A_{n,i} = \left\{ x \in M; \frac{i-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \; B_n = \{x \in M; f(x) \ge n\}$$

pro $n = 1, 2, \ldots$ a $i = 1, 2, \ldots, n2^n$. Jestliže položíme

$$f_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{A_{n,i}} + n\chi_{B_n} ,$$

dostaneme požadovanou funkci.

Definice: Řekneme, že nezáporná funkce f je jednoduchá μ-integrovatelná na množině M, je-li tvaru

$$f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \chi_{E_i} ,$$

kde $E_1, \ldots, E_p$ jsou disjunktní měřitelné množiny, $M = \bigcup\limits_{i=1}^{p} E_i$, $\alpha_i \ge 0$ konstanty. Integrál funkce f definujeme pak vztahem

$$\int\limits_M f(x)\, d\mu(x) = \int\limits_M f \, d\mu = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \mu(E_i) .$$

Je-li f libovolná jednoduchá funkce, pak definujeme

$$\int\limits_M f \, d\mu = \int\limits_M f^+ \, d\mu - \int\limits_M f^- \, d\mu ,$$

pokud má pravá strana smysl. Řekneme, že $\mathcal{I} = \int\limits_M f \, d\mu$ konverguje, je-li $\mathcal{I} \ne \pm\infty$.

Poznámky: 1. Je-li specielně $f = \chi_M$, potom $\int\limits_M f \, d\mu = \mu(M)$.

2. Je-li $\mu = \lambda$, tedy Lebesgueova míra, pak $\int\limits_M f(x)\, d\lambda(x)$ budeme značit tradičně

$$\int\limits_M f(x)\, dx = \int\limits_M f \, dx .$$

! Definice: (Lebesgue-Stieltjesův integrál)
Buď Σ Borelovská σ-algebra podmnožin $\mathbf{R}^n$, $M \in \Sigma$, f nezáporná měřitelná funkce v M . Definujme

$$\int\limits_M f \, d\mu = \sup \left\{ \int\limits_M s \, d\mu ; \; 0 \le s \le f \right\} ,$$

kde s je jednoduchá μ-integrovatelná funkce. Pro obecnou měřitelnou funkci f definujeme

$$\int\limits_M f \, d\mu = \int\limits_M f^+ \, d\mu - \int\limits_M f^- \, d\mu ,$$

má-li pravá strana smysl.

Označení: Symbolem $L(M)$ budeme značit množinu všech měřitelných funkcí f takových, že $\int\limits_M f \, d\mu$ konverguje.

Poznámky: 1. Z předchozí definice integrálu okamžitě plyne, že pro libovolnou měřitelnou funkci $f \geq 0$ existuje $\int\limits_M f\,d\mu$, může však být $\int\limits_M f\,d\mu = +\infty$.

2. Poněvadž uvažujeme měřitelné funkce, které tedy nemusí být definovány všude, plyne odtud, že pokud $f, g \in L(M)$ a $f(x) = g(x)$ s. v. v M, potom $\int\limits_M f\,d\mu = \int\limits_M g\,d\mu$. Toto platí dokonce i pro případ, že je jeden z integrálů roven $+\infty$ nebo $-\infty$. Potom i druhý má stejnou hodnotu.

3. Je-li $f(x) = 0$ s. v. v M, potom je $f \in L(M)$ a $\int\limits_M f\,d\mu = 0$. Obrácení tohoto tvrzení bude zformulováno později.

4. Z definice integrálu plyne, že je-li $f \geq 0$ na měřitelné množině M, potom existuje posloupnost $\{s_n\}$ jednoduchých μ-integrovatelných funkcí tak, že $0 \leq s_n \leq s_{n+1}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_M s_n\,d\mu = \int\limits_M f\,d\mu$.

Lemma: Buďte f_1, f_2 nezáporné μ-měřitelné funkce na množině M. Potom je

$$\int\limits_M \{f_1 + f_2\}\,d\mu = \int\limits_M f_1\,d\mu + \int\limits_M f_2\,d\mu.$$

Důkaz: Můžeme předpokládat, že f_1 a f_2 jsou definovány všude a předpokládejme dále, že f_1 i f_2 jsou jednoduché μ-integrovatelné, tedy jsou tvaru

$$f_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,\chi_{A_i}, \quad f_2 = \sum_{j=1}^{q} \beta_j\,\chi_{B_j}, \quad \text{kde } \alpha_i, \beta_j \geq 0; \quad M = \bigcup_{i=1}^{p} A_i = \bigcup_{j=1}^{q} B_j$$

a množiny $\{A_i\}_{i=1}^p$ i $\{B_j\}_{j=1}^q$ jsou po dvou disjunktní. Potom platí

$$\int\limits_M (f_1 + f_2)\,d\mu = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} (\alpha_i + \beta_j)\,\mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\,\mu(B_j) = \int\limits_M f_1\,d\mu + \int\limits_M f_2\,d\mu.$$

pro obecný případ zvolme posloupnosti $\{s_n^{(1)}\}$ a $\{s_n^{(2)}\}$ jednoduchých μ-integrovatelných funkcí takových, že $s_n^{(1)} \nearrow f_1$, $s_n^{(2)} \nearrow f_2$.

Lemma: Buďte f a g integrovatelné v M a $f(x) \leq g(x)$ s. v. v M. Potom $\int\limits_M f\,d\mu \leq \int\limits_M g\,d\mu$.

Důkaz: 1. Tvrzení je zřejmé, je-li $\int\limits_M f\,d\mu = -\infty$ nebo $\int\limits_M g\,d\mu = +\infty$. Dále můžeme předpokládat, že $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in M$.

2. Buďte nyní f, g nezáporné jednoduché μ-integrovatelné na M; jsou tedy tvaru

$$f = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\,\chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{q} \beta_j\,\chi_{B_j}.$$

Podle postupu z důkazu předchozího lemmatu dostaneme

$$\int\limits_M f\,d\mu = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j\,\mu(B_j) = \int\limits_M g\,d\mu.$$

3. Pro obecný případ $0 \leq f(x) \leq g(x)$ můžeme zvolit posloupnosti $\{s_n\}$ a $\{t_n\}$ jednoduchých μ-integrovatelných funkcí tak, že

$$0 \leq s_n \leq t_n \ \text{ a } \int\limits_M s_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_M f\,d\mu, \quad \int\limits_M t_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_M g\,d\mu$$

a ze vztahů $\int\limits_M s_n\,d\mu \le \int\limits_M t_n\,d\mu$ dostaneme tvrzení.

4. Buď obecně

$$f = f^+ - f^-\,,\;\; g = g^+ - g^-\,,\;\; f \le g \;\Rightarrow\; f^+ - f^- \le g^+ - g^- \;\Rightarrow\; f^+ + g^- \le g^+ + f^-\,.$$

Podle předchozí části důkazu a předchozího lemmatu platí

$$\int\limits_M f^+\,d\mu + \int\limits_M g^-\,d\mu = \int\limits_M (f^+ + g^-)\,d\mu \le \int\limits_M (g^+ + f^-)\,d\mu = \int\limits_M g^+\,d\mu + \int\limits_M f^-\,d\mu\,.$$

Je-li $\int\limits_M g\,d\mu = -\infty$, tedy $\int\limits_M g^-\,d\mu = +\infty$, je také $\int\limits_M f^-\,d\mu = +\infty$.

Je-li $\int\limits_M f\,d\mu = +\infty$, tedy $\int\limits_M f^+\,d\mu = +\infty$, je také $\int\limits_M g^+\,d\mu = +\infty$.

Pro $f, g \in L(M)$ dostaneme

$$\int\limits_M f\,d\mu = \int\limits_M f^+\,d\mu - \int\limits_M f^-\,d\mu \le \int\limits_M g^+\,d\mu - \int\limits_M g^-\,d\mu = \int\limits_M g\,d\mu\,.$$

! Věta: (Vlastnosti $L(M)$)
Platí následující tvrzení

1. Je-li $f \in L(M)$, je f konečná s. v. v M.
2. Jsou-li $f, g \in L(M)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, potom

$$\alpha f + \beta g \in L(M) \;\text{ a }\; \int\limits_M \{\alpha f + \beta g\}\,d\mu = \alpha \int\limits_M f\,d\mu + \beta \int\limits_M g\,d\mu\,.$$

3. $f \in L(M) \Leftrightarrow |f| \in L(M)$ a platí $|\int\limits_M f\,d\mu| \le \int\limits_M |f|\,d\mu$.
4. Je-li $f, g \in L(M)$, potom $\max\{f, g\} \in L(M)$, $\min\{f, g\} \in L(M)$.
5. Je-li $f \ge 0$ s. v. v M a $\int\limits_M f\,d\mu = 0$, potom $f = 0$ s. v. v M.
6. Je-li f μ-měřitelná v M, $g \in L(M)$ a $|f| \le g$ s. v. v M, potom $f \in L(M)$.
7. Je-li f μ-měřitelná a omezená s. v. v M, $\mu(M) < \infty$, potom $f \in L(M)$.
8. Je-li $f \in L(M)$, g $\mu-$měřitelná a omezená s. v. v M, potom $f \cdot g \in L(M)$.

Důkaz: 1. Buď $f \in L(M)$ a označme $A = \{x \in M; f(x) = +\infty\}$. Potom je A měřitelná, $0 \le n\,\chi_A \le f^+$ $\forall n \in \mathbf{N}$ a odtud

$$0 \le \int\limits_M n\,\chi_A\,d\mu \le \int\limits_M f^+\,d\mu < \infty\,,\;\; \text{neboli}\;\; \mu(A) \le \frac{1}{n}\int\limits_M f^+\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

To ale znamená, že $\mu(A) = 0$.

2. Je zřejmé, že $\int\limits_M \alpha f\,d\mu = \alpha \int\limits_M f\,d\mu$ pro $f \in L(M)$ a $\alpha \in \mathbf{R}$.

Nechť $f, g \in L(M)$ a pišme $f = f^+ - f^-$ $g = g^+ - g^-$, $h = f + g$ [má smysl s. v. podle 1] $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. Podle předchozího lemmatu je

$$\int\limits_M h^+\,d\mu + \int\limits_M f^-\,d\mu + \int\limits_M g^-\,d\mu = \int\limits_M f^+\,d\mu + \int\limits_M g^+\,d\mu + \int\limits_M h^-\,d\mu$$

a tvrzení $\int\limits_M (f+g)\,d\mu = \int\limits_M f\,d\mu + \int\limits_M g\,d\mu$ plyne z toho, že $\int\limits_M h^+\,d\mu < \infty$. Platí totiž $0 \le h^+ = (f+g)^+ \le f^+ + g^+$. Tvrzení 2 dostaneme nyní okamžitě z předchozího.

3. Poněvadž je $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, plyne odtud okamžitě ekvivalence $f \in L(M) \Leftrightarrow |f| \in L(M)$. Dále

$$\left|\int\limits_M f\,d\mu\right| = \left|\int\limits_M f^+\,d\mu - \int\limits_M f^-\,d\mu\right| \le \left|\int\limits_M f^+\,d\mu\right| + \left|\int\limits_M f^-\,d\mu\right| =$$

$$= \int\limits_M f^+\,d\mu + \int\limits_M f^-\,d\mu = \int\limits_M (f^+ + f^-)\,d\mu = \int\limits_M |f|\,d\mu\,.$$

4. Platí $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\{f+g+|f-g|\}$ a $\min\{f,g\} = \frac{1}{2}\{f+g-|f-g|\}$ a odtud plyne okamžitě tvrzení věty.

5. Pro $k = 1,2,\dots$ položme $M_k = \left\{x \in M; f(x) \ge \frac{1}{k}\right\}$. Je

$$0 = \int\limits_M f\,d\mu \ge \int\limits_{M_k} f\,d\mu \ge \int\limits_{M_k} \frac{1}{k}\,d\mu = \frac{1}{k}\mu(M_k)\,,$$

tedy $\mu(M_k) = 0$ $(k = 1,2,\dots)$ a také $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k\right) = 0$. Platí však

$$\{x \in M; f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\,.$$

6. Je-li f μ-měřitelná, je i f^+ μ-měřitelná a platí

$$0 \le \int\limits_M f^+\,d\mu \le \int\limits_M g\,d\mu < \infty\,.$$

[Je totiž $0 \le f^+ \le |f| \le g$.] Analogicky ukážeme, že $f^- \in L(M)$ a $f = f^+ - f^- \in L(M)$.

7. Je-li $|f(x)| \le K$ s. v. v M, potom

$$\int\limits_M |f|\,d\mu \le \int\limits_M K\,d\mu = K\,\mu(M) < \infty\,.$$

Odtud plyne důležitý postřeh: konstanta je integrovatelná funkce na libovolné množině konečné míry.

8. Analogicky jako v 7 platí,že $f \cdot g$ je měřitelná a $|f \cdot g| \le K\,|f| \in L(M)$.

2.3 Integrály závislé na parametru.

Poznámka: V tomto paragrafu budeme zkoumat jednu ze základních otázek matematické analýzy a jejích aplikací, t.j. záměnu dvou limitních procesů. V tomto speciálním případu se bude jednat o záměnu typu

$$\lim_{k\to\infty} \int_M f_k \, d\mu \overset{?}{=} \int_M \lim_{k\to\infty} f_k \, d\mu \, .$$

Ukazuje se, že tato záměna je možná ve třech hlavních případech. Při stejnoměrné konvergenci, při monotonní konvergenci nebo existuje-li integrovatelná majoranta nezávislá na k (Lebesgueova věta).

Věta: Nechť $f_k \in L(M)$ $(k = 1, 2, \dots)$, $\mu(M) < \infty$ a $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ stejnoměrně v M. Potom $f \in L(M)$ a

$$\int_M f \, d\mu = \int_M \lim_{k\to\infty} f_k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \, d\mu \, .$$

Důkaz: Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom $\exists\, k_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $\forall\, x \in M$ a $\forall\, k \geq k_0$ platí $|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon$. Zvolíme-li $\varepsilon = 1$, dostaneme $f_{k_0}(x) - 1 < f(x) < f_{k_0}(x) + 1$ a odtud plyne, že $f \in L(M)$. Dále

$$\left| \int_M f \, d\mu - \int_M f_k \, d\mu \right| \leq \int_M |f - f_k| \, d\mu \leq \varepsilon \, \mu(M) \, ,$$

což dává tvrzení věty.

Věta: Buďte f_k μ-měřitelné v množině M a nechť $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ s. v. v M. Položme $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. Potom $\int\limits_M f \, d\mu = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_M f_k \, d\mu$.

Důkaz: Poněvadž je $f_k \leq f_{k+1}$, dostaneme, že posloupnost $\left\{ \int\limits_M f_k \, d\mu \right\}$ je neklesající a tedy existuje $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_M f_k \, d\mu$. Poněvadž je dále $f_k \leq f$, platí $\alpha \leq \int\limits_M f \, d\mu$ a tvrzení věty je zřejmé, je-li $\alpha = +\infty$. Předpokládejme, že $\alpha < +\infty$ a zvolme pevně jednoduchou μ-integrovatelnou funkci s tak, že $0 \leq s \leq f$. Dokážeme, že $\int\limits_M s \, d\mu \leq \alpha$.

1. Buď $\tau \in (0, 1)$ a definujme množinu $E_k = \{x \in M; f_k(x) \geq \tau\, s(x)\}$. Potom je E_k měřitelná, $E_k \subset E_{k+1}$ a $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \lim\limits_{k\to\infty} E_k = M$. [Je-li $f(x) = 0$, je $x \in E_1$, je-li $f(x) > 0$, je $\tau\, s(x) < \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, poněvadž $\tau < 1$.] Tedy $\mu(E_k \cap A) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$ pro každou měřitelnou podmnožinu $A \subset M$.

2. Buď $s = \sum\limits_{i=1}^{p} \beta_i \, \chi_{A_i}$, kde $M = \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$ a A_i jsou po dvou disjunktní. Potom

$$\int_M f_k \, d\mu \geq \int_{E_k} f_k \, d\mu \geq \int_{E_k} \tau\, s \, d\mu = \tau \int_{E_k} \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, \chi_{A_i} \, d\mu = \tau \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, \mu(A_i \cap E_k) \, .$$

3. Jestliže přejdeme ve 2 k limitě pro $k \to \infty$, dostaneme (využitím 1)

$$\alpha \geq \tau \sum_{i=1}^{p} \beta_i \, \mu(A_i) = \tau \int_M s \, d\mu \, .$$

Poněvadž $\tau \in (0, 1)$ bylo libovolné, plyne odtud, že $\alpha \geq \int\limits_M s \, d\mu$ a tedy i $\alpha \geq \int\limits_M f \, d\mu$.

Důsledek: Buďte u_k $(k = 1, 2, \dots)$ měřitelné v M a nechť $u_k(x) \geq 0$ s. v. v M. Označme $s(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Potom platí $\int\limits_M s\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_M u_k\,d\mu$.

Důkaz: Označíme-li $s_p(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(x)$, je $\{s_p\}$ monotonní a nezáporná. Podle předchozí věty platí

$$\int\limits_M s\,d\mu = \lim_{p\to\infty} \int\limits_M s_p\,d\mu = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \int\limits_M u_k\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_M u_k\,d\mu\,.$$

! Důsledek: (Leviho věta)
Buďte g_k $(k = 1, 2, \dots)$ měřitelné v M, $g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots$ s. v. v M, $g(x) = \lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)$. Předpokládejme, že $\int\limits_M g_1\,d\mu > -\infty$. Potom platí

$$\int\limits_M g\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_M g_k\,d\mu\,.$$

Důkaz: Je-li $\int\limits_M g_1\,d\mu = +\infty$, pak je tvrzení věty správné a buď tedy $g_1 \in L(M)$. Označme $f_k = g_k - g_1$; potom je $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ a podle hlavní věty platí

$$\int\limits_M (g - g_1)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_M (g_k - g_1)\,d\mu$$

a odtud plyne tvrzení Leviho věty.

!! Důsledek: (Lebesgueova věta)
Buďte f_k $(k = 1, 2, \dots)$ měřitelné v M a nechť existuje $\varphi \in L(M)$ tak, že $|f_k(x)| \leq \varphi(x)$ s. v. v M $(k = 1, 2, \dots)$. Nechť dále existuje $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ s. v. v M. Potom je $f \in L(M)$ a platí

$$\int\limits_M f\,d\mu = \int\limits_M \lim_{k\to\infty} f_k\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_M f_k\,d\mu\,.$$

Důkaz: Provedeme převodem na Leviho větu. Je

$$f = \limsup_{k\to\infty} f_k = \liminf_{k\to\infty} f_k \ \text{ a položme } \ g_n = \sup_{k\geq n} f_k\,,\ \ h_n = \inf_{k\geq n} f_k\,.$$

Potom platí

$$g_n \geq g_{n+1}\,,\ \ h_n \leq h_{n+1}\,,\ \ \lim_{n\to\infty} g_n = f = \lim_{n\to\infty} h_n\,;\ \ -\varphi \leq h_1 \leq h_n \leq f_n \leq g_n \leq g_1 \leq \varphi$$

s. v. v M. Podle Leviho věty je

$$\int\limits_M f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M h_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M g_n\,d\mu$$

a poněvadž $-\infty < \int\limits_M h_n\,d\mu \leq \int\limits_M f_n\,d\mu \leq \int\limits_M g_n\,d\mu < +\infty$, dostaneme tvrzení věty.

Důsledek: Buď $\{f_k\}$ posloupnost μ-měřitelných funkcí na M a $\varphi \in L(M)$. Předpokládejme, že $|\sum_{j=1}^{n} f_j| \le \varphi$ s. v. v M a $\forall n \in \mathbf{N}$ a že řada $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ konverguje skoro všude v M. Potom

$$\int_M \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f_j \, d\mu .$$

Důkaz: Plyne okamžitě z Lebesgueovy věty, jestliže ji aplikujeme na posloupnost částečných součtů dané řady $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$.

! Důsledek: (Fatouovo lemma)
Buď $\{f_k\}$ posloupnost μ-měřitelných funkcí na M, $\varphi \in L(M)$. Jestliže $f_k \ge \varphi$ s.v. v M a pro $\forall k \in \mathbf{N}$, potom

$$\int_M \liminf_{k\to\infty} f_k \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_M f_k \, d\mu .$$

Důkaz: Označme $g_n = \inf_{k \ge n} f_k$. Potom je $\varphi \le g_1 \le g_2 \le \cdots$ a dále $g_k \le f_k \ \forall k \in \mathbf{N}$, tedy $\int_M g_k \, d\mu \le \int_M f_k \, d\mu$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$. Podle Leviho věty platí

$$\int_M \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_M \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M g_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_M f_n \, d\mu .$$

Definice: Buď f integrovatelná funkce na množině M. Potom množinovou funkci $\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu$, kde $E \subset M$ je měřitelná, nazýváme neurčitým Lebesgueovým integrálem.

Věta: Buď $f \in L(M)$. Jestliže $\int_E f \, d\mu = 0$ pro každou měřitelnou množinu $E \subset M$, potom je $f = 0$ s. v. v M.

Důkaz: Označme $E = \{x \in M; f \ge 0\}$. Potom je $\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu = 0$ a podle vlastnosti 5 množiny $L(M)$ je $f^+ = 0$ s. v. v M. Analogicky dokážeme, že $f^- = 0$ s. v. v M.

Důsledek: Nechť $f, g \in L(M)$. Jestliže $\int_E f \, d\mu \le \int_E g \, d\mu$ pro každou měřitelnou množinu $E \subset M$, potom $f \le g$ s. v. v M.

Důkaz: Buď $h = (f-g)^+$. Potom je $h \ge 0$ a $0 \le \int_E h \, d\mu = \int_{E \cap \{x \in M; h > 0\}} (f-g) \, d\mu \le 0$. Odtud plyne, že $(f-g)^+ = 0$ s. v. v M, tedy $f \le g$ s. v. v M.

Věta: Buď $f \ge 0$ měřitelná. Potom je $\mu_f(E) = \int_E f \, d\mu$ míra. Navíc $\mu_f(E) = 0$ pro každou množinu $E \subset M$ takovou, že $\mu(E) = 0$.

Důkaz: Musíme ukázat, že μ_f je σ-aditivní množinová funkce, tedy

$$\mu_f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n)$$

pro každý disjunktní systém množin $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \ne j$.

Jestliže si uvědomíme, že $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_M f\,\chi_E\,d\mu$ pro každou měřitelnou podmnožinu $E \subset M$, pak $f\,\chi_A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f\,\chi_{A_n}$ a tvrzení plyne z důsledku před Leviho větou.

Poznámky: 1. Položme si otázku, zda pro libovolnou dvojici měr $\nu\,,\mu$ existuje nezáporná měřitelná funkce f tak, že $\nu = \mu_f$, neboli $\nu(E) = \int\limits_E f\,d\mu$. Odpověď je negativní, jak plyne z předchozí věty. Jak situace vypadá obecně, bude popsáno v následujícím paragrafu.

2. Pomocí Legesgueovy věty je možné jednoduše odvodit tvrzení o spojité závislosti integrálu na parametru a větu o derivaci integrálu podle parametru, která slouží jako účinná metoda výpočtu určitých integrálů. Budeme používat označení

$$\int\limits_M f(x)\,d\,x \text{ pro integrál typu } \int\limits_M \cdots \int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots\,dx_n\,.$$

Integrálem, závislým na parametru, budeme rozumět integrál tvaru $F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,dx$, kde α je parametr z nějakého metrického prostoru $\mathbf{X}$.

Věta: Buď $M \subset \mathbf{R}^n$ měřitelná, $\mathbf{X}$ metrický prostor, α_0 hromadný bod $\mathbf{X}$, $f(x,\alpha)$ komplexní funkce na $M \times \mathbf{X}$ a nechť platí

1. Pro s. v. $x \in M$ existuje $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha) = g(x)$.
2. Pro každé $\alpha \in \mathbf{X} - \{\alpha_0\}$ je $f(x,\alpha)$ měřitelná v M.
3. Existuje funkce $\varphi \in L(M)$ tak, že pro $\alpha \in \mathbf{X} - \{\alpha_0\}$ je $|f(x,\alpha)| \le \varphi(x)$ s. v. v M.

Potom je

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_M f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_M g(x)\,dx\,.$$

Důkaz: Buď $\alpha_k \in \mathbf{X}$, $\alpha_k \ne \alpha_0$, $\alpha_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_0$ libovolná posloupnost. Stačí dokázat, že

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_M f(x,\alpha_k)\,dx = \int\limits_M g(x)\,dx\,.$$

Poněvadž je $\lim\limits_{k\to\infty} f(x,\alpha_k) = g(x)$ s. v. v M a $|f(x,\alpha_k)| \le \varphi(x)$ pro $\forall\,k \in \mathbf{N}$ a s. v. $x \in M$, plyne tvrzení okamžitě z Lebesgueovy věty, jestliže položíme $f_k(x) = f(x,\alpha_k)$.

Věta: Buď $M \subset \mathbf{R}^n$ měřitelná, $\mathbf{X}$ metrický prostor, $f(x,\alpha)$ komplexní funkce, definovaná na $M \times \mathbf{X}$. Nechť dále platí

1. Pro s. v. $x \in M$ je $f(x,\alpha)$ spojitá na $\mathbf{X}$.
2. Pro každé $\alpha \in \mathbf{X}$ je $f(x,\alpha)$ měřitelná v M.
3. Existuje funkce $\varphi \in L(M)$ tak, že pro $\alpha \in \mathbf{X}$ platí $|f(x,\alpha)| \le \varphi(x)$ s. v. v M.

Potom je funkce

$$F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,dx$$

spojitá na $\mathbf{X}$.

Důkaz: Tvrzení plyne okamžitě z předchozí věty.

! Věta: Buď $M \subset \mathbf{R}^n$ měřitelná množina, $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}$ nedegenerovaný interval, $f(x,\alpha)$ komplexní funkce, definovaná na $M \times \mathcal{I}$. Nechť dále platí

1. $F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,dx$ konverguje alespoň pro jednu hodnotu $\alpha_0 \in \mathcal{I}$.
2. Pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$ je $f(x,\alpha)$ měřitelná v M .
3. Pro všechna $\alpha \in \mathcal{I}$ a s. v. $x \in M$ existuje konečná $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$.
4. Existuje $\varphi \in L(M)$ tak, že $\forall \alpha \in \mathcal{I}$ je $\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| \le \varphi(x)$ s. v. v M .

Potom platí: Pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$ je $F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,dx$ konvergentní a $F'(\alpha) = \int\limits_M \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx$.

Důkaz: Budeme předpokládat, že f je reálná, jinak provedeme důkaz odděleně pro reálnou a imaginární část. Buďte $\alpha\,,\,\beta \in \mathcal{I}\ \ \alpha \ne \beta$. Podle věty o střední hodnotě existuje bod ξ mezi α a β tak, že

$$\left|\frac{f(x,\beta) - f(x,\alpha)}{\beta - \alpha}\right| = \left|\left[\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=\xi}\right| \le \varphi(x)\,.$$

Podle předpokladu $f(x,\alpha_0) \in L(M)$ a odtud $|f(x,\beta) - f(x,\alpha_0)| \le |\beta - \alpha_0|\,\varphi(x)$, tedy

$$f(x,\alpha_0) - |\beta - \alpha_0|\,\varphi(x) \le f(x,\beta) \le f(x,\alpha_0) + |\beta - \alpha_0|\,\varphi(x) \ \text{ a } \ f(x,\beta) \in L(M) \ \ \forall \beta \in \mathcal{I}\,.$$

Buď nyní $\alpha \in \mathcal{I}$ libovolné, $\alpha_k \in \mathcal{I}\,,\ \ \alpha_k \ne \alpha\,,\ \ \alpha_k \to \alpha$. Podle Lebesgueovy věty je

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_M \frac{f(x,\alpha_k) - f(x,\alpha)}{\alpha_k - \alpha}\,dx = \int\limits_M \lim_{k\to\infty} \frac{f(x,\alpha_k) - f(x,\alpha)}{\alpha_k - \alpha}\,dx = \int\limits_M \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx$$

a odtud plyne tvrzení věty.

Poznámka: Předchozí věta dává účinný prostředek k výpočtu integrálů, kde tradiční metody výpočtu primitivní funkce selhávají. Místo integrálu $F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,dx$ vypočteme integrál $F'(\alpha) = \int\limits_M \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx$ a zpětně zintegrujeme podle parametru α .

Příklady: 1. Vypočtěte Laplaceův integrál $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

Řešení: Jestliže do integrálu $I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ zavedeme substituci $x = ty\,(t > 0)\ dx = tdy$, dostaneme $I = t\int\limits_0^\infty e^{-t^2y^2}\,dy$. Zároveň je $I = \int\limits_0^\infty e^{-t^2}\,dt$, neboli $I^2 = \int\limits_0^\infty te^{-t^2}\,dt \int\limits_0^\infty e^{-t^2y^2}\,dy$. Jestliže zaměníme pořadí integrace, dostaneme

$$I^2 = \int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^\infty t\,e^{-t^2(1+y^2)}\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\left[e^{-t^2(1+y^2)}\right]_{t=0}^{t=+\infty} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Odtud plyne, že $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

Poznámka: Předvedený výpočet působí trochu uměle a navíc má slabinu v záměně integrací, kterou jsme provedli. Záměna integrací bude zdůvodněna později, až vyslovíme Fubiniovu větu. Pomocí věty o substituci provedeme později jiný, elegantní výpočet Laplaceova integrálu.

2. Vypočtěte $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \quad (a > 0)$.

Řešení: Označme $F(b) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx$. Potom je $F'(b) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-ax^2} \sin bx \, dx$. Dále musíme ověřit předpoklady předchozí věty.

a) $F(b)$ konverguje pro $b = 0$. Je $F(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \, dx$ a tento integrál konverguje.

b) $f(x,b) = e^{-ax^2} \cos bx$ je měřitelná $\forall b \in \mathbf{R}$, poněvadž je spojitá.

c) $\frac{\partial f(x,b)}{\partial x}$ existuje.

d) Pro $\forall\, b \in \mathbf{R}$ existuje integrovatelná majoranta k $\frac{\partial f(x,b)}{\partial x}$, nezávislá na b.
Je $| - x\, e^{-ax^2} \sin bx| \leq |x|\, e^{-ax^2}$ a

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\, e^{-ax^2} \, dx = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} x\, e^{-ax^2} \, dx = \left[-\frac{1}{a}\, e^{-ax^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

Tedy

$$F'(b) = \left| \begin{array}{ll} u' = -xe^{-ax^2}, & v = \sin bx \\ u = \frac{1}{2a}\, e^{-ax^2}, & v' = b \cos bx \end{array} \right| = \frac{b}{2a} \left[e^{-ax^2} \cos bx \right]_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$-\frac{b}{2a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = -\frac{b}{2a}\, F(b).$$

Dostáváme diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými, neboli

$$\frac{dF}{F} = -\frac{b}{2a}\, db\,; \quad \ln |F| = -\frac{b^2}{4a} + \ln |C|\,; \quad F = C\, e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Pro $b = 0$ dostaneme

$$F(0) = C = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{a}x = t \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{a}} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Tedy

$$F(b) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Poznámky: 1. Funkce $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-x^2/4t}$ hraje důležitou roli při řešení rovnice vedení tepla. Je to t. zv. fundamentální řešení rovnice $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

2. V dalším uvedeme ještě dvě důležité věty Lebesgueovy teorie integrálu a sice Fubiniovu větu a větu o substituci. Součiny měr nebudeme zkoumat detailně a věta o substituci bude uvedena bez důkazu. Ten nepotřebujeme k dalšímu výkladu a je poměrně komplikovaný.

Definice: Buď μ míra na $\mathbf{R}^m$, ν míra na $\mathbf{R}^n$. Potom míru τ na $\mathbf{R}^{m+n}$, definovanou předpisem

$$\tau(M \times N) = \mu(M) \cdot \nu(N), \text{ kde } M \subset \mathbf{R}^m\,, \ N \subset \mathbf{R}^n$$

jsou měřitelné množiny, nazýváme součinem měr.

Poznámky: 1. Je třeba ukázat, že míra τ z předchozí definice je skutečmě míra a že je součinem $\mu(M) \cdot \nu(N)$ určena jednoznačně. Dále, že množiny typu $M \times N$, kde $M \subset \mathbf{R}^m$ a $N \subset \mathbf{R}^n$ generují σ-algebru měřitelných podmnožin $\mathbf{R}^{m+n}$. To provádět nebudeme.

2. Je-li λ Lebesgueova míra, potom platí

$$\lambda_{m+n}(M \times N) = \lambda_m(M) \cdot \lambda_n(N),$$

kde λ_k je k-rozměrná Lebesgueova míra. Navíc pro interval $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}^k$ platí

$$\lambda_k(\mathcal{I}) = \prod_{i=1}^{k} \lambda(I^{(i)}),$$

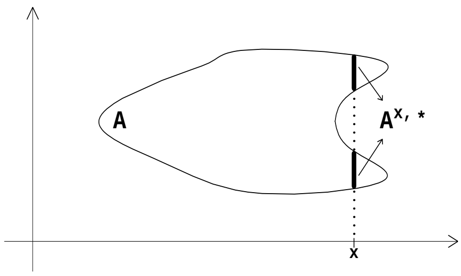
kde $I^{(i)}$ jsou jednorozměrné intervaly.

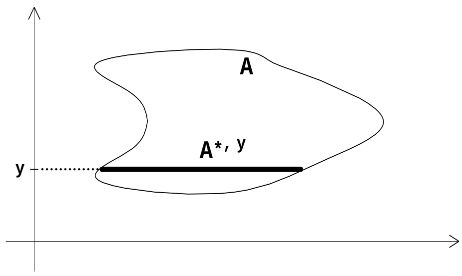
<u>Označení:</u> Buď $A \subset \mathbf{R}^{m+n}$ podmnožina. Označme

$$A^{x,*} = \{y \in \mathbf{R}^n; (x,y) \in A\}. \quad \text{Analogicky} \quad A^{*,y} = \{x \in \mathbf{R}^m; (x,y) \in A\}.$$

Je-li $x \in \mathbf{R}^m$ a $y \in \mathbf{R}^n$, pak funkci f $m+n$ proměnných budeme značit $f(x,y)$.

Poznámka: Předchozí značení má názornou geometrickou interpretaci. Znamená totiž řezy množinou A pro pevné x resp. pevné y.





! Věta: (Fubiniova věta)
Buď τ míra, vytvořená součinem měr μ a ν, kde μ je míra na $\mathbf{R}^m$, ν je míra na $\mathbf{R}^n$. Buď $f(x,y)$ funkce $m+n$ proměnných, definovaná s. v. na měřitelné množině $A \subset \mathbf{R}^{m+n}$. Označme P průmět množiny A do prostoru prvých m souřadnic a Q průmět A do prostoru posledních n souřadnic. Potom platí

$$\int_A f(x,y)\, d\tau(x,y) = \int_P \left\{ \int_{A^{x,*}} f(x,y)\, d\nu(y) \right\} d\mu(x) = \int_Q \left\{ \int_{A^{*,y}} f(x,y)\, d\mu(x) \right\} d\nu(y)$$

jestliže prvý z těchto integrálů existuje.

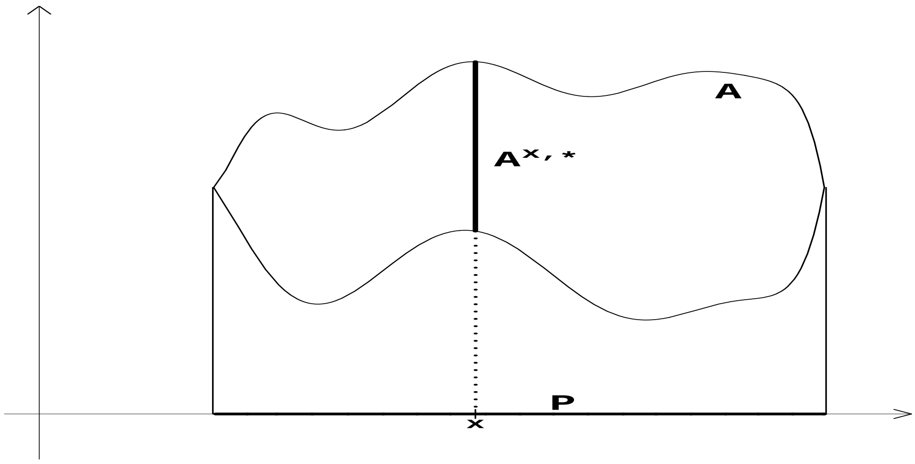
Důkaz: Nebudeme provádět.

Poznámky: 1. Fubiniova věta slouží k převodu dvojného integrálu na sled dvou jednorozměrných integrálů a nezávisí na pořadí integrace, jakmile $\iint_A f(x,y)\, dx\, dy$ existuje. Stejně tak dovoluje převézt trojný integrál na sled jednorozměrné (vnitřní) a dvojrozměrné (vnější) integrace.

2. Fubiniova věta má velmi jednoduchý předpoklad. Stačí, aby $\int_A f\, d\tau$ existoval, neboli

je-li na příklad $f(x,y) \geq 0$ měřitelná, můžeme použít Fubiniovy věty, i když může být $\int\limits_A f\,d\tau = +\infty$. Kdybychom prováděli důkaz Fubiniovy věty, musíme dokázat, že všechny integrály, které se vyskytují ve znění věty, existují, tedy na příklad $\int\limits_{A^{x,*}} f d\nu$ a že tato funkce (proměnné x) je měřitelná (tedy existuje pro s. v. $x \in P$).

3. Značení ve Fubiniově větě má názorný význam. Analogicky pro Q a $A^{*,y}$.



Důsledek: Buď $A \subset \mathbf{R}^{m+n}$ $\tau-$měřitelná množina. Potom platí

$$\tau(A) = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \nu(A^{x,*})\,d\mu = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \mu(A^{*,y})\,d\nu.$$

Důkaz: Je

$$\tau(A) = \int\limits_{\mathbf{R}^{m+n}} \chi_A\,d\tau = \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} \chi_{A^{x,*}}\,d\nu \right\} d\mu,$$

což dává první vyjádření. Analogicky pro druhé vyjádření.

Důsledek: Buď $M \subset \mathbf{R}^n$ měřitelná množina, f měřitelná funkce v M. Označme

$$G = \{(x,y) \in \mathbf{R}^{n+1};\, x \in M,\, y \in \mathbf{R},\, y = f(x)\}$$

(tedy G je graf funkce f). Potom je $\lambda_{n+1}(G) = 0$. (Tedy $(n+1)-$rozmněrná Lebesgueova míra.)

Důkaz: Platí

$$\lambda_{n+1}(g) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \lambda_1(G^{x,*})\,d\lambda_n.$$

Poněvadž $G^{x,*}$ je nejvýše jednobodová množina, je $\lambda_1(G^{x,*}) = 0$.

Poznámka: Fubiniova věta je základem metody výpočtu určitých integrálů, závislých na parametru. Tato metoda se nazývá <u>integrace podle parametru.</u> Je-li $F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,dx$, pak se můžeme pokusit vyjádřit funkci $f(x,\alpha)$ jako určitý integrál a v příslušném dvojném integrálu zaměníme pořadí integrace.

Příklad: Vypočtěte $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\, dx$ $(\alpha,\, \beta > 0)$.

Řešení: Je $\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} = \int\limits_\alpha^\beta e^{-xy}\, dy$ a tedy

$$I = \iint\limits_M e^{-xy}\, dx\, dy, \text{ kde } M = (0, +\infty) \times (\alpha, \beta).$$

Tento integrál existuje, poněvadž $e^{-xy} \geq 0$ a tedy

$$I = \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx = \int\limits_\alpha^\beta \left[-\frac{1}{y}\, e^{-xy} \right]_0^{+\infty} dy = \int\limits_\alpha^\beta \frac{dy}{y} = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

Poznámky: 1. Předchozí integrál lze počítat též pomocí věty o derivaci integrálu podle parametru. Jestliže označíme

$$F(\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\, dx, \text{ je } F'(\beta) = \int\limits_0^\infty e^{-\beta x}\, dx$$

a při hledání integrovatelné majoranty, nezávislé na β, musíme postupovat následujícím způsobem. Buď $\beta_0 > 0$ libovolné, ale pevné. Potom pro $\beta \geq \beta_0$ platí $e^{-\beta x} \leq e^{-\beta_0 x}$ a $\int\limits_0^\infty e^{-\beta_0 x}\, dx < \infty$. Tedy $F'(\beta) = -\frac{1}{\beta}\, e^{-\beta x}\big|_0^\infty = \frac{1}{\beta}$, odtud $F(\beta) = \ln \beta + C$ a pro $\beta = \alpha$ dostaneme

$$F(\alpha) = 0 = \ln \alpha + C \;\Rightarrow\; C = -\ln \alpha, \text{ tedy } F(\beta) = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

2. Na závěr uvedeme bez důkazu větu o substituci.

Definice: Buď $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ zobrazení $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$. Řekneme, že φ je regulární v množině $M \subset \mathbf{R}^n$, jestliže platí

1. M je otevřená množina.
2. Funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mají spojité parciální derivace 1. řádu v M.
3. $D_\varphi = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0 \;\; \forall x \in M$.

! Věta: (Substituční metoda)
Buď φ zobrazení otevřené množiny $P \subset \mathbf{R}^n$ <u>na</u> $Q \subset \mathbf{R}^n$ a nechť φ je regulární a prosté v P. Buď $M \subset Q$ měřitelná podmnožina, f libovolná měřitelná funkce na M. Potom platí

$$\int\limits_M f(x)\, dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(u))\, |D_\varphi(u)|\, du$$

jakmile jeden z integrálů existuje.

Poznámky: 1. Věta o substituci má tu výhodu, že nepotřebujeme zkoumat existenci $\int\limits_M f(x)\, dx$. Po zavedení substituce se zabýváme integrálem, který vznikne a jestliže existuje, vše prošlo v pořádku.

2. Substituce, zaváděné do dvojných integrálů, bývají polární souřadnice nebo jejich modifikace. Pro trojný integrál přicházejí v úvahu cylindrické a sférické souřadnice nebo jejich modifikace.

Příklad: Vypočtěte $\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-x^2}\,dx$.

Řešení: a) Buď $n = 2$. Do integrálu

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)}\,dx_1\,dx_2$$

zavedeme polární souřadnice $x_1 = r\cos\varphi, x_2 = r\sin\varphi$. Potom platí

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)}\,dx_1\,dx_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr = -\pi\left[e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} = \pi.$$

b) Poněvadž je

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi,$$

plyne odtud, že $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ a pro Laplaceův integrál $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ dostaneme, že $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

c) Nyní je zřejmé, že $\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-x^2}\,dx = \left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right\}^n = \pi^{n/2}$.

2.4 Posloupnosti měřitelných funkcí.

Definice: Buď $p \geq 1$. Potom Lebesgueovým prostorem $\mathbf{L}_p(M)$ nebo $\mathbf{L}_p(M;\mu)$ rozumíme množinu všech komplexních μ-měřitelných funkcí f na M takových, že

$$\int\limits_M |\,f\,|^p\,d\mu < \infty\,.$$

Je-li $p = +\infty$, pak řekneme, že $f \in \mathbf{L}_\infty(M)$ [nebo $\mathbf{L}_\infty(M,\mu)$], jestliže platí

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} |f(x)| = \inf_{N;\,\mu(N)=0}\ \sup_{x\in M-N} |f(x)| < \infty\,.$$

Poznámky: 1. Vzhledem k tomu, že v integrálu $\int\limits_M |f|^p\,d\mu$ nemůžeme rozlišit funkce, které jsou si rovny skoro všude, budeme za prvky $\mathbf{L}_p(M)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ brát t. zv. třídy ekvivalentních funkcí. Neboli $f = g$ znamená, že $f(x) = g(x)$ s. v. v M.

2. Pro označení $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} |f(x)|$ bývá též užíváno značení $\operatorname*{vrai\,max}_{x\in M} |f(x)|$ nebo $\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in M} |f(x)|$. $\mathbf{L}_\infty(M)$ tvoří ekvivalentní třídy měřitelných funkcí, které jsou skoro všude omezené. [Srovnejte s prostorem $\mathbf{B}(M)$.]

3. V $\mathbf{L}_p$ prostorech platí Hölderova nerovnost. Jsou-li

$$f \in \mathbf{L}_p(M)\,,\ \ p > 1\,,\ \ g \in \mathbf{L}_q(M)\,,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

potom $f \cdot g \in \mathbf{L}_1(M)$ a platí

$$\left|\int\limits_M fg\,d\mu\right| \leq \int\limits_M |fg|\,d\mu \leq \left\{\int\limits_M |f|^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int\limits_M |g|^q\,d\mu\right\}^{\frac{1}{q}} .$$

Stejně tak platí Minkowského nerovnost. Je-li $p \geq 1$, $f, g \in \mathbf{L}_p(M)$, potom

$$\left\{\int\limits_M |f+g|^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\int\limits_M |f|^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int\limits_M |g|^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Důkaz se provede analogicky jako pro konečné součty.

Věta: Buď $1 \leq p \leq \infty$. Potom je $\mathbf{L}_p(M)$ lineární normovaný prostor, jestliže definujeme

$$\|f\|_p = \left\{\int\limits_M |f|^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

Pro $p = +\infty$ definujeme

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in M} |f(x)| .$$

Důkaz: Ověření axiomů normy je snadné. Je-li $\|f\|_p = 0$, potom je $f = 0$ s. v. v M, a proto nerozlišujeme funkce, které jsou si rovny skoro všude. Trojúhelníková nerovnost plyne z Minkowského nerovnosti.

Poznámka: Indukcí snadno zobecníme Minkowského nerovnost na konečný počet sčítanců. Jsou-li $a_{ij} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, k)$, $p \geq 1$, potom platí

$$\left[\sum_{j=1}^{k}\left\{\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\right\}^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^{r}\left\{\sum_{j=1}^{k} a_{ij}^p\right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Důkaz: Platí

$$\left\{\sum_{j=1}^{k}(a_j+b_j+c_j)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_{j=1}^{k}(a_j+b_j)^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{j=1}^{k} c_j^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{j=1}^{k} a_j^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{j=1}^{k} b_j^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{j=1}^{k} c_j^p\right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Zbytek důkazu provedeme indukcí.

! Věta: $\mathbf{L}_p(M;\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ je Banachův prostor.

Důkaz: 1. Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $\mathbf{L}_\infty(M)$, potom

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \forall\, m, n \geq n_0 \text{ a s. v. } x \in M \text{ platí } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

a tedy $\{f_n(x)\}$ je cauchyovská pro s. v. $x \in M$. Existuje tudíž $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ s. v. v M. Navíc $f_{n_0}(x) - \varepsilon < f_m(x) < f_{n_0}(x) + \varepsilon$ s. v. v M a pro $m \to \infty$ dostaneme, že f je skoro všude v M omezená, tedy $f \in \mathbf{L}_\infty(M)$.

2. Nechť $p < +\infty$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $\mathbf{L}_p(M)$. Tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak. že } \forall m, n \geq n_0 \text{ platí } \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon\,.$$

Vybereme posloupnost $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{f_n\}$ tak, že $s = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \|g_j - g_{j+1}\|_p < \infty$. Takovou posloupnost lze vždy vybrat. Na příklad pro $\varepsilon = 1 > 0$ $\exists n_j \in \mathbf{N}$ tak, že $\|f_{n_j} - f_{n_j+1}\|_p < \frac{1}{2^j}$ a položme $f_{n_j} = g_j$. Označme $h = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |g_j - g_{j+1}|$. Podle důsledku, předcházejícího Leviho větu a předchozí poznámky platí

$$\int\limits_M h^p \, d\mu = \int\limits_M \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |g_j - g_{j+1}| \right\}^p d\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_M \left\{ \sum_{j=1}^{n} |g_j - g_{j+1}| \right\}^p d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left\{ \int\limits_M \left(\sum_{j=1}^{n} |g_j - g_{j+1}| \right)^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \right]^p \leq \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} \left\{ \int\limits_M |g_j - g_{j+1}|^p \, d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \right]^p =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} \|g_j - g_{j+1}\|_p \right]^p = s^p < \infty\,.$$

Platí tedy, že $h^p < \infty$ s. v. v M a také $h < \infty$ s. v. v M. Dále můžeme předpokládat, že $|g_1| < \infty$ s. v. v M. Nyní

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \sum_{j=n_0}^{\infty} |g_j - g_{j+1}| < \varepsilon$$

a odtud plyne, že

$$\forall m, n \geq n_0\,, \ (m \geq n) \text{ platí } |g_n - g_m| \leq |g_n - g_{n+1}| + \cdots + |g_{m-1} - g_m| \leq \sum_{j=n}^{\infty} |g_j - g_{j+1}| < \varepsilon\,,$$

neboli $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská posloupnost pro s. v. $x \in M$ a existuje $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ s. v. v M. Ukážeme, že $f \in \mathbf{L}_p(M)$. Posloupnost $\{\, |g_n|^p \,\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k $|f|^p$ s. v. v M a dále

$$|g_n|^p \leq (\,|g_n - g_1| + |g_1|)^p \leq (h + |g_1|)^p \in \mathbf{L}_1(M).$$

Podle Lebesgueovy věty platí

$$\int\limits_M |f|^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M |g_n|^p \, d\mu.$$

Poněvadž $\{f_n\}$ je cauchyovská a obsahuje konvergentní podposloupnost $\{g_n\}$, je sama konvergentní, tedy $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

Věta: Prostor $\mathbf{L}_2(M;\mu)$ je Hilbertův, jestliže definujeme

$$(f, g) = \int\limits_M f\, \overline{g} \, d\mu \ \ (f, g \in \mathbf{L}_2(M)).$$

Důkaz: Je třeba ověřit vlastnosti skalárního součinu, ale to je rutinní záležitost.

Věta: Nechť $\mu(M) < \infty$. Potom platí: je-li $f \in \mathbf{L}_p(M)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, potom

$$f \in \mathbf{L}_q(M) \ \forall\, q \leq p, \ \text{ tedy } \mathbf{L}_q(M) \supset \mathbf{L}_p(M) \supset \mathbf{L}_\infty(M).$$

Důkaz: Buď $q < p$. Potom podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\int_M |f|^q \, d\mu \le \left\{ \int_M (|f|^q)^{\frac{p}{q}} \, d\mu \right\}^{\frac{q}{p}} \left\{ \int_M 1 \cdot d\mu \right\}^{\frac{p-q}{p}} .$$

Musí totiž platit $\frac{q}{p} + \frac{1}{\beta} = 1$, tedy $\frac{1}{\beta} = \frac{p-q}{p}$. Odtud

$$\|f\|_q \le K \, \|f\|_p \,, \ \text{kde} \ K = [\mu(M)]^{\frac{p-q}{pq}} .$$

Je zřejmé, že pro $f \in \mathbf{L}_\infty(M)$ platí, že $f \in \mathbf{L}_p(M) \ \forall p \ge 1$.

Poznámky: 1. Nerovnost $\|f\|_q \le K \, \|f\|_p$ ukazuje, že vnoření $\mathbf{L}_p(M)$ do $\mathbf{L}_q(M)$ $(q \le p)$ je spojité.

2. Je-li $\mu(M) = +\infty$, žádná inkluse pro $\mathbf{L}_p$ a $\mathbf{L}_q$ jako v předchozí větě neexistuje. Buď na příklad $M = (0, +\infty)$ a definujme

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{pro } t \in (0,1), \\ \frac{1}{t^2} & \text{pro } t \in (1, +\infty), \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in (0,1), \\ \frac{1}{t} & \text{pro } t \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Potom je $f \in \mathbf{L}_1(M)$, ale $f \notin \mathbf{L}_2(M)$ a naopak $g \notin \mathbf{L}_1(M)$, ale $g \in \mathbf{L}_2(M)$.

3. V následující definici sepíšeme všechny druhy konvergence, které budeme vyšetřovat. Pro úplnost zahrneme i ty, které již známe.

Definice: Buďte f, f_n $(n \in \mathbf{N})$ měřitelné funkce v množině M. Řekneme, že
1. $\{f_n\}$ konverguje k f <u>bodově</u>, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \forall x \in M$, neboli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \text{a} \ \forall x \in M \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \text{tak, že} \ \forall n \ge n_0 \ \text{platí} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

2. $\{f_n\}$ konverguje k f <u>stejnoměrně</u>, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \text{tak, že} \ \forall n \ge n_0 \ \text{a} \ \forall x \in M \ \text{platí} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$.

3. $\{f_n\}$ konverguje k f <u>skoro všude</u> v M, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ platí $\forall x \in M - N$, kde $\mu(N) = 0$.

4. $\{f_n\}$ konverguje k f <u>podle středu</u>, jestliže $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $(1 \le p < \infty)$.

5. Jsou-li f_n, f s. v. v M konečné, pak $\{f_n\}$ konverguje k f <u>podle míry</u>, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \text{platí} \ \lim_{n\to\infty} \mu\{x \in M; \, |f(x) - f_n(x)| \ge \varepsilon\} = 0.$$

6. Jsou-li f_n, f s. v. konečné v M, pak $\{f_n\}$ konverguje k f <u>μ–stejnoměrně</u>, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \subset M \ \text{tak, že} \ \mu(M - A) < \varepsilon \ \text{a} \ f_n \rightrightarrows f \ \text{na} \ A.$$

[Tedy $f_n \to f$ stejnoměrně].

Poznámka: Budeme se v dalším zabývat vzájemným vztahem mezi jednotlivými druhy konvergence. Některé vztahy již známe, na příklad $2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3$ nebo $2 \Rightarrow 4$, je-li $\mu(M) < \infty$.

Věta: Nechť $1 \le p < \infty$. Jsou-li $f_n, f \in \mathbf{L}_p(M)$, $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, potom $f_n \to f$ podle míry. ($4 \Rightarrow 5$).

Důkaz: Buď $\varepsilon > 0$ a označme $E_n = \{x \in M; |f(x) - f_n(x)| \ge \varepsilon\}$. Potom pro $x \in E_n$ platí $\varepsilon^p \le |f(x) - f_n(x)|^p$ a odtud

$$\varepsilon^p \, \mu(E_n) \le \int\limits_{E_n} |f - f_n|^p \, d\mu \le \|f - f_n\|_p^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

neboli $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ a $f_n \to f$ podle míry.

Věta: Buďte f_n, f $\mu-$měřitelné a skoro všude konečné na M a nechť $f_n \to f$ $\mu-$stejnoměrně. Potom $f_n \to f$ podle míry. ($6 \Rightarrow 5$).

Důkaz: Podle předpokladu

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A \subset M \;\text{ tak, že }\; \mu(M - A) < \varepsilon \;\text{ a }\; f_n \rightrightarrows f \;\text{ na }\; A.$$

Tedy $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $\forall n \ge n_0$ a $\forall x \in A$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Neboli

$$\mu\{x \in M; |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} < \varepsilon \quad \forall n \ge n_0$$

a poněvadž $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud, že

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in M; |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} = 0,$$

tedy $f_n \to f$ podle míry.

! Věta: (Jegorovova věta)
Buď $\mu(M) < \infty$ a nechť f_n, f jsou $\mu-$měřitelné a skoro všude konečné funkce na M. Předpokládejme, že $f_n \to f$ s. v. v M. Potom $f_n \to f$ $\mu-$stejnoměrně v M. ($3 \Rightarrow 6$).

Důkaz: Poněvadž $f_n \to f$ s. v. v M existuje množina $E \subset M$ tak, že $\mu(M - E) = 0$ a $f_n \to f$ na E. Můžeme předpokládat, že $E = M$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a označme

$$A_{k,m} = \bigcup_{n \ge m} \left\{ x \in M; |f_n(x) - f(x)| \ge \frac{1}{k} \right\} \;\; \text{pro} \;\; m, k \in \mathbf{N}.$$

Platí $A_{k,1} \supset A_{k,2} \supset \dots$ a $\mu(A_{k,1}) \le \mu(M) < \infty$. Pro každé pevné $k \in \mathbf{N}$ platí $\lim\limits_{m\to\infty} \mu(A_{k,m}) = 0$. Vzhledem k této vlastnosti $\forall k \in \mathbf{N}$ $\exists m_k \in \mathbf{N}$ tak, že $\mu(A_{k,m_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ a pro $\forall x \in M - A_{k,m_k}$ platí $\sup\limits_{n \ge m_k} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$. Položme $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{k,m_k}$. Potom je $\mu(B) < \varepsilon$ a $\forall x \in M - B$ platí $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ $\forall n \ge m_k$. Tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $M - B$.

Důsledek: Buď $\mu(M) < \infty$ a nechť f_n, f jsou $\mu-$měřitelné a skoro všude konečné v M. Předpokládejme, že $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ s. v. v M. Potom $f_n \to f$ podle míry. ($3 \Rightarrow 5$).

Důkaz: Plyne z předchozích dvou vět. Jegorovova věta dává implikaci $3 \Rightarrow 6$ a věta před ní implikaci $6 \Rightarrow 5$.

! Věta: (Riesz)
Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost $\mu-$měřitelných skoro všude konečných funkcí na M. Jestliže $f_n \to f$ podle míry, potom existuje vybraná posloupnost $\{f_{n_k}\}$ tak, že $f_{n_k} \to f$ skoro všude v M.

Důkaz: Nechť $f_n \to f$ podle míry. Potom existuje posloupnost $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tak, že

$$\mu\left\{x \in M; |f(x) - f_{n_j}(x)| \geq \frac{1}{j}\right\} < \frac{1}{2^j}.$$

Označme

$$A_j = \bigcup_{k=j}^{\infty}\left\{x \in M; |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{k}\right\} \text{ a } B = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Potom je

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \qquad \mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1 < \infty$$

a tedy

$$\mu(B) = \lim_{j\to\infty}\mu(A_j) \leq \lim_{j\to\infty}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2^{j-1}} = 0.$$

Nyní ukážeme, že $f_{n_k}(x) \to f(x)$ pro $x \in M - B$. Buď tedy

$$x \in M - B = M - \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty}(M - A_j) \text{ a } \varepsilon > 0.$$

Potom existuje $j = j(x)$ Tak, že

$$x \in M - A_j = M - \bigcup_{k=j}^{\infty}\left\{x \in M; |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{k}\right\} =$$

$$= \bigcap_{k=j}^{\infty}\left[M - \left\{x \in M; |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{k}\right\}\right] = \bigcap_{k=j}^{\infty}\left\{x \in M; |f(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Poněvadž potřebujeme, aby $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$, musíme zvolit $k_0 > \max\left\{j(x), \frac{1}{\varepsilon}\right\}$. Potom pro $\forall\, k \geq k_0$ platí $|f(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{k} \leq \varepsilon$ a tedy $f_{n_k}(x) \to f(x)$ na $M - B$.

Poznámka: Na závěr této skupiny vět uvedeme ještě Luzinovu větu, která charakterizuje měřitelné funkce jako takové.

Věta: (Luzin)
Buď f $\mu-$měřitelná skoro všude konečná funkce na M a předpokládejme, že $\mu(M) < \infty$. Potom $\forall\, \varepsilon > 0$ existuje $\mu-$měřitelná množina $A \subset M$ tak, že $\mu(M - A) < \varepsilon$ a f je spojitá na A.

Důkaz: Poněvadž každou funkci f můžeme psát ve tvaru $f = f^+ - f^-$, stačí předpokládat, že $f \geq 0$ a zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně.

1. Buď f nejdříve jednoduchá $\mu-$měřitelná funkce, tedy $f = \sum\limits_{j=1}^{p}\alpha_j\chi_{E_j}$, kde $M = \bigcup\limits_{j=1}^{p} E_j$ jsou po dvou disjunktní ($E_j \cap E_k = \emptyset$ pro $j \neq k$). Ke každému E_j existuje uzavřená množina $A_j \subset E_j$ tak, že $\mu(E_j - A_j) < \frac{\varepsilon}{p}$ a $A_j \cap A_k = \emptyset$ pro $j \neq k$, $A = \bigcup\limits_{j=1}^{p} A_j$. Potom je $\mu(M - A) < \varepsilon$ a f je spojitá na A. Je totiž konstantní na každé množině A_j.

2. Je-li nyní $f \geq 0$ libovolná měřitelná funkce, potom podle věty z paragrafu 2.2 existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých $\mu-$měřitelných funkcí tak, že $f_n \geq 0$ a $f_n \nearrow f$ na $M - N$, kde $\mu(N) = 0$. Podle předchozí části důkazu

$$\forall\, n \in \mathbf{N}\ \exists\, C_n \subset M \ \text{ tak, že } \mu(C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \ \text{ a } \ f_n \ \text{ je spojitá na } B - C_n.$$

Označme $C = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k$. Potom je $\mu(C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Podle Jegorovovy věty existuje množina $D \subset M$ tak,že na $M - D$ je konvergence posloupnosti $\{f_n\}$ stejnoměrná a $\mu(D) < \frac{\varepsilon}{2}$. Jestliže nyní uvážíme množinu $L = M - C \cup D \cup N$, potom $\mu(C \cup D \cup N) < \varepsilon\,,\ \ f_n$ jsou spojité na L a $f_n \rightrightarrows f$ na L, tedy f je spojitá.

Poznámky: 1. Luzinova věta tvrdí trochu více, než jsme uvedli my. Nevyžaduje předpoklad $\mu(M) < \infty$ a říká: f je $\mu-$měřitelná právě když ke každému $\varepsilon > 0$ a každé kompaktní množině $K \subset M$ existuje otevřená množina G tak, že $\mu(G) < \varepsilon$ a f je spojitá na $K - G$. Důkaz však vyžaduje vybudování teorie Radonových měr na lokálně kompaktním topologickém prostoru. Předpoklad $\mu(M) < \infty$ nám umožnil využít Jegorovovu větu.

2. Ve zbývající části tohoto paragrafu se vrátíme znovu k vyjádření míry $\mu_f(E) = \int\limits_E f\, d\mu$, kde $f \geq 0$ je měřitelná a pokusíme se vyjádřit jinou míru ν pomocí uvedeného integrálu.

Definice: Buďte $\mu,\ \nu$ dvě míry na množině M. Řekneme, že ν je absolutně spojitá vzhledem k míře μ a zapisujeme $\nu << \mu$, jestliže $\nu(E) = 0$ pro každou množinu $E \subset M$ takovou, že $\mu(E) = 0$.

Poznámka: Předpokládejme, že existuje f tak, že $\nu(A) = \int\limits_A f\, d\mu\ \ \forall\, A \subset M$ a uvažme funkcionál na $\mathbf{L}_2(\mu)$ tvaru

$$J_0(g) = \int\limits_M |g - f|^2\, d\mu\,, \quad g \in \mathbf{L}_2(\mu).$$

Tento funkcionál nabývá svého minima pro $g = f$ a navíc $\forall\, g \in \mathbf{L}_2(\mu)$ platí

$$J_0(g) = J(g) + \int\limits_M f^2\, d\mu\,, \ \text{ kde } \ J(g) = \int\limits_M (g^2 - 2fg)\, d\mu = \int\limits_M g^2\, d\mu - 2\int\limits_M g\, d\nu.$$

(Je $f\, d\mu = d\nu$). Poněvadž se J_0 a J liší o konstantu $[\int\limits_M f^2\, d\mu]$, nabývá $J(g)$ svého minima v bodě f. Tato myšlenka je použita v důkazu druhého s následujících lemmat.

Lemma: Buďte ν a σ dvě konečné míry na množině M takové, že $\nu(A) \leq \sigma(A)\ \ \forall\, A \subset M$ a nechť $f \geq 0$ je měřitelná. Potom

$$\int\limits_A f\, d\nu \leq \int\limits_A f\, d\sigma \qquad \forall\, A \subset M.$$

Důkaz: Je-li f jednoduchá $\mu-$integrovatelná, $f = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i\, \chi_{E_i}\,,\ \ \alpha_i \geq 0$, potom je

$$\int\limits_M f\, d\nu = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, \nu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, \sigma(E_i) = \int\limits_M f\, d\sigma$$

a odtud dostaneme tvrzení limitním přechodem.

Lemma: Buďte ν a σ dvě konečné míry na M takové, že $\forall\, A \subset M$ platí $\nu(A) \le \sigma(A)$. Potom existuje nezáporná funkce $f \in \mathbf{L}_2(\sigma)$ tak, že

$$\nu(A) = \int\limits_A f\, d\sigma \qquad \forall\, A \subset M.$$

Důkaz: Pro $g \in \mathbf{L}_2(\sigma)$ označme

$$J(g) = \int\limits_M g^2\, d\sigma - 2\int\limits_M g\, d\nu \ \text{ a buď } \ c = \inf\{J(g); g \in \mathbf{L}_2(\sigma)\}.$$

Poněvadž $\nu(A) \le \sigma(A)$, platí

$$J(g) \ge \int\limits_M g^2\, d\sigma - 2\int\limits_M |g|\, d\nu \ge \int\limits_M (g^2 - 2|g|)\, d\sigma = \int\limits_M (|g|-1)^2\, d\sigma - \int\limits_M d\sigma =$$

$$= \int\limits_M (|g|-1)^2\, d\sigma - \sigma(M) \ge -\sigma(M) > -\infty \qquad \forall\, g \in \mathbf{L}_2(\sigma)$$

podle předchozího lemmatu. Odtud plyne, že $c \in \mathbf{R}$ a tedy existuje posloupnost $\{f_j\}$, $f_j \in \mathbf{L}_2(\sigma)$ tak, že $J(f_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} c$. Jestliže použijeme rovnoběžníkového pravidla, platného v libovolném Hilbertově prostoru H,

$$[\,\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\{\|x\|^2 + \|y\|^2\} \qquad \forall\, x, y \in H\,]$$

dostaneme pro $g, h \in \mathbf{L}_2(\sigma)$

$$J(g) + J(h) = \int\limits_M g^2\, d\sigma + \int\limits_M h^2\, d\sigma - 2\int\limits_M (g+h)\, d\nu = \frac{1}{2}\int\limits_M |g+h|^2\, d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_M |g-h|^2\, d\sigma -$$

$$-2\int\limits_M (g+h)\, d\nu = 2\int\limits_M \left|\frac{1}{2}(g+h)\right|^2 d\sigma - 4\int\limits_M \frac{1}{2}(g+h)\, d\nu + \frac{1}{2}\int\limits_M |g-h|^2\, d\sigma.$$

Neboli $J(g) + J(h) - 2J\left[\frac{1}{2}(g+h)\right] = \frac{1}{2}\|g-h\|_2^2$ a odtud $\frac{1}{2}\|g-h\|_2^2 \le J(g) + J(h) - 2c$. Pro $g = f_j$ a $h = f_k$ dostaneme

$$\frac{1}{2}\|f_j - f_k\|_2^2 \le J(f_j) + J(f_k) - 2c \underset{j,k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Odtud plyne, že $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost a má tedy limitu $f \in \mathbf{L}_2(\sigma)$. Je zřejmé, že $J(f) = c$. Zvolme nyní $A \subset M$ libovolně. Poněvadž $J(f) \le J(f + t\chi_A)\ \ \forall\, t \in \mathbf{R}$, dostaneme

$$\int\limits_M |f|^2\, d\sigma - 2\int\limits_M f\, d\nu \le \int\limits_M (f + t\chi_A)^2\, d\sigma - 2\int\limits_M (f + t\chi_A)\, d\nu$$

neboli

$$0 \le 2t\int\limits_M f\chi_A\, d\sigma + t^2\sigma(A) - 2t\nu(A) = 2t\left(\int\limits_A f\, d\sigma - \nu(A)\right) + t^2\sigma(A).$$

Tato nerovnost však může platit $\forall\, t \in \mathbf{R}$ pouze je-li $\int\limits_A f\, d\sigma - \nu(A) = 0$, což je tvrzení lemmatu.

! Věta: (Radon-Nikodým)
Buďte μ a ν konečné míry na M a nechť $\nu << \mu$. Potom existuje $h \in \mathbf{L}_1(\mu)\,, \;\; h \geq 0$ tak, že

$$\nu(A) = \int\limits_A h\, d\mu \qquad \forall\, A \subset M.$$

Tato funkce je určena jednoznačně až na rovnost skoro všude.

Důkaz: 1. <u>Jednoznačnost</u> vyjádření je zřejmá. Je-li $\int\limits_A h\, d\mu = \int\limits_A g\, d\mu \quad \forall\, A \subset M$, potom $h = g$ s. v. v M.

2. Abychom dokázali <u>existenci</u>, položme $\sigma = \mu + \nu$. Podle předchozího lemmatu existuje $f \in \mathbf{L}_2(\sigma)$ tak, že

$$\nu(A) = \int\limits_A f\, d\sigma \qquad \forall\, A \subset M,$$

Poněvadž $\forall\, A \subset M$ platí

$$0 \leq \nu(A) = \int\limits_A f\, d\sigma \leq \sigma(A) = \int\limits_A 1 \cdot d\sigma$$

plyne odtud, že $0 \leq f \leq 1 \;\; \sigma-$skoro všude v M. Tvrdíme, že $f < 1 \;\; \sigma-$skoro všude v M. Označme $E = \{x \in M; f(x) = 1\}$. Potom je

$$\nu(E) = \int\limits_E f\, d\sigma = \sigma(E)$$

a tedy $\mu(E) = 0$. Poněvadž ν je absolutně spojitá vzhledem k μ, dostaneme, že $\nu(E) = 0$ a tedy $\sigma(E) = 0$. Bez omezení obecnosti můžeme nyní předpokládat, že $0 \leq f < 1 \quad \forall x \in M$. Dále $\forall\, A \subset M$ platí

$$\int\limits_A d\nu = \nu(A) = \int\limits_A f\, d\sigma = \int\limits_A f\, d\mu + \int\limits_A f\, d\nu\,,$$

tedy $\int\limits_A f\, d\mu = \int\limits_A (1-f)\, d\nu$, neboli

$$\int\limits_M \chi_A f\, d\mu = \int\limits_M \chi_A (1-f)\, d\nu.$$

Poněvadž tato rovnost platí pro charakteristické funkce měřitelných množin $A \subset M$, platí i pro nezáporné jednoduché $\mu-$měřitelné funkce. Přechodem k limitě dostaneme, že pro každou nezápornou měřitelnou funkci g platí

$$\int\limits_M gf\, d\mu = \int\limits_M g(1-f)\, d\nu,$$

Jestliže nyní zvolíme $g = \frac{\chi_A}{1-f}$, dostaneme

$$\int\limits_M \frac{f}{1-f}\, \chi_A\, d\mu = \int\limits_M \chi_A\, d\nu\,, \;\text{ neboli }\; \int\limits_A \frac{f}{1-f}\, d\mu = \int\limits_A d\nu = \nu(A)$$

a stačí volit $h = \frac{f}{1-f}$. Navíc $h \in \mathbf{L}_1(\mu)$, poněvadž $\int\limits_M h\, d\mu = \nu(M) < \infty$.

Věta: Buďte μ a ν konečné míry na M. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní

1. $\nu << \mu$.

2. Existuje nezáporná funkce $f \in \mathbf{L}_1(\mu)$ tak, že $\nu(A) = \int\limits_A f\, d\mu \quad \forall\, A \subset M$.

3. $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0$ tak, že $\nu(A) < \varepsilon$ jakmile $A \subset M$ a $\mu(A) < \delta$.

Důkaz: Implikace $1 \Rightarrow 2$ byla dokázána v předchozí větě.

$2 \Rightarrow 3$. Předpokládejme, že existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnost množin $\{E_n\}$ tak, že

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}\,, \ \text{ ale } \int\limits_{E_n} f\, d\mu \geq \varepsilon > 0.$$

Položme $A = \limsup\limits_{n\to\infty} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$. [Množina těch x, která leží v nekonečně mnoha E_n.]

Označme $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$. Potom je

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots\,, \quad \mu(B_1) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < 1 < \infty\,,$$

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0,$$

ale platí $\int\limits_A f\, d\mu \geq \varepsilon > 0$, což je spor.

Implikace $3 \Rightarrow 1$ je zřejmá.

Poznámka: Radon-Nikodýmovu větu je možné zobecnit i na σ-konečné míry, po případě míry, které nabývají reálných nebo komplexních hodnot.

Důsledek: Buďte μ a ν σ-konečné míry a nechť $\nu << \mu$. Potom existuje nezáporná měřitelná funkce h [ne nutně $h \in \mathbf{L}_1(\mu)$] tak, že

$$\nu(A) = \int\limits_A h\, d\mu \quad \forall\, A \subset M.$$

Toto vyjádření je jednoznačné až na rovnost skoro všude.

Důkaz: Buďte $\{A_n\}$ a $\{B_k\}$ disjunktní posloupnosti měřitelných množin takových, že

$$\mu(A_n) < \infty\,, \ \ \nu(B_k) < \infty\,, \ \ \bigcup_n A_n = \bigcup_k B_k = M$$

a aplikujme Radon-Nikodýmovu větu na zúžení měr μ a ν na $A_n \cap B_k$.

Poznámka: Funkci z předchozího důsledku nazýváme Radon-Nikodýmovou derivací míry ν podle míry μ a značíme $h = \frac{d\nu}{d\mu}$. Funkci h též někdy (v pravděpodobnosti) nazýváme hustota míry ν vzhledem k míře μ.

Definice: Buďte μ a ν dvě míry na M. Řekneme, že μ a ν jsou vzájemně singulární, jestliže existuje množina

$$A \subset M \ \text{ tak, že } \ \mu(A) = \nu(M - A) = 0.$$

Značíme $\mu \perp \nu$.

! Věta: Buďte μ a ν míry na M a nechť ν je σ-konečná. Potom existuje jediné vyjádření

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \text{ kde } \nu_a << \mu \text{ a } \nu_s \perp \mu.$$

Důkaz: 1. Existence. Předpokládejme nejdříve, že ν je konečná a označme

$$\alpha = \sup\{\nu(A); A \subset M, \ \mu(A) = 0\}.$$

Potom existuje posloupnost

$$\{A_j\}_{j=1}^{\infty}, \ A_j \subset M \text{ tak, že } \mu(A_j) = 0, \ \lim_{j\to\infty} \nu(A_j) = \alpha.$$

Buď $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Potom je $\mu(B) = 0$ a definujme

$$\nu_a(E) = \nu(E - B), \ \nu_s(E) = \nu(E \cap B) \ \forall E \subset M.$$

Platí $\nu = \nu_a + \nu_s$. Dále je zřejmé, že $\nu_s \perp \mu$. Skutečně platí

$$\mu(B) = 0 \text{ a } \nu_s(M - B) = \nu(\{M - B\} \cap B) = \nu(\emptyset) = 0.$$

Je-li nyní $\mu(E) = 0$, potom je $\nu_a(E) = \nu(E - B) = 0$, poněvadž $\nu(X) = 0$ pro každou množinu $X \subset M - B$, pro niž $\mu(X) = 0$. Kdyby tomu tak nebylo, potom je

$$\mu(X \cup B) = 0 \text{ a } \nu(X \cup B) > \nu(B).$$

To je však ve sporu s tím, jak množina B byla definována.

Buď nyní ν $\sigma-$konečná a $M = \bigcup_k M_k$, kde $\nu(M_k) < \infty$. Pro každou množinu M_k najdeme množinu B_k podle předchozí části důkazu a položme

$$B = \bigcup_k B_k, \ \nu_a(E) = \nu(E - B) \text{ a } \nu_s(E) = \nu(E \cap B).$$

2. Jednoznačnost. Nechť $\nu = \nu_a + \nu_s = \nu'_a + \nu'_s$. Potom existuje $B' \subset M$ tak, že $\mu(B') = 0$ a $\nu'_s(M - B') = 0$. Buď $E \subset M$ pevná množina a označme

$$C = E \cap (B \cup B'), \ D = E - (B \cup B').$$

Potom platí

$$\mu(C) \leq \mu(B) + \mu(B') = 0, \text{ takže } \nu_a(C) = \nu'_a(C) \text{ a } \nu_s(C) = \nu'_s(C).$$

Dále

$$\nu_s(D) = \nu'_s(D) = 0 \ [\text{je} D \cap B = D \cap B' = \emptyset]$$

a tedy $\nu_a(D) = \nu'_a(D)$. Poněvadž $E = C \cup D$ a $C \cap D = \emptyset$, dostaneme

$$\nu_s(E) = \nu'_s(E) \text{ a } \nu_a(E) = \nu'_a(E).$$

Definice: Rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ nazýváme Lebesgueovým rozkladem míry ν vzhledem k míře μ a míry ν_a a ν_s absolutně spojitou částí a singulární částí ν,

Poznámka: Z věty o existenci Lebesgueova rozkladu plyne, že existuje množina $B \subset M$ tak, že $\nu_a = \nu_B$ a $\nu_s = \nu_{M-B}$, tedy existuje rozklad $M = B \cup (M - B)$ tak, že na B se ν chová jako míra absolutně spojitá vzhledem k μ a na $M - B$ jako singulární vzhledem k μ. [ν_B a ν_{M-B} znamenají zúžení ν na příslušné množiny].

2.5 Lebesgueův integrál v R.

Poznámka: Funkce, které budeme v tomto paragrafu vyšetřovat, budou reálné, definované všude a konečné, pokud nebude řečeno jinak.

Definice: Buď f konečná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ $(a, b \in \mathbf{R})$ a nechť

$$D: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Potom výraz

$$V(f; \langle a, b\rangle) = \sup_{D} v(f),$$

kde suprémum bereme přes všechna dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, nazýváme variací funkce f na $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že f má konečnou variaci, jestliže

$$V(f) = V(f; \langle a, b\rangle) < \infty.$$

Poznámka: Je-li f monotonní v $\langle a, b\rangle$, potom $V(f) < \infty$. Je zřejmé, že

$$V(f; \langle a, b\rangle) = |f(b) - f(a)|.$$

Věta: Nechť funkce f, g mají konečnou variaci v $\langle a, b\rangle$, $\alpha \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta. Potom i funkce

$$\alpha f, \quad f \pm g, \quad |f|, \quad f \cdot g, \quad \max\{f, g\}, \quad \min\{f, g\}$$

mají konečnou variaci. Je-li navíc $\frac{1}{g}$ omezená, má také konečnou variaci.

Důkaz: 1. Platí

$$v(\alpha f) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha f(x_i) - \alpha f(x_{i-1})| = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

a odtud plyne, že $V(\alpha f) = |\alpha| V(f) < \infty$.

2. Platí

$$v(f \pm g) = \sum_{i=1}^{n} |\{f(x_i) \pm g(x_i)\} - \{f(x_{i-1}) \pm g(x_{i-1})\}| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i-1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| = v(f) + v(g)$$

a odtud $V(f \pm g) \leq V(f) + V(g)$.

3. Poněvadž je

$$v(|f|) = \sum_{i=1}^{n} ||f(x_i)| - |f(x_{i-1})|| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = v(f)$$

a tedy $V(|f|) \leq V(f) < \infty$. [Platí $||f(x_i)| - |f(x_{i-1})|| \leq |f(x_i) - f(x_{i-1})|$].

4. Vyjdeme z odhadu

$$|f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \leq |g(x_i)|\,|f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1})|\,|g(x_i) - g(x_{i-1})|.$$

Odtud plyne, že

$$V(fg) \le \sup_{\langle a,b\rangle} |g| \cdot V(f) + \sup_{\langle a,b\rangle} |f| \cdot V(g) < \infty.$$

5. Platí

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\{f+g+|f-g|\}\ ,\ \ \min\{f,g\} = \frac{1}{2}\{f+g-|f-g|\}$$

a odtud dostaneme tvrzení věty.

6. Platí

$$\left|\frac{1}{g(x_i)} - \frac{1}{g(x_{i-1})}\right| = \frac{|g(x_{i-1}) - g(x_i)|}{|g(x_i)| \cdot |g(x_{i-1})|}$$

a odtud $V\left(\frac{1}{g}\right) \le M^2\, V(g) < \infty$, kde $\left|\frac{1}{g(x)}\right| \le M\ \ \forall\, x \in \langle a,b\rangle$.

Poznámky: 1. Předchozí věta ukazuje, že množina všech funkcí s konečnou variací na $\langle a,b\rangle$ tvoří vektorový prostor. Dá se ukázat, že tento prostor je Banachův, jestliže definujeme $\|f\| = |f(a)| + V(f)$. Značíme jej $BV(a,b)$. Dále se ukazuje, že prostor funkcí s konečnou variací tvoří algebru a svaz. Platí totiž: pro $f,g \in BV(a,b)$ je

$$f \cdot g \in BV(a,b)\,,\ \ \max\{f,g\} \in BV(a,b)\,,\ \ \min\{f,g\} \in BV(a,b).$$

2. V dalším ukážeme, že při vyšetřování funkcí s konečnou variací hrají fundamentální roli monotonní funkce. Ukážeme, že f má konečnou variaci právě když $f = f_1 - f_2$, kde f_1 a f_2 jsou neklesající.

Lemma: Buď f konečná funkce v $\langle a,b\rangle$. Potom je $V(f;\langle a,x\rangle)$ pro $x \in (a,b\rangle$ neklesající funkce v $\langle a,b\rangle$, jestliže položíme $V(f;\langle a,a\rangle) = 0$.

Důkaz: Nechť $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, $\ x_1 \le x_2$. Potom je

$$V(f;\langle a,x_2\rangle) = V(f;\langle a,x_1\rangle) + V(f;\langle x_1,x_2\rangle) \ge V(f;\langle a,x_1\rangle).$$

Lemma: Položme $\varphi(x) = V(f;\langle a,x\rangle) - [\,f(x) - f(a)\,]$. Potom je φ neklesající na $\langle a,b\rangle$.

Důkaz: Nechť $x_1 \le x_2$. Potom

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = V(f;\langle a,x_2\rangle) - V(f;\langle a,x_1\rangle) - [\,f(x_2) - f(x_1)\,] = V(f;\langle x_1,x_2\rangle) - [\,f(x_2) - f(x_1)\,] \ge 0.$$

($|f(x_2) - f(x_1)|$ je totiž jeden ze součtů $v(f)$, zatímco $V(f;\langle x_1,x_2\rangle)$ je jejich suprémum.)

! Věta: (Jordanův rozklad)
Buď f reálná a konečná v $\langle a,b\rangle$. Potom má f konečnou variaci v $\langle a,b\rangle$ právě když ji lze vyjádřit ve tvaru $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, kde f_1 a f_2 jsou konečné a neklesající v $\langle a,b\rangle$.

Důkaz: 1. Má-li f konečnou variaci, potom $f(x) = V(f;\langle a,b\rangle) - [\,\varphi(x) - f(a)\,]$.

2. Obráceně je-li $f = f_1 - f_2$, potom $V(f) \le V(f_1) + V(f_2) < \infty$.

Věta: Buď f neklesající funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom má f nejvýše spočetnou množinu bodů nespojitosti.

Důkaz: Je zřejmé, že všechny body nespojitosti f jsou 1. druhu. Je-li x bod nespojitosti, potom je $f(x+) - f(x-) > 0$, kde $f(x+) = \lim\limits_{t \to x+} f(t)$ a $f(x-) = \lim\limits_{t \to x-} f(t)$. Existuje tedy nedegenerovaný interval

$$I(x) \subset \langle f(x-), f(x+)\rangle \subset \langle f(a), f(b)\rangle.$$

Jsou-li $x_1 \neq x_2$ dva body nespojitosti f, potom z monotonnosti f plyne, že $I(x_1) \cap I(x_2) = \emptyset$. Systém takových intervalů ale může být nejvýše spočetný.

Důsledek: Každá funkce s konečnou variací na intervalu $\langle a, b\rangle$ má nejvýše spočetnou množinu bodů nespojitosti.

Poznámka: Je známo, že spojitá funkce nemusí mít derivaci v žádném bodě daného intervalu. Jestliže se zeptáme, které funkce mají derivaci alespoň skoro všude, dostaneme, že jsou to funkce monotonní. To nyní dokážeme.

Lemma: (Riesz-vycházející slunce)
Buď h spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme

$$E = \{x \in (a, b); \exists\, \xi \in (x, b) \text{ tak, že } h(\xi) > h(x)\}.$$

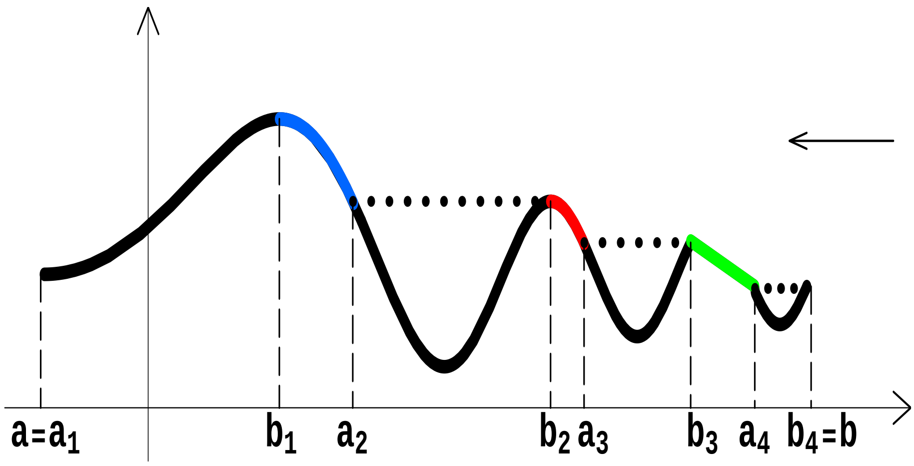
Potom je E sjednocení posloupnosti po dvou disjunktních intervalů (a_j, b_j) tak, že $h(a_j) \leq h(b_j)$.

Důkaz: Je zřejmé, že E je otevřená množina a tedy je sjednocením po dvou disjunktních otevřených intervalů obsažených v E. Buď (α, β) jeden takový interval a $x \in (\alpha, \beta)$. Označme

$$A = \{\xi \in (x, \beta); h(\xi) \geq h(x)\}.$$

Poněvadž $\beta \notin A$, musí být $h(x) \leq h(\beta)$ na $\langle \beta, b\rangle$. Dále $A \neq \emptyset$ a $\sup A = \beta$. Tedy $h(x) \leq h(\beta)$ a pro $x \to \alpha+$ dostaneme $h(\alpha) \leq h(\beta)$.

Poznámky: 1. Předchozí lemma má velmi názornou geometrickou interpretaci, jak je zřejmé z příslušného obrázku.



2. Je-li (α, β) maximální otevřený interval, obsažený v E a $\alpha > a$, potom $h(\alpha) = h(\beta)$.

3. Analogicky při pohledu zleva dostaneme zrcadlovou versi daného lemmatu (zapadající slunce). Buď h spojitá na $\langle \alpha, \beta\rangle$ a označme

$$F = \{x \in (a, b); \exists \eta \in (a, x) \text{ tak, že } h(\eta) > h(x)\}.$$

Potom je F sjednocení posloupnosti (a_j, b_j) po dvou disjunktních intervalů tak, že $h(a_j) \geq h(b_j)$.

Definice: Buď f funkce, definovaná na jistém okolí bodu $x \in \mathbf{R}$. Označme

$$D^+ f(x) = \limsup_{t\to 0+} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}, \qquad D_+ f(x) = \liminf_{t\to 0+} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

a analogicky $D^- f(x)$ a $D_- f(x)$ pro $t \to 0-$. Tato čísla (mohou být i $\pm\infty$) nazýváme <u>Diniho derivovaná čísla</u> funkce f v bodě x. Položme dále

$$\overline{D}\, f(x) = \limsup_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}.$$

Číslo $\overline{D} f(x)$ nazveme <u>horní derivací</u> f. Analogicky je definována <u>dolní derivace</u> $\underline{D} f(x)$.

Poznámka: Funkce f je diferencovatelná v bodě x právě když jsou všechna Diniho derivovaná čísla v bodě x vlastní a jsou si rovna.

Definice: Buď f funkce, definovaná na množině $E \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že f je lipschitzovská funkce na E, jestliže existuje $K > 0$ tak, že

$$|f(x)-f(y)| \le K|x-y| \quad \forall\, x, y \in E.$$

Lemma: Každá neklesající Lipschitzovská funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ má konečnou derivaci skoro všude v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz: Pro zjednodušení (formální) budeme předpokládat, že $K = 1$.

Poněvadž je $|f(x) - f(y)| \le K|x - y|$ a f je neklesající, platí, že $0 \le \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \le K\,(=1)$. Tedy každé Diniho číslo je nezáporné a menší nebo rovno $K(=1)$, což znamená, že Lipschitzovské funkce nemohou mít nekonečnou derivaci.

Abychom dokázali tvrzení lemmatu, stačí dokázat, že $D^+ f \le D_- f$ s. v. v $\langle a, b\rangle$ a analogicky $D^- f \le D_+ f$ s. v. v $\langle a, b\rangle$. Potom je

$$0 \le D^+ f \le D_- f \le D^- f \le D_+ f \le D^+ f \le 1\,(=K) \text{ s. v. v } \langle a, b\rangle.$$

Buď nyní $0 < p < q < 1$ a označme

$$M_{p,q} = \{x \in (a, b); D_- f < p < q < D^+ f\}.$$

Ukážeme, že $\lambda(M_{p,q}) = 0 \quad \forall\, p, q \in (0, 1)$.

Nechť $D_- f(x) < p$, neboli $\liminf\limits_{y\to x_-} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < p$. Tedy existuje posloupnost

$$\{y_k\}_{k=1}^{\infty},\ y_k < x\,,\ y_k \to x \text{ tak, že } \lim_{k\to\infty} \frac{f(y_k)-f(x)}{y_k - x} < p,$$

neboli $\exists k_0$ tak, že $\forall\, k \ge k_0$ platí $\frac{f(y_k)-f(x)}{y_k-x} < p$, tedy $f(y_k) - f(x) > py_k - px$ a odtud

$$f(y_k) - py_k > f(x) - px.$$

Podle Rieszova lemmatu (zapadající slunce) aplikovaného na funkci $h(x) = f(x) - px$ existují po dvou disjunktní intervaly (a_j, b_j) tak, že

$$\{x \in (a, b); D_- f(x) < p\} \subset \{x \in (a, b); \exists \xi \in (a, x), f(\xi) - p\xi > f(x) - px\} = \bigcup_j (a_j, b_j)$$

a $f(b_j) - pb_j \le f(a_j) - pa_j$.

Analogicky, je-li $D^+ f(x) > q$, potom $\limsup\limits_{z \to x_+} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} > q$ a existuje posloupnost

$$\{z_k\}_{k=1}^{\infty}, \;\; z_k > x, \;\; z_k \to x \;\text{ tak, že }\; \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_k)-f(x)}{z_k - x} > q,$$

tedy $\forall\, k \ge k_0$ platí $\frac{f(z_k)-f(x)}{z_k-x} > q$. Neboli $f(z_k) - qz_k > f(x) - qx$ a použijeme Rieszova lemmatu (vycházející slunce) na funkci $g(x) = f(x) - qx$ na každém z intervalů $\langle a_k, b_k\rangle$. Potom existují po dvou disjunktní intervaly $(a_{k,j}; b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$ tak, že

$$\{x \in (a,b); D^+ f(x) > q\} \subset \bigcup_k \{x \in (a_k, b_k); \exists\, \xi \in (x, b_k)\,,\;\; f(\xi) - q\xi > f(x) - qx\} = \bigcup_{k,j} (a_{k,j}; b_{k,j})$$

a dále $f(b_{k,j}) - qb_{k,j} \ge f(a_{k,j}) - qa_{k,j}$. Jestliže tyto nerovnosti shrneme, dostaneme, že

$$\frac{f(b_{k,j}) - f(a_{k,j})}{q} \ge b_{k,j} - a_{k,j} \;\text{ a }\; f(b_j) - f(a_j) \le p(b_j - a_j)\,, \;\text{ neboli}$$

$$\sum_{k,j} (b_{k,j} - a_{k,j}) \le \frac{1}{q} \sum_{k,j} \{f(b_{k,j}) - f(a_{k,j})\} \le \frac{1}{q} \sum_k \{f(b_k) - f(a_k)\} \le \frac{p}{q} \sum_k (b_k - a_k) \le \frac{p}{q}(b-a).$$

Nyní tento proces zopakujeme a indukcí po $2n$ krocích dostaneme posloupnost $\{\,(A_s, B_s)\,\}$ tak, že

$$\bigcup_s (A_s, B_s) \supset M_{p,q} \;\text{ a }\; \sum_s (B_s - A_s) \le \left(\frac{p}{q}\right)^n (b-a).$$

Odtud plyne, že $\lambda(M_{p,q}) = 0$ a důkaz je dokončen, jestliže si uvědomíme, že

$$\{x \in (a,b);\; D_- f(x) < D^+ f(x)\} \subset \bigcup_{p,q \in (0,1)\cap \mathbf{Q}} M_{p,q}.$$

Lemma: Každá neklesající spojitá funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ má konečnou derivaci skoro všude v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz: Využijeme-li výsledku předchozího lemmatu, je vidět, že stačí dokázat, že množina

$$M = \{x \in (a,b);\; D^+ f(x) = +\infty\}$$

má míru 0. Buď $x \in M$ a $C > 0$ libovolná konstanta. Potom existuje posloupnost

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \;\; y_n > x, y_n \to x \;\text{ a }\; k_0 \;\text{ tak, že }\; \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} > C \;\; \forall\, n \ge k_0,$$

neboli $f(y_n) - Cy_n > f(x) - Cx$. Podle Rieszova lemmatu (vycházející slunce) existují po dvou disjunktní intervaly (a_k, b_k) tak, že

$$f(a_k) - Ca_k \le f(b_k) - Cb_k.$$

Odtud dostaneme $\frac{f(b_k)-f(a_k)}{C} \ge b_k - a_k$, neboli

$$\sum_k (b_k - a_k) \le \sum_k \frac{f(b_k) - f(a_k)}{C} \le \frac{f(b) - f(a)}{C}.$$

Poněvadž $C > 0$ bylo libovolné, plyne odtud, že $M \subset \bigcup\limits_k (a_k, b_k)$ je nulová množina.

! Věta: Každá monotonní funkce f na intervalu $\mathcal{I}$ má skoro všude v $\mathcal{I}$ konečnou derivaci.

Důkaz: Předpokládejme, že $\mathcal{I} = \langle a, b\rangle$ a nechť f je neklesající (jinak místo funkce f vezmeme funkci $-f$). Vzhledem k tomu, že množina bodů nespojitosti funkce f je spočetná, plyne tvrzení věty okamžitě z předchozích dvou lemmat.

Důsledek: Každá funkce s konečnou variací na intervalu $\langle a, b\rangle$ má skoro všude v $\langle a, b\rangle$ konečnou derivaci.

Poznámka: Další část výkladu bude věnována vlastnostem absolutně spojitých a singulárních funkcí a bude ukončena větou o rozkladu funkce s konečnou variací na absolutně spojitou část a singulární část (analogie Lebesgueova rozkladu míry).

Definice: Buď f konečná funkce v $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že f je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý systém intervalů

$$\langle a_i, b_i\rangle \subset \langle a, b\rangle \quad a \le a_1 < b_1 \le \cdots \le a_n < b_n \le b$$

takový, že
$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \quad \text{platí} \quad \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Věta: Je-li f absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$, je tam i stejnoměrně spojitá (tedy spojitá) a má konečnou variaci v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz: a) Vezmeme-li v předchozí definici specielně pouze jeden interval, dostaneme, že $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, tedy stejnoměrnou spojitost f.

b) Položme $\varepsilon = 1$ a zvolme příslušné $\delta > 0$ v definici absolutně spojité funkce. Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na p intervalů $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ o délce menší než δ. Z definice absolutní spojitosti plyne, že f má na každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ konečnou variaci $[\, V(f; \langle x_{i-1}, x_i\rangle) \le 1\,]$ a tedy $V(f; \langle a, b\rangle) \le p$.

Poznámka: Obrácené tvrzení neplatí. Existuje tedy spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$, která není absolutně spojitá. Příklad uvedeme později (Cantorova funkce).

Důsledek: Je-li f absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$, má skoro všude v $\langle a, b\rangle$ konečnou derivaci.

Věta: Je-li f Lipschitzovská v $\langle a, b\rangle$, potom je absolutně spojitá na $\langle a, b\rangle$. Specielně, má-li f omezenou derivaci v (a, b), je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz: Platí $\left|\frac{f(b_i)-f(a_i)}{b_i-a_i}\right| \le K < \infty$ pro každý systém intervalů $\langle a_i, b_i\rangle \subset \langle a, b\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Odtud plyne, že

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \le K \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

a stačí volit $\delta \le \frac{\varepsilon}{K}$.

Poznámka: Má-li f omezenou derivaci v $\langle a, b\rangle$ je $V(f; \langle a, b\rangle) = \int\limits_a^b |f'(x)|\, dx$.

Důkaz: Je

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) \qquad [\,\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)\,].$$

To je však integrální součet příslušný funkci $|f'|$ a dělení $D: \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Definice: Buď f funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že f je singulární, jestliže $f'(x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$.

Poznámka: Typickou singulární funkcí je t. zv. funkce skoků. Buď $\{x_k\} \quad x_k \neq x_j$ pro $k \neq j$ množina bodů intervalu $\langle a, b\rangle$ (může být i konečná) a nechť $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$ jsou reálná čísla taková, že $\sum\limits_k |a_k| < \infty\,,\ \sum\limits_k |b_k| < \infty$. Potom funkci

$$g(x) = \sum_{a < x_n \leq x} a_n + \sum_{a \leq x_n < x} b_n$$

nazveme funkcí skoků. Platí $a_n = g(x_n) - g(x_n-)\,, \quad b_n = g(x_n+) - g(x_n)$.

Věta: Buď f funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$. Potom je f singulární v $\langle a, b\rangle$ právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje systém intervalů $\langle \alpha_i, \beta_i\rangle \subset \langle a, b\rangle \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon\,, \text{ ale } \sum_{i=1}^{n} V(f; \langle \alpha_i, \beta_i\rangle) > V(f; \langle a, b\rangle) - \varepsilon.$$

Důkaz: Vyžaduje Vitaliovu větu o pokrytí a nebudeme jej provádět. Věta má však zajímavou interpretaci. Slovy řečeno singulární funkce nabývá skoro celou variaci na systému intervalů s libovolně malou délkou.

Poznámka: Z prvého semestru je známo, že pro spojitou funkci f v $\langle a, b\rangle$ takovou, že $f'(x) = 0$ pro $x \in (a, b)$ platí, že f je konstantní. Jestliže budeme předpokládat pouze, že $f'(x) = 0$ s. v. v $\langle a, b\rangle$, nemusí být již f konstantní, jak ukážeme později na příkladu. Platí však

Věta: Buď f absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ a nechť $f'(x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Potom je f konstantní v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz: Poněvadž f je absolutně spojitá, platí, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tak, že jakmile } \langle \alpha_i, \beta_i\rangle \subset \langle a, b\rangle, \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) < \delta\,, \text{ potom } \sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$$

a odtud také $\sum\limits_{i=1}^{n} V(f; \langle \alpha_i, \beta_i\rangle) \leq \varepsilon$. Poněvadž f je singulární, je možno vybrat systém intervalů $\langle \alpha_i, \beta_i\rangle$ tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} V(f; \langle \alpha_i, \beta_i\rangle) > V(f; \langle a, b\rangle) - \delta.$$

Jestliže zvolíme δ tak, aby $\delta \leq \varepsilon$, dostaneme, že $V(f; \langle a, b\rangle) < 2\varepsilon$. Odtud plyne, že $V(f; \langle a, b\rangle) = 0$ a f je tedy konstantní.

Důsledek: Buďte f a g absolutně spojité v $\langle a, b\rangle$ a nechť $f'(x) = g'(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Potom je $f - g$ konstantní v $\langle a, b\rangle$.

Poznámka: V dalším se budeme zabývat neurčitým Lebesgueovým integrálem a jeho vlastnostmi.

Definice: Buď $f \in L(a,b)$. Potom každou funkci tvaru

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C \qquad (a \le x \le b),$$

kde C je libovolná konstanta, nazýváme neurčitým Lebesgueovým integrálem funkce f.

Poznámky: 1. Je-li F neurčitým integrálem f, potom platí

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

2. Má-li f konečnou variaci v $\langle a,b\rangle$, můžeme si položit následující otázky. Je $f' \in L(a,b)$? Platí $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$? Odpověď na prvou otázku je kladná, na druhou záporná.

Věta: Je-li f konečná a neklesající v $\langle a,b\rangle$, potom platí

$$0 \le \int\limits_a^b f'(x)\,dx \le f(b) - f(a),$$

tedy $f' \in L(a,b)$.

Důkaz: Dodefinujme funkci f pro $x > b$ jako $f(x) = f(b)$. Funkce f zůstane neklesající a tedy skoro všude v $\langle a,b\rangle$ existuje konečná derivace

$$0 \le f'(x) = \lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right\}.$$

Odtud plyne měřitelnost f'. Dále

$$\int\limits_a^b n\left\{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right\} dx = n\int\limits_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right) dx - n\int\limits_a^b f(x)\,dx =$$

$$= n\left\{\int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right\} = n\left\{\int\limits_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx\right\} \le$$

$$\le n\left\{\int\limits_b^{b+\frac{1}{n}} f(b)\,dx - \int\limits_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\,dx\right\} = f(b) - f(a).$$

Podle Fatouova lemmatu platí

$$0 \le \int\limits_a^b f'(x)\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_a^b n\left\{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right\} dx \le f(b) - f(a).$$

Důsledek: Má-li f v $\langle a,b\rangle$ konečnou variaci, je $f' \in L(a,b)$.

Poznámka: Jednoduchý příklad ukazuje, že $\int_a^b f'(x)\,dx \neq f(b) - f(a)$. Stačí volit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle, \\ 1 & \text{pro} \quad x \in (\frac{1}{2}, 1\rangle. \end{cases}$ Potom je

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = 0 < f(1) - f(0) = 1.$$

Věta: Buď $f \in L(a,b)$. Potom je $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a \le x \le b)$ absolutně spojitá funkce v $\langle a, b\rangle$ a skoro všude v $\langle a, b\rangle$ platí $F'(x) = f(x)$.

Důkaz: Důkaz absolutní spojitosti F provedeme analogicky jako důkaz implikace $2 \Rightarrow 3$ ve větě, následující bezprostředně za Radon-Nykodýmovou větou (str. 60).

Můžeme předpokládat, že $f \geq 0$, jinak provedeme odděleně důkaz pro f^+ a f^-. Vzhledem k tomu existuje skoro všude v $\langle a, b\rangle$ konečná derivace $F'(x)$ a platí

$$\int_\alpha^\beta F'(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

pro každý interval $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Odtud plyne, že $\int_E F'(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$ pro každou měřitelnou podmnožinu $E \subset \langle a, b\rangle$, neboli $F'(x) = f(x)$ s. v. v $\langle a, b\rangle$.

Důsledek: Každá funkce absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ je v tomto intervalu neurčitým integrálem své derivace.

Důkaz: Položme $g(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$. Potom platí $g'(x) = f'(x)$ s. v. v $\langle a, b\rangle$ a poněvadž g je absolutně spojitá, je $f - g$ konstantní v $\langle a, b\rangle$, neboli $f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt + C$.

! Důsledek: (Lebesgueův rozklad)

Buď f funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$. Potom existuje absolutně spojitá funkce f_{ac} a singulární funkce f_s tak, že $f = f_{ac} + f_s$. Tento rozklad je určen jednoznačně až na aditivní konstantu. Je-li f neklesající, jsou i f_{ac} a f_s neklesající.

Důkaz: Platí

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt + g(x)$$

neboli

$$f_{ac}(x) = \int_a^x f'(t)\,dt \quad [+f(a) \text{ eventuelně}] \text{ a } f_s(x) = g(x) \quad [+f(a)].$$

Nechť $f = f_{ac} + f_s$ a zároveň $f = g_{ac} + g_s$. Potom je $f_{ac} - g_{ac} = g_s - f_s$. Poněvadž levá strana je absolutně spojitá funkce a pravá strana singulární funkce, může být pouze $f_{ac} - g_{ac} = C = g_s - f_s$, kde C je konstanta.

Buď f nyní neklesající. Potom je $f' \geq 0$ s. v. v $\langle a, b\rangle$ a tedy f_{ac} je neklesající. Dále

$$0 \leq \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\,dt \leq f(x_2) - f(x_1) \text{ pro libovolné } x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle, \ x_1 \leq x_2$$

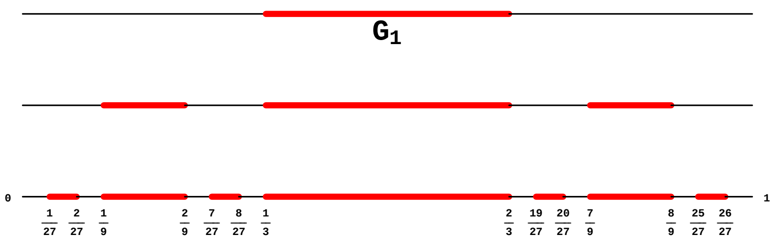
a odtud plyne, že f_s je neklesající.

Poznámka: Uvažme singulární část f, tedy funkci f_s v předchozím rozkladu. Označme $h(x)$ funkci skoků funkce f. Potom je $\varphi(x) = f_s(x) - h(x)$ singulární a spojitá a položme si otázku. Existuje singulární a spojitá funkce, která není konstantní? Odpověď je kladná, jak ukazuje následující příklad.

Příklad: <u>Cantorovo diskontinuum.</u>
Uvažme množinu $A = \langle 0, 1\rangle$ a označme

$$G_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad G_2 = G_1 \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right),$$

$$G_3 = G_2 \cup \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right).$$



Jestliže budeme pokračovat tímto způsobem, dostaneme posloupnost $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ otevřených množin a označme $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Potom je G otevřená množina a pro její Lebesgueovu míru platí

$$\lambda(G) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Buď $D = A - G$. Množinu D nazýváme Cantorovou množinou nebo Cantorovým diskontinuem. D je kompaktní množina, pro niž $\lambda(D) = 0$. Dále platí

<u>D je nespočetná množina.</u>

Důkaz: Předpokládejme, že D je spočetná, tedy její prvky můžeme napsat ve tvaru posloupnosti $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Buď A_1 ta část $A - G_1$, že $x_1 \notin A_1$; A_2 ta část $A_1 - G_2$, že $x_2 \notin A_2$; A_3 ta část $A_2 - G_3$, že $x_3 \notin A_3$. Jestliže pokračujeme takto dále, dostaneme posloupnost $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, A_n jsou neprázdné a kompaktní. Platí tedy, že $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset D$, ale žádný bod posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ v tomto průniku neleží a D je tedy nespočetná.

Poznámka: Jestliže se podíváme, jak vypadají body D, dostaneme, že jsou tvaru

$$\frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \frac{2a_3}{3^3} + \ldots,$$

kde a_n je buď 0 nebo 1. Skutečně $G_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ odpovídá těm rozvojům (trojkovým) $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$, kde $b_1 = 1$, $G_2 - G_1$ těm, kde $b_2 = 1$ atd. Jestliže uvedenému vyjádření přiřadíme číslo

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots,$$

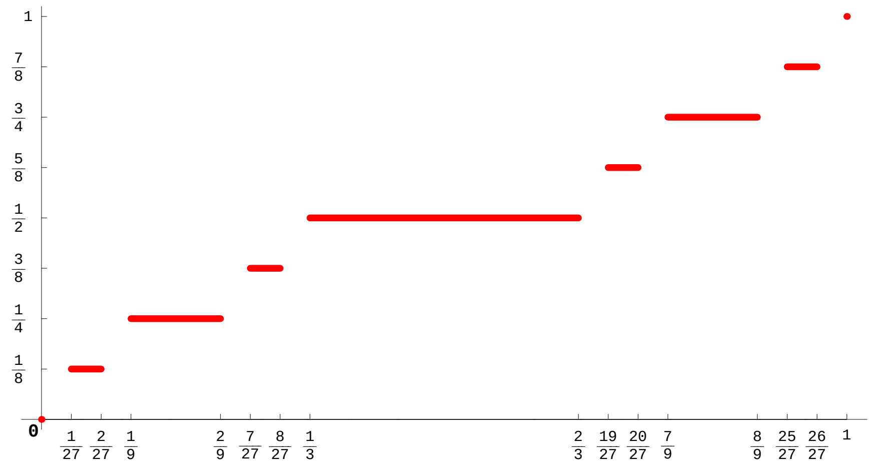
dostaneme bijekci D a $\langle 0, 1\rangle$.

Cantorova funkce.

Definujme $\varphi(0) = 0\,,\ \ \varphi(1) = 1$. Na komponentách $G_k - G_{k-1}$ budou hodnoty postupně

$$\frac{1}{2^k},\ \frac{3}{2^k},\ \frac{5}{2^k},\ldots,\ \frac{2^k-1}{2^k}.$$

Pro $x \in D$ definujme $\varphi(x) = \sup\limits_{\xi\in G;\xi<x} \varphi(\xi)$. Platí $\varphi\left(2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$. Poněvadž tyto hodnoty vyplňují celý interval $\langle 0,1\rangle$, je φ spojitá funkce. Tedy φ je neklesající spojitá a singulární, t. j. $\varphi'(x) = 0$ s. v. v $\langle 0,1\rangle$. Navíc $\varphi(0) = 0,\ \ \varphi(1) = 1$, tedy φ nemůže být absolutně spojitá.



Definice: Buď $\mathcal{I} \subset \mathbf{R}$ interval, $x \in \mathcal{I}$ bod. Řekneme, že x je lebesgueovský bod lokálně integrovatelné funkce f, jestliže

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}|f(x+t)-f(x)|\,dt = 0.$$

Poznámka: Je-li $f \in L(a,b)\,,\ \ F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$, potom je podle dříve uvedené věty $F'(x) = f(x)$ s. v. v $\langle a,b\rangle$. Na druhé straně je

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)-F(x-h)}{h}\ , \quad \text{neboli}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\left\{\int\limits_a^{x+h} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x-h} f(t)\,dt\right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(x+t)\,dt.$$

Věta: Buď f lokálně integrovatelná funkce na intervalu $\mathcal{I}$. Potom je skoro každý bod $\mathcal{I}$ lebesgueovský bod f.

Důkaz: Pro pevné $r \in \mathbf{R}$ je funkce $|f(x) - r|$ lokálně integrovatelná na $\mathcal{I}$. Podle předchozí poznámky existuje tedy množina $E_r \subset \mathcal{I}$ taková, že $\lambda(E_r) = 0$ a že platí

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}|f(x+t)-r|\,dt = |f(x)-r| \quad \forall x \in \mathcal{I} - E_r.$$

Označme $E = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} E_r$. Potom je $\lambda(E) = 0$ a buď $x \in \mathcal{I} - E$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existuje $r \in \mathbf{Q}$ tak, že $|f(x) - r| < \varepsilon$ a tedy $|f(x+t) - f(x)| \leq |f(x+t) - r| + \varepsilon$. Odtud

$$\limsup_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x)|\, dt \leq |f(x) - r| + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Poznámka: Každý bod spojitosti f je lebesgueovský.

Definice: Distribuční funkcí míry ν na množinbě $\mathbf{R}$ rozumíme neklesající zprava spojitou funkci F na $\mathbf{R}$ tak, že $F(b) - F(a) = \nu\{(a, b\rangle\}$ pro každý interval $(a, b\rangle \subset \mathbf{R}$.

Poznámka: Je-li ν pravděpodobnostní míra, potom distribuční funkce ν daná předpisem

$$G_\nu(x) = \nu\{(-\infty, x\rangle\}$$

je normovaná ve smyslu, že $\lim\limits_{x \to -\infty} G_\nu(x) = 0\,, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} G_\nu(x) = 1.$

Věta: 1. Buď F neklesající zprava spojitá funkce na $\mathbf{R}$. Potom existuje jediná míra ν_F taková, že F je její distribuční funkce.

2. Buď ν míra na $\mathbf{R}$. Potom k ní existuje distribuční funkce F.

Důkaz: 1. Důkaz vyžaduje vybudování množinové $\sigma-$algebry generované intervaly tvaru $(a, b\rangle$ a není zcela triviální. Nebudeme jej tedy provádět.

2. Položme

$$F_\nu(x) = \begin{cases} \nu\{(0, x\rangle\} & \text{pro} \quad x > 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0, \\ -\nu\{(x, 0\rangle\} & \text{pro} \quad x < 0. \end{cases}$$

Potom je F_ν neklesající, zprava spojitá a $F_\nu(0) = 0$. Dále $\nu\{(a, b\rangle\} = F_\nu(b) - F_\nu(a)$ pro každý interval $(a, b\rangle \subset \mathbf{R}$.

Poznámky: 1. Každou neklesající distribuční funkci můžeme vyjádřit ve tvaru $G = G_{ac} + G_s$, kde G_{ac} je absolutně spojitá a G_s singulární. Je-li ν_G odpovídající míra, potom $\nu_G = \nu_{ac} + \nu_s$, kde ν_{ac} je míra absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově níře λ a ν_s singulární vzhledem k λ.

2. Je-li G libovolná funkce s konečnou variací, pak ji lze psát ve tvaru $G = G_1 - G_2$, kde G_1 a G_2 jsou neklesající a dovoluje tedy zavést i míru s reálnými hodnotami $\nu_G = \nu_{G_1} - \nu_{G_2}$. Analogicky pro komplexní funkci F s konečnou variací [t.j. $\mathrm{Re}\, F$ i $\mathrm{Im}\, F$ mají konečnou variaci] můžeme psát

$$F = \mathrm{Re}\, F + i \mathrm{Im}\, F = (\mathrm{Re}\, F)_1 - (\mathrm{Re}\, F)_2 + i\{(\mathrm{Im}\, F)_1 - (\mathrm{Im}\, F)_2\}.$$

Kapitola 3

Fourierovy řady.

3.1 Ortogonální systémy funkcí.

Poznámka: V tomto paragrafu se budeme zabývat rozvoji podle ortonormálního systému v libovolném Hilbertově prostoru. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že se pohybujeme v separabilních prostorech.

Definice: Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost prvků separabilního Hilbertova prostoru H. Řekneme, že $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplná, jestliže platí: je-li pro nějaké $x \in H$ $(x, \varphi_n) = 0 \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, potom $x = 0$.

Věta: Buď H separabilní Hilbertův prostor. Potom v H existuje úplný ortonormální systém.

Důkaz: Poněvadž H je separabilní, existuje v H hustá spočetná podmnožina $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z této množiny vybereme nezávislou podmnožinu $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $[\,\{x_1, x_2, \dots, x_{k_n}\}\,] = [\,\{y_1, y_2, \dots, y_n\}\,]$. Poněvadž je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hustá, platí $\overline{[\,\{y_1, y_2, \dots\}\,]} = H$. Nyní stačí použít Gram-Schmidtovy ortogonalizace, abychom dostali požadovaný systém.

Poznámka: Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální systém v Hilbertově prostoru H, $x \in H$ libovolný vektor. Označme $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j$ a zkoumejme, pro jaká α_j je minimální odchylka $\delta_n = \|x - y_n\|^2$. Platí

$$\delta_n = (x - y_n,\, x - y_n) = \|x\|^2 - (x,\, y_n) - (y_n,\, x) + \|y_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}(x, \varphi_j) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\varphi_j, x) + \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j\, \overline{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\, \alpha_j + \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 =$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{j=1}^{n} (c_j - \alpha_j)\, \overline{(c_j - \alpha_j)} - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\,,$$

kde $c_j = (x, \varphi_j)$. Tedy δ_n je minimální, jestliže $\alpha_j = c_j$.

Definice: Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální systém v Hilbertově prostoru H, $x \in H$. Potom čísla $c_n = (x, \varphi_n)$ nazýváme Fourierovými koeficienty prvku x vzhledem k systému $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta: Buď H Hilbertův prostor, $x \in H$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém v H. Potom mnohočlen n-tého řádu $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$, který x nejlépe aproximuje v normě H, je Fourierův mnohočlen. $[\alpha_k = c_k = (x, \varphi_k)]$.

Věta: Buď H Hilbertův prostor, $x \in H$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém v H, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ Fourierovy koeficienty x vzhledem k systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Potom platí Besselova nerovnost

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 .$$

Důkaz: Pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ platí

$$0 \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

a odtud plyne tvrzení.

Důsledek: Jsou-li $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ Fourierovy koeficienty prvku $x \in H$ vzhledem k ortonormálnímu systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, potom $c_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Věta: Buď $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém v separabilním Hilbertově prostoru H. Potom je tento systém úplný právě když pro každé $x \in H$ platí Parsevalova rovnost

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 .$$

Důkaz: 1. Buď $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ úplný, $x \in H$ a označme $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$. Potom platí

$$(x - y, \varphi_j) = (x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \varphi_j) = (x, \varphi_j) - c_j = 0 \text{ pro } j = 1, 2, \ldots .$$

Z úplnosti plyne, že $x - y = 0$, tedy $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$.

2. Nechť $(x, \varphi_k) = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Potom je $c_k = (x, \varphi_k) = 0$, tedy

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = 0$$

a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je úplný ortonormální systém.

Poznámky: 1. Uvedené věty ukazují, že Fourierova řada libovolného prvku $x \in H$ (Hilbertův prostor) vzhledem k ortonormálnímu systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje vždy ve smyslu normy v H. Jestliže uvážíme konkrétní prostor $H = \mathbf{L}_2(a,b)$, v němž budeme v dalším paragrafu Fourierovy řady zkoumat, je konvergence v $\mathbf{L}_2(a,b)$ totožná s konvergencí podle středu. To ale nezaručuje bodovou konvergenci, jak ukazuje následující příklad.

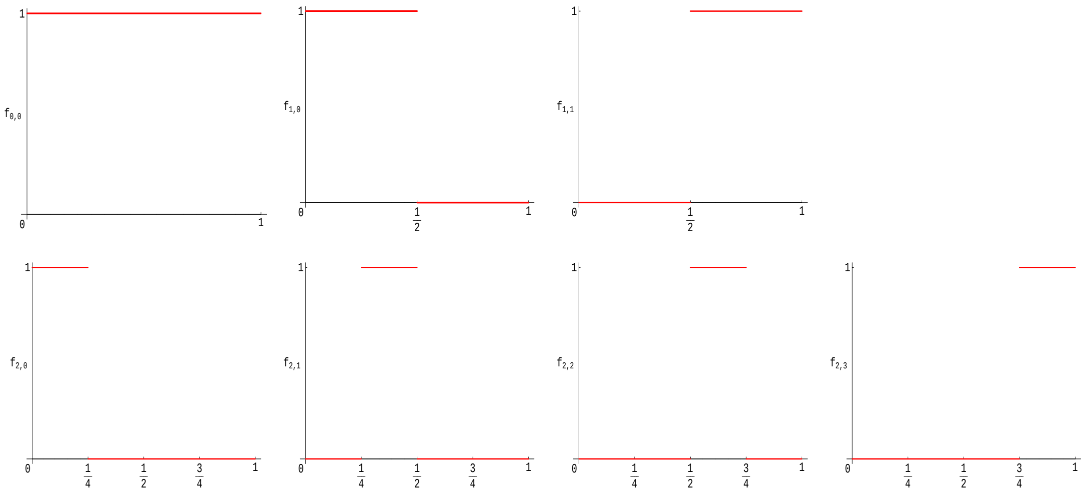
Příklad: Buď $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$ a definujme funkce

$$f_{n,k}(x) \text{ pro } n = 0, 1, 2, \ldots \;;\quad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 \text{ předpisem}$$

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \in \left\langle \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right\rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Potom platí $\int\limits_0^1 |f_{n,k}(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tedy $f_{n,k} \to 0$ podle středu, ale $\{f_{n,k}(x)\}$ nekonverguje pro žádné $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Existuje vybraná posloupnost, na příklad $\{f_{n,0}(x)\}$, která konverguje pro všechna $x \in (0,1\rangle$. Následující obrázky ukazují, jak se daná posloupnost chová.



2. Předchozí věta spolu s větou o existenci úplného ortonormálního systému dovolují ukázat, že všechny separabilní Hilbertovy prostory jsou izometricky izomorfní.

Věta: Každý separabilní Hilbertův prostor je izometricky izomorfní s prostorem $\mathbf{l}_2$.

Důkaz: Buď $x \in H$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ úplný ortonormální systém v H. Definujme zobrazení

$$T : H \to \mathbf{l}_2 \text{ předpisem } T\,x = u = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} .$$

Potom je T zřejmě lineární zobrazení a

$$\|T\,x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$$

podle Parsevalovy rovnosti a tedy T je izometrie.

3.2 Příklady úplných ortogonálních systémů funkcí.

Poznámky: 1. V dalším zvolíme konkrétní Hilbertův prostor a sice $\mathbf{L}_2(a,b)$ a uvedeme některé ortogonální nebo ortonormální systémy funkcí na tomto prostoru.

2. V následujících paragrafech se budeme zabývat bodovou a stejnoměrnou konvergencí Fourierových řad.

Příklady: 1. Systém$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ je ortogonální na libovolném intervalu délky 2π . Systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}\right\}$, $n \in \mathbf{Z}$ je ortonormální.

Důkaz: Platí

$$(e^{inx}, e^{ikx}) = \int\limits_a^{a+2\pi} e^{inx}\, e^{-ikx}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{i(n-k)}\, e^{i(n-k)x} \big|_a^{a+2\pi} = 0 & \text{je-li } n \neq k\,, \\ \int\limits_a^{a+2\pi} dx = 2\pi = \|e^{inx}\|^2 & \text{je-li } n = k\,. \end{cases}$$

Položme nyní pro formální zjednodušení $a = -\pi$ a buď $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}$. Označme

$$c_n^* = (f, \varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\,, \quad f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^*\, \varphi_n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \cdot e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{inx}\,,$$

kde $c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$ bude značit Fourierův koeficient. Platí Parsevalova rovnost $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n^*|^2$ a poněvadž je $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, c_n^*$, dostaneme, že Parsevalova rovnost má tvar

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2\,.$$

2. Systém $\{1, \cos\, x, \sin\, x, \cos\, 2x, \sin\, 2x, \dots\}$ je ortogonální na libovolném intervalu délky 2π. Systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \cos\, x\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \sin\, x\,, \dots\right\}$ je ortonormální.

Důkaz: Je třeba ukázat, že $\forall\, n, k \in \mathbf{N}$ platí $(1, \cos\, nx) = (1, \sin\, nx) = (\sin\, nx. \cos\, kx) = 0$ a dále $(\sin\, nx, \sin\, kx) = (\cos\, nx, \cos\, kx) = \pi\, \delta_{nk}$, kde δ_{nk} je Kroneckerovo delta. To jsou však výpočty běžných integrálů a nebudeme je detailně provádět. Analogickou úvahou jako v předchozím příkladu dostaneme, že Fourierova řada funkce f má tvar

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\, kx + b_k \sin\, kx)\,,$$

$$\text{kde } a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \cos\, kt\, dt\,,\ \ k = 0, 1, 2, \dots\,,\ \ b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \sin\, kt\, dt\,,\ \ k = 1, 2, \dots\,.$$

Parsevalova rovnost má tvar

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\, |a_k|^2 + |b_k|^2)\,.$$

Poznámka: Vzájemný vztah mezi systémy z příkladů 1 a 2 dostaneme okamžitě, jestliže užijeme Eulerovy identity. Je-li

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\, \cos\, kx + b_k\, \sin\, kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k\, \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k\, \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2}\, e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2}\, e^{-ikx} \right) \text{ a tedy } c_0 = \frac{a_0}{2}\,,\ \ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}\,,\ \ c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}\,.$$

Jestliže tedy známe koeficienty a_k a b_k, můžeme vypočítat koeficienty c_k a obráceně. Platí totiž $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$.

Věta: Systém $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ je úplný v prostoru $\mathbf{L}_1(-\pi,\pi)$, neboli: jestliže pro nějakou funkci $f \in \mathbf{L}_1(-\pi,\pi)$ platí $a_k = 0$ pro $k = 0,1,2,\dots$ a $b_k = 0$ pro $k = 1,2,\dots$, potom je $f(x) = 0$ skoro všude v $(-\pi,\pi)$.

Poznámka: Poněvadž je $\mathbf{L}_2(-\pi,\pi) \subset \mathbf{L}_1(-\pi,\pi)$, je daný systém úplný i v $\mathbf{L}_2(-\pi,\pi)$.

Důkaz: Nechť $a_k = 0 = b_k$, neboli $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,T(x)\,dx = 0$ pro každý trigonometrický mnohočlen $T(x)$. Trigonometrickým mnohočlenem n-tého řádu rozumíme výraz tvaru

$$T(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \ \text{ nebo } \ T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx}.$$

1. Předpokládejme nejdříve, že f je spojitá a není identicky rovna 0. Potom existuje bod x_0 a kladná čísla ε, δ tak, že $|f(x)| > \varepsilon$, řekněme $f(x) > \varepsilon$ na intervalu $\mathcal{I} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Stačí dokázat, že existuje posloupnost trigonometrických mnohočlenů $\{T_n(x)\}$ tak, že

a) $T_n(x) \geq 0$ pro $x \in \mathcal{I}$.

b) $T_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ na každém intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \mathcal{I}$.

c) $T_n(x)$ je omezená na $E = \langle -\pi, \pi\rangle - \mathcal{I}$.

Potom bude platit

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,T_n(x)\,dx \right| \geq \varepsilon(\beta - \alpha) \min_{x \in \langle \alpha,\beta\rangle} T_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \text{ a } \ \left| \int\limits_{E} f(x)\,T_n(x)\,dx \right| \leq M < \infty.$$

Položme

$$T_n(x) = \{t(x)\}^n, \ \text{ kde } \ t(x) = 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta.$$

Potom má t maximum v bodě

$$x = x_0;\ \ t(x_0) = 2 - \cos\delta > 1,\ \ t(x_0 - \delta) = 1,\ \ t(x_0 + \delta) = 1,$$

tedy $t(x) \geq 1$ na $\mathcal{I}$, $t(x) > 1$ na $\langle \alpha, \beta\rangle$ a $|t(x)| \leq 1$ na E. Podmínky a) - c) jsou tedy splněny a věta platí pro případ spojitého f.

2. Buď $f \in \mathbf{L}_1(-\pi,\pi)$ a dodefinujme ji na $\mathbf{R}$ jako 2π-periodickou. Uvažme funkci $F(x) = \int\limits_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$. Platí $F(x + 2\pi) = F(x) + \int\limits_{x}^{x+2\pi} f(t)\,dt = F(x) + \pi\, a_0 = F(x)$, tedy F je 2π-periodická. Označme A_k, B_k její Fourierovy koeficienty. Potom platí

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx = \left[\frac{F(x)}{k\,\pi}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = -\frac{b_k}{k} = 0.$$

Analogicky

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx\,dx = \left[-\frac{F(x)}{k\,\pi}\cos k\pi\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\,\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{k}\,a_k = 0.$$

Buďte A_0^*, A_1^*, B_1^*, $\dots$ Fourierovy koeficienty funkce $F(x) - A_0$. Potom je zřejmé, že $A_0^* = A_1^* = B_1^* = \cdots = 0$. Tedy $F(x) - A_0$ je funkce identicky rovná 0. Poněvadž $F(-\pi) = 0$, je $A_0 = 0$, a odtud plyne, že $f(x) = 0$ s. v. v $(-\pi,\pi)$.

Důsledek: Jestliže dvě funkce $f, g \in \mathbf{L}_1(-\pi,\pi)$ mají stejné Fourierovy koeficienty, potom $f(x) = g(x)$ skoro všude v $(-\pi,\pi)$.

Poznámka: K odvození vět o bodové nebo stejnoměrné konvergenci Fourierových řad budeme potřebovat informaci, že spojité funkce tvoří hustou podmnožinu v $\mathbf{L}_1(M)$.

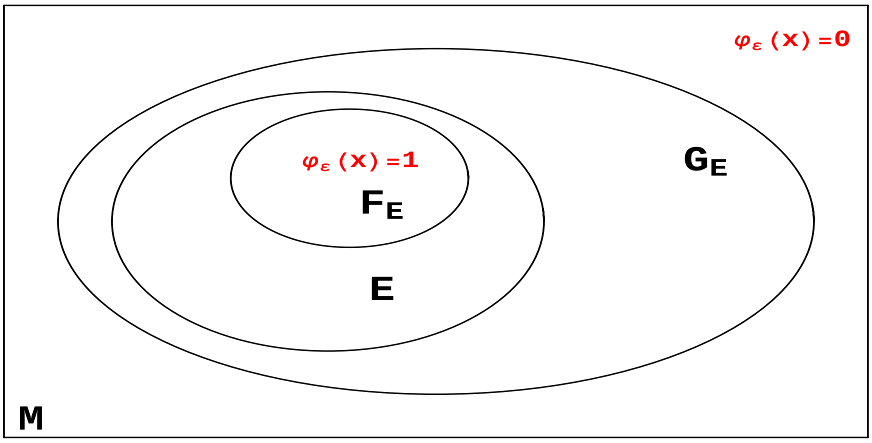
Věta: Množina spojitých funkcí je hustá v $\mathbf{L}_1(M)$, kde $M \subset \mathbf{R}^n$ je měřitelná množina.

Důkaz: Poněvadž jsou v $\mathbf{L}_1(M)$ husté jednoduché μ-integrovatelné funkce a ty jsou lineárními kombinacemi charakteristických funkcí měřitelných množin $E \subset M$, stačí ukázat, že každou funkci $\chi_E(x)$ lze aproximovat s libovolnou přesností spojitou funkcí.

Další postup důkazu je založen na vlastnosti některých měr, z nichž Lebesgueova míra tuto vlastnost „regularity" splňuje. Je-li $E \subset M$ měřitelná množina, pak existuje otevřená množina G_E a uzavřená množina F_E tak, že

$$F_E \subset E \subset G_E \ \text{ a } \ \lambda(G_E - F_E) < \varepsilon$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$. Situaci popisuje následující obrázek.



Definujme nyní funkci

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{d}(x, M - G_E)}{\mathbf{d}(x, M - G_E) + \mathbf{d}(x, F_E)} \,.$$

$\varphi_\varepsilon(x)$ je spojitá funkce, taková, že $0 \le \varphi_\varepsilon(x) \le 1 \ \forall x \in M$. Dále platí

$$\chi_E - \varphi_\varepsilon \begin{cases} = 0 & \text{na } \ F_E \,, \\ = 0 & \text{na } \ M - G_E \,, \\ \le 1 & \text{na } \ G_E - F_E \,. \end{cases}$$

Tedy

$$\int\limits_M |\chi_E(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \, d\lambda \le \lambda(G_E - F_E) < \varepsilon \,,$$

což dokončuje důkaz věty.

3.3 Bodová a stejnoměrná konvergence Fourierových řad.

Poznámka: V úvodu uvedeme dvě pomocná tvrzení, která nám umožní vyjádřit částečný součet Fourierovy řady ve tvaru integrálu.

Lemma: Buď $n \in \mathbf{N}$. Potom platí

$$\frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,; \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,dx = 1\,.$$

Důkaz: Je

$$\frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{1}{2}\{1 + e^{ix} + e^{-ix} + \dots + e^{inx} + e^{-inx}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{e^{-inx} + \dots + e^{-ix} + 1 + e^{ix} + \dots + e^{inx}\}\,.$$

Toto je součet $2n+1$ členů geometrické posloupnosti s prvým členem e^{-inx} a kvocientem $q = e^{ix}$, tedy

$$\frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{1}{2}\,e^{-inx}\,\frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,.$$

Hodnota daného integrálu je zřejmá, poněvadž jediný nenulový integrál je $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$.

Lemma: Buď

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\,a_k \cos kx + b_k \sin kx\,)$$

Fourierova řada 2π-periodické funkce f na intervalu $(-\pi, \pi)$. Položme

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\,a_k \cos kx + b_k \sin kx\,)\,.$$

Potom platí

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du\,.$$

Důkaz: Platí

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\cos kx\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\sin kx\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}[\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx]\right\} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right\} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt\,.$$

Jestliže zavedeme substituci $t - x = u$, dostaneme

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} \, du = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \, \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} \, du \,,$$

vzhledem k tomu, že integrand je 2π-periodická funkce.

Poznámky: 1. Funkci $D_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}$ nazýváme Dirichletovým jádrem.

2. V dalším odvodíme dvě podstatné věty teorie Fourierových řad a sice Riemannovo lemma a větu o lokalizaci.

! Věta: (Riemannovo lemma)
Buď $f \in \mathbf{L}_1(a,b)$ $[-\infty \le a < b \le +\infty]$. Potom je

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos tx \, dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin tx \, dx = 0$$

stejnoměrně pro $a \le \alpha < \beta \le b$.

Důkaz: Můžeme předpokládat, že $f \in \mathbf{L}_1(\mathbf{R})$, jinak f dodefinujeme jako 0 vně intervalu (a,b). Existuje tedy $p > 0$ tak, že $\int\limits_{|x|>p} |f(x)| \, dx < \varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon > 0$. Toto ε ponecháme pro celý důkaz pevné. Na intervalu $\langle -p, p \rangle$ existuje podle věty z předchozího paragrafu spojitá funkce φ tak, že $\int\limits_{-p}^{p} |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon$. Nechť $\langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle -p, p \rangle$. Tedy

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos tx \, dx \right| \le \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \cos tx \, dx \right| + \int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \cos tx \, dx \right| + \varepsilon \,.$$

φ je omezená, tedy $\exists K > 0$ tak, že $|\varphi(x)| \le K \ \forall x \in \langle -p, p \rangle$. Dále je φ stejnoměrně spojitá, tedy pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbf{N}$ tak, že jakmile $x, y \in \langle -p, p \rangle$, $|x - y| \le \frac{2p}{m}$, potom $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{2p}$. Interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ nyní rozdělíme na m stejných dílů.

$$D : \alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \beta \quad \left[\text{Je } x_i - x_{i-1} = \frac{\beta - \alpha}{m} \le \frac{2p}{m} \right]$$

a tedy

$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \cos tx \, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi(x) - \varphi(x_i)] \cos tx \, dx + \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \cos tx \, dx \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |\varphi(x) - \varphi(x_i)| \, dx + \sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)| \left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \cos tx \, dx \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2p} (\beta - \alpha) + K \sum_{i=1}^{m} \left| \left[\frac{\sin tx}{t} \right]_{x=x_{i-1}}^{x_i} \right| \le \varepsilon + \frac{2K}{t} \, m \,.$$

Je $\left| \frac{\sin tx_i - \sin tx_{i-1}}{t} \right| \le \frac{2}{t}$ a je-li t dostatečně veliké, potom $\frac{2Km}{t} < \varepsilon$, neboli $t > \frac{2Km}{\varepsilon}$. Odtud plyne nezávislost na α a β.

Jestliže důkaz stručně shrneme, dostaneme

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos tx\,dx\right| \le \int_{|x|>p} |f(x)|\,dx + \left|\int_{-p}^{p} f(x)\cos tx\,dx\right| \le \varepsilon + \int_{-p}^{p} |f(x)-\varphi(x)|\,dx +$$

$$+\left|\int_{-p}^{p} \varphi(x)\cos tx\,dx\right| < 2\varepsilon + \left|\int_{-p}^{p} \varphi(x)\cos tx\,dx\right| < 4\varepsilon \text{ pro } \forall\, t > \frac{2Km}{\varepsilon}\,.$$

Důkaz pro $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\sin tx\,dx$ provedeme analogicky.

Věta: Buď f funkce, která má v intervalu $\langle -\pi,\pi\rangle$ omezenou derivaci a nechť

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

je její Fourierova řada. Potom pro každé $x \in (-\pi,\pi)$ platí $f(x) = s(x)$.

Důkaz: Užijeme-li vyjádření pro částečný součet Fourierovy řady, je vidět, že stačí dokázat platnost rovnosti

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,D_n(u)\,du \;\; \forall\, x \in (-\pi,\pi)$$

neboli

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x+u)-f(x)\}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du = 0\,.$$

Podle předpokladu o existenci omezené derivace f platí

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x)}{2\sin\frac{u}{2}}\right| = \left|\frac{f(x+u)-f(x)}{u}\cdot\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right| \le M \;\text{ na }\; (-\pi,\pi)$$

a tvrzení je důsledkem Riemannova lemmatu.

Lemma: Buď $s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,D_n(u)\,du$ n-tý částečný součet Fourierovy řady 2π-periodické funkce f. Potom platí

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\,\frac{\sin nu}{u}\,du + \omega(x,n)\,,$$

kde $\lim\limits_{n\to\infty}\omega(x,n) = 0$ stejnoměrně pro $x \in \langle -\pi,\pi\rangle$.

Důkaz: Platí

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin nu\cos\frac{u}{2} + \cos nu\sin\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin nu}{2\mathrm{tg}\frac{u}{2}} + \frac{1}{2}\cos nu\,.$$

Uvažme nyní funkci $g(u) = \frac{1}{2\mathrm{tg}\frac{u}{2}} - \frac{1}{u}$. Tato funkce je spojitá v $\langle -\pi,\pi\rangle$ a tedy omezená. Jediný kritický bod je $u = 0$, ale snadno ukážeme použitím l'Hôspitalova pravidla, že $\lim\limits_{u\to 0} g(u) = 0$. Odtud plyne, že

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin nu}{u} + g(u)\sin nu + \frac{1}{2}\cos nu$$

a tedy $s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \frac{\sin nu}{u} \, du + \omega(x,n)$, kde

$$\omega(x,n) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \, g(u) \sin nu \, du + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \cos nu \, du \, .$$

Oba tyto integrály konvergují podle Riemannova lemmatu stejnoměrně k 0 pro $n \to \infty$.

! Věta: (Princip lokalizace)
Označme

$$s_n(x,\delta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+u) \, D_n(u) \, du \, .$$

Potom $\lim\limits_{n\to\infty} [\, s_n(x) - s_n(x,\delta) \,] = 0$ stejnoměrně pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ pro libovolné $\delta > 0$.

Důkaz: Buď $0 < \delta < \pi$ libovolné a označme

$$h(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\delta, \delta) \, , \\ \frac{1}{u} & \text{na } \langle -\pi, -\delta \rangle \cup \langle \delta, \pi \rangle \, . \end{cases}$$

Potom je h omezená funkce na $\langle -\pi, \pi \rangle$ a podle předchozího lemmatu je

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+u) \frac{\sin nu}{u} \, du + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \, h(u) \sin nu \, du + \omega(x,n) \, .$$

Druhý integrál konverguje podle Riemannova lemmatu stejnoměrně k 0, což dává tvrzení věty.

Poznámky: 1. Věta o lokalizaci říká, že konvergence nebo divergence Fourierovy řady v bodě x závisí pouze na chování funkce $f(x)$ v libovolně malém okolí bodu x.

2. K odvození hlavního tvrzení tohoto paragrafu, t.j. Dirichlet-Jordanova kritéria, budeme potřebovat odhady některých neabsolutně konvergentních integrálů. Ty je však možno provést jen použitím druhé věty o střední hodnotě integrálního počtu, takže ji pro úplnost bez důkazu uvedeme.

Věta: (2. věta o střední hodnotě integrálního počtu)
Buď $f \in \mathbf{L}(a,b)$ reálná, g monotonní a konečná v $\langle a, b \rangle$ $(a, b \in \mathbf{R})$. Potom existuje $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$\int\limits_a^b f(x) \, g(x) \, dx = g(a) \int\limits_a^{\xi} f(x) \, dx + g(b) \int\limits_{\xi}^{b} f(x) \, dx.$$

Je-li g nezáporná, potom

$$\int\limits_a^b f(x) \, g(x) \, dx = g(a) \int\limits_a^{\xi} f(x) \, dx \ \text{ pro } g \text{ nerostoucí,}$$

$$\int\limits_a^b f(x) \, g(x) \, dx = g(b) \int\limits_{\xi}^{b} f(x) \, dx \ \text{ pro } g \text{ neklesající.}$$

Důkaz: Zájemce najde důkaz na příklad v knize V. Jarník: Integrální počet II.

Lemma:
$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\, tx}{\sin\, x}\, dx \right| \le \frac{3\pi}{2}$$
pro libovolné $t > 0$ a $0 \le \alpha \le \beta \le \frac{\pi}{2}$. Specielně
$$\left| \int\limits_{a}^{b} D_n(x)\, dx \right| \le \frac{3\pi}{2}\,, \text{ kde } 0 \le a \le b \le \pi\,.$$

Důkaz: a) Buď $\beta \le t^{-1}$.

Platí $|\sin\, tx| \le tx\ \ \forall t > 0$ a $\forall x \ge 0$. Dále pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je $\sin\, x \ge \frac{2}{\pi}\, x$, [načrtněte si obrázek nebo vyšetřete funkci $F(x) = \sin\, x - \frac{2}{\pi}\, x$na intervalu $\big\langle 0, \frac{\pi}{2} \big\rangle$] tedy $\frac{1}{\sin\, x} \le \frac{\pi}{2x}$. Nyní je
$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\, tx}{\sin\, x}\, dx \right| \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{|\sin\, tx|}{\sin\, x}\, dx \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{tx\pi}{2x}\, dx \le \frac{\pi t}{2} \int\limits_{0}^{\frac{1}{t}} dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

b) Nechť $\alpha \ge t^{-1}$.
Potom
$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\, tx}{\sin\, x}\, dx \right| = \left| \frac{1}{\sin\, \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\xi} \sin\, tx\, dx \right|$$
podle druhé věty o střední hodnotě. [Funkce $\frac{1}{\sin\, x}$ je nezáporná a klesající] Tedy
$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\, tx}{\sin\, x}\, dx \right| \le \frac{\pi}{2\alpha} \left| \int\limits_{\alpha}^{\xi} \sin\, tx\, dx \right| \le \frac{\pi}{2\alpha} \cdot \frac{2}{t} \le \pi \ \ [\text{je } \alpha t \ge 1].$$

c) Předpokládejme, že $\alpha < t^{-1} < \beta$.
Potom platí
$$\left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\, tx}{\sin\, x}\, dx \right| \le \left| \int\limits_{\alpha}^{\frac{1}{t}} \frac{\sin\, tx}{\sin\, x}\, dx \right| + \left| \int\limits_{\frac{1}{t}}^{\beta} \frac{\sin\, tx}{\sin\, x}\, dx \right| \le \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}\,.$$

Závěrem platí
$$\left| \int\limits_{a}^{b} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{2 \sin \frac{u}{2}}\, du \right| = \left| \int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin\, x}\, dx \right| \le \frac{3\pi}{2}\,.$$

! Věta: (Dirichlet-Jordanovo kritérium)
Buď f 2π-periodická funkce, která má v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ konečnou variaci a nechť

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

je její Fourierova řada. Potom platí

1. $s(x)$ konverguje v každém bodě intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ a platí

α)
$$s(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad \text{pro } x \in (-\pi, \pi)\,.$$

β)
$$s(x) = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2} \quad \text{pro } x = \pm\pi\,.$$

[Je samozřejmě $f(x+) = \lim\limits_{t\to x+} f(t)\,,\ f(x-) = \lim\limits_{t\to x-} f(t)$]. Specielně tedy platí $s(x) = f(x)$ v každém bodě spojitosti funkce f.

2. Je-li f spojitá v intervalu $(a, b) \subset \mathbf{R}$, pak $s(x)$ konverguje stejnoměrně v každém intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle \subset (a, b)$.

Důkaz: Upravíme si nejdříve výraz pro částečný součet Fourierovy řady. Podle věty o lokalizaci platí

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\, D_n(u)\, du + \omega_1(x, \delta, n)\,.$$

Jestliže pro $u \in (-\delta, 0)$ zavedeme substituci $-u = z$, dostaneme vyjádření

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \{f(x+u) + f(x-u)\}\, D_n(u)\, du + \omega_1(x, \delta, n)\,,$$

kde $\omega_1(x, \delta, n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ stejnoměrně pro $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Analogicky dostaneme

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \{1 + 1)\}\, D_n(u)\, du + \omega_2(x, \delta, n)\,.$$

1. Poněvadž f má konečnou variaci, lze ji napsat ve tvaru $f = \varphi - \psi$, kde φ a ψ jsou neklesající. Stačí tedy dokázat tvrzení pouze pro neklesající funkci.

α) Buď $\alpha \in (-\pi, \pi)$. Potom platí

$$s_n(x) - \frac{1}{2}[\,f(x+) + f(x-)\,] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \{f(x+u) + f(x-u) - [\,f(x+) + f(x-)\,]\,\}\, D_n(u)\, du + \omega(x, \delta, n)\,.$$

[Je $\omega = \omega_1 - \omega_2$.] Tedy

$$s_n(x) - \frac{1}{2}[\,f(x+) + f(x-)\,] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \{f(x+u) - f(x+)\,\}\, D_n(u)\, du +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \{f(x-u) - f(x-)\,\}\, D_n(u)\, du + \omega(x, \delta, n) = I_1 + I_2 + \omega(x, \delta, n)\,.$$

Podle druhé věty o střední hodnotě integrálního počtu nyní platí

$$|I_1| = \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\delta} \{ f(x+u) - f(x+) \} \, D_n(u) \, du \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \{ f(x+\delta) - f(x+) \} \left| \int\limits_{\eta}^{\delta} D_n(u) \, du \right| \le \frac{3}{2} \{ f(x+\delta) - f(x+) \} .$$

Analogicky

$$|I_2| = \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\delta} \{ f(x-u) - f(x-) \} \, D_n(u) \, du \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \{ f(x-) - f(x-\delta) \} \left| \int\limits_{\zeta}^{\delta} D_n(u) \, du \right| \le \frac{3}{2} \{ f(x-) - f(x-\delta) \} .$$

Dále $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (\delta < \pi)$ a $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že

$$f(x+\delta) - f(x+) < \frac{2\varepsilon}{9} ; \ \ f(x-) - f(x-\delta) < \frac{2\varepsilon}{9} \ \text{ a } \ |\, \omega(x,\delta,n)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \ \forall x \in (-\pi, \pi) \ \text{ a } \ \forall n \ge n_0 .$$

Jestliže tyto odhady shrneme, dostaneme, že pro $\forall n \ge n_0$ platí

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{2} \left[f(x+) + f(x-) \right] \right| \le |I_1| + |I_2| + |\, \omega(x,\delta,n)\,| < \varepsilon .$$

β) Buď $x = \pi$ a uvažme interval $\langle \lambda, \pi + \lambda \rangle$, kde $0 < \lambda < \pi$. Podle předchozí části důkazu je

$$s(\pi) = \frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = \frac{f(-\pi+) + f(\pi-)}{2}$$

vzhledem k tomu, že f je $2\pi-$periodická. Analogicky pro $x = -\pi$.

2. Buď f spojitá v $(a,b) \subset \mathbf{R}$ a nechť $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a,b)$. Potom je f stejnoměrně spojitá v $\langle \alpha, \beta \rangle$ a tedy $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$|f(x+\delta) - f(x)| < \varepsilon , \ \ |f(x-\delta) - f(x)| < \varepsilon .$$

Jestliže nyní zopakujeme předchozí část důkazu [je $f(x+) = f(x-) = f(x)$], dostaneme odtud, že odhad pro $|\, s_n(x) - f(x)\,|$ nezávisí na x , tedy konvergence je stejnoměrná.

Poznámka: Další věta se týká integrace Fourierovy řady člen po členu. Ukazuje se, že takto získaná řada bude konvergentní (dokonce stejnoměrně) bez ohledu na to, zda je původní řada konvergentní.

Věta: (Integrace Fourierovy řady)
Buď $f \in L(-\pi, \pi)$ $2\pi-$periodická funkce,

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx\,)$$

její Fourierova řada. Potom je funkce $F(x) = \int\limits_0^x \left\{ f(t) - \frac{a_0}{2} \right\} dt$ absolutně spojitá a $2\pi-$periodická a pro její Fourierovu řadu platí

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k} , \ \text{ kde } \ \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} .$$

Fourierova řada funkce F konverguje navíc stejnoměrně pro všechna $x \in \mathbf{R}$.

Důkaz: Absolutní spojitost F je zřejmá. Dále

$$F(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} \left\{ f(t) - \frac{a_0}{2} \right\} dt =$$

$$= \int_0^x \left\{ f(t) - \frac{a_0}{2} \right\} dt + \int_x^{x+2\pi} \left\{ f(t) - \frac{a_0}{2} \right\} dt = F(x) + \int_x^{x+2\pi} f(t)\, dt - \pi a_0 = F(x)\,.$$

Podle Dirichlet-Jordanova kritéria konverguje Fourierova řada F stejnoměrně pro $x \in \mathbf{R}$. Dále pro $k \in \mathbf{N}$ platí

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi k} \left[F(x) \sin kx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \frac{a_0}{2} \right\} \sin kx\, dx = -\frac{b_k}{k}\,.$$

Analogicky

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx\, dx = -\frac{1}{\pi k} \left[F(x) \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \frac{a_0}{2} \right\} \cos kx\, dx = \frac{a_k}{k}\,.$$

a platí tedy

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k}\,.$$

Dále je $F(0) = 0 = \frac{A_0}{2} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$, což je poslední tvrzení věty.

Poznámka: V závěru si všimneme Fejérovy metody sčítatelnosti Fourierových řad.

Definice: Buď $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ řada, $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ posloupnost jejích částečných součtů. Označme $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} s_k$. Řekneme, že řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ je sčitatelná metodou Cesarových součtů 1. stupně nebo metodou aritmetických průměrů 1. stupně jestliže existuje vlastní $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$.

Lemma: Je-li řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergentní se součtem s, potom $\sigma = s$.

Důkaz: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $|s_n - s| < \varepsilon$. σ_n napíšeme ve tvaru

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n_0}}{n+1} + \frac{s_{n_0+1} + \cdots + s_n}{n+1}$$

a tedy

$$\sigma_n - s = \frac{(s_0 - s) + (s_1 - s) + \cdots + (s_{n_0} - s)}{n+1} + \frac{(s_{n_0+1} - s) + \cdots + (s_n - s)}{n+1}\,.$$

Prvý zlomek je možné pro dostatečně veliká n udělat v absolutní hodnotě menší než ε, tedy platí

$$|\sigma_n - s| \leq \left| \frac{(s_0 - s) + \cdots + (s_{n_0} - s)}{n+1} \right| + \frac{|s_{n_0+1} - s| + \cdots + |s_n - s|}{n+1} < \varepsilon + \frac{n - n_0}{n+1} \cdot \varepsilon < 2\varepsilon\,.$$

Poznámka: Obrácené tvrzení neplatí. Uvažme řadu tvaru $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, která osciluje, ale

$$\sigma_{2n} = \frac{n+1}{2n+1}\,, \quad \sigma_{2n+1} = \frac{1}{2}\,, \quad \text{tedy} \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}\,.$$

Lemma: Je-li $s_n(x)$ posloupnost částečných součtů Fourierovy řady funkce f, potom

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\, K_n(u)\, du\,, \text{ kde } K_n(u) = \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin(n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \right]^2 .$$

Důkaz: Je

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{(n+1)\pi} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\, D_k(u)\, du = \frac{1}{(n+1)\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \sum_{k=0}^{n} D_k(u)\, du\,,$$

tedy $K_n(u) = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} D_k(u)$. Nyní platí

$$D_k(u) = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\cos ku - \cos(k+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}}\,,$$

tedy

$$K_n(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos ku - \cos(k+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}} = \frac{1-\cos(n+1)u}{4(n+1)\sin^2\frac{u}{2}} = \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin(n+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \right]^2 .$$

Poznámka: Funkci $K_n(u)$ nazýváme Fejérovým jádrem.

Lemma: Funkce $K_n(u)$ má následující vlastnosti

1. $K_n(u) \ge 0\,,$
2. $K_n(u) \le \frac{\pi^2}{2(n+1)u^2}$ pro $0 < |u| < \pi\,,$
3. $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\, du = 1\,,$
4. Pro každé $\delta > 0$ $(\delta < \pi)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} K_n(u)\, du = 1\,.$

Důkaz: 1. Tvrzení je zřejmé z tvaru $K_n(u)$.

2. Poněvadž je $\sin t \ge \frac{2}{\pi} t$ pro $t \in (0, \frac{\pi}{2}\rangle$, platí

$$\frac{1}{\sin\frac{u}{2}} \le \frac{\pi}{2\frac{u}{2}} = \frac{\pi}{u}$$

a odtud $K_n(u) \le \frac{\pi^2}{2(n+1)u^2}$.

3. Poněvadž platí

$$K_n(u) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(u)\,,$$

plyne odtud, že $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\, du = 1\,.$

4. Je-li $\delta > 0$ libovolné, potom pro $0 < \delta \le |u| \le \pi$ platí $K_n(u) \le \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2}$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(u) = 0$ stejnoměrně pro $\delta \le |u| \le \pi$. Odtud plyne tvrzení 4.

Věta: (Fejér)
Buď $f \in \mathbf{L(a,b)}$ $2\pi-$periodická funkce. Potom platí
1. Je-li x bod nespojitosti funkce f 1. druhu, pak

$$\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\{f(x+)+f(x-)\}\,.$$

Specielně $\sigma_n(x) \to f(x)$ v každém bodě spojitosti f.

2. Je-li f spojitá na (a,b), potom $\sigma_n(x) \underset{n\leftrightarrow\infty}{\longrightarrow} f(x)$ stejnoměrně na každém intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle \subset (a,b)$.

Důkaz: 1. Je

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+)+f(x-)}{2} K_n(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+)+f(x-)\}\,K_n(u)\,du$$

vzhledem k tomu, že K_n je sudá funkce. Analogicky dostaneme

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+u)+f(x-u)\}\,K_n(u)\,du\,,$$

tedy

$$\sigma_n(x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{f(x+u)-f(x+)+f(x-u)-f(x-)\}\,K_n(u)\,du\,.$$

Ukážeme, že tento integrál konverguje k nule. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné a nechť $\delta > 0$ je takové, že pro $0 \le u \le \delta$ platí $|f(x+u)-f(x+)| < \varepsilon$, $|f(x-u)-f(x-)| < \varepsilon$. Daný integrál rozdělíme na 2 integrály $I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\ldots$ a $I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\ldots$. Nyní platí

$$|\,I_1\,| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\{|\,f(x+u)-f(x+)|+|f(x-u)-f(x-)|\,\}\,K_n(u)\,du <$$

$$< 2\varepsilon\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} K_n(u)\,du \le 2\varepsilon\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(u)\,du = \varepsilon\,,$$

$$|\,I_2\,| \le \max_{0<\delta\le u\le\pi} K_n(u)\int_{\delta}^{\pi}\{\,|f(x+u)|+|f(x+)|+|f(x-u)|+|f(x-)|\,\}\,du \le$$

$$\le \frac{\pi^2}{2(n+1)\delta^2}\cdot\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,du + \pi[\,|f(x+)|+|f(x-)|\,]\right\}.$$

Poněvadž výraz v závorce je omezený, plyne odtud, že $I_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Je-li $\langle\alpha,\beta\rangle \subset (a,b)$, je možno v předchozí části důkazu volit δ tak, že $|\,f(x+u)-f(x)\,| < \varepsilon$ a $|\,f(x-u)-f(x)\,| < \varepsilon$ pro libovolné $x \in \langle\alpha,\beta\rangle$, což dává odhad I_1 nezávislý na x a pro odhad I_2 dostáváme opět nezávislost na x, vzhledem k tomu, že $\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,du + 2\pi\,|f(x)| \le C$ (konstanta).

Důsledek: (Weierstrassova věta)
Je-li f periodická a spojitá, potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje trigonometrický mnohočlen $T(x)$ tak, že $|f(x)-T(x)| < \varepsilon \;\; \forall\, x \in \mathbf{R}$.

Důkaz: Stačí položit $T(x) = \sigma_n(x)$ pro dostatečně veliké n.

Kapitola 4

Cvičení.

4.1 Metrické prostory.

1. Rozhodněte, které z daných předpisů definují metriku na $\mathbf{R}$.

   (a) $\mathbf{d}(x,y) = (x-y)^2$

   (b) $\mathbf{d}(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

2. Buď $(\mathbf{X},\mathbf{d})$ metrický prostor. Ukažte, že platí

   (a) $|\mathbf{d}(x,z) - \mathbf{d}(y,z)| \leq \mathbf{d}(x,y) \ \ \forall\, x,y,z \in \mathbf{X}$.

   (b) $|\mathbf{d}(x,y) - \mathbf{d}(u,v)| \leq \mathbf{d}(x,u) + \mathbf{d}(y,v) \ \ \forall\, x,y,u,v \in \mathbf{X}$.

3. Diskrétní metrický prostor.

   Buď $\mathbf{X}$ libovolná množina. Definujme $\mathbf{d}$ předpisem

   $$\mathbf{d}(x,y) = 1 \ \ \forall\, x,y \in \mathbf{X} \ \ x \neq y \ \ \mathbf{d}(x,x) = 0\,.$$

   Ukažte, že $(\mathbf{X},\mathbf{d})$ je metrický prostor.

4. Ukažte, že předpisy $\mathbf{d}_p(x,y)$ a $\mathbf{d}_\infty(x,y)$, definující vzdálenost v $\mathbf{l}_p^n$ a $\mathbf{l}_\infty^n$, jsou skutečně metriky.

5. Ověřte axiomy metriky v prostoru $\mathbf{C}(a,b)$.

6. Buď $(\mathbf{X},\mathbf{d})$ metrický prostor. Ukažte, že $\widetilde{\mathbf{d}}(x,y) = \frac{\mathbf{d}(x,y)}{1+\mathbf{d}(x,y)}$ $\forall x,y \in \mathbf{X}$ je metrika, při níž je $\mathbf{X}$ omezený prostor.

7. Ukažte, že funkce $\mathbf{d}$ na prostoru $\mathbf{s}$ je metrika.

8. Buď $p \geq 1$. Označme $\mathbf{l}_p$ množinu všech posloupností reálných nebo komplexních čísel

   $$x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \ \text{takových, že} \ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p < \infty\,.$$

   Ukažte, že

   $$\mathbf{d}(x,y) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k - \beta_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

   je metrika na $\mathbf{l}_p$. $\quad (y = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty})$.

9. Označme $\mathbf{l}_\infty$ (nebo $\mathbf{m}$) množinu všech omezených posloupností reálných nebo komplexních čísel. Ukažte, že

$$\mathbf{d}(x,y) = \sup_{k=1,2,\dots} |\alpha_k - \beta_k|$$

je metrika na $\mathbf{l}_\infty$.

$\mathbf{c}$ označíme podmnožinu $\mathbf{l}_\infty$ takovou, že existuje vlastní $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k$.

$\mathbf{c}_0$ označíme podmnožinu $\mathbf{c}$ takovou, že $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$.

10. Popište konvergenci v prostorech $\mathbf{l}_p^n$, $\mathbf{l}_\infty^n$, $\mathbf{C}(a,b)$, $\mathbf{s}$.

11. Nechť pro dvě metriky $\mathbf{d}$ a $\mathbf{d}'$ na prostoru $\mathbf{X}$ platí: Existují konstanty $\alpha, \beta > 0$ tak, že

$$\alpha\, \mathbf{d}(x,y) \le \mathbf{d}'(x,y) \le \beta\, \mathbf{d}(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbf{X}.$$

Ukažte, že potom existují konstanty $a, b > 0$ tak, že

$$a\, \mathbf{d}'(x,y) \le \mathbf{d}(x,y) \le b\, \mathbf{d}'(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbf{X}.$$

12. Ukažte, že metriky $\mathbf{d}_p$ a $\mathbf{d}_\infty$ jsou ekvivalentní pro libovolné $p \ge 1$.

13. Ukažte, že $\lim\limits_{p\to\infty} \mathbf{d}_p(x,y) = \mathbf{d}_\infty(x,y)$.

14. Načrtněte, jak vypadají koule v prostorech $\mathbf{l}_p^2$ pro $p = 1, 2$ a $\mathbf{l}_\infty^2$.

15. Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor. Ukažte, že $\mathbf{X}$ a prázdná množina $\emptyset$ jsou zároveň otevřené i uzavřené množiny.

16. Dokažte de Morganova pravidla

$$X - \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X - A_\alpha) \;\; ; \;\; X - \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X - A_\alpha),$$

kde α probíhá libovolnou t.zv. indexovou množinu, X a A_α jsou libovolné množiny.

17. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{R}$, $G = (0,1)$, $F = \langle 0,1 \rangle$. Ukažte, že existují posloupnosti $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených intervalů a $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ uzavřených intervalů tak, že

$$G = \bigcup_{n=1}^\infty F_n \;\; ; \;\; F = \bigcap_{n=1}^\infty G_n .$$

18. Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $G \subset \mathbf{X}$ otevřená množina a $F \subset \mathbf{X}$ uzavřená množina. Ukažte, že existuje posloupnost $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených množin a $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ uzavřených množin tak, že

$$G = \bigcup_{n=1}^\infty F_n \;\; ; \;\; F = \bigcap_{n=1}^\infty G_n .$$

19. Buď $\mathbf{X} = \langle 0,1 \rangle$, A množina všech racionálních čísel intervalu $\langle 0,1 \rangle$.
Najděte $\operatorname{Int} A$, $\overline{A}$, $\partial(A)$.

20. Ukažte, že každá konvergentní posloupnost bodů metrického prostoru je cauchyovská.

21. Buď $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská posloupnost bodů metrického prostoru a nechť existuje vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ tak, že $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Ukažte, že $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

22. Ukažte, že prostory $\mathbf{l}_p^n$, $\mathbf{l}_\infty^n$ a $\mathbf{C}(a,b)$ jsou úplné.

23. Ukažte, že prostory $\mathbf{l}_p\,(p \geq 1)\,, \mathbf{l}_\infty\,, \mathbf{c}\,, \mathbf{c}_0$ jsou úplné. Popište konvergenci v těchto prostorech.

24. Buď $\mathbf{X} = (0,1) \cup \langle 2,3\rangle$ a označme $A = (0,1)\,,\ B = \langle 2,3\rangle$. Ukažte, že A je uzavřená, ale není úplná. B je úplná a tedy uzavřená. Ukažte dále, že A i B jsou zároveň otevřené množiny.

25. Buďte $(\mathbf{X}_j, \mathbf{d}_j)\,,\ j = 1,2,\ldots,n$ metrické prostory, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \cdots \times \mathbf{X}_n$. Ukažte, že $\mathbf{X}$ je metrický prostor, jestliže definujeme metriku $\mathbf{d}$ na $\mathbf{X}$ jedním z předpisů

$$\mathbf{d}(x,y) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{d}_j^p(x_j, y_j) \right\}^{\frac{1}{p}}\ ,\ \ p \geq 1\ \text{ nebo }\ \mathbf{d}(x,y) = \max_{1\leq j\leq n} \mathbf{d}_j(x_j, y_j)\,.$$

26. Ukažte, že prostor $\mathbf{X}$ z předchozího cvičení je úplný právě když jsou úplné prostory $\mathbf{X}_1\,, \mathbf{X}_2\,, \ldots, \mathbf{X}_n$.

27. Ukažte, že prostory $\mathbf{l}_p^n\,, \mathbf{l}_\infty^n$ a $\mathbf{C}(a,b)$ jsou separabilní.

28. Ukažte, že prostory $\mathbf{l}_p\,(p \geq 1)\,, \mathbf{c}_0\,, \mathbf{c}$ jsou separabilní, prostor $\mathbf{l}_\infty$ není separabilní.

29. Ukažte, že množina $\mathbf{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

30. Dokažte, že spočetné sjednocení spočetných množin je množina spočetná.

31. Dokažte, že interval $\mathcal{I} = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$, kde $a_j \leq b_j\ \ (j = 1,2,\ldots,n)$ je kompaktní množina.

32. Ukažte, že každá podmnožina totálně omezené množiny je totálně omezená.

33. Ukažte, že množina $\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{l}_\infty\,;\, \mathbf{d}(x,0) \leq 1\}$ je omezená, ale není totálně omezená.

34. Ukažte, že každá uzavřená podmnožina kompaktního metrického prostoru $\mathbf{X}$ je kompaktní.

35. Buď $\mathbf{X}$ diskrétní metrický prostor (cvičení 3). Popište otevřené a uzavřené podmnožiny $\mathbf{X}$. Je $\mathbf{X}$ úplný ? Za jakých podmínek je $\mathbf{X}$ separabilní nebo kompaktní ?

36. Buďte $X\,, Y$ dvě množiny $f : X \to Y$ zobrazení. Ukažte, že platí

    (a) Jsou-li $A, B \in X$, potom $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Je-li f prosté zobrazení, potom je dokonce $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, kde

    $$f(A) = \{f(x) \in Y; x \in A\}$$

    je <u>obraz</u> množiny A.

    (b) Jsou-li $A\,, B \subset X$, potom $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$. f je prosté právě když

    $$f(A) - f(B) = f(A - B)$$

    pro všechny podmnožiny $B \subset A \subset X$.

    (c) Jsou-li $A\,, B \subset X$, potom $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

    (d) Jsou-li $A\,, B \subset Y$, potom

    $$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)\,,\ \text{ kde }\ f^{-1}(A) = \{x \in X; f(x) \in A\}$$

    je <u>vzor</u> množiny A.

    (e) Jsou-li $A\,, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

    (f) Jsou-li $A\,, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

37. Buďte $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ izometrické metrické prostory, $\mathbf{X}_1$ úplný. Ukažte, že $\mathbf{X}_2$ je také úplný.

38. Buď $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ úplný metrický prostor. Ukažte, že $(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{d}})$, kde $\widetilde{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{d}}{1+\mathbf{d}}$ je také úplný prostor. Platí obrácené tvrzení ? Jsou metriky $\mathbf{d}$ a $\widetilde{\mathbf{d}}$ ekvivalentní ?

39. Buď $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ spojité zobrazení, kde $\mathbf{X}$ je kompaktní metrický prostor. Ukažte, že f je stejnoměrně spojité.

40. Najděte příklad spojitého prostého zobrazení takového, že inversní zobrazení není spojité.

41. Buď $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ homeomorfní zobrazení $\mathbf{X}$ na $\mathbf{Y}$. Ukažte, že množina $G \subset \mathbf{X}$ je otevřená právě když je $f(G)$ otevřená v $\mathbf{Y}$.

42. Ukažte, že
$$\mathbf{d}(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$$
je metrika na prostoru $\mathbf{C}(a, b)$ $[\, x, y \in \mathbf{C}(a, b)\,]$.

43. Ukažte, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde
$$x_n(t) = \begin{cases} n & \text{pro} \qquad 0 \le t \le n^{-2}\,, \\ t^{-\frac{1}{2}} & \text{pro} \qquad n^{-2} < t \le 1\,. \end{cases}$$
je cauchyovská v metrice z předchozího příkladu, ale není konvergentní v $\mathbf{C}(0, 1)$.

44. Ukažte, že $\mathbf{d}(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y\,|$ je metrika na $\mathbf{R}$, při níž však $\mathbf{R}$ není úplný metrický prostor.

45. Ukažte, že prostory $\mathbf{C}(0, 1)$ a $\mathbf{C}(a, b)$ jsou izometrické v metrice $\mathbf{d}(x, y) = \max |\, x(t) - y(t)\,|$.

46. Označme $\mathbf{B}(x; r) = \{y \in \mathbf{X};\ \mathbf{d}(x, y) \le r\}$. Množinu $\mathbf{B}$ nazveme uzavřenou koulí v metrickém prostoru $\mathbf{X}$. Ukažte, že $\mathbf{X}$ je úplný právě když každá do sebe vložená posloupnost uzavřených koulí, jejichž poloměry konvergují k nule, má neprázdný průnik.
$[\, \mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2 \supset \cdots \supset \mathbf{B}_n = \mathbf{B}(x_n, r_n)\,;\quad \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0\,.]$

47. Buď $\mathbf{X} = \{x \in \mathbf{R};\ \ x \ge 1\}$; $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ je dáno předpisem $Tx = \frac{x}{2} + x^{-1}$. Ukažte, že T je kontrakce a najděte její pevný bod.

48. Buď $\mathbf{X} = \{x \in \mathbf{R};\ \ x \ge 1\}$; $Tx = \lambda x + x^{-1}$. Určete λ tak aby T byla kontrakce na $\mathbf{X}$ a najděte její pevný bod.

49. Buď $\mathbf{X} = \{x \in \mathbf{R};\ \ x \ge 1\}$; $Tx = x + x^{-1}$. Ukažte, že $|Tx - Ty| < |x - y|$ pro $x \ne y$, ale T nemá pevný bod.

50. Buď $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ zobrazení takové, že
$$\mathbf{d}(Tx, Ty) < \mathbf{d}(x, y)\ \ \forall x, y \in \mathbf{X}\,,\ \ x \ne y\,.$$
Ukažte, že má-li T pevný bod, je tento bod určen jednoznačně.

51. Buď $a \in (0, 1\rangle$. Potom je zobrazení $f(x) = x + \frac{1}{2}(a - x^2)$ kontrakce na intervalu $\langle q, 1\rangle$, kde $0 < q \le \frac{a}{2}$ s pevným bodem $\sqrt{a}$. Dokažte. Platí tedy, že posloupnost $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)$, kde $x_0 = 0$, konverguje a je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

52. Je-li T kontrakce, pak T^n $(n \in \mathbf{N})$ je také kontrakce. Obráceně je-li T^n pro nějaké $n > 1$ kontrakce, pak T kontrakce být nemusí. Ukažte.

53. Buď $\mathbf{X}$ úplný metrický prostor, $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ spojité zobrazení a předpokládejme, že T^n je kontrakce pro nějaké $n > 1$ přirozené. Ukažte, že T má jediný pevný bod.

54. Ukažte, že každou čtvercovou soustavu lineárních algebraických rovnic tvaru

$$\mathbf{C}x = b\,, \quad \text{neboli} \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

lze vyjádřit ve tvaru

$$x = \mathbf{A}x + b\,, \quad \text{neboli} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Najděte vztah mezi maticí **C** a **A**.

55. Ukažte, že každá z podmínek

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1 \;; \quad \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1 \;; \quad \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 < 1$$

je postačující pro existenci a jednoznačnost řešení soustavy $x = \mathbf{A}x + b$. [Vyšetřete zobrazení T tvaru $y = Tx = \mathbf{A}x + b$ na prostorech $\mathbf{l}_\infty^n$, $\mathbf{l}_1^n$ a $\mathbf{l}_2^n = \mathbf{R}^n$. Toto řešení je limita iterací $x^{(m+1)} = \mathbf{A}x^{(m)} + b$.]

56. Pišme matici **C** z cvičení 54 ve tvaru $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{G}$, kde **B** je vhodná regulární matice. Potom je $\mathbf{B}x = \mathbf{G}x + b$, tedy $x = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{G}x + b) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}x + c$. Pro matici **A** ze cvičení 50 tedy platí $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}$. Je-li $a_{jj} \neq 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme pro

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} = \text{diag}\ (a_{jj}) \quad \mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{C})\,.$$

<u>Jacobiho iterační metoda.</u>

57. Ukažte, že každá z podmínek

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{|c_{jk}|}{|c_{jj}|} \le 1\,; \;\; j = 1, 2, \ldots, n \qquad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|c_{jk}|}{|c_{jj}|} \le 1\,; \;\; k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} \left(\frac{c_{jk}}{c_{jj}}\right)^2 < 1$$

je postačující pro konvergenci Jacobiho iterační metody. [Užijte návod z cvičení 55.]

58. Pišme matici **C** ze cvičení 54 ve tvaru $\mathbf{C} = -\mathbf{L} + \mathbf{D} - \mathbf{U}$, kde **L** je dolní a **U** horní trojúhelníková matice. Potom $\mathbf{A} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$.

<u>Gauss-Seidelova iterační metoda.</u>

Ukažte, že podmínky ze cvičení 57 jsou postačující pro konvergenci Gauss-Seidelových iterací.

59. Rovnici tvaru

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, f(s)\, ds + g(t)\,,$$

kde K, g jsou dané funkce, $\lambda \in \mathbf{R}$, f neznámá funkce, nazýváme

<u>Fredholmovou integrální rovnicí 2. druhu.</u>

Rovnici tvaru

$$f(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\, f(s)\, ds + g(t)\,,$$

nazýváme <u>Volterrovou integrální rovnicí.</u>

60. Buď $g \in \mathbf{C}(a,b)$, $K \in \mathbf{C}(S)$, kde $S = \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle$. Definujme zobrazení $T : \mathbf{C}(a,b) \to \mathbf{C}(a,b)$ předpisem

$$Tf(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\, f(s)\, ds\,.$$

Ukažte, že T je kontrakce pro $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, kde $|K(t,s)| \le M$ pro $(t,s) \in S$ a existuje tedy jediné řešení f rovnice

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, f(s)\, ds + g(t)\,,$$

které dostaneme jako limitu posloupnosti

$$f_{n+1}(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\, f_n(s)\, ds\,.$$

61. Ukažte, že za předlokladů z předchozího cvičení o funkcích g a K má Volterrova integrální rovnice jediné řešení na intervalu $\langle a,b\rangle$ pro libovolné $\lambda \in \mathbf{R}$ (dokonce $\lambda \in \mathbf{C}$).

[Ukažte, že T^m je pro nějaké $m \in \mathbf{N}$ kontrakce a využijte cvičení 48. Ukažte, že platí

$$\mathbf{d}(T^m f, T^m h) \le \alpha_m \mathbf{d}(f,h)\,, \ \text{kde } \alpha_m = |\lambda|^m M^m \frac{(b-a)^m}{m!}\,.]$$

4.2 Lebesgueův integrál.

1. Buď $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost množin. Označme $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E_n$ množinu těch prvků, které leží v nekonečně mnoha E_n. Analogicky $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E_n$ bude značit množinu těch prvků, které leží ve všech E_n až na konečný počet hodnot n. Je zřejmé, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subset \underline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Jestliže $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E_n$, pak tuto společnou hodnotu nazveme limitou dané posloupnosti. Ukažte, že

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\,, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

2. Najděte příklad posloupnosti množin $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E_n \ne \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E_n$.

[Na příklad $E_{2n-1} = A$, $E_{2n} = B$, $A \ne B$, nebo $E_n = \left\{\frac{k}{n}; k \in \mathbf{Z}\right\}$.
Ukažte, že $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E_n = \mathbf{Z}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E_n = \mathbf{Q}$]

3. Buď S množina. Označme $P(S)$ soustavu všech podmnožin množiny S. Nechť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \in P(S)$ je posloupnost množin. Ukažte, že

$$S - \overline{\lim_{n\to\infty}}\ E_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ (S - E_n).$$

4. Buď $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost množin, $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost jejich charakteristických funkcí. Ukažte, že charakteristickou funkcí množiny $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E_n$ je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \chi_n$ a charakteristickou funkcí $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E_n$ je $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \chi_n$. Ukažte dále, že $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$ existuje právě když existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_n$.

5. Buď (S,Σ,μ) prostor s konečnou mírou $[\,\mu(S)<\infty\,]$. Pro libovolnou množinu $A\in P(S)$ definujme "vnitřní míru" $\underline{\mu}$ předpisem

$$\underline{\mu}(A)=\mu(S)-\overline{\mu}(S-A).$$

   (a) Ukažte, že $\overline{\mu}(A)\geq\underline{\mu}(A)$. [Užijte subaditivity vnější míry].
   (b) Buď $S\subset\mathbf{R}^n$. Ukažte, že množina $A\subset S$ je $\mu-$měřitelná právě když $\overline{\mu}(A)=\underline{\mu}(A)$.

6. Dokažte přímo z definice, že množina $\mathbf{Q}$ všech racionálních čísel má Lebesgueovu míru 0.

7. Neměřitelná množina.

   Zaveďme na množině $\mathbf{R}$ ekvivalenci předpisem $x\sim y$, jestliže $x-y$ je racionální. Tím se $\mathbf{R}$ rozpadne na nespočetný systém $\mathfrak{V}$ po dvou disjunktních tříd. Množina $V\in\mathfrak{V}$ právě když $V=x+\mathbf{Q}$ pro nějaké $x\in\mathbf{R}$. Podle axiomu výběru existuje množina $E\subset(0,1)$ tak, že $E\cap V$ je jednobodová množina pro každé $V\in\mathfrak{V}$. Ukažte, že E není měřitelná.

   [Definujme $E_n=q_n+E$, kde $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost všech racionálních čísel intervalu $(-1,1)$. E_n jsou po dvou disjunktní a $(0,1)\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\subset(-1,2)$. Kdyby E byla měřitelná, pak jsou měřitelné i všechny E_n a platí

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n).$$

   Jestliže uvážíme $\lambda(E)=0$ a $\lambda(E)>0$, dostaneme v obou případech spor.]

8. Ukažte, že každá měřitelná množina $M\subset\mathbf{R}$ s kladnou mírou obsahuje neměřitelnou podmnožinu. [Je $M=\bigcup\limits_{q\in\mathbf{Q}}M\cap(E+q)$, kde E je neměřitelná množina z předchozího příkladu a každá měřitelná podmnožina E má Lebesgueovu míru 0.]

9. Příklady měr.

   (a) Buď S libovolná množina, $\Sigma=P(S)$. Definujme $\mu(A)$ =počet prvků A. Ukažte, že μ je úplná, je $\sigma-$konečná právě když je S spočetná a konečná právě když je S konečná. [Aritmetická míra-counting measure.]
   (b) Dirakova míra. Definujme

$$\varepsilon_x(A)=\begin{cases}1 & \text{je-li} \quad x\in A,\\ 0 & \text{je-li} \quad x\in S-A.\end{cases}$$

   Ukažte, že ε_x je úplná pravděpodobnostní míra.

   (c) Buď $S=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ spočetná množina, $p_n\geq 0$ taková, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n=1$. Definujme

$$\mu(A)=\sum_{n\in N_A}p_n\,,\quad\text{kde}\;\;N_A=\{n\in\mathbf{N};x_n\in A\}.$$

   Ukažte, že μ je úplná pravděpodobnostní míra.

   (d) Triviální míra. Buď Σ libovolná $\sigma-$algebra podmnožin množiny S. Definujme $\mu(A)=0\;\;\forall\,A\in\Sigma$. Ukažte, že μ je konečná míra, která je úplná právě když $\Sigma=P(S)$.

10. Buď $M=\mathbf{R}\,,\;\; f_n=\frac{1}{n}\,\chi_{\langle -n^2,n^2\rangle}\,,\;\; n\in\mathbf{N}$. Ukažte, že

$$f_n\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}0\;\text{ na }\mathbf{R},\;\text{ ale }\;\int\limits_M f_n(x)\,dx\nrightarrow 0.$$

   Zdůvodněte, proč neplatí příslušná věta.

11. (a) Buď $M = \mathbf{R}$, $f_n = -\chi_{\langle n,+\infty)}$. Potom

$$f_n \nearrow 0 \ \forall x \in \mathbf{R}, \text{ ale } \int\limits_M f_n(x)\,dx \nrightarrow 0.$$

(b) Buď $M = \langle 0,1)$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$ pro $x \in M$, Definujme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in \left\langle 0, 1-\frac{1}{n} \right\rangle \\ g(x) & \text{pro} \quad x \in \left(1-\frac{1}{n}, 1\right) \end{cases}$$

Ukažte, že $f_n \nearrow 0$, ale $\int\limits_M f_n(x)\,dx \nrightarrow 0$. Zdůvedněte proč neplatí Leviho věta.

12. Buď $M = \langle 0,1\rangle$, $f_n = n\chi_{\langle 0,\frac{1}{n}\rangle}$. Potom

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall x \in M, \text{ ale } \int\limits_M f_n(x)\,dx \nrightarrow 0.$$

Zdůvodněte, proč neplatí Lebesgueova věta.

13. Buď $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost $\mu-$měřitelných funkcí na M, $\varphi \in L(M)$. Jestliže $f_k \leq \varphi$ s. v. v M $\forall k \in \mathbf{N}$, potom platí

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \int\limits_M f_k\,d\mu \leq \int\limits_M \overline{\lim_{k\to\infty}}\, f_k\,d\mu.$$

Dokažte.

14. Ukažte, že existuje spojitá funkce dvou proměnných $f(x,\alpha)$ taková, že $F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,dx$ není spojitá funkce. [Na příklad $M = \langle 0,1\rangle$, $f(x,\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}$, $\alpha = 0$. Zdůvodněte proč]

15. Ukažte, že existuje spojitá funkce dvou proměnných $f(x,\alpha)$ taková, že

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_M f(x,\alpha)\,dx \neq \int\limits_M \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx.$$

[Na příklad $M = \langle 0,1\rangle$, $f(x,\alpha) = \frac{x}{\alpha^2}\,e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}$, $\alpha = 0$. Zdůvodněte, proč neplatí příslušná věta.]

16. Existuje funkce dvou proměnných $f(x,\alpha)$ se spojitou derivací $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$ takovou, že

$$\frac{d}{d\alpha} \int\limits_M f(x,\alpha)\,dx \neq \int\limits_M \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx.$$

[Uvažte funkci $f(x,\alpha) = \ln(x^2+\alpha^2)$, $M = \langle 0,1\rangle$, $\alpha = 0$. Zdůvodněte, proč neplatí věta o derivaci integrálu podle parametru .]

17. Ukažte, že následující funkce mají derivace všech řádů a vyjádřete je:

(a) $F(\alpha) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\,dx \quad (\alpha > 0)$.

[$F^{(k)}(\alpha) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\, ln^k x\,dx = \frac{(-1)^k k!}{\alpha^{k+1}}$].

(b) $F(a) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} \quad (a > 0)$.

$[\, F^{(k)}(a) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{k+1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\, a^{-(n+\frac{1}{2})}\,]$.

18. Vypočtěte následující integrály:

(a) $\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\, dx \quad (a > -1) \qquad [\, \ln(1+a)\,]$.

(b) $\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\, dx \quad (a > -1) \qquad [\, \frac{1}{2}\, \ln(a+1)\,]$.

(c) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\, dx \quad (\alpha, \beta > 0) \qquad [\, \frac{1}{2}\, \ln\frac{\beta}{\alpha}\,]$.

(d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{arctg}\,(a\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x}\, dx \qquad [\, \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\; a\; \ln(1+|a|)\,]$.

(e) $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}\; ax - \mathrm{arctg}\; bx}{x}\, dx \quad (a, b > 0) \qquad [\, \frac{\pi}{2}\, \ln\frac{a}{b}\,]$.

(f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\, dx \quad (\, |a| + |b| > 0\,)$

$[\, \pi\, \ln\frac{|a|+|b|}{2}$; Všiměte si, že konvergují integrály $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx$ a $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\, dx$ a mají hodnotu $-\frac{\pi}{2}\, \ln 2\,]$.

(g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\, \frac{dx}{\cos x} \quad (\, |a| < 1\,) \qquad [\, \pi\arcsin a\,]$.

(h) $\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}\, ax}{x(1+x^2)}\, dx \qquad [\, \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\; a\; \ln(1+|a|)\,]$.

(i) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\; ax}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad [\, \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\; a\; \ln(|a| + \sqrt{1+a^2})\,]$.

(j) $\int\limits_1^\infty \frac{\mathrm{arctg}\; ax}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, dx \qquad [\, \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\; a(1+|a| - \sqrt{a^2+1})\,]$.

(k) $\int\limits_0^\pi \frac{\ln(1+a\;\cos\; x)}{\cos\; x}\, dx \quad (|a| < 1) \qquad [\, \pi\; \arcsin\; a\,]$.

(l) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad (|a| \le 1) \qquad [\, \pi(\sqrt{1-a^2}-1)\,]$.

(m) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad (|a| \le 1) \qquad [\, \pi\; \ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}\,]$.

(n) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(x^2+\alpha^2)}{x^2+\beta^2}\, dx \quad (\beta \ne 0) \qquad [\, \frac{\pi}{|\beta|}\, \ln(|\alpha| + |\beta|)\,]$.

(o) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\, \sin\; kx\, dx \quad (\alpha, \beta > 0) \qquad [\, \mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{k} - \mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{k}\, ,\;\; k \ne 0\,]$.

(p) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\, \cos\; kx\, dx \quad (\alpha, \beta > 0) \qquad [\, \frac{1}{2}\, \ln\frac{\beta^2+k^2}{\alpha^2+k^2}\,]$.

(q) $\int\limits_0^\pi \ln(1-2a\;\cos\; x + a^2)\, dx \qquad [\, 0$ pro $|a| \le 1\, ;\;\; \pi\; \ln\; a^2$ pro $|a| > 1\,]$.

19. Užitím Laplaceova integrálu $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ vypočtěte následující integrály:

(a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx \quad (a>0) \qquad [\,\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{ac-b^2}{a}}\,].$

(b) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{ax^2}-e^{bx^2}}{x^2}\,dx \quad (a,b>0) \qquad [\,\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})\,].$

(c) $\int\limits_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} - e^{-\frac{\beta^2}{x^2}}\right)\,dx \quad (\alpha,\beta>0) \qquad [\,\sqrt{\pi}(\beta-\alpha)\,].$

(d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{ch}\,bx\,dx \quad (a>0) \qquad \left[\,\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}}\,\right].$

(e) $\int\limits_{0}^{\infty} x\,e^{ax^2}\,\sin\,bx\,dx \quad (a>0) \qquad \left[\,\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}\,e^{-\frac{b^2}{4a}}\,\right].$

(f) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx \qquad \left[\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2|a|}\,\right].$

20. (a) Ukažte, že $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin\,x}{x}\,dx$ neexistuje jako vlastní Lebesgueův integrál.

[Ukažte, že $\int\limits_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin\,x}{x}\right)^+\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin\,x}{x}\right)^-\,dx = +\infty$. Užijte odhadu $\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin\,x}{x}\,dx \geq \frac{1}{(2k+1)\pi} \int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin\,x\,dx\,$].

(b) Ukažte, že integrál $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin\,x}{x}\,dx$ existuje jako nevlastní Lebesgueův integrál.

[Ukažte, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin\,x}{x}\,dx$ konverguje podle Leibnizova kritéria. Zaveďte do integrálu $\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin\,x}{x}\,dx$ substituci $x = n\pi + t\,$].

(c) Ukažte, že $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\sin\,bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,b$.

[Použijte integrálu $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}\,\frac{\sin\,bx}{x}\,dx\,,\ \ a>0\,$].

21. <u>Gama funkce.</u>

Funkci $\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$ nazýváme $\Gamma-$funkcí (nebo Eulerovým integrálem 2. druhu).

(a) Ukažte, že $\Gamma(x)$ konverguje v polorovině $\mathrm{Re}\,x>0$ (jako funkce komplexní proměnné).

(b) Ukažte, že $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

(c) Ukažte, že $\Gamma(n+1) = n!\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\,\sqrt{\pi}$ pro $n \in \mathbf{N}$.

(d) Odvoďte, že $\Gamma-$funkci lze rozšířit na celou komplexní rovinu s výjimkou bodů $0, -1, -2, \ldots$. [Využijte formule $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$.]

22. <u>Beta funkce.</u>

Funkci $B(x,y) = \int\limits_{0}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ nazýváme $B-$funkcí (nebo Eulerovým integrálem 1. druhu).

(a) Ukažte, že $B(x,y)$ konverguje pro $\mathrm{Re}\,x>0$ a $\mathrm{Re}\,y>0$ a $B(x,y) = B(y,x)$.

(b) Ukažte, že $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

[Vyjádřete $\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)$ a do příslušného dvojného integrálu zaveďte substituci $t=\alpha(1-\beta)\,,\quad u=\alpha\,\beta$.]

(c) Ukažte, že pro $0<s<1$ platí $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\,\pi s}$. (Doplňková formule.)

[α) Ukažte, že $I(b)=\int\limits_0^\infty \frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\,\pi b}$.

β) Ukažte, že $B(x,y)=\int\limits_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$; užijte substituci $t=\frac{u}{u+1}$.

γ) Volte $x=s\quad y=1-s$ a užijte předchozího vyjádření.

ad α) Předpokládejme, že $b=\frac{r}{s}$ je racionální. Potom $I(\frac{r}{s})=s\int\limits_0^\infty \frac{z^{r-1}}{1+z^s}\,dz$ a

$$\frac{sz^{r-1}}{1+z^s}=-\sum_{k=0}^{s-1}\frac{z_k^r}{z-z_k}\,,\ \text{ kde } z_k=e^{\alpha_k}\,,\ \ \alpha_k=\frac{(2k+1)\pi i}{s}.$$

Buď s sudé. Potom se kořeny z_k dají združit do dvojic z_k , $\overline{z_k}$ a platí

$$\frac{z_k^r}{z-z_k}+\frac{\overline{z_k}^r}{z-\overline{z_k}}=\frac{2z\,\cos\,\beta_k r-2\,\cos\,\beta_k(r-1)}{z^2-2z\,\cos\,\beta_k+1}\,,\ \text{ kde } \beta_k=\frac{1}{i}\,\alpha_k.$$

Pro s sudé je $\frac{s\,z^{r-1}}{1+z^s}$ sudá funkce, tedy

$$I\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{s}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{z^{r-1}}{1+z^s}\,dz=\lim_{A\to\infty}\frac{s}{2}\int\limits_{-A}^{A}\frac{z^{r-1}}{1+z^s}\,dz=-\lim_{A\to\infty}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}s-1}I_k(A)\,,\ \text{ kde}$$

$$I_k(A)=\int\limits_{-A}^{A}\frac{z\,\cos\,\beta_k r-\cos\,\beta_k(r-1)}{z^2-2z\,\cos\,\beta_k+1}\,dz\,,\ \ \lim_{A\to\infty}I_k(A)=-\pi\,\sin\,\frac{(2k+1)\pi\,r}{s}\,,$$

$$I\left(\frac{r}{s}\right)=\pi\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}s-1}\sin\,\frac{(2k+1)\pi\,r}{s}=\frac{\pi}{\sin\,\frac{\pi\,r}{s}}.$$

$I(b)$ je spojitá funkce b , zlomky $\frac{r}{s}$ tvoří hustou podmnožinu $(0,1)$.]

23. Pomocí Γ nebo $B-$funkce vypočtěte následující integrály:

(a) $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$ $\qquad$ [$\frac{\pi}{8}$].

(b) $\int\limits_0^a x^2\,\sqrt{a^2-x^2}\,dx\quad(a>0)$ $\qquad$ [$\frac{\pi\,a^4}{16}$].

(c) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$ $\qquad$ [$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$].

(d) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ $\qquad$ $\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right]$.

(e) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$ $\qquad$ $\left[\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right]$.

(f) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}\quad(n>1)$ $\qquad$ $\left[\frac{\pi}{n\,\sin\,\frac{\pi}{n}}\right]$.

(g) $\int\limits_0^\infty x^{2n}\,e^{-x^2}\,dx\quad(n\in\mathbf{N})$ $\qquad$ $\left[\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\,\sqrt{\pi}\right]$.

24. Najděte oblast existence následujících integrálů a vyjádřete je pomocí Eulerových integrálů.

(a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx \quad (n>0) \qquad \left[\frac{\pi}{n\,\sin\frac{m\,\pi}{n}}\,;\ \ 0<m<n\right].$

(b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}\,dx \qquad [\,B(n-m,m)\,;\ \ 0<m<n\,].$

(c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^\alpha\,dx}{(a+bx^n)^\beta} \quad (a,b,n>0) \qquad \left[\frac{a^{-\beta}}{n}\,\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\alpha+1}{n}}\,B\left(\frac{\alpha+1}{n},\beta-\frac{\alpha+1}{n}\right)\,;\ \ 0<\frac{\alpha+1}{n}<\beta\right].$

(d) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \quad (m>0) \qquad \left[\,\frac{1}{m}\,B\left(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n}\right)\,;\ \ n<0 \text{ nebo } n>1\,\right].$

(e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\,\cos^\beta x\,dx$

$\left[\,\frac{1}{2}\,B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right)\,,\ \ \alpha,\beta>-1\,;\ \text{zaveďte substituci } \sin x=\sqrt{t}\,\right].$

(f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^a\,x\,dx \qquad \left[\frac{\pi}{2\,\cos\,\frac{a\pi}{2}}\,;\ \ |a|<1\right].$

(g) $\int\limits_0^\pi \frac{\sin^{n-1}\,x}{(1+k\,\cos\,x)^n}\,dx \quad (0<|k|<1)$

$\left[\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}\,B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)\,;\ \ n>0\,;\ \text{zaveďte substituci } \mathrm{tg}\frac{x}{2}=t\,\right].$

(h) $\int\limits_0^\infty e^{-x^n}\,dx \quad (n>0) \qquad \left[\,\frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\,\right].$

(i) $\int\limits_0^\infty x^m\,e^{-x^n}\,dx \qquad \left[\frac{1}{|n|}\,\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\,;\ \ \frac{m+1}{n}>0\right].$

(j) $\int\limits_0^1 \left(\ln\,\frac{1}{x}\right)^p\,dx \qquad [\,\Gamma(p+1)\,;\ \ p>-1\,].$

(k) $\int\limits_0^\infty x^p\,e^{-ax}\,\ln\,x\,dx \quad (a>0)$

$\left[\frac{d}{dp}\,\left\{\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right\}\,;\ \ p>-1\,;\ \text{vyšetřete } \int\limits_0^\infty x^p\,e^{-ax}\,dx\right].$

(l) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,\ln\,x}{1+x}\,dx \qquad \left[-\frac{\pi^2\,\cos\,p\pi}{\sin^2\,p\pi}\,;\ \ 0<p<1\right].$

(m) $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}\,\ln^2\,x}{1+x}\,dx \qquad \left[\pi^3\,\frac{1+\cos^2\,p\pi}{\sin^3\,p\pi}\,;\ \ 0<p<1\right].$

(n) $\int\limits_0^\infty \frac{x\,\ln\,x}{1+x^3}\,dx \qquad \left[\frac{2}{27}\,\pi^2\,;\ \text{uvažte integrál } \int\limits_0^\infty \frac{x^\alpha\,\ln\,x}{1+x^3}\,dx\right].$

(o) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln^2\,x}{1+x^4}\,dx \qquad \left[\frac{3\pi^3}{32\,\sqrt{2}}\right].$

25. (a) Buď $f(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^3}$, $M=\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle$. Ukažte, že platí

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx=-\frac{1}{2}\,,\qquad \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy=\frac{1}{2}.$$

Vysvětlete, proč neplatí Fubiniova věta. Ukažte dále, že

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy=0\,,\ \ \text{kde } D_\varepsilon=M-\langle 0,\varepsilon\rangle\times\langle 0,\varepsilon\rangle.$$

(b) Analogicky pro funkci $f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\left[\text{ Je } \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{\pi}{4}\,; \quad \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy = -\frac{\pi}{4}.\right]$

26. Buď $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, $M = \mathbf{R}^2$. Ukažte, že

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = 0\,,$$

přesto integrál $\iint\limits_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$ neexistuje.

27. Vypočtěte následující integrály:

(a) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})\,;\ \text{užijte vztahu } \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}\right].$

(b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{a+b\sin x}{a-b\sin x} \frac{dx}{\sin x}$

$\left[\pi \arcsin \frac{b}{a}\,;\ 0 < b \le a\,;\ \text{užijte vztahu } \ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\frac{1}{\sin x} = 2ab\int\limits_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}\right].$

(c) $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x}\,dx \quad (a>0).$

$\left[\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+1}{a^2}\,;\ \text{užijte vztahu } \frac{1-\cos x}{x} = \int\limits_0^1 \sin xy\,dy.\right]$

(d) $\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (a,b>-1).$

$\left[\ln\frac{b+1}{a+1}\,;\ \text{užijte vztahu } \frac{x^b-x^a}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y\,dy.\right]$

(e) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx\,, \quad \int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (a,b>0).$

$\left[\{\operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1)\}\,;\ \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}\,;\ \text{užijte předchozí úlohu.}\right]$

(f) $\int\limits_0^{\infty} \sin x^2\,dx\,, \quad \int\limits_0^{\infty}\cos x^2\,dx$ (Fresnelovy integrály). [Oba jsou rovny $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$;
zaveďte substituci $x^2 = t$ a využijte vztahu $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty} e^-ty^2\,dy.$]

28. Buďte f dvakrát a F jednou diferencovatelné funkce. Ukažte, že funkce

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\{f(x-at)+f(x+at)\} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz$$

vyhovuje rovnici kmitání struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{s počátečními podmínkami } u(x,0)=f(x)\,,\ u'_t(x,0) = F(x).$$

29. Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle 0,l\rangle$, $(l>0)$ $(x-\xi)^2+(y-\xi)^2+(z-\xi)^2\neq 0$ pro $\xi\in\langle 0,l\rangle$. Ukažte, že funkce

$$u(x,y,z)=\int\limits_0^l \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\xi)^2+(z-\xi)^2}}$$

vyhovuje Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

30. Buď f spojitá a omezená funkce na $\mathbf{R}$. Ukažte, že funkce

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi$$

vyhovuje rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad\text{a počáteční podmínce}\quad \lim_{t\to 0_+} u(x,t)=f(x).$$

31. Ukažte, že Besselova funkce

$$J_\alpha(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(x\,\sin\varphi-\alpha\varphi)\,d\varphi\quad(\alpha\in\mathbf{R})$$

vyhovuje Besselově diferenciální rovnici $x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0$.

32. Integrály

$$E(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\,,\qquad F(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\qquad(0<k<1)$$

nazýváme úplnými eliptickými integrály druhého a prvního druhu. Ukažte, že platí:

(a) $\frac{dE}{dk}=\frac{E-F}{k}$, $\frac{dF}{dk}=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{F}{k}$.

(b) $E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}$.

33. Vyjádřete $F(k)$ a $E(k)$ pomocí mocninných řad.

$\Big[F(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}\right\}$

$E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$; $0<k<1.\Big]$

34. Vyjádřete Besselovu funkci $J_0(x)$ pomocí mocninné řady.

$\Big[J_0(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n!]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$, $x\in\mathbf{R}$;

vyjádřete $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos(x\sin\varphi)\,d\varphi$ pomocí nekonečné řady.$\Big]$

35. Buď $M\subset\mathbf{R}^n$, $\mu(M)<\infty$. ukažte, že vnoření $\mathbf{L}_2(M)$ do $\mathbf{L}_1(M)$ je spojité, ale není to homeomorfismus.

[Na příklad $M=\langle 0,1\rangle$, $f_n=n\,\chi_{\langle 0,n^{-2}\rangle}$. Potom je $f_n\to 0$ v $\mathbf{L}_1$, ale $\|f_n\|_{\mathbf{L}_2}=1$. Analogicky $g_n=n\,\chi_{\langle 0,n^{-3/2}\rangle}$.]

36. Najděte posloupnost $\{f_n\}$ tak, že $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)\ \forall\, x \in M \subset \mathbf{R}^n$, ale $f_n \not\rightrightarrows f$.

$\Big[$Na příklad $M = \langle 0,1\rangle, f_n(x) = x^n - x^{2n}$ nebo $M = \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}.\Big]$

37. Ukažte, že existuje posloupnost $\{f_n\}$ tak, že $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ na $M \subset \mathbf{R}^n$, ale $f_n \not\to f$ podle středu.

$\big[$Na příklad $M = \mathbf{R}$; $f_n = \frac{1}{n}\chi_{\langle -n,n\rangle}\big]$.

38. Najděte posloupnost $\{f_n\}$ tak, že $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ podle míry na množině $M \subset \mathbf{R}^n$, ale $f_n \not\to f$ podle středu.

[Na příklad $M = \mathbf{R}$; $f_n = n\,\chi_{\langle 0,1/n\rangle}$]

39. Najděte posloupnost $\{f_n\}$ tak, že $f_n \to f$ s. v. v množině $M \subset \mathbf{R}^n$, ale $f_n \not\to f$ podle středu.

[Na příklad $M = \mathbf{R}$; $f_n = n^2\chi_{(0,1/n)}$]

40. Ukažte, že existuje posloupnost $\{f_n\}$ tak, že $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)\ \forall x \in M \subset \mathbf{R}^n$, ale $f_n \not\to f$ podle míry.

[Na příklad $M = \mathbf{R}$; $f_n = \chi_{\langle n,n+1\rangle}$]

41. Najděte posloupnost $\{f_n\}$ tak, že $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ podle míry v množině $M \subset \mathbf{R}^n$, ale posloupnost $\{f_n(x)\}$ nekonverguje pro žádné $x \in M$.

[Uvažte na příklad $M = \langle 0,1\rangle$, $f_{n,k}$ definujme pro $n = 0,1,2,\ldots$; $k = 0,1,\ldots,2^n - 1$ předpisem

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \qquad x \in \left\langle \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right\rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Načrtněte si obrázek, nebo se podívejte do paragrafu 3.1.]

42. Ukažte, že existuje posloupnost $\{f_n\}$ tak, že $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ podle středu v množině $M \subset \mathbf{R}^n$, ale posloupnost $\{f_n(x)\}$ nekonverguje pro žádné $x \in M \subset \mathbf{R}^n$.

[Užijte předchozí příklad]