Seminář z matematické analýzy II.

Čížek Jiří-Kubr Milan

23. března 2008

Obsah

Kapitola 1

Číselné řady.

1.1 Základní vlastnosti řad.

1. Najděte posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, rozhodněte o její konvergenci a najděte případně její součet s, je-li

a) $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, b) $a_n = \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, c) $a_n = nq^{n-1}$, $q \in \mathbf{R}$,

d) $a_n = \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$, e) $a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, f) $a_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2$,

g) $a_n = \ln \frac{n^3-1}{n^3+1}$, $n \geq 2$, h) $a_n = \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$, i) $a_n = \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{3}{2^n}$,

j) $a_n = \sin \frac{\alpha}{2^{n+1}} \sin \frac{3\alpha}{2^{n+1}}$, k) $a_n = \frac{1}{n!(n+2)}$, l) $a_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$.

Řešení:

(a) Je

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} ,$$

použijeme-li rozklad a_n na parciální zlomky. Odtud

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right\} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

a tedy

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

(b) Analogicky jako v předchozím příkladu platí

$$\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right\} ,$$

tedy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right\} = \frac{1}{8} \left\{ 1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right\}$$

a odtud $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{8}$.

(c) Podle cvičení 2.1.7b) (Seminář z matematické analýzy I.) je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{nq^n}{1-q} \quad \text{pro} \quad q \neq 1$$

$$\text{a} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{pro} \quad q = 1.$$

(i) Je-li $|q| < 1$, pak $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{(1-q)^2}$ existuje bez ohledu na to, zda je q reálné nebo komplexní.
(ii) Pro $q = 1$ je zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ a daná řada diverguje
(iii) Je-li $q > 1$, je

$$s_n = \frac{1-q^n-nq^n(1-q)}{(1-q)^2} = \frac{1+q^n(nq-1-n)}{(1-q)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

a daná řada opět diverguje.
(iv) $q \leq -1$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+q^n(nq-1-n)}{(1-q)^2}$ neexistuje a daná řada tedy osciluje.

(d) a_n přepíšeme do tvaru

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{\sqrt{(n-1)(n+1)}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

a z tohoto vyjádření plyne, že

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sqrt{\frac{k}{k+1}} - \sqrt{\frac{k-1}{k}} \right\} = \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

tedy $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

(e) Pro n-tý částečný součet s_n platí

$$s_n = (\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{1})+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{4}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})+$$
$$+(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = 1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} =$$
$$= 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

a tedy $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1-\sqrt{2}$.

(f) Je $a_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\frac{n^2-1}{n^2} = \ln(n-1) - 2\ln n + \ln(n+1)$ a tedy

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \{\ln(k-1) - 2\ln k + \ln(k+1)\} = -\ln 2 + \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} - \ln 2.$$

Odtud $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\ln 2$.

(g) Analogicky jako v předchozím příkladu je

$$a_n = \ln\frac{n^3-1}{n^3+1} = \ln\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} = \ln(n-1)-\ln(n+1)+\ln(n^2+n+1)-\ln(n^2-n+1).$$

Označíme-li $b_n = n^2-n+1$, potom $b_{n+1} = (n+1)^2-(n+1)+1 = n^2+n+1$ a odtud

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \left\{ \ln(k-1) - \ln(k+1) + \ln(k^2+k+1) - \ln(k^2-k+1) \right\} =$$

$$= \ln 2 - \ln 3 + \ln(n^2+n+1) - \ln n - \ln(n+1) = \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

a tedy $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \ln\frac{2}{3}$.

(h) Platí $a_n = \ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} = \ln n - \ln(n+1) + \ln(2n+1) - \ln(2n-1)$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \{ \ln k - \ln(k+1) + \ln(2k+1) - \ln(2k-1)\} =$$

$$= \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\frac{2n+1}{n+1} \text{ a odtud } s = \lim_{n\to\infty} s_n = \ln 2.$$

(i) Podle goniometrického vzorce $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ můžeme vyjádřit součin $\sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}$ pomocí rozdílu. Položíme-li $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2^n}$, $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{3}{2^n}$, dostaneme

$$\alpha = \frac{1}{2^{n-2}}\,,\ \beta = \frac{1}{2^{n-1}},\ \text{ tedy } \sin\frac{1}{2^n}\cdot\cos\frac{3}{2^n} = \frac{1}{2}\left\{\sin\frac{1}{2^{n-2}} - \sin\frac{1}{2^{n-1}}\right\}.$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\frac{1}{2^{k-2}} - \sin\frac{1}{2^{k-1}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\sin 2 - \sin\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$$

a tedy $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}\sin 2$.

(j) Podle analogického vzorce pro $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$ dostaneme

$$\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cdot\sin\frac{3\alpha}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\alpha}{2^n} - \cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}\right\},$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\frac{\alpha}{2^k} - \cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\alpha}{2^n} - \cos\alpha\right\}$$

a odtud $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

(k) Jestliže a_n přepíšeme do tvaru

$$a_n = \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{n+2-1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!},$$

je zřejmé, že

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} \text{ a } s = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}.$$

(l) Použijeme-li vzorce pro součet $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ (na příklad Sbírka úloh z matematické analýzy II, str. 14), dostaneme

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\ \ (xy < 1) \text{ a tedy } \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 1^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 2^2} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}.$$

Indukcí dokážeme, že

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot k^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} \text{ a tedy } s = \lim_{n\to\infty} s_n = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Jestliže lze členy řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ napsat ve tvaru $a_n = b_{n+1} - b_n$ a jestliže existuje konečná limita $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, pak daná řada konverguje a její součet je $b - b_1$, t.j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = b - b_1$.

Důkaz: Je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_1 \text{ a odtud } s = \lim_{n\to\infty} b_n = b - b_1.$$

Poznámka: Všechny části příkladu 1 (až na c) a l)) byly řešeny postupem z příkladu 2. Na příklad v 1e) $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, 1f) $b_n = \ln n - \ln(n-1)$, 1g) $b_n = \ln(n^2 - n + 1) - - \ln\{n(n-1)\}$. Daný postup lze použít i tehdy, je-li

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} A_i (b_{n+i} - b_{n+i-1}), \text{ kde } k \in \mathbf{N}\,,\, A_1, \ldots, A_k \in \mathbf{R}$$

(srovnejte s příkladem 6) pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Je to totéž, jako když

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{n+i-1}, \text{ kde } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \ \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Tento postup se uplatňuje při rozkladu a_n na parciální zlomky.

3. Najděte posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a její součet s, je-li

a) $a_n = \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(\alpha+n+3)}\,, \quad -\alpha \neq n \in \mathbf{N}\,;$ b) $a_n = \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\,;$

c) $a_n = \frac{2n+9}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}\,;$ d) $a_n = \frac{1}{n(n+m)}\,,\ m \in \mathbf{N}\,.$

Řešení:

(a) a_n přepíšeme do tvaru

$$a_n = \frac{(\alpha+n+3) - (\alpha+n)}{3(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(\alpha+n+3)} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(\alpha+n+3)}\right\}.$$

jestliže v předchozím cvičení položíme

$$b_n = -\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}\,, \text{ je } b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,\, b_1 = -\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$$

a tedy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)(\alpha+n+3)}\right\};$$

$s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$.

(b) Platí

$$a_n = \frac{3(n+4)-13}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} -$$

$$-\frac{13(n+4-n)}{4n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \left\{\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\} -$$

$$-\frac{13}{4}\left\{\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right\},$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{13}{4}\left\{\frac{1}{24} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right\} =$$

$$\frac{1}{32} - \frac{4n+3}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \text{ a tedy } s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{32}.$$

(c)

$$a_n = \frac{2(n+5)-1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} =$$

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{n+5-n}{5n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right\} -$$

$$-\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}\right\};$$

$$s_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{24} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right\} -$$

$$\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{120} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}\right\} =$$

$$\frac{23}{1200} - \frac{5n+23}{10(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)},$$

a $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{23}{1200}$.

(d) Je

$$a_k = \frac{1}{m}\left\{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m}\right\} \text{ a odtud } s_n = \frac{1}{m}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m}\right\} =$$

$$= \frac{1}{m}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \sum_{k=n-m+1}^{n}\frac{1}{k+m}\right\} = \frac{1}{m}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\right\}.$$

Tedy $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$.

4. Najděte posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, rozhodněte o její konvergenci a najděte její součet s, je-li

(a) $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$ $\left[s_n = \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}, s = \frac{11}{18}\right\}\right]$

(b) $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ $\left[s_n = \frac{1}{6}\left\{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right\}, s = \frac{23}{90};\right.$ užijte rozkladu na parciální zlomky]

(c) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\left[s_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}, s = \frac{1}{4};\right.$

užijte rozkladu $\left. a_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$

(d) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ $\left[s_n = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}, s = \frac{1}{18};\right.$

užijte rozkladu $\left. a_n = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}\right]$

(e) $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ $\left[s_n = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right\}, s = \frac{1}{60};\right.$

užijte rozkladu $\left. a_n = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{(2n+2)(2n+5)}\right\}\right]$

(f) $a_n = \frac{1}{25n^2+5n-6}$ $\left[s_n = \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3}\right\}, s = \frac{1}{15}\right]$

(g) $a_n = \frac{1}{16n^2-8n-15}$ $\left[s_n = \frac{1}{8}\left\{-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right\}, s = -\frac{1}{12}\right]$

(h) $a_n = \frac{1}{36n^2+12n-35}$ $\left[s_n = \frac{1}{12}\left\{1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{6n+1} - \frac{1}{6n+7}\right\}, s = \frac{2}{21}\right]$

(i) $a_n = \frac{1}{(c+2n-1)(c+2n+1)}, c \neq -(2n-1), n \in \mathbf{N}$ $\left[s_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{c+1} - \frac{1}{c+2n+1}\right\}, s = \frac{1}{2(n+1)}\right]$

(j) $a_n = \frac{1}{(c+n)(c+n+3)}, -c \neq n \in \mathbf{N}$

$\left[s_n = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{c+1} + \frac{1}{c+2} + \frac{1}{c+3} - \frac{1}{c+n+1} - \frac{1}{c+n+2} - \frac{1}{c+n+3}\right\}, s = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{c+1} + \frac{1}{c+2} + \frac{1}{c+3}\right\};\right.$

v příkladech f)-g) použijte rozkladu a_n na parciální zlomky]

(k) $a_n = \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$ $\left[s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}, s = 1\right]$

(l) $a_n = \frac{4n^3+6n^2+4n+1}{5n^4(n+1)^4}$ $\left[s_n = \frac{1}{5}\left\{1 - \frac{1}{(n+1)^4}\right\}, s = \frac{1}{5};\right.$

užijte rozkladu $a_n = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$, resp. $\left. a_n = \frac{1}{5}\left\{\frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4}\right\}\right]$

(m) $a_n = a\,q^{n-1}$, $q \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ $\left[s_n = \frac{1-q^n}{1-q}\right.$ pro $q \neq 1$; $s_n = a\,n$ pro $q = 1$;

$s = \frac{q}{1-q}$ pro $|\,q\,| < 1$, řada diverguje pro $|\,q\,| \geq 1$]

(n) $a_n = \frac{3^n+2^n}{6^n}$ $\left[s_n = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}, s = \frac{3}{2}\right]$

(o) $a_n = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}$ $\left[s_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\} + \frac{1}{4}\left\{1 - \frac{1}{5^n}\right\}, s = \frac{3}{4}\right]$

(p) $a_n = \frac{1}{10^n} + \frac{2}{10^{n+1}} + \frac{5}{10^{n+2}}$ $\left[s_n = \frac{5}{36}\left\{1 - \frac{1}{10^n}\right\}, s = \frac{5}{36}\right]$

(q) $a_n = \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 3^{n-1}}$ $\left[s_n = 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{3}{8}\left(1 - \frac{(-1)^n}{3^n}\right), s = \frac{51}{8}\right]$

(r) $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$ $\left[s_n = 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^{n-1}}, s = 3;\right.$

v příkladech m)-r) využijte vlastností geometrické posloupnosti,

v příkladu r) navíc příklad 1c).]

(s) $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ [$s_n = \ln(n+1)$; řada diverguje]

(t) $a_n = \ln\left\{1 + \frac{2}{n(n+1)}\right\}$ [$s_n = \ln(n+2) - \ln n - \ln 3$, $s = -\ln 3$;

užijte pravidel pro logaritmování součinu a podílu]

(u) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ [$s_n = \sqrt{n+1} - 1$; řada diverguje,

přepište a_n do tvaru $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$]

5. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada, a_n tvaru $a_n = \frac{1}{u_n u_{n+1} \ldots u_{n+p}}$, kde $p \in \mathbf{N}$, $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d \neq 0, u_n \neq 0\ \forall n \in \mathbf{N}$. Potom je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní se součtem $\frac{1}{p \cdot d \cdot u_1 u_2 \ldots u_p}$.

Důkaz: Poněvadž je $u_{n+p} = u_n + pd$, je možno psát

$$a_n = \frac{u_{n+p} - u_n}{p \cdot d \cdot u_n u_{n+1} \dots u_{n+p}} = \frac{1}{p \cdot d} \left\{ \frac{1}{u_n u_{n+1} \dots u_{n+p-1}} - \frac{1}{u_{n+1} u_{n+2} \dots u_{n+p}} \right\},$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{p \cdot d} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{u_k u_{k+1} \dots u_{k+p-1}} - \frac{1}{u_{k+1} u_{k+2} \dots u_{k+p}} \right\} =$$

$$= \frac{1}{p\,d} \left\{ \frac{1}{u_1 u_2 \dots u_p} - \frac{1}{u_{n+1} u_{n+2} \dots u_{n+p}} \right\} \text{ a tedy } s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{p \cdot d \cdot u_1 u_2 \dots u_p},$$

protože $u_{n+1} u_{n+2} \dots u_{n+p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ pro $d > 0$ a $u_{n+1} u_{n+2} \dots u_{n+p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ pro $d < 0$.

6. Buď $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní řada, $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ posloupnost přirozených čísel. Potom

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} a_i, \text{ kde } k_0 = 0.$$

Důkaz: Tvrzení říká, že

$$s = a_1 + a_2 + \dots = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + \dots,$$

tedy, že pro konvergentní řady platí asociativní zákon. To je však zřejmé, poněvadž posloupnost částečných součtů řady na pravé straně je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{s_n\}$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Poznámka: Z důkazu je vidět, že věta platí i v případě $s = +\infty$ nebo $s = -\infty$.

7. Nechť $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Potom je i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ konvergentní a její součet je roven $\alpha s + \beta t$.

Důkaz: Jsou-li s_n, t_n, σ_n částečné součty řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$, potom je $\sigma_n = \alpha s_n + \beta t_n$ a tvrzení plyne okamžitě z odpovídající věty o limitách posloupností.

8. Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a)	$a_n = \frac{1}{n(n+2)(n+3)}$	b)	$a_n = \frac{2-n}{n(n+1)(n+3)}$
c)	$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+5)}$	d)	$a_n = \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}$

Řešení:

(a) Platí

$$a_n = \frac{n+1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)},$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \right\}.$$

Podle cvičení 4(c) a 4(d) platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{18}$$

a podle cvičení 7 je tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}$.

(b) Analogicky jako v předchozím cvičení je

$$a_n = \frac{2-n}{n(n+1)(n+3)} = -\frac{n^2-4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = -\frac{n^2+n-n-4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= -\frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{n+3-1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} =$$

$$= -\frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Součty příslušných řad jsou podle cvičení 4 postupně $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{18}$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = -\frac{1}{36}.$$

(c)

$$a_n = \frac{(2n+1)(2n+5) - (4n^2+12n+4)}{(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+5)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} -$$

$$-4\frac{(n+1)(n+2)-1}{(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+5)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{4}{(2n+1)(2n+5)} + 4a_n =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} - 4\frac{2n+5-2}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + 4a_n =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{4}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{8}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + 4a_n.$$

Z této rovnice dostaneme, že

$$a_n = \frac{4}{3(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)} - \frac{8}{3(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

a tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{9} - \frac{1}{6} - \frac{2}{45} = \frac{1}{90}$.

(d)

$$a_n = \frac{\{3(n+4)-8\}(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{3}{n(n+1)} - 8\frac{(n+3)(n+4)-(2n+6)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} =$$

$$= \frac{3}{n(n+1)} - \frac{8}{n(n+1)(n+2)} + 16\frac{n+4-1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} =$$

$$= \frac{3}{n(n+1)} - \frac{8}{n(n+1)(n+2)} + \frac{16}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{16}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Podle cvičení 4 a 6 je opět $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 3 - 2 + \frac{8}{9} - \frac{1}{6} = \frac{31}{18}$.

9. Ukažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, je-li

a) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$

b) $a_n = (n^2+1)\ln\frac{n^2+1}{n^2}$

c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) $a_n = \frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$

e) $a_n = \sin n\alpha\,,\ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

f) $a_n = (n+1)\mathrm{arctg}\,\frac{1}{n+1}$

g) $a_n = \frac{n^3+1}{n+3}\arcsin\frac{1}{n^2+2}$

h) $a_n = n^2 \sin\frac{1}{n^2}$

Důkaz:

(a) Podle příkladu 2.2.7g) (Seminář z matematické analýzy I.) je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ a řada tedy diverguje.

(b) Platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = 1,$$

poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$. Není tedy opět splněna nutná podmínka konvergence.

(c) Je sice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ale

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

a řada diverguje.

Poznámka: Totéž platí i pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in (0,1)$.

(d) Platí

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Je totiž $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ podle příkladu 2.2.7e) (Seminář z matematické analýzy I.) a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}^{\frac{1}{n}} = 1$$

podle příkladu 2.3.1 (Táž citace).

(e) Předpokládejme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin n\alpha = 0$. Potom je i

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sin(n+1)\alpha = \lim_{n\to\infty} \{\sin n\alpha\, \cos\alpha + \cos\alpha\, \sin n\alpha\}\,.$$

Odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\alpha = 0$, poněvadž $\sin\alpha \neq 0$. To však není možné, poněvadž $\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1$. (Dokonce víme, jak vypadá množina hromadných hodnot posloupnosti $\{\sin n\alpha\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; viz cvičení 2.4.3n) Seminář I.).

Poznámka: Protože je funkce sin konkávní v $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a přímka $y = x$ je tečnou ke grafu $y = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$, platí

$$(1) \qquad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x\,, \quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle.$$

Protože funkce tg je konvexní v $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$ a přímka $y = x$ je tečna ke grafu $y = \operatorname{tg} x$ v bodě x_0, je také

$$(2) \qquad x \leq \operatorname{tg} x \leq \frac{4}{\pi}x\,, \quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle.$$

Přechodem k inversním funkcím dostaneme

$$(3) \qquad x \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}x\,, \quad x \in \langle 0, 1\rangle.$$

$$(4) \qquad \frac{\pi}{4}x \leq \operatorname{arctg}\, x \leq x\,, \quad x \in \langle 0, 1\rangle.$$

Tyto nerovnosti použijeme i při vyšetřování konvergence řad s nezápornými členy pomocí srovnávacího kritéria v následujícím odstavci.

(f) Pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ platí odhad $\operatorname{arctg} t \geq \frac{\pi}{4}t$ a tedy $a_n = (n+1)\operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} \geq \frac{\pi}{4}$.

(g) Jestliže využijeme odhadu $\arcsin t \geq t$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, dostaneme okamžitě

$$a_n = \frac{n^3+1}{n+3} \arcsin \frac{1}{n^2+2} \geq \frac{n^3+1}{(n+3)(n^2+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

(h) Využitím odhadu $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ dostaneme okamžitě, že $a_n = n^2 \sin \frac{1}{n^2} \geq \frac{2}{\pi}$.

10. Ukažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, je-li

(a) $a_n = \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$ $\left[\text{Ukažte, že } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right]$

(b) $a_n = \sqrt[n]{0,02}$ $\left[\text{Ukažte, že } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right]$

(c) $a_n = \cos \frac{1}{n+1}$ $\left[\text{Ukažte, že } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right]$

(d) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$ $\left[\text{Ukažte, že } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1\right]$

(e) $a_n = \frac{10^n}{2n+5}$ $\left[\text{Ukažte, že } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty\right]$

(f) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ $\left[\text{Ukažte, že } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-2}\right]$

(g) $a_n = \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$ $\left[\text{Ukažte, že } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-2}\right]$

(h) $a_n = \left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}$ $\left[\text{Ukažte, že } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-2}\right]$

(i) $a_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn}$, $a, b \in \mathbf{N}$ $\quad \left[\text{Ukažte, že } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{ab} \neq 0\right]$

(j) $a_n = \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$ $\quad \left[\text{Využijte odhadu } a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$

11. Najděte posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů a součet s řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = q^n e^{in\alpha}$, $q \in \mathbf{C}$, $|q| < 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$ $\qquad$ b) $a_n = \frac{n+2+in}{n(n+1)(n+2)}$ $\qquad$ c) $\frac{n}{(1-i)^n}$

Řešení:

(a) Poněvadž je $\{a_n\}$ geometrická posloupnost s kvocientem $qe^{i\alpha}$ takovým, že $|\, qe^{i\alpha}\,| = |\, q\,| < 1$, platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = qe^{i\alpha}\frac{1 - q^n e^{in\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}} \ \text{ a } \ s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{qe^{i\alpha}}{1 - qe^{i\alpha}}.$$

(b) a_n přepíšeme do tvaru $a_n = \frac{1}{n(n+1)} + i\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ a podle cvičení 7 platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Tedy $s_n = 1 - \frac{1}{n+1} + i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)$ a odtud $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1 + \frac{i}{2}$.

(c) Podle cvičení 2.1.7b) (Seminář z matematické analýzy I.) $\left[q = \frac{1}{1-i}\right]$ je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(1-i)^k} = \frac{q(1-q^n)}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}.$$

Protože je $1 - q = 1 - \frac{1}{1-i} = \frac{1}{2}(1-i)$, $(1-q)^2 = \frac{1}{4}(1-i)^2 = -\frac{i}{2}$, platí dále

$$s_n = (i-1)\left(1 - \frac{1}{(1-i)^n}\right) - \frac{2n}{(1-i)^{n+1}} \ \text{ a odtud } \ s = \lim_{n\to\infty} s_n = i - 1.$$

12. Sečtěte řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha$, kde $q, \alpha \in \mathbf{R}$, $|\, q\,| < 1$.

Řešení: Jestliže označíme s_n a t_n částečné součty řad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha$, platí podle cvičení 2.1.7c) (Seminář z matematické analýzy I.)

$$s_n = \frac{q^{n+2}\cos n\alpha - q^{n+1}\cos(n+1)\alpha - q\cos\alpha + 1}{q^2 - 2q\cos\alpha + 1},$$

$$t_n = \frac{q^{n+2}\sin n\alpha - q^{n+1}\sin(n+1)\alpha + q\sin\alpha}{q^2 - 2q\cos\alpha + 1}$$

a tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha = \frac{1 - q\cos\alpha}{q^2 - 2q\cos\alpha + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha = \frac{q\sin\alpha}{q^2 - 2q\cos\alpha + 1}.$$

13. Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{i}{5^n}$ $\left[\frac{1}{4}(i-1)\right]$

(b) $a_n = \frac{1}{(1+i)^n}$ $[-i]$

(c) $a_n = \frac{(1+i)^n}{4^n}$ $\left[\frac{1}{5}(1+2i)\,;\ \text{užijte vlastností geometrické řady}\right]$

14. Pomocí Bolzano-Cauchyova kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$ b) $a_n = \frac{1}{n}$ c) $a_n = \frac{\sin nx}{2^n}$, $x \in \mathbf{R}$

d) $a_n = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$, $x \in \mathbf{R}$ e) $a_n = \frac{(-1)^{n+1-\left[\frac{n+1}{3}\right]}}{n}$

Řešení:

(a) Podle příkladu 2.2.24c) (Seminář z matematické analýzy I.) je $|\, s_{2n} - s_n \,| \leq \frac{1}{n}\ \forall n, p \in \mathbf{N}$ a řada tedy konverguje.

(b) Podle příkladu 2.2.24b) (Seminář I.) je $|\, s_{2n} - s_n \,| \geq \frac{1}{2}\ \ \forall n \in \mathbf{N}$ a řada diverguje.

(c) Platí

$$|\, s_{n+p} - s_n \,| = \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \leq \sum_{j=1}^{p} \left| \frac{\sin(n+j)x}{2^{n+j}} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2^{n+j}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a řada konverguje.

(d) Je

$$|\, s_{n+p} - s_n \,| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{k} \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{k} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos kx}{k} - \sum_{k=n+2}^{n+p+1} \frac{\cos kx}{k-1} \right| =$$

$$= \left| \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p} + \sum_{k=n+2}^{n+p} \cos kx \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p} + \sum_{k=n+2}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p} = \frac{2}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a daná řada je konvergentní.

(e) Jestliže rozepíšeme danou řadu, dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \ldots \quad \text{a}$$

$$|\, s_{6n} - s_{3n} \,| = \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3}\right) + \left(\frac{1}{3n+4} + \frac{1}{3n+5} - \frac{1}{3n+6}\right) +$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}\right)\geq\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\cdots+\frac{1}{6n-2}\geq$$
$$\geq\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\geq\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n}\cdot n=\frac{1}{6}$$
a řada je tedy divergentní.

Poznámka: Řady typu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, kde $p\in\mathbf{R}$, budou v dalším hrát důležitou roli a budeme se k nim často vracet. Je-li $p=1$, pak řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ nazýváme řadou harmonickou a podle 14b) je divergentní.

15. Pomocí Bolzano-Cauchyova kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, je-li

(a) $a_n=\frac{1}{2n+1}$ $\Big[$Řada diverguje; ukažte, že $|\,s_{2n}-s_n\,|\geq\frac{n}{4n+1}\Big]$

(b) $a_n=\frac{1}{n^2+4}$ $\Big[$Řada konverguje; dokažte, že $|\,s_{n+p}-s_n\,|\leq\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$ a využijte cvičení 14a)$\Big]$

(c) $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ $\Big[$Řada diverguje; ukažte, že $|\,s_{2n}-s_n\,|\geq\frac{n}{2n+1}\Big]$

(d) $a_n=\frac{\alpha_n}{10^n}$, $\alpha_n\in\mathbf{Z}$, $|\,\alpha_n\,|<10$ $\Big[$Řada konverguje; využijte odhadu $|\,a_n\,|\leq\frac{1}{10^{n-1}}$ a vlastností geometrické řady$\Big]$

(e) $a_n=\frac{\cos x^n}{n^2}$, $x\in\mathbf{R}$ $\Big[$Řada konverguje; užijte odhadu $|\,\cos x^n\,|\leq 1\Big]$

16. Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergentní řady a nechť $a_n\leq c_n\leq b_n$ $\forall\,n\in\mathbf{N}$. Potom je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ konvergentní.

Důkaz: Označme s_n , t_n , σ_n částečné součty řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$. Protože řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergují, platí

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists n_0\ \text{ tak, že }\ \forall\,n\geq n_0\ \text{ a }\ \forall p\in\mathbf{N}\ \text{ platí }\ |\,s_{n+p}-s_n\,|<\varepsilon\,,\ |\,t_{n+p}-t_n\,|<\varepsilon.$$

To však znamená, že

$$-\varepsilon<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\leq c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+p}\leq b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}<\varepsilon,$$

neboli $|\,\sigma_{n+p}-\sigma_n\,|<\varepsilon$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ konverguje.

17. Nechť řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ $(\,a_n,b_n\in\mathbf{R}\,)$ konvergují. Ukažte, že konvergují i řady

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|\,a_nb_n\,|$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\,a_n\,|}{n}$.

Důkaz: a) Podle cvičení 1.3.24a) (Seminář z matematické analýzy I.) platí

$$0 \leq |\, a_n b_n \,| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, a_n b_n \,|$ konverguje.

b) Je

$$(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2 \; ; \; -|\, a_n b_n \,| \leq a_n b_n \leq |\, a_n b_n \,|$$

a podle cvičení 7 a 16 je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ konvergentní.

c) Uvažme $b_n = \frac{1}{n}$. Podle cvičení 14a) je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentní a podle bodu a) konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, a_n b_n \,| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\, a_n \,|}{n}$.

18. Nechť $a_n \geq 0 \;\forall n \in \mathbf{N}$. a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ také konverguje. Ukažte, že obrácené tvrzení neplatí.

Řešení: Ukažte, že $0 \leq a_n^2 \leq a_n \;\; \forall n \geq n_0$; uvažte řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

19. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz: Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = a > 0$ a zvolme $0 < \varepsilon < a$. Potom existuje index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|\, n a_n - a \,| < \varepsilon$, neboli

$$\frac{a-\varepsilon}{n} < a_n < \frac{a+\varepsilon}{n}. \text{ Odtud } t_n = (a-\varepsilon) \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=n_0}^{n} a_k = s_n$$

a poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Analogicky se provede důkaz pro $a < 0$.

20. Nechť $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n \;\; \forall n \in \mathbf{N}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

Důkaz: Předpokládejme, že $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n a_n = A > 0$. Potom existuje vybraná posloupnost $\{k_n\}$ přirozených čísel tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} k_n a_{k_n} = A$ a zvolme tuto posloupnost tak, aby pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platilo $k_n a_{k_n} \geq \frac{A}{2}$, neboli $a_{k_n} \geq \frac{A}{2k_n}$ a $k_{n+1} \geq 2k_n$. Vzhledem k monotonnosti posloupnosti $\{a_n\}$ platí

$$\sum_{j=1}^{k_1} a_j = s_{k_1} \geq k_1 a_{k_1} \geq \frac{A}{2}\,,\; s_{k_2} = s_{k_1} + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j \geq \frac{A}{2} + \frac{A}{2k_2}(k_2 - k_1) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) \geq A.$$

Indukcí dokážeme, že $s_{k_n} \geq n \cdot \frac{A}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Protože je posloupnost $\{s_n\}$ monotonní, dostaneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a to je spor.

Poznámka: Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ není monotonní, předchozí tvrzení už neplatí. Uvažme řadu

$$1+0+0+\frac{1}{4}+0+\cdots+0+\frac{1}{9}+0+\cdots+0+\frac{1}{16}+\ldots,$$

tedy $a_n = \frac{1}{n}$ pro $n = k^2$ a $a_n = 0$ pro $n \neq k^2$ ($k \in \mathbf{N}$). Potom je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentní, ale $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, na_n = 1$.

21. Co je možno říci o řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, kde $c_n = a_n + b_n$, jestliže

   (a) Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.
   [Diverguje. Kdyby konvergovala, pak konverguje i řada se členy $b_n = c_n - a_n$.]

   (b) Obě řady divergují. Ilustrujte na příkladech.
   [Může konvergovat i divergovat. Uvažte $a_n = (-1)^{n-1}$, $b_n = (-1)^n$ nebo $a_n = b_n = \frac{1}{n}$.]

1.2 Řady s nezápornými členy.

1. Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ dvě řady a nechť $a_n \leq b_n\ \forall n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbf{N}$. Potom z konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a z divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (1. srovnávací kritérium).

Důkaz: Poněvadž řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ buď zároveň konvergují nebo zároveň divergují, je možno předpokládat, že $n_0 = 1$. Jestliže označíme s_n a t_n částečné součty řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, pak platí, že $s_n \leq t_n\ \forall n \in \mathbf{N}$. Je-li nyní $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t \in \mathbf{R}$, pak je i $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbf{R}$ (obě posloupnosti $\{s_n\}$ a $\{t_n\}$ jsou monotonní) a je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, je i $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$.

2. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

   a) $a_n = \frac{1}{1+a^n}$, $a > -1$ b) $a_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a \geq 0$ c) $a_n = 2^n \sin \frac{x}{3^n}$, $x \in (0, 3\pi)$

   d) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $a_4 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, ...

   e) $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ f) $a_n = \frac{1}{\ln n}$, $n \geq 2$ g) $a_n = \sin \frac{x}{n}$, $x \in (0, \pi)$

   h) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ i) $a_n = \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right) q^n$, $0 < q < 1$ j) $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, $n \geq 2$

   k) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$, $n \geq 2$ l) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$, $n \geq 3$

   m) $a_n = \frac{1}{(\ln n)^p}$, $n \geq 2, p \in \mathbf{R}$ n) $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ o) $a_n = \frac{\ln\left(1+\sin \frac{1}{n}\right)}{n+\ln^2 n}$

   p) $a_n = \log_{2^n}\left(1 + \frac{\sqrt[n]{3}}{n}\right)$ q) $a_n = \frac{\operatorname{arctg}\{3+(-1)^n 2\}}{\sqrt{n}} \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Řešení:

(a) Je-li $|\,a\,| < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ a řada diverguje. Pro $a = 1$ je $a_n = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ a řada opět diverguje.

Je-li $a > 1$, pak platí $\frac{1}{1+a^n} \le \frac{1}{a^n}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ konverguje (je to geometrická řada s kvocientem $0 < q = \frac{1}{a} < 1$). Tedy daná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní pro $a > 1$.

(b) Pro $0 \le a < 1$ je $\frac{a^n}{1+a^{2n}} \le a^n$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ konverguje.

Pro $a = 1$ je $a_n = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ a řada diverguje.

Je-li $a > 1$, potom $\frac{a^n}{1+a^{2n}} \le \frac{a^n}{a^{2n}} = \frac{1}{a^n}$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ konverguje.

Tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje pro $0 \le a < 1$ a $a > 1$.

(c) Využitím odhadu $\sin t \le t$ $\forall t \ge 0$ dostaneme $a_n \le 2^n \cdot \frac{x}{3^n} = x\left(\frac{2}{3}\right)^n$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje. Konverguje tedy i původní řada.

(d) příkladu 2.2.11e) (Seminář z matematické analýzy I.) platí $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ a tedy $a_n \le \frac{\pi}{2^n}$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konverguje a konverguje tedy i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(e) Buď $\alpha \ge 2$. Potom je $\frac{1}{n^\alpha} \le \frac{1}{n^2}$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz úloha 1.11.24a)), tedy konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Je-li $\alpha \le 1$, potom $\frac{1}{n^\alpha} \ge \frac{1}{n}$, podle úlohy 1.11.24b) je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní, tedy diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Nechť $\alpha \in (1,2)$. Jestliže označíme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, je tato posloupnost rostoucí a má tedy limitu. Ukážeme, že tato limita je vlastní. Podle úlohy 1.1.6 je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \dots$$

V každé ze závorek je 2^{k-1} členů ($k = 1, 2, \dots$), při čemž největší z nich je tvaru $\frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}$. Platí tedy

$$s_{2^n-1} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} \cdot 2^{k-1} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left\{\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right\}^2 + \dots + \left\{\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right\}^{n-1} =$$

$$= 2^{\alpha-1} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{\alpha n}}}{2^{\alpha-1} - 1} \le \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}.$$

Daná řada tedy konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \le 1$.

(f) Jestliže využijeme odhadu $\ln t \le t$ $\forall t > 0$ dostaneme, že $\frac{1}{\ln n} \ge \frac{1}{n}$. Poněvadž je řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní, diverguje i daná řada.

Poznámka: Použitím stejného odhadu dostaneme, že

$$n \geq \ln n \geq \ln\ln n \geq \ln\ln\ln n \geq \dots$$

a odtud plyne, že všechny řady tvaru

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}\,, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln\ln n}\,, \quad \sum_{n=16}^{\infty} \frac{1}{\ln\ln\ln n}\,, \dots$$

divergují. Jsou to mimo jiné ukázky řad s nezápornými členy, pro něž $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, i když tyto řady divergují.

(g) Využitím odhadu $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ (viz poznámka k příkladu c)) dostaneme, že $\sin\frac{x}{n} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{n}$, $n \geq 2$ a daná řada tedy diverguje.

(h) Je

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n-1)!!\,(2n)!!} = \frac{(n!)^2}{2^n\, n!\,(2n-1)!!} = \frac{n!}{2^n (2n-1)!!} < \frac{1}{2^n}$$

a daná řada konverguje.

(i) Poněvadž platí $\ln n \leq n$, $n \in \mathbf{N}$, dostaneme, že $a_n \leq 2q^n$ a daná řada konverguje.

(j) Jestliže označíme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů dané řady, je $\{s_n\}$ rostoucí a $0 < a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \geq 2$. Napišme řadu analogicky jako v příkladu e)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\ln n} = \frac{1}{2\,\ln 2} + \left\{\frac{1}{3\,\ln 3} + \frac{1}{2^2\,\ln 2^2}\right\} + \left\{\frac{1}{5\,\ln 5} + \frac{1}{6\,\ln 6} + \frac{1}{7\,\ln 7} + \frac{1}{2^3\,\ln 2^3}\right\} + \dots$$

Potom platí

$$s_1 = s_{2^0} = \frac{1}{2\,\ln 2}\,, \quad s_{2^1} \geq s_{2^0} + 2 \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 2\ln 2} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \ln 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \ln 2}.$$

Odtud indukcí dostaneme, že

$$s_{2^n} \geq \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \ln 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \ln 2} + \dots + \frac{1}{2 \cdot (n+1) \cdot \ln 2}.$$

Poněvadž řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2(k+1)\ln 2}$ diverguje, diverguje i řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$.

(k) Platí

$$\{\ln n\}^{\ln n} = e^{\ln n\,\ln\ln n} = e^{\ln[n^{\ln\ln n}]} = n^{\ln\ln n}$$

a tedy $a_n = \frac{1}{n^{\ln\ln n}} < \frac{1}{n^2} \ \forall n \geq 1619 = [\,e^{e^2} + 1\,]$ a daná řada konverguje.

Poznámka: Analogicky, je-li

$$a_n = \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}} < \frac{1}{n^2} \ \ \forall n \geq n_0 = \left[e^{e^{e^2}} + 1\right],$$

tedy řady typu $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln\dots\ln n)^{\ln n}}$ jsou všechny konvergentní.

Obecněji: je-li $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n > 2$, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ konverguje. (Stačí dokonce $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n > 1$).

(l) Analogickým obratem jako v předchozím cvičení dostaneme, že

$$\{\ln n\}^{\ln\ln n} = e^{(\ln\ln n)^2}.$$

L'Hôspitalovým pravidlem ukážeme, že $(\ln\ln n)^2 \le \ln n \;\; \forall\, n \ge n_0$. Jestliže se chceme vyhnout l'Hôspitalovu pravidlu, můžeme postupovat následovně: v důkazu cvičení 2.2.7g) (Sem. z mat. analýzy I.) je vlastně dokázáno (pro pevné $p > 0$):

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, x_0 > 0 \quad \forall\, x > x_0 \implies \ln^p x < \varepsilon x.$$

Položme $p = 2$. K $\varepsilon = 1$ najdeme $x_0(\varepsilon)$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, existuje index $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tak, že $\ln n > x_0$ pro všechna $n \ge n_0$. Tedy

$$\forall\, n \ge n_0 \;\text{ je }\; \ln^2(\ln n) = (\ln\ln n)^2 < \ln n$$

a odtud

$$a_n = \frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}} \ge \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}.$$

Daná řada diverguje.

(m) Je-li $p \le 0$, není splněna nutná podmínka konvergence a řada tedy diverguje.
Pro $p > 0$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^p}{n} = 0$, (l'Hôspitalovým pravidlem) tedy $(\ln n)^p \le n \;\; \forall\, n \ge n_0$ a daná řada diverguje.

(n) Stejným způsobem jako v předchozím příkladu ukážeme, že

$$a_n \le \frac{n^\varepsilon}{\sqrt[4]{n^5}} \;\; \forall\,\varepsilon > 0\,, \;\; \forall \ge n_0(\varepsilon),$$

tedy $a_n \le \frac{1}{n^{5/4-\varepsilon}}$. Zvolíme-li $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\frac{5}{4} - \varepsilon > 1$, neboli $\varepsilon < \frac{1}{4}$, dostaneme, že daná řada konverguje.

Poznámka: Stejného výsledku dosáhneme použitím integrálního kritéria, které bude uvedeno později.

(o) Poněvadž platí

$$\ln\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right) \le \sin\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}, \;\text{ je tedy }\; a_n \le \frac{1}{n(n + \ln^2 n)} \le \frac{1}{n^2}$$

a daná řada konverguje.

(p) Odvodíme si nejdříve vyjádření logaritmu s libovolným základem pomocí přirozeného logaritmu. Je-li $y = \log_a x$, pak $a^y = x$, tedy $y \ln a = \ln x$, neboli $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Pomocí tohoto vyjádření dostaneme

$$a_n = \frac{\ln\left(1 + \frac{\sqrt[n]{3}}{n}\right)}{n \,\ln 2} \le \frac{\sqrt[n]{3}}{n^2 \ln 2} \le \frac{3}{n^2 \ln 2}$$

a daná řada konverguje.

(q) Poněvadž argument arctg nabývá pouze dvou hodnot 1 a 5, je

$$\text{arctg}\,[\,3 + (-1)^n \cdot 2\,] \ge \text{arctg}\; 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Odtud tedy plyne, že

$$a_n \ge \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\pi}{4}\,\text{tg}\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{\pi}{4n}$$

a daná řada diverguje.

3. Užitím 1. srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ $\left[\text{diverguje, } \ a_n \geq \frac{1}{n}\right]$

(b) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{n^2}\right]$

(c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}\right]$

(d) $a_n = \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ $\left[\text{diverguje, } \ a_n \geq \frac{1}{n}\right]$

(e) $a_n = \frac{1}{(2n+1)^2-1}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{n^2}\right]$

(f) $a_n = \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{n^2}\right]$

(g) $a_n = \frac{\sin^4 2n}{(n+1)(n+2)}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{n^2}\right]$

(h) $a_n = \frac{n \sin^2 2n}{\sqrt{n^5+3}}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}\right]$

(i) $a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{\pi}{2n^2}\right]$

(j) $a_n = \frac{\operatorname{arctg}(n^2+2n)}{3^n+n^2}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{\pi}{2\cdot 3^n}\right]$

(k) $a_n = \frac{\pi - \operatorname{arctg} n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{\pi}{n^3}\right]$

(l) $a_n = \sin \frac{3+(-1)^n}{n^2}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{4}{n^2}\,; \ \text{užijte odhadu } \ \sin t \leq t \ \ \forall\, t \geq 0\right]$

(m) $a_n = \frac{3-2\cos(2\pi n/3)}{n^2\cdot 2^n}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}\right]$

(n) $a_n = \frac{n^2+3}{n^3[\,3-2\sin(\pi n/3)]}$ $\left[\text{diverguje, } \ a_n \geq \frac{1}{(3+\sqrt{3})n}\right]$

(o) $a_n = \frac{1}{7^n+n}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{7^n}\right]$

(p) $a_n = \frac{2^n+1}{5^n+1}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq 2\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$

(q) $a_n = \frac{1}{4\cdot 2^n-3}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{3\cdot 2^n}\right]$

(r) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{n}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{\pi}{n^{3/2}}\,; \ \text{užijte odhadu } \ \sin t \leq t \ \ \forall\, t \geq 0\right]$

(s) $a_n = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$ $\left[\text{diverguje, } \ a_n \geq \frac{\pi}{4n}\,; \ \text{užijte odhadu } \ \operatorname{tg} t \geq t\,,\ t \in \left(0 \frac{\pi}{2}\right)\right]$

(t) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ $\left[\ \text{diverguje, } \ a_n \geq \frac{\pi}{8n}\,; \ \text{užijte odhadu } \ \frac{\pi}{4} t \leq \operatorname{arctg}\, t\,, t \in \langle 0,1\rangle\right]$

(u) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \arcsin \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$
$\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{\pi}{2n^{17/15}}\,; \ \text{užijte odhadu } \ \arcsin t \leq \frac{\pi}{2} t\,,\ t \in \langle 0,1\rangle\right]$

(v) $a_n = n \operatorname{tg} \frac{n+2}{n^2+2}$ $\left[\text{diverguje, } \ a_n \geq \frac{1}{2} \ \ \forall\, n \geq 2\,; \ \text{užijte odhadu } \ \operatorname{tg} t \geq t\,,\ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right]$

(w) $a_n = \ln \frac{n^2+4}{n^2+3}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{n^2}\right]$

(x) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{4}{n^{3/2}}\right]$

V úlohách (w) a (x) užijte odhadu $\ln(1+t) \leq t \ \ \forall\, t > 0$.

(y) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}$ $\left[\text{konverguje, } \ a_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}\,; \ \text{užijte skutečnosti } \ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq 1\right]$

(z) $a_n = \frac{\cos^4\left(\frac{2n}{n+1}\right)}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$ $\left[\text{diverguje, } \ a_n \geq \frac{\cos^4(8/5)}{4n}\,;\right.$
$\left.\text{najděte } n \ \text{ tak, aby } \ \left|\frac{2n}{n+1} - \frac{\pi}{2}\right| \ \text{ bylo nejmenší}\right]$

4. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řada s kladnými členy. Jestliže existují konstanty $\alpha > 0$ a β tak, že $\alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta \ \ \forall\, n \geq n_0$, pak dané řady buď zároveň konvergují nebo zároveň divergují (2. srovnávací kritérium).

Důkaz: Poněvadž pro $n \geq n_0$ platí $\alpha \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \beta$, dostaneme, že

$$\alpha\, b_n \leq a_n \leq \beta\, b_n \quad \forall n \geq n_0$$

a výsledek plyne z 1. srovnávacího kritéria.

5. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řada s kladnými členy. Je-li $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, pak z konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Je-li $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, pak z konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (limitní tvar 2. srovnávacího kritéria).

Důkaz: Nechť $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} < \infty$. Potom je posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ shora omezená, tedy existuje $\beta > 0$ tak, že $\frac{a_n}{b_n} \leq \beta$, neboli $a_n \leq \beta\, b_n \ \ \forall n \in \mathbf{N}$. Z prvého srovnávacího kritéria tedy plyne první tvrzení.
Je-li $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} > 0$, pak existuje $\alpha > 0$ a index n_0 tak, že $\frac{a_n}{b_n} \geq \alpha \ \ \forall n \geq n_0$, neboli $a_n \geq \alpha\, b_n$ a druhé tvrzení plyne opět ze cvičení 1.

Poznámky: (i.) Z důkazu předchozího cvičení plyne, že pokud je $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, pak z divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ a je-li $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, pak z divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii.) Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ a je $0 < A < \infty$, pak řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ zároveň konvergují nebo divergují. Posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ je totiž shora omezená a existuje $\alpha > 0$ tak, že $\frac{a_n}{b_n} \geq \alpha \ \ \forall n \geq n_0$.

6. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \frac{1}{(a+bn)^s}$, $b > 0, s \in \mathbf{R}$	b) $a_n = 1 - \cos\frac{x}{n}$, $x \in \mathbf{R}$
c) $a_n = \frac{e^n + n^4}{3^n + \ln^2(n+1)}$	d) $a_n = \frac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2\ln 2}$
e) $a_n = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$	f) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2-1}}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$
g) $a_n = \left\{1 - \sqrt[3]{\frac{n-1}{n+1}}\right\}^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$	h) $a_n = \arcsin\frac{(\sqrt{n}+1)^3}{n^3+3n+2}$
i) $a_n = \sqrt{\frac{n-1}{n^2+1}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}$	j) $a_n = \frac{\arcsin\frac{n+1}{2n}}{\sqrt[4]{3n^4+2}}$
k) $a_n = \left(1 - \frac{\alpha \ln n}{n}\right)^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$.	

Řešení:

(a) Jestliže zvolíme $b_n = \frac{1}{n^s}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n}{a+bn}\right\}^s = \frac{1}{b^s}$$

a řada konverguje pro $s > 1$ a diverguje pro $s \leq 1$.

(b) Pro a_n platí podle poznámky k příkladu 2(c)

$$a_n = \frac{\sin^2 \frac{x}{n}}{1 + \cos \frac{x}{n}} \le \frac{\frac{x^2}{n^2}}{1 + \cos \frac{x}{n}}$$

a zvolíme-li $b_n = \frac{1}{n^2}$, dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{x^2}{2}$ a řada konverguje.

(c) Položíme-li $b_n = \left(\frac{e}{3}\right)^n$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^n+n^4}{e^n}}{\frac{3^n+\ln^2(n+1)}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{n^4}{e^n}}{1 + \frac{\ln^2(n+1)}{3^n}} = 1$$

a daná řada konverguje.

(d) Položme $b_n = \frac{\ln n}{n^2}$. Potom je $\frac{\ln n}{n^2} \le \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ a podle cvičení 2(n) je řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ konvergentní. Dále

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n+\sin n}{\ln n}}{\frac{n^2+2\,\ln 2}{n^2}} = 1$$

a daná řada konverguje.

(e) Přepišme a_n do tvaru $a_n = \frac{4}{n^\alpha(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$. Potom pro $b_n = \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = 2,$$

tedy daná řada konverguje pro $\alpha > \frac{1}{2}$ a diverguje pro $\alpha \le \frac{1}{2}$.

(f) Jestliže a_n upravíme analogicky jako v předchozím cvičení, dostaneme

$$a_n = \frac{n+1}{n^\alpha \left\{ \sqrt[3]{(n^2+n)^2} + \sqrt[3]{(n^2+n)(n^2-1)} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2} \right\}}$$

a pro $b_n = \frac{1}{n^{\alpha+1/3}}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}(n+1)}{\sqrt[3]{(n^2+n)^2} + \sqrt[3]{(n^2+n)(n^2-1)} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}} = \frac{1}{3}.$$

Daná řada tedy konverguje pro $\alpha > \frac{2}{3}$ a diverguje pro $\alpha \le \frac{2}{3}$.

(g) a_n přepíšeme do tvaru

$$a_n = \left\{ \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}}{\sqrt[3]{n+1}} \right\}^\alpha = \left\{ \frac{2}{\sqrt[3]{n+1}(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n-1)^2})} \right\}^\alpha$$

a pro $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha$. Daná řada tedy konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \le 1$.

(h) Podle poznámky ke cvičení 2(c) platí

$$a_n \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(\sqrt{n}+1)^3}{n^3+3n+2} \quad \text{a pro } b_n = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ platí } \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n}+1)^3}{n^3+3n+2} = \frac{\pi}{2},$$

tedy daná řada konverguje.

(i) Podle stejné poznámky platí

$$a_n \geq \sqrt{\frac{n-1}{n^2+1}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}.$$

Jestliže položíme $b_n = \frac{1}{n^{5/6}}$, je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n-1}{n^2+1}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n^{\frac{5}{6}}(n+1)}{\sqrt[3]{n^4+4}} = \frac{\pi}{4}$$

a daná řada diverguje.

(j) Odhadneme-li a_n podle poznámky 2c), platí $a_n \geq \frac{n+1}{2n\sqrt[4]{3n^4+2}}$ a pro $b_n = \frac{1}{n}$ dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2\sqrt[4]{3n^4+2}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$, tedy daná řada diverguje.

(k) Položme $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \left(1 - \frac{\alpha \ln n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\alpha \ln n + n \ln\left(1-\frac{\alpha \ln n}{n}\right)}.$$

Jestliže si napíšeme limitu exponentu, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\alpha \ln n + n \ln\left(1 - \frac{\alpha \ln n}{n}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty} n \left\{\frac{\alpha \ln n}{n} + \ln\left(1 - \frac{\alpha \ln n}{n}\right)\right\} = \left|\, \frac{1}{n} = t \,\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{-\alpha t \ln t + \ln(1+\alpha t \ln t)}{t} = \left| \begin{array}{c} \text{l'Hôsp.} \\ \text{prav.} \end{array} \right| = \lim_{t\to 0_+} \frac{-\alpha \ln t - \alpha + \frac{\alpha \ln t + \alpha}{1+\alpha t \ln t}}{1} =$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{-\alpha \ln t - \alpha - \alpha^2 t \ln^2 t - \alpha^2 t \ln t + \alpha \ln t + \alpha}{1+\alpha t \ln t} = \lim_{t\to 0_+} \frac{-\alpha^2 t \ln t(\ln t + 1)}{1+\alpha t \ln t} = 0\,,$$

vzhledem k tomu, že

$$\lim_{t\to 0_+} t \ln t = \lim_{t\to 0_+} \frac{\ln t}{t^{-1}} = \lim_{t\to 0_+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0\,.$$

Odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = e^0 = 1$ a daná řada konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

7. Užitím 2. srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{n+3}{n^3+2n^2+n+1}$ $\quad\left[\text{konverguje},\ b_n = \frac{1}{n^2}\right]$

(b) $a_n = \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$ $\quad\left[\text{konverguje},\ b_n = \frac{1}{n^2}\right]$

(c) $a_n = \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$ $\quad\left[\text{diverguje},\ b_n = \frac{1}{n}\right]$

(d) $a_n = \frac{n-\sqrt[3]{n}}{n^3-n}$ $\quad\left[\text{konverguje},\ b_n = \frac{1}{n^2}\right]$

(e) $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n^2+4)}}$ $\quad\left[\text{konverguje},\ b_n = \frac{1}{n^{4/3}}\right]$

(f) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$ $\quad\left[\text{diverguje},\ b_n = \frac{1}{n};\ \text{odstaňte rozdíl v čitateli}\right]$

(g) $a_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$
$\quad\left[\text{diverguje},\ b_n = \frac{1}{n};\ \text{postupujte jako ve cvičení (f)}\right]$

(h) $a_n = \frac{n2^n+5}{n3^n+4}$ $\quad\left[\text{konverguje},\ b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

(i) $a_n = \frac{\cos(\pi/4n)}{\sqrt[5]{2n^5-1}}$ $\big[$diverguje, $b_n = \frac{1}{n}\big]$

(j) $a_n = 1 - \cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}$ $\big[$konverguje, $b_n = \frac{1}{n^{4/3}}$; užijte cvičení 5(b)$\big]$

(k) $a_n = \frac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)}$ $\Big[$diverguje, $b_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; užijte cvičení 2(j)$\Big]$

(l) $a_n = \sqrt{n + \operatorname{arctg} n^\alpha} - \sqrt{n}$

$\big[b_n = \frac{1}{n^{1/2-\alpha}}$; konverguje pro $\alpha < -\frac{1}{2}$ a diverguje pro $\alpha \geq -\frac{1}{2}$; odstraňte rozdíl odmocnin a využijte odhadu z poznámky 2(c)$\big]$

(m) $a_n = \sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+6}$

$\big[$konverguje pro $a = \frac{1}{2}$; $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$; diverguje pro $n \neq \frac{1}{2}$; $b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$; doplňte daný rozdíl na $\alpha^4 - \beta^4\big]$

8. Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s kladnými členy a nechť existuje index n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Potom z konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a z divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (3. srovnávací kritérium).

Důkaz: Protože pro všechna $n \geq n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, plyne odtud, že $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$ $\forall\, n \geq n_0$ a tedy posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ je monotonní pro $n \geq n_0$. Jestliže položíme $\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} = \beta$, je $\frac{a_n}{b_n} \leq \beta$ $\forall\, n \geq n_0$ a odtud $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{b_n} < \infty$. Tvrzení nyní plyne ze druhého srovnávacího kritária.

9. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy a nechť $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Důkaz: Označme $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Poněvadž je $\{s_n\}$ neklesající, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Stejnou limitu má i každá vybraná posloupnost. Dále platí

$$s_{2^k} - s_{2^{k-1}} = a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}$$

a vzhledem k monotonnosti posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je

$$2^{k-1} a_{2^k} \leq s_{2^k} - s_{2^{k-1}} \leq 2^{k-1} a_{2^{k-1}} \text{ pro } k \in \mathbf{N}.$$

Sečtením těchto nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n$ dostaneme

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} (s_{2^k} - s_{2^{k-1}}) = s_{2^n} - a_1 \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2^{k-1}}.$$

Výsledek nyní plyne z prvého srovnávacího kritéria.

10. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy a nechť $a_1 > 0$. Potom platí:

a) Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$. $\left[s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right]$

b) Pro $\alpha \leq 1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^\alpha}$ konverguje právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz: α) Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tedy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \in (0,+\infty)$. Poněvadž je $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupnost kladných čísel, konverguje také posloupnost $\{s_n^{-\alpha}\}_{n=1}^{\infty}$ a je tedy omezená. Existuje tudíž číslo $K(\alpha)$ tak, že

$$\frac{1}{s_n^{\alpha}} \le K(\alpha) \ \ \forall n \in \mathbf{N}. \text{ Potom } \frac{a_n}{s_n^{\alpha}} \le K(\alpha)\cdot a_n \ \ \forall n \in \mathbf{N},$$

tedy podle cvičení 1. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^{\alpha}}$ konverguje.

β) Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Pro $\alpha \le 0$ platí

$$a_n = \frac{a_n}{s_n^{\alpha}}\cdot s_n^{\alpha} \le \frac{a_n}{s_n^{\alpha}}\cdot s_1^{\alpha}, \ \text{ neboli } \ \frac{a_n}{s_n^{\alpha}} \ge \frac{a_n}{s_1^{\alpha}} \ \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Podle cvičení 1. tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^{\alpha}}$ diverguje. Pro $\alpha \in (0,1\rangle$ budeme postupovat sporem. Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^{\alpha}}$ konverguje. Podle Bolzano-Cauchyovy podmínky tedy platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \ge n_0 \ \forall p \in \mathbf{N} \Longrightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}^{\alpha}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{s_{n+p}^{\alpha}} \right| < \varepsilon.$$

Speciálně platí tento vztah pro $n = n_0$. Tedy pro všechna $p \in \mathbf{N}$ je

$$\varepsilon > \frac{a_{n_0+1}}{s_{n_0+1}^{\alpha}} + \cdots + \frac{a_{n_0+p}}{s_{n_0+p}^{\alpha}} \ge \frac{1}{s_{n_0+p}^{\alpha}}\left(s_{n_0+p} - s_{n_0}\right) = s_{n_0+p}^{1-\alpha} - s_{n_0} s_{n_0+p}^{-\alpha}\,.$$

Limita tohoto výrazu je pro $\alpha = 1$ rovna 1 (pro $p \to \infty$), pro $\alpha \in (0,1)$ je $+\infty$. V každém případě dostáváme pro $\varepsilon \in (0,1)$ spor.

γ) Buď $\alpha = 2$. Protože $s_{k-1} \le s_k$, dostáváme $s_{k-1}s_k \le s_k^2$ a tedy

$$\frac{a_k}{s_k^2} \le \frac{a_k}{s_{k-1}s_k} = \frac{s_k - s_{k-1}}{s_k s_{k-1}} = \frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k} \ \ \forall k \in \mathbf{N}.$$

Odtud plyne, že

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s_k^2} \le \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k}\right) = \frac{2}{a_1} - \frac{1}{s_n} < \frac{2}{a_1}$$

a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ konverguje.

Je-li $\alpha \ge 2$, pak

$$\frac{a_n}{s_n^{\alpha}} = \frac{a_n}{s_n^2}\cdot s_n^{2-\alpha} \le s_1^{2-\alpha}\cdot\frac{a_n}{s_n^2} \ \ \forall n \in \mathbf{N}$$

a podle cvičení 1. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^{\alpha}}$ konverguje.

δ) V obecném případě $\alpha > 1$ označíme $\alpha = 1+\varepsilon$, kde $\epsilon > 0$. Protože funkce $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}x^{\varepsilon} + \frac{1}{x}$ je rostoucí na intervalu $\langle 1,+\infty)$ platí

$$\frac{1}{\varepsilon} + 1 \le \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{s_k}{s_{k-1}}\right)^{\varepsilon} + \frac{s_{k-1}}{s_k}.$$

Odtud

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{s_k^{\varepsilon}}+\frac{s_k}{s_k^{1+\varepsilon}}\le\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{s_{k-1}^{\varepsilon}}+\frac{s_{k-1}}{s_k^{1+\varepsilon}}\ \text{ a tedy }\ \frac{a_k}{s_k^{1+\varepsilon}}=\frac{s_k-s_{k-1}}{s_k^{1+\varepsilon}}\le\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{s_{k-1}^{\varepsilon}}-\frac{1}{s_k^{\varepsilon}}\right).$$

Odtud plyne jako v bodu γ), že

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s_k^{1+\varepsilon}}\le\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{a_1^{\varepsilon}}\quad\forall\, n\in\mathbf{N},$$

a tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n^{1+\varepsilon}}$ konverguje pro $\varepsilon>0$.

Poznámka: Body γ) a δ) z předchozího důkazu platí pro libovolnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – konvergentní i divergentní. Bod γ) důkazu je zbytečný, ale použitá nerovnost je daleko názornější než nerovnost z bodu δ).

11. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ řada s kladnými členy, $\alpha\in\mathbf{R}$. Potom platí:

a) Pro $\alpha>1$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^{\alpha}a_n}$ konverguje.

b) Pro $\alpha\in(0,1\rangle$ platí implikace: je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergentní, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^{\alpha}a_n}$.

c) Pro $\alpha\le0$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^{\alpha}a_n}$ konverguje právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Důkaz: α) Pro všechna $n\in\mathbf{N}$ je

$$\frac{a_n}{1+n^{\alpha}a_n}\le a_n\ \text{ a }\ \frac{a_n}{1+n^{\alpha}a_n}\le\frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Odtud plyne bod a) a b) a implikace bodu c)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^{\alpha}a_n}$ konverguje.

β) Buď $\alpha\le0$ a nechť konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^{\alpha}a_n}$. Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}\,a_n}{1+n^{\alpha}\,a_n}=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+n^{\alpha}\,a_n}=0.$$

Proto platí $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}a_n=0$, tj. $\{n^{\alpha}a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost. Existuje tedy číslo $K>0$ tak, že $1+n^{\alpha}a_n\le1+K$ pro všechna $n\in\mathbf{N}$. Tedy

$$\frac{a_n}{1+n^{\alpha}a_n}\ge\frac{a_n}{1+K}\quad\forall\, n\in\mathbf{N}$$

a podle cvičení 1. konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Poznámka: Obrácená implikace neplatí. Buď $\alpha\in(0,1\rangle$. Stejně jako v bodu 2. se ukáže, že platí: Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^{\alpha}a_n}$ konverguje a posloupnost $\{n^{\alpha}a_n\}$ je omezená (což se zapisuje

$n^\alpha a_n = O(1)$ nebo $a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$), pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. U řad, které nesplňují podmínku $a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ (tzv. podmínka Tauberova typu), se může stát, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^\alpha a_n}$ konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. Buď $m \in \mathbf{N}$. Položme $a_n = \frac{1}{k}$, pro $n = k^m$, $k = 1, 2, 3, \dots$, $a_n = 0$ jinak. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{2^m - 2\, nul} + \frac{1}{2} + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{3^m - 2^m - 1\, nul} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \dots$$

diverguje a $a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ právě když $\alpha \leq \frac{1}{m}$. Pro $n = k^m$, $k \in \mathbf{N}$ je

$$b_n = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + k^{m\alpha - 1}} = \frac{1}{k + k^{m\alpha}}, \quad b_n = 0 \text{ pro ostatní } n.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje právě tehdy, když $m\alpha > 1$. Položme $m = \left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1$. Tím jsme sestrojili protipříklad na implikaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

Tento protipříklad funguje pro každé $\alpha \in \left(\frac{1}{m}, 1\right\rangle$. Kdybychom řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ „rozředili“ nulami ještě více, dostaneme protipříklad pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$. Vyzkoušejte $a_n = \frac{1}{k}$ pro $n = k!$, $a_n = 0$ pro ostatní n.

12. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy. Jestliže existuje číslo $q < 1$ a index n_0 tak, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \;\forall n \geq n_0$, pak daná řada konverguje.
Jestliže nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ platí pro nekonečně mnoho indexů n, pak řada diverguje. (Cauchyovo kritérium).

Důkaz: Nechť platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \;\forall n \geq n_0$. Potom $a_n \leq q^n$ a podle prvého srovnávacího kritéria je řada konvergentní.

Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho indexů n, pak $a_n \geq 1$ pro nekonečně mnoho indexů n a není splněna podmínka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Řada tedy diverguje.

13. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy. Je-li $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak daná řada konverguje, je-li $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada diverguje. (Limitní Cauchyovo kritérium).

Důkaz: Označme $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \alpha < 1$. Potom k libovolnému číslu q takovému, že $\alpha < q < 1$ existuje index n_0 tak, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q \;\forall n \geq n_0$. Podle předchozího cvičení je tedy daná řada konvergentní.

Jestliže $\alpha > 1$. potom nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ platí pro nekonečně mnoho indexů n a daná řada diverguje.

Poznámka: Je-li $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \alpha = 1$, může řada konvergovat i divergovat. Stačí uvážit řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. V obou případech je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ a jak již víme, prvá řada diverguje, druhá konverguje.

14. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy. Jestliže existuje číslo $q \in (0,1)$ a index n_0 tak, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ pro všechna $n \geq n_0$, je daná řada konvergentní.
Jestliže $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pro $n \geq n_0$, řada diverguje. (D'Alembertovo kritérium).

Důkaz: Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, potom podle cvičení 2.2.17 (Seminář z matematické analýzy I.) platí $a_{n_0+k} \leq a_{n_0} q^k \;\; \forall\, k \in \mathbf{N}$ a daná řada konverguje.
Je-li $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \;\; \forall\, n \geq n_0$, potom indukcí dokážeme, že $a_{n_0+k} \geq a_{n_0} > 0 \;\; \forall\, k \in \mathbf{N}$ a poněvadž není splněna nutná podmínka konvergence ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), je řada divergentní.

15. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy. Potom platí: Je-li $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, je řada konvergentní, je-li $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, řada diverguje (Limitní d'Alembertovo kritérium).

Důkaz: Je-li $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < 1$, pak k libovolnému číslu q takovému, že $\alpha < q < 1$ existuje index n_0 tak, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \;\; \forall\, n \geq n_0$ a podle předchozího cvičení řada konverguje. Jestliže $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \beta > 1$, pak $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \;\; \forall\, n \geq n_0$ a řada diverguje.

Poznámky: i) Jestliže existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$, pak pro $\alpha < 1$ řada konverguje a pro $\alpha > 1$ diverguje. Případ $\alpha = 1$ je opět nerozhodný. Stačí uvážit stejné příklady jako v poznámce ke cvičení 13.
ii) Jestliže srovnáme cvičení 13 a 15 s cvičením 2.4.22 (Sem. z mat. analýzy I.), je vidět, že Cauchyho kritérium je silnější v tom smyslu, že existují řady, u kterých nelze rozhodnout o jejich konvergenci pomocí d'Alembertova kritéria, ale dá se rozhodnout pomocí Cauchyho kritéria. Jako ukázka slouží řada

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots,$$

kde $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$. Je-li ovšem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, je také $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ a žádné z kritérií nelze použít.

16. Pomocí cvičení 13 nebo 15 rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, jeli

a) $a_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{(2n-1)!!}$, $a > 0$

b) $a_n = \frac{n^5(\sqrt{2}+\sin\sqrt{n})}{2^n+n}$

c) $a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

d) $a_n = \frac{[\,(n+1)!\,]^n}{2!4!\ldots(2n)!}$

e) $a_n = n^{-n/3} \cdot \sqrt[3]{n!+1}$

f) $a_n = \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$

g) $a_n = \frac{x^n}{n^s}$, $x > 0, s \in \mathbf{R}$

h) $a_n = n\mathrm{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$

i) $a_n = \frac{3\cdot 6\cdot\cdots\cdot(3n)}{(n+1)!} \arcsin\frac{1}{2^n}$

j) $a_n = \frac{(2n)!!}{n!} \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3^n}$

k) $a_n = \frac{n! a^n}{n^n}$, $a > 0$

l) $a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{3/2}}$

m) $a_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

n) $a_n = \frac{\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$

o) $a_n = \frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]}{3^n}$

p) $a_n = \frac{1}{2^{(n/2+\varepsilon_n)}.3^{(n/2-\varepsilon_n)}}$, $\varepsilon_n = \frac{1}{4}\{1-(-1)^n\}$

q) $a_n = \left(\frac{x}{\alpha_n}\right)^n$, $x > 0, \alpha_n > 0, \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$

Řešení:

(a) Je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)(a+n)}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{a(a+1)\dots(a+n-1)} = \frac{a+n}{2n+1}$$

a poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$, daná řada konverguje.

(b) Platí

$$a_n \le \frac{n^5(\sqrt{2}+1)}{2^n+n} \le \frac{n^5}{2^n}(\sqrt{2}+1) = b_n.$$

Dále

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^5(\sqrt{2}+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^5(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a podle prvého srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

(c) Je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[\,(n+1)!\,]^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

podle příkladu 2.2.7f) (Sem. z mat. analýzy I.). Tedy daná řada konverguje.

(d) Protože je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[\,(n+2)!\,]^{n+1}}{2!\,4!\,\dots\,(2n)!\,(2n+2)!} \cdot \frac{2!\,4!\,\dots\,(2n)!}{[\,(n+1)!\,]^n} = \frac{[\,(n+1)!(n+2)\,]^n\;(n+2)!}{(2n+2)!\,[\,(n+1)!\,]^n} =$$

$$\frac{(n+2)^n(n+2)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+2)^n}{(n+3)(n+4)\dots(2n+2)} \le \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+2}}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-1} < 1\,.$$

Odtud plyne, že $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ a daná řada konverguje.

(e) Platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[3]{(n+1)!+1}}{(n+1)^{\frac{n+1}{3}}} \cdot \frac{n^{\frac{n}{3}}}{\sqrt[3]{n!+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(n+1)!+1}{(n+1)(n!+1)}}.$$

Dále

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\}^{\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}} \quad \text{a}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(n+1)!+1}{(n+1)(n!+1)}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1+\frac{1}{(n+1)!}}{1+\frac{1}{n!}}} = 1,$$

tedy je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1/3} < 1$ a daná řada konverguje.

Poznámka: Pro $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 4$ platí $1 \le \log_2 n \le n \le 2^n \le n! \le n^n$. Víme již (viz 2.2.7 Sem. z matem. analýzy 1.), že každá následující posloupnost $\left\{a_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ jde do nekonečna řádově rychleji, než předchozí $\left\{a_n^{(k-1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^{(k-1)}}{a_n^{(k)}} = 0$ pro $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Místo limity podílu $\frac{a_n^{(k-1)}}{a_n^{(k)}}$ lze zkoumat konvergenci řady $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{a_n^{(k-1)}}{a_n^{(k)}}$, kde n_0 je vhodné přirozené číslo. Pak řekneme, že $\left\{a_n^{(k)}\right\}$ jde do nekonečna mnohem rychleji než $\left\{a_n^{(k-1)}\right\}$. Druhá a třetí posloupnost nejdou do nekonečna daleko rychleji, než předchozí, čtvrtá, pátá a šestá ano. Buď $\alpha > 0$. Potom je

$$1 \le \log_2^\alpha n \le n^\alpha \le 2^{\alpha n} \le (n!)^\alpha \le n^{\alpha n} \text{ pro } n \ge 4.$$

Pro $\alpha > 1$ jde třetí posloupnost do nekonečna daleko rychleji než druhá, pro $\alpha \in (0, 1\rangle$ ne. Jinak je situace stejná jako pro $\alpha = 1$. Konvergence řady z příkladu e) je podle cvičení 6. ekvivalentní s konvergencí řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{3}}$. Předpokládejme, že v každé skupině posloupností $\{\log_2^\alpha n\}$, $\{n^\alpha\}$, $\{2^{n\alpha}\}$, $\{(n!)^\alpha\}$, $\{n^{n\alpha}\}$ je dáno uspořádání podle růstu $\alpha > 0$. Je-li $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $0 < \beta \le 1$, pak žádná z posloupností $1 \le \log_2^{\alpha_1} n \le$ $\le \log_2^{\alpha_2} n \le n^\beta$ neroste do nekonečna daleko rychleji než předchozí; růsty $\log_2^\alpha n \le n^\beta$ a $n^\alpha \le n^\beta$ jsou daleko rychlejší právě když $\beta > 1$, resp. $\beta > \alpha + 1$. Růsty

$$n^\alpha \le 2^{\beta_1 n} \le 2^{\beta_2 n} \le (n!)^{\gamma_1} \le (n!)^{\gamma_2}$$

jsou daleko rychlejší vždy (tj. pro $\alpha > 0$, $0 < \beta_1 < \beta_2$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2$). Skupiny $\{(n!)^\alpha\}$, $\alpha > 0$ a $\{n^{n\beta}\}$, $\beta > 0$, se bohužel „překrývají“. $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{n^{n\beta}}$ konverguje právě když je $0 < \alpha \le \beta$. Lze sestavit ještě bohatší stupnice.

(f) Je

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{n-1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2n}}} = \frac{n^{1-\frac{1}{n}}}{(2n^2+n+1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}} \le$$

$$\le \frac{n}{\sqrt{2n^2+n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2n]{2n^2+n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

a daná řada konverguje. Podle cvičení 2.2.7e) (Sem. z mat analýzy I.) je totiž $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2n^2+n+1} = 1$.

(g) Platí $\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{n^s}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ a tedy daná řada konverguje pro $x < 1$ a diverguje pro $x > 1$. Je-li $x = 1$, dostaneme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ a ta je podle cvičení 2e) konvergentní pro $s > 1$ a divergentní pro $s \le 1$.

(h) Podle poznámky k cvičení 2c) platí

$$a_n \le n \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^{n-1}} = b_n \text{ a } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ tedy konverguje a podle cvičení 1 konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(i) Opět podle poznámky 2c) je

$$a_n \ge \frac{3 \cdot 6 \dots (3n)}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} = b_n \text{ a } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3n+3}{2(n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2} > 1$$

a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Podle cvičení 1 diverguje tedy i daná řada.

(j) Podle stejné poznámky, jako v předchozím příkladu, platí

$$a_n \le \frac{(2n)!!}{n!} \cdot \frac{1}{3^n} = b_n \text{ a poněvadž } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)!!}{(n+1)!\,3^{n+1}} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{(2n)!!} = \frac{2n+2}{3(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3} < 1,$$

je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a konverguje tedy i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(k) Poněvadž je
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\,a^n} = a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{e},$$
podle cvičení 2.3.1 (Sem. z mat. analýzy I.), platí, že daná řada konverguje pro $a < e$ a diverguje pro $a > e$. Je-li $a = e$, nemůžeme d'Alembertovým kritériem rozhodnout. Podle Raabeho kritéria však daná řada pro $a = e$ diverguje (viz příklad 32b)).

Poznámka: Platí Stirlingova formule
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}\,.$$
Odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ v příkladu k) pro $a = e$ (a tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$ diverguje).

(l) Je
$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{\sqrt{n}} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}+3}}\right)^{\sqrt{n}}.$$
Jestliže vybereme posloupnost $n = k^2$, platí
$$\sqrt[k^2]{a_{k^2}} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k+2}}\right)^{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} < 1$$
a podle poznámky ke cvičení 2.3.1 (Sem. z mat. analýzy I.) je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}$ a daná řada konverguje.

(m) Podle d'Alembertova kritéria dostaneme
$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{3}{2^{2n}}} = \frac{1}{6}\,, \qquad \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \frac{\frac{3}{2^{2n+2}}}{\frac{1}{2^{2n+1}}} = \frac{3}{2},$$
tedy $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2} > 1\,,\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{6} < 1$ a o konvergenci řady nemůžeme rozhodnout. Na druhé straně však platí $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$ a daná řada konverguje.

(n) Snadno zjistíme, že hodnoty $\cos^2 \frac{n\pi}{3}$ jsou 1 pro $n = 3k$ a $\frac{1}{4}$ pro $n = 3k+1$ a $n = 3k+2$. Odtud plyne, že
$$\frac{a_{3n+1}}{a_{3n}} = \frac{1}{8}\,, \qquad \frac{a_{3n+2}}{a_{3n+1}} = \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{a_{3n+3}}{a_{3n+2}} = 2,$$
tedy d'Alembertovo kritérium opět nerozhodne. Je však
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{\cos^2 \frac{\pi n}{3}}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$$
a daná řada konverguje.

(o) Platí
$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{2n} (\sqrt{2}-1)\,,$$
$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{2n+1} (\sqrt{2}+1)$$
a odtud $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty\,,\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$. Na druhé straně je $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^3}\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)}{3}$

a odtud $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$, tedy daná řada konverguje.

Poznámka: Příklady m)-o) potvrzují poznámku 2 ze cvičení 13, tedy, že Cauchyho kritérium je silnější. Jeho nevýhoda spočívá v tom, že se s ním obtížněji počítá.

(p) Jestliže si napíšeme několik prvých členů dané řady, dostaneme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 3} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{2^k\cdot 3^{k-1}} + \frac{1}{2^k\cdot 3^k} + \frac{1}{2^{k+1}\cdot 3^k} + \cdots .$$

Tedy

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{\frac{1}{2^n 3^n}}{\frac{1}{2^n 3^{n-1}}} = \frac{1}{3}\,,\ \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{\frac{1}{2^{n+1} 3^n}}{\frac{1}{2^n 3^n}} = \frac{1}{2}$$

a $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$. Daná řada konverguje.

(q) Platí $\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{\alpha_n}$ a tedy pro $\alpha = +\infty$ je řada konvergentní pro všechna $x > 0$. Je-li $\alpha = 0$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$ a řada diverguje pro všechna $x > 0$. Pro $\alpha \in (0, +\infty)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{\alpha}$ a řada konverguje pro $x \in (0, \alpha)$ a diverguje pro $x \in (\alpha, +\infty)$.

Vyšetření případu $x = \alpha$ je poněkud komplikovanější a ukážeme zde alespoň nutné podmínky konvergence dané řady. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\alpha = 1$. Potom je $a_n = \left(\frac{1}{1+\beta_n}\right)^n$, kde $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Je-li nyní $\beta_n \le 0$ pro nekonečně mnoho indexů n, je řada divergentní, poněvadž $a_n \ge 1$ pro nekonečně mnoho indexů. K tomu, aby řada konvergovala musí tedy platit, že $\beta_n > 0\ \forall n \ge n_0$. Dále musí platit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,, \quad \text{tedy} \quad a_n = \left(\frac{1}{1+\beta_n}\right)^n = (1+\beta_n)^{-n} = \left\{(1+\beta_n)^{\frac{1}{\beta_n}}\right\}^{-n\beta_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} n\beta_n = +\infty$ a posloupnost $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ nesmí konvergovat k 0 příliš rychle. Může tedy být na příklad $\beta_n = n^{-\gamma}$, kde $0 < \gamma < 1$ nebo $\beta_n = \frac{1}{\ln n}$, po případě $\beta_n = \frac{1}{\ln\ln n}$ a podobně. Pro které z těchto hodnot je řada skutečně konvergentní, je ovšem otázka, na kterou se pokusíme odpovědět na konci tohoto paragrafu. (Př. 35a)). Budeme si však muset k tomu odvodit speciální kritérium.

17. Užitím cvičení 13 rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{n}{3^{n/2}}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

(b) $a_n = \frac{2^n}{n^{10}}$ $\left[\text{diverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 2\right]$

(c) $a_n = \left(\frac{10}{11}\right)^n \cdot n^5$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{10}{11}\right]$

(d) $a_n = \left(\frac{11}{10}\right)^n \cdot \frac{1}{n^5}$ $\left[\text{diverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{11}{10}\right]$

(e) $a_n = \frac{n^\alpha}{6^n}\,,\ \alpha \in \mathbf{R}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{1}{6}\right]$

(f) $a_n = \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{1}{2}\right]$

(g) $a_n = n^5\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{3}{4}\right]$

(h) $a_n = \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{1/6}\right]$

(i) $a_n = \frac{n^\alpha}{[\ln(n+1)]^{\frac{n}{2}}}\,,\ \alpha \in \mathbf{R}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 0\right]$

(j) $a_n = n^\alpha q^n\,,\ 0 < q < 1, \alpha \in \mathbf{R}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow q\right]$

(k) $a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{1}{2}\right]$

(l) $a_n = \frac{1}{3^n - n^2}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{1}{3}\right]$

(m) $a_n = a^n \cdot b^n\,,\ a, b > 0$ $\left[\text{konverguje pro } ab < 1\,,\ \text{diverguje pro } ab \geq 1\,,\ \sqrt[n]{a_n} = ab\right]$

(n) $a_n = \arcsin^n \frac{1}{n}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 0\right]$

(o) $a_n = \frac{1}{2^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$ $\left[\text{diverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{e}{2}\right]$

(p) $a_n = \left(\frac{an}{n+2}\right)^n\,,\ a > 0$ $\left[\text{konverguje pro } a < 1\,,\ \text{diverguje pro } a \geq 1\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow a\,;\right.$
$\left.\text{pro } a = 1 \text{ ukažte, že } a_n \longrightarrow e^{-2}\right]$

(q) $a_n = \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e^{-1}\right]$

(r) $a_n = c^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\,,\ c > 0$ $\left[\text{konverguje pro } c < e\,,\ \text{diverguje pro } c \geq e\ \ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{c}{e}\,;\right.$
$\left.\text{pro } c = e \text{ je } \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{e}\,;\ \text{použijte l'Hôspitalova pravidla}\right]$

(s) $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$ $\left[\text{diverguje}\,,\ a_n \longrightarrow e^{-3}\right]$

(t) $a_n = \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$ $\left[\text{diverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 3e^{-1}\right]$

(u) $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e^{-1}\right]$

(v) $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow e^{-2}\right]$

(w) $a_n = \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+3}{2}}}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

18. Užitím cvičení 15 rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{n}{10^n + n}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{10}\right]$

(b) $a_n = \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

(c) $a_n = n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{2};\ \text{užijte odhadu } \sin t \leq t\,,\ \forall\, t \in \langle 0, +\infty)\right]$

(d) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{2}{3}\right]$

(e) $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ $\left[\text{diverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow 4\right]$

(f) $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3 \cdot 4^{3n}}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^3\right]$

(g) $a_n = \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{4}{27}\right]$

(h) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{e}\right]$

(i) $a_n = \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$ $\left[\text{diverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{e}{2}\right]$

(j) $a_n = \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{e}{3}\right]$

(k) $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow 0\right]$

(l) $a_n = \frac{(nx)^n}{n!}\,,\ x > 0$ $\left[\text{konverguje pro } x < \frac{1}{e}\,,\ \text{diverguje pro } x \geq \frac{1}{e}\ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow xe\,;\right.$
$\left.\text{případ } x = e^{-1} \text{ rozhodneme později Raabeovým kritériem}\right]$

(m) $a_n = \frac{2\cdot 5\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\ldots(4n-3)}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{3}{4}\right]$

(n) $a_n = \frac{2\cdot 5\ldots(3n+2)}{2^n(n+1)!}$ $\left[\text{diverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{3}{2}\right]$

(o) $a_n = \frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\ldots(3n+1)}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{2}{3}\right]$

(p) $a_n = \frac{4\cdot 7\cdot 10\ldots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-2)}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{3}{4}\right]$

(q) $a_n = \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\ldots(5n-4)}$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{3}{5}\right]$

(r) $a_n = \left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}\right)\ldots\left(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}\right)$ $\left[\text{konverguje}\,,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \sqrt{2}-1\right]$

19. Nechť $a_n > 0\,,\ a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a buď $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = q$. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje pro $q < \frac{1}{2}$ a diverguje pro $q > \frac{1}{2}$.

Důkaz: Posloupnost $\left\{\frac{a_{2^{k+1}}}{a_{2^k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\left\{\frac{a_{2n}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Odtud plyne, že $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{2^{k+1}}}{a_{2^k}} = q$ a dále $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}a_{2^{k+1}}}{2^k a_{2^k}} = 2q$. Je-li $q < \frac{1}{2}$ (resp. $q > \frac{1}{2}$), pak řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konverguje (resp. diverguje). Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje předpoklady cvičení 3., je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní (resp. divergentní).

20. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy, f nerostoucí funkce na intervalu $\langle 1, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje integrál $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ (Cauchyho integrální kritérium).

Důkaz: Vzhledem k monotonnosti funkce f platí, že

$$a_{k+1} \le f(x) \le a_k \ \text{ pro } \ x \in \langle k, k+1\rangle \ \text{ a } \ \forall\, k \in \mathbf{N}.$$

Tedy

$$a_{k+1} \le \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \le a_k \ \ \forall\, k \in \mathbf{N}$$

a sečtením pro $k = 1, 2, \ldots, n$ dostaneme

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} = s_{n+1} - a_1 \le \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \le s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Označme $F(u) = \int\limits_1^{u} f(x)\,dx$. Protože platí $f(x) \ge 0$, je funkce $F(u)$ neklesající. Odtud plyne existence $\lim\limits_{u\to\infty} F(u) = \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Je-li $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx = +\infty$, pak

$$\lim_{n\to\infty} F(n+1) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = +\infty,$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Je-li $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx = A \in \langle 0, +\infty)$, je posloupnost $\{s_n\}$ neklesající, shora omezená a tedy konvergentní. Dále platí

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx \le s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le a_1 + \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Poznámka: Stačí, když je funkce f nerostoucí a nezáporná na $\langle n_0, +\infty)$ pro jisté $n_0 \in \mathbf{N}$. Tato podmínka je ekvivalentní s tím, že $f(x+n_0-1)$ je nezáporná a nerostoucí na $\langle 1, +\infty)$. Podle předchozího cvičení řada $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+n_0-1}$ konverguje právě když konverguje

$$\int\limits_1^{\infty} f(x+n_0-1)\,dx = \int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx, \text{ kde } a_n = f(n) \ \forall n \ge n_0.$$

Řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergují nebo divergují současně.

21. Pomocí předchozího cvičení rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, $n \ge 2$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

b) $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha (\ln\ln n)^\beta}$, $n \ge 3$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

c) $a_n = \dfrac{\arcsin \frac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$

d) $a_n = \dfrac{\ln\left(1 + \frac{3+(-1)^n \operatorname{arctg} 2n}{n}\right)}{\ln^2 n}$, $n \ge 2$

e) $a_n = n^2 e^{-\sqrt{n}}$

f) $a_n = (3n + n^3)e^{-\sqrt{n}} \ln n$

g) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln \dfrac{n+1}{n-1}$, $n \ge 2$

h) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

Řešení:

(a) (i) Buď $\alpha \le 0$. Potom je $n^\alpha \le 1$, tedy $\frac{1}{n^\alpha} \ge 1$ a odtud $a_n \ge \frac{1}{\ln^\beta n}$. Podle příkladu 2k) řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^\beta n}$ diverguje a diverguje i řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$.

(ii) Nechť $\alpha > 0$ a položme $f(x) = \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x}$. Potom je

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x} - \frac{\beta}{x^{\alpha+1}\ln^{\beta+1} x} = -\frac{1}{x^{\alpha+1}\ln^\beta x}\left(\alpha + \frac{\beta}{\ln x}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\beta}{\ln x} = 0$, je $f'(x) < 0$ pro dostatečně veliká x a f je tedy klesající. Jestliže dále zavedeme substituci $\ln x = t$, je

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} t^{-\beta} e^{(1-\alpha)t} dt.$$

Tento integrál konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha < 1$. Je-li $\alpha = 1$, pak integrál $\int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^\beta}$ konverguje pro $\beta > 1$.

Výsledně dostáváme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje pro $\alpha > 1$ a libovolné β; je-li $\alpha = 1$, pak konverguje pro $\beta > 1$. Pro všechny ostatní hodnoty α, β řada diverguje.

(b) Položíme-li $f(x) = \frac{1}{x \ln^\alpha x \ln^\beta \ln x}$, je

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 \ln^\alpha x \ln^\beta \ln x} - \frac{\alpha}{x^2 \ln^{\alpha+1} x \ln^\beta \ln x} - \frac{\beta}{x^2 \ln^{\alpha+1} x \ln^{\beta+1} \ln x} =$$

$$= -\frac{1}{x^2 \ln^\alpha x \ln^\beta \ln x} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\ln x} + \frac{\beta}{\ln x \ln \ln x} \right\} < 0$$

o všechna dostatečně veliká x. Dále je

$$\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x \ln^\beta \ln x} = \int\limits_{\ln 3}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t},$$

zavedeme-li substituci $\ln x = t$. To je však integrál z předchozího příkladu, tedy daná řada konverguje pro $\alpha > 1$ a libovolné β a je-li $\alpha = 1$, konverguje pro $\beta > 1$. Ve všech ostatních případech diverguje.

(c) Podle poznámky (3) k cvičení 1.9e) platí pro $n \geq 2$

$$a_n \geq \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}} \geq \frac{1}{3n\sqrt{\ln(n+1)}} \geq \frac{1}{3(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ diverguje podle cvičení a) $\left(\alpha = 1\,,\ \beta = \frac{1}{2}\right)$, tedy daná řada diverguje.

(d) Užitím odhadu $\ln(1+t) \leq t$ pro $\forall\, t \geq 0$ dostaneme

$$a_n \leq \frac{3 + (-1)^n \operatorname{arctg} 2n}{n \ln^2 n} \leq \frac{3 + \frac{\pi}{2}}{n \ln^2 n}.$$

Řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ konverguje podle cvičení a) ($\alpha = 1$, $\beta = 2$) a tedy daná řada konverguje.

(e) Označme $f(x) = x^2 e^{-\sqrt{x}}$. Potom platí

$$f'(x) = \left(2x - \frac{x\sqrt{x}}{2}\right) e^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x(4 - \sqrt{x}) e^{-\sqrt{x}} < 0 \ \text{ pro } \ x > 16.$$

Pro integrál $\int\limits_1^{\infty} f(x)\, dx$ platí

$$\int\limits_1^{\infty} x^2 e^{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int_1^{\infty} t^5 e^{-t}\, dt,$$

zavedeme-li substituci $\sqrt{x} = t$. Integrál $\int\limits_1^{\infty} t^5 e^{-t}\, dt$ konverguje a konverguje tedy i daná řada.

(f) Užitím odhadu $\ln n \leq n$ dostaneme

$$a_n \leq n(3n + n^3) e^{-\sqrt{n}} \leq 2n^4 e^{-\sqrt{n}} \ \text{ pro } \ \forall\, n \geq 2.$$

Analogicky jako v předchozím příkladu položíme-li $f(x) = 2x^4e^{-\sqrt{x}}$, platí $f'(x) = x^3(8-\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$ a $f'(x) < 0$ pro $x > 64$. Stejně tak

$$2\int_1^\infty x^4e^{-\sqrt{x}}\,dx = 4\int_1^\infty t^9e^{-t}\,dt$$

a poněvadž tento integrál konverguje, konverguje i daná řada.

Poznámka: V příkladech e) a f) jsme se setkali s problémem zjištění konvergence integrálu $\int_1^\infty t^ne^{-t}\,dt$ pro $n \in \mathbf{N}$. Jestliže využijeme znalosti $\Gamma-$funkce, můžeme psát okamžitě

$$\int_1^\infty t^ne^{-t}\,dt \le \int_0^\infty t^ne^{-t}\,dt = \Gamma(n+1) = n!.$$

O konvergenci daného integrálu se však můžeme přesvědčit rovnou integrací per partes, jestliže si odvodíme rekurentní formuli

$$\mathcal{I}_n = \int_1^\infty t^ne^{-t}\,dt = e^{-1} + n\mathcal{I}_{n-1} \text{ a odtud } \mathcal{I}_n = e^{-1}\sum_{k=0}^n k!\binom{n}{k}.$$

(g) Položme $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x-1}$. Potom je

$$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}(x^2-1)} < 0 \text{ pro } \forall\, x \ge 2,$$

tedy f je klesající funkce. Dále

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x-1}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \frac{1}{\sqrt{x}} & v = \ln\frac{x+1}{x-1} \\ u = 2\sqrt{x} & v' = -\frac{2}{x^2-1} \end{array} \right| =$$

$$= 2\sqrt{x}\ln\frac{x+1}{x-1}\Big|_2^\infty + 4\int_2^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2-1} = -2\sqrt{2}\,\ln 3 + 4\int_2^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2-1},$$

neboť $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\ln\frac{x+1}{x-1} = 0$. To plyne z nerovnosti

$$0 \le \sqrt{x}\,\ln\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{x}\,\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right) \le \frac{2\sqrt{x}}{x-1} \text{ pro } x > 1.$$

Integrál $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx$ vypočteme substitucí $\sqrt{x} = t$. Tento integrál konverguje, poněvadž v jediném kritickém bodě $x = +\infty$ tohoto integrálu platí $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2-1} : \frac{1}{x^{3/2}}\right) = 1$ a $\int_2^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \sqrt{2}$. Odtud plyne, že $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x-1}\,dx$ konverguje a konverguje tedy i daná řada $\sum\limits_{n=2}^\infty a_n$.

(h) Platí

$$a_n \ge \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \text{ a položme } f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right).$$

Potom je $f(x) = g\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x+1}}\right)$, kde $g(t) = t^2 \ln(1+t^3)$. Protože g je rostoucí v $(0,1)$ a $t = \frac{1}{\sqrt[6]{x+1}}$ klesající v $(0,+\infty)$, je f klesající funkce v $(0,+\infty)$. Dále funkce $\ln(1+t)$ je konkávní v intervalu $\langle 0,1\rangle$ a tedy pro $t \in \langle 0,1\rangle$ platí $\ln(1+t) \geq t \ln 2$. Odtud

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx \geq \ln 2 \int_1^\infty (x+1)^{-\frac{5}{6}}\, dx = \ln 2 \left[6(x+1)^{\frac{1}{6}}\right]_1^\infty = +\infty.$$

Integrál diverguje a tedy diverguje i daná řada.

Poznámky: (i) Konvergenci řady $\sum\limits_{n=2}^\infty a_n$ z příkladu 21g) můžeme dokázat podstatně rychleji využitím cvičení 6. Poněvadž je

$$a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \leq \frac{2}{\sqrt{n}(n-1)} \quad \text{pro } \forall\, n \geq 2,$$

stačí volit $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ a výsledek dostaneme rovnou. Tento postup platí obecně. Konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$, $a_n \geq 0$, vyšetříme nejjednodušeji tak, že členy řady $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ odhadneme shora nebo zdola členy řady tvaru $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n \ln^\alpha n}$, $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n \ln n \ln^\alpha \ln n}, \ldots$, které podle Cauchyho integrálního kritéria nebo cvičení 3. konvergují právě když $\alpha > 1$. Přímo takto byly řešeny příklady 21c), d) a v podstatě i h):

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \geq \frac{\ln 2}{(n+1)^{\frac{5}{6}}}$$

a řada $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\ln 2}{(n+1)^{5/6}} = \ln 2 \sum\limits_{n=2}^\infty \frac{1}{n^{5/6}}$ diverguje.

Pokud jde o příklady 21e) a f), stačí uvážit, že podle 2.2.7h) (Sem. z mat. analýzy I.) je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = 0$, tj. existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je

$$\frac{\ln^2 n}{n} \leq \frac{1}{36} \Longleftrightarrow -6 \ln n \geq -\sqrt{n} \Longleftrightarrow e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^6}.$$

Tedy v 21e) $a_n \geq \frac{1}{n^4}$ pro $n \geq n_0$, v 21f) $a_n \leq \frac{2}{n^2}$ pro $n \geq n_0$, a obě řady $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$ i $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{2}{n^2}$ konvergují.

Ještě naznačíme důkaz 21a): Je-li $\alpha = 1$, pak řada $\sum\limits_{n=2}^\infty \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = \sum\limits_{n=2}^\infty a_n$ konverguje právě když $\beta > 1$. Je-li $\alpha > 1$, pak

$$a_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} \Longleftrightarrow \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}} \ln^\beta n} = \left[\frac{\ln^{-\frac{2\beta}{\alpha-1}} n}{n}\right]^{\frac{\alpha-1}{2}} \leq 1,$$

což platí pro všechna $n > n_0$, neboť podle cvičení 2.2.7h) je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^p n}{n} = 0$ pro všechna $p \in \mathbf{R}$. Je-li $\alpha < 1$, pak ze stejných důvodů $a_n \geq \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ pro $n > n_0$. Řada $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha < 1$.

(ii) Jaký je vztah mezi kritérii ze cvičení 9 a 20? Buď f nezáporná a nerostoucí na $\langle 1,\infty)$, $a_n = f(n)$. Ze cvičení 9 a 20 plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n}$ konverguje právě když konverguje integrál $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$. Zdálo by se tedy, že obě kritéria jsou stejně účinná. (Samozřejmě se může stát, že nerozhodneme o konvergenci $\sum\limits_{n=1}^\infty 2^n\, a_{2^n}$ nebo $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$.) Integrální kritérium je však silnější z toho zvláštního důvodu, že se v něm navíc užívá pojmu integrálu. Buď

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ pro } x \in \langle 1, 2\rangle\,,$$

$$f(x) = \frac{1}{x\,\log_2 x} \text{ pro } x \in \langle 2, 2^2\rangle,$$

$$f(x) = \frac{1}{x\,\log_2 x\,\log_2\log_2 x} \text{ pro } x \in \langle 2^2, 2^{2^2}\rangle,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(x) = \frac{1}{x\,\log_2 x \dots \underbrace{(\log_2 \dots \log_2 x)}_{k-krát}} \text{ pro } x \in \langle u_k, u_{k+1}\rangle\,,\ k \in \mathbf{N},$$

kde $u_0 = 1$, $u_k = 2^{u_{k-1}}$, $k \in \mathbf{N}$. Potom je f spojitá, kladná a klesající na $\langle u_{k-1}, u_k\rangle$ pro každé $k \in \mathbf{N}$, tedy f je spojitá, kladná a klesající v celém intervalu $\langle 0, \infty)$. Buď $n \in \langle u_{k-1}, u_k\rangle$, $k \in \mathbf{N}$. Potom je $2^n \in \langle u_k, u_{k+1}\rangle$ a

$$2^n\, a_{2^n} = \frac{2^n}{2^n\,\log_2 2^n \dots \underbrace{(\log_2 \dots \log_2 2^n)}_{k-krát}} = \frac{1}{n \dots \underbrace{(\log_2 \dots \log_2 n)}_{(k-1)-krát}} = a_n.$$

Tedy $\sum\limits_{n=1}^\infty 2^n\, a_{2^n} = \sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ a kritérium z cvičení 9 o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ nerozhodne. Platí však

$$\int\limits_1^2 f(x)\,dx = \int\limits_1^2 \frac{dx}{2} = \ln 2\,,$$

$$\int\limits_{u_k}^{u_{k+1}} f(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} t = \log_2 x, & x = 2^t \\ t \in \langle u_{k-1}, u_k\rangle, & dx = 2^t\,\ln 2\,dt \end{array} \right| = \ln 2 \int\limits_{u_{k-1}}^{u_k} f(t)\,dt.$$

Tedy

$$\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{u_{k-1}}^{u_k} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty b_k$$

a řada $\sum\limits_{k=1}^\infty b_k$ konverguje podle cvičení 15, protože $\frac{b_{k+1}}{b_k} = \ln 2 < 1$. Podle Cauchyho integrálního kritéria je tedy řada $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ konvergentní.

22. Pomocí cvičení 20 rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{1}{(n\,\ln n)^\alpha}$, $n \geq 2, \alpha \in \mathbf{R}$ [konverguje pro $\alpha > 1$]

(b) $a_n = \frac{1}{n\,\ln^\alpha n}$, $n \geq 2, \alpha \in \mathbf{R}$ [konverguje pro $\alpha > 1$]

(c) $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ [konverguje; ve cvičeních a)-c) využijte cvičení 21a)]

(d) $a_n = n^2 e^{-n}$ $\left[\text{konverguje; vypočtěte } \int\limits_1^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx;\right.$ $\left.\text{můžete též použít cvičení 13 nebo 15}\right]$

(e) $a_n = e^{-\sqrt[3]{n}}$ $\left[\text{konverguje; vypočtěte } \int\limits_1^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx\right]$

(f) $a_n = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}$ $\left[\text{konverguje; využijte odhadu } \operatorname{arctg} t \le \frac{\pi}{2} \ \forall t \in \mathbf{R}\right]$

23. Buďte $a_n, c_n > 0$ pro $\forall n \in \mathbf{N}$ a předpokládejme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ diverguje. Utvořme posloupnost $\alpha_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$. Jestliže existuje index n_0 a číslo $q > 0$ tak, že $\alpha_n \ge q$ pro $\forall n \ge n_0$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Je-li $\alpha_n \le 0$ pro $\forall n \ge n_0$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní (Kummerovo kritérium).

Důkaz: Můžeme předpokládat, že $n_0 = 1$ a nechť

1) $\alpha_n \ge q$, tj. $c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \ge q\, a_{n+1} > 0$. Tedy posloupnost $\{c_n a_n\}$ je klesající a nechť $a_n c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d$. Potom je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$ podle cvičení 1.2 konvergentní se součtem $c_1 a_1 - d$. Podle cvičení 1 konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q a_{n+1}$, tedy i původní řada.

2) Nechť platí $\alpha_n \le 0$ pro $\forall n \in \mathbf{N}$, tedy $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \le 0$. To však znamená, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$ a podle třetího srovnávacího kritéria (cvičení 8) je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Poznámky: (i) Jak ukazuje důkaz cvičení 23, v prvé části tvrzení nepotřebujeme divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$. tedy pokud pro posloupnost $\{c_n\}$ kladných čísel platí

$$\alpha_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \ge q > 0,$$

je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Pro druhou část tvrzení je však divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ podstatná. Jestliže zvolíme např. $c_n = n^2$, $a_n = \frac{1}{n^2}$, je $\alpha_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = 0$, i když řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

(ii) Buď $c_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$ a nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ diverguje. Kummerovo kritérium pro posloupnost $\{c_n\}$ budeme značit $K(c_n)$. Jaké vlastnosti musí mít posloupnost $\{c_n\}$, aby kritérium $K(c_n)$ rozhodlo o konvergenci některých známých řad? Aby $K(c_n)$ rozhodlo o divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$, musí být $\alpha_n = c_n - c_{n+1} \le 0$, $\forall n \ge n_0$, tj. $\{c_n\}$ musí být neklesající (počínaje některým členem), $\frac{c_n}{c_{n+1}} \le 1$ pro $n \ge n_0$. Nechť existuje číslo $p \in (0,1)$ tak, že $\frac{c_n}{c_{n+1}} \le p$ pro nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbf{N}$. Pak Kummerovo kritérium $K(c_n)$ nerozhodne o konvergenci žádné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, $q \in (p,1)$, neboť

$$\alpha_n = c_n \frac{q^n}{q^{n+1}} - c_{n+1} = c_{n+1}\left(\frac{c_n}{c_{n+1}} \cdot \frac{1}{q} - 1\right) \le c_{n+1}\left(\frac{p}{q} - 1\right) < 0$$

pro nekonečně mnoho $n \in \mathbf{N}$. Aby kritérium $K(c_n)$ rozhodlo o konvergenci každé řady $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $q > 0$, musí platit $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = 1$. Budeme-li hledat c_n ve tvaru $c_n = n^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, pak všechny podmínky platí pro $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Pro $\alpha = 0$, tj. $c_n = 1\ \forall n \in \mathbf{N}$, platí

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq q \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{1+q} < 1 \text{ pro } q > 0,$$

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$

Tedy Kummerovo kritérium $K(1)$ z cvičení 23 rozhodne o konvergenci stejných řad jako d'Alembertovo kritérium ze cvičení 14. Říkáme, že tato kritéria jsou ekvivalentní. Obecnější tvrzení je ve cvičení 27. Případ $\alpha = 1$, tj. $c_n = n\ \forall n \in \mathbf{N}$ vyšetříme ve cvičeních 25 a 26?.

24. Buďte a_n a c_n jako ve cvičení 23. Potom platí

$$\text{a)}\quad \text{Je-li } \liminf_{n\to\infty}\left(c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) > 0, \text{ je řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergentní;}$$

$$\text{b)}\quad \text{Je-li } \limsup_{n\to\infty}\left(c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) < 0, \text{ je řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergentní.}$$

(Limitní Kummerovo kritérium)

Důkaz: a) Nechť $\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = p > 0$ a zvolme číslo q libovolně, ale pevně tak, že $p > q > 0$. Potom existuje index n_0 tak, že pro $\forall n \geq n_0$ platí

$$c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq q > 0$$

a podle cvičení 23 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

b) Je-li $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) < 0$, pak existuje index n_0 tak, že pro $\forall n \geq n_0$ platí

$$c_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

a opět podle cvičení 23 řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

25. Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy. Potom platí

a) Jestliže existuje index n_0 a číslo $q > 0$ tak, že pro $\forall n \geq n_0$ je

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q + 1,$$

je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

b) Je-li

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \text{ pro } \forall n \geq n_0,$$

je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. (Raabeho kritérium).

Důkaz: Položme $c_n = n$. Potom je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní podle cvičení 1.14b) a

$$\alpha_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - n - 1 = n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1.$$

Tvrzení nyní plyne okamžitě z cvičení 23.

26. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy. Potom platí:

$$\text{a)} \quad \text{Je-li} \ \liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1, \ \text{je řada} \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergentní.}$$

$$\text{b)} \quad \text{Je-li} \ \limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1, \ \text{je řada} \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{divergentní.}$$

(Raabeho limitní kritérium).

Důkaz: Provede se analogicky jako u cvičení 23.

Poznámka: Buď $c_n > 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ divergentní. Označme $M(c_n)$ množinu všech řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, o jejichž konvergenci lze rozhodnout pomocí Kummerova kritéria $K(c_n)$, tj.

$$M(c_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, ; \, \exists n_0 \in \mathbf{N} : \left(\forall n \ge n_0 : \alpha_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \le 0 \right) \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, ; \, \exists n_0 \in \mathbf{N} : (\exists q > 0; \forall n \ge n_0 : \alpha_n \ge q) \right\}.$$

Buďte $\{c_n\}$ a $\{d_n\}$ dvě posloupnosti kladných čísel takové, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n} = +\infty$. Říkáme, že kritérium $K(d_n)$ není slabší (resp. je silnější) než kritérium $K(c_n)$, jestliže $M(c_n) \subset M(d_n)$ (resp. $M(c_n) \subset M(d_n)$, $M(d_n) - M(c_n) \ne \emptyset$). Jestliže $M(c_n) = M(d_n)$, pak říkáme, že kritéria $K(c_n)$ a $K(d_n)$ jsou ekvivalentní. Tyto pojmy se používají nejen pro Kummerova kritéria.

27. Kummerova kritéria $K(c_n)$ a $K(d_n)$ jsou ekvivalentní právě když existuje číslo $A > 0$ tak, že $c_n = A d_n$ pro všechna $n \ge n_0$.

Důkaz: Je vidět, že uvedená podmínka je postačující.

Naopak: jsou-li kritéria $K(c_n)$ a $K(d_n)$ ekvivalentní, pak z $K(d_n)$ plyne divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$, tj.

$$d_n \cdot \frac{\frac{1}{c_n}}{\frac{1}{c_{n+1}}} - d_{n+1} = d_n \frac{c_{n+1}}{c_n} - d_{n+1} \le 0 \ \text{ pro } \ n \ge n_1, \qquad \frac{c_{n+1}}{d_{n+1}} \le \frac{c_n}{d_n} \ \text{ pro } \ n \ge n_1.$$

Protože z $K(c_n)$ plyne divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$, je také $\frac{d_{n+1}}{c_{n+1}} \le \frac{d_n}{c_n}$ pro $n \ge n_2$ tj. $\frac{c_n}{d_n} = A > 0$ pro $n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Poznámka: Všiměte si, že v důkazu užíváme jen to, že

$$M_d(c_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ : \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \, , \, \alpha_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0 \right\} = M_d(d_n).$$

Kdyby kritéria $K(c_n)$ a $K(d_n)$ dokazovala jen konvergenci stejných řad (tj. $M_k(c_k) = = M_k(d_n)$), bude podmínka díky libovolnosti konstanty $q > 0$ slabší: pokud $0 < \alpha \leq \frac{c_n}{d_n} \leq \beta$ pro $n \geq n_0$, pak stačí

$$\frac{c_{n+1}}{d_{n+1}} - \frac{c_n}{d_n} = o\left(\frac{1}{d_n}\right) \quad \text{pro } n \to \infty, \text{ tj. } \lim_{n\to\infty} d_n \left(\frac{c_{n+1}}{d_{n+1}} - \frac{c_n}{d_n}\right) = 0.$$

28. Buďte $\alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0, 1 \rangle$, $\alpha_1 < \alpha_2$. Pak je kritérium $K\left(n^{\alpha_1}\right)$ slabší než kritérium $K\left(n^{\alpha_2}\right)$. Speciálně ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$) Raabeho kritérium je silnější než d'Alembertovo.

Důkaz: Nechť $\alpha_n = n^{\alpha_1} \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)^{\alpha_1} \geq q > 0$ pro $n \geq n_0$. Potom

$$n^{\alpha_2} \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)^{\alpha_2} = n^{\alpha_2 - \alpha_1} \left\{ n^{\alpha_1} \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)^{\alpha_1} \right\} + \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha_1 - \alpha_2} (n+1)^{\alpha_2} - (n+1)^{\alpha_2} \geq$$

$$\geq q n^{\alpha_2 - \alpha_1} + \frac{(n+1)^{\alpha_2}}{n} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_1 - \alpha_2} - 1}{\frac{1}{n}} \geq q n^{\alpha_2 - \alpha_1} - 2(\alpha_2 - \alpha_1) n^{\alpha_2 - 1}$$

pro $n \geq n_0$, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha_2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_2 - \alpha_1} - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha_2 - \alpha_1 < 0$$

(uvažte spojitost funkce $x^{\alpha_1 - \alpha_2}$ a derivaci funkce $x^{\alpha_1 - \alpha_2}$ v bodě $x_0 = 1$). Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ n^{\alpha_1} \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)^{\alpha_1} \right\} = +\infty$$

a podle cvičení 24 řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Je-li pro $n \geq n_0$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha_1}, \text{ pak také } \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha_2}, \text{ neboť } \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha_1} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha_2}$$

pro $n \in \mathbf{N}$. Buď $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ a užijme kritéria $K(n^\alpha)$ na řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$, $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$. Je-li $\beta \leq \alpha$, pak

$$\alpha_n = n^\alpha \left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta - (n+1)^\alpha \leq 0$$

pro všechna $n \in \mathbf{N}$, tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ diverguje podle $K(n^\alpha)$, je-li $\beta > \alpha$, pak

$$\alpha_n = n^{\alpha - \beta}(n+1)^\beta - (n+1)^\alpha > 0 \text{ pro } n \in \mathbf{N}, \text{ ale}$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\beta - \alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = 0 \cdot (\beta - \alpha) = 0,$$

tedy kritériem $K(n^\alpha)$ nelze o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ rozhodnout.

29. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy. Potom platí:

a) Je-li $\varliminf\limits_{n\to\infty} \ln n \left\{ n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} > 1$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

b) Je-li $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \ln n \left\{ n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} < 1$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

(Bertrandovo kritérium).

Důkaz: Jestliže ve cvičení 24 zvolíme $c_1 = 1$, $c_n = n \ln n$ pro $n \geq 2$, je řada $1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergentní podle cvičení 20. K důkazu chceme použít cvičení 24, vyjádříme si tedy

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} = n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1) = \ln n \left\{ n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} +$$

$$+(n+1)\ln n - (n+1)\ln(n+1) = \ln n \left\{ n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}.$$

a tvrzení plyne z cvičení 24 poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln e = 1$.

30. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy a nechť

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ jsou pevná a $\{\gamma_n\}$ je omezená posloupnost. Potom platí:

a) Pro $\alpha > 1$ daná řada konverguje, pro $\alpha < 1$ diverguje.

b) Je-li $\alpha = 1$, pak pro $\beta > 1$ řada konverguje, pro $\beta \leq 1$ diverguje.

(Gaussovo kritérium)

Důkaz: Je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha$ a tvrzení a) plyne z cvičení 15.
Je-li $\alpha = 1$, pak

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \beta + \frac{\gamma_n}{n^{\varepsilon}} \text{ a tedy } \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \beta.$$

Případ $\beta > 1$ a $\beta < 1$ plyne nyní z cvičení 26.
Je-li $\alpha = \beta = 1$, potom

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 1 + \frac{\gamma_n}{n^{\varepsilon}} \text{ a odtud } \ln n \left\{ n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right\} = \frac{\gamma_n \ln n}{n^{\varepsilon}}.$$

Podle cvičení 2.2.7h) (Sem. z mat. analýzy I.) je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\gamma_n \ln n}{n^{\varepsilon}} = 0$ a zbývající část tvrzení plyne ze cvičení 29.

31. Buď $c_n > 0$ a nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ diverguje. Označme $d_n = c_n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}$. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$ diverguje a kritérium $K(d_n)$ je silnější než kritérium $K(c_n)$.

Důkaz: Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{1}{c_n}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}} \right\}$$

diverguje podle cvičení 10b) pro $\alpha = 1$. Nechť $c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq q > 0$ pro $n \geq n_0$. Pak

$$d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} - c_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{c_k} = \left(c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} - 1 \geq$$

$$\geq q \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} - 1 \text{ pro } n \geq n_0.$$

Jelikož $\lim\limits_{n\to\infty} \left(q \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} - 1 \right) = +\infty$, plyne odtud, že

$$\lim_{n\to\infty} \left(d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} \right) = +\infty, \text{ a tedy } d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} \geq q' > 0 \text{ pro } n \geq n_0'.$$

Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = \frac{c_n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}}{c_{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{c_k}} < \frac{c_n}{c_{n+1}}.$$

Z nerovnosti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{c_n}{c_{n+1}} \iff c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0 \text{ tedy plyne } \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_n}{d_{n+1}}.$$

Proto

$$d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} < 0 \text{ jakmile } c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}.$$

Kritérium $K(d_n)$ samozřejmě rozhodne o divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$. Ale

$$c_n \frac{\frac{1}{d_n}}{\frac{1}{d_{n+1}}} - c_{n+1} = c_n \frac{d_{n+1}}{d_n} - c_{n+1} = c_{n+1} \left\{ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{c_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}} - 1 \right\} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

a tedy $K(c_n)$ o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$ nerozhodne.

Poznámka: Pomocí cvičení 31 lze vytvářet stále silnější Kummerova kritéria např.

$$K(1)\,, \quad K(n)\,, \quad K\left(n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$$

(všiměte si, že toto kritérium je takřka ekvivalebntní s kritériem $K(n \ln n)$, což je Bertrandovo kritérium) atd. Bohužel, čím silnější Kummerovo kritérium máme, tím hůře se ověřují jeho předpoklady. Praktický význam mají pouze tři kritéria z této skupiny a sice d'Alembertovo, Raabeho a Gaussovo.

32. Pomocí cvičení 26 nebo 30 rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

$$\text{a)}\qquad a_n = \frac{\sqrt{n!}}{\left(a+\sqrt{1}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)\dots\left(a+\sqrt{n}\right)}\,,\ a>0\,;$$

$$\text{b)}\quad a_n = \frac{\ln 2\,\ln 3\,\dots\ln(n+1)}{\ln(2+a)\ln(3+a)\dots\ln(n+1+a)}\,,\ a>0\,;$$

$$\text{c)}\quad a_n = \frac{a(a+d)(a+2d)\dots\{a+(n-1)d\}}{b(b+d)(b+2d)\dots\{b+(n-1)d\}}\,,\ a,b,d>0\,;$$

$$\text{d)}\quad a_n = \frac{1\cdot 4\dots(3n-2)\cdot 2\cdot 5\dots(3n+2)}{n!\,(n+1)!\,a^n}\,,\ a>0\,;$$

$$\text{e)}\quad a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\,x^n\,,\ \alpha,\beta,\gamma,x>0\,;$$

$$\text{f)}\quad a_n = \frac{n!\,x^n}{(x+\alpha_1)(2x+\alpha_2)\dots(nx+\alpha_n)}\,,\ x,\alpha_n>0\,,\ \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha\,;$$

$$\text{g)}\quad a_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p,\ p\in\mathbf{R}\,;\qquad\qquad \text{h)}\quad a_n = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\frac{1}{n^q}\,,\ p,q\in\mathbf{R}\,;$$

$$\text{i)}\quad a_n = \frac{n!\,n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)}\,,\ q>0, p\in\mathbf{R}\,;$$

$$\text{j)}\quad a_n = \left[\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)}\right]^\alpha,\ p,q>0,\alpha\in\mathbf{R}\,;$$

$$\text{k)}\quad a_n = (2-\sqrt{a})(2-\sqrt[3]{a})\dots(2-\sqrt[n]{a})\,,\ a>0\,;$$

$$\text{l)}\quad a_n = \frac{(n+1)!}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)\,n^\alpha}\,;\ \beta>0,\alpha\in\mathbf{R}\,.$$

Řešení:

(a) Je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 1+\frac{a}{\sqrt{n+1}}$$

a odtud

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{an}{\sqrt{n+1}} = +\infty.$$

Daná řada tedy konverguje.

(b) Je $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\ln(n+2+a)}{\ln(n+2)}$ a odtud

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\frac{\ln(n+2+a)-\ln(n+2)}{\ln(n+2)} = \frac{n\ln\left(1+\frac{a}{n+2}\right)}{\ln(n+2)} \le \frac{\ln\left(1+\frac{[a]+1}{n+2}\right)^n}{\ln(n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

vzhledem k tomu, že $\left(1+\frac{[a]+1}{n+2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{[a]+1}$ podle cvičení 2.3.1 a 2.3.4 (Seminář z matematické analýzy I.). Daná řada tedy diverguje.

(c) Platí $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+nd}{a+nd}$ a odtud

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{b+nd-a-nd}{a+nd} = \frac{b-a}{d}.$$

Tedy je-li $\frac{b-a}{d} > 1$, neboli $b > a+d$, daná řada konverguje a je-li $\frac{b-a}{d} < 1$, neboli $b < a+d$, řada diverguje. Pro $b = a+d$ dostaneme

$$a_n = \frac{a(a+d)\dots[\,a+(n-1)d\,]}{(a+d)(a+2d)\dots[\,a+(n-1)d\,](a+nd)} = \frac{a}{a+nd} \geq \frac{a}{d}\cdot\frac{1}{n}$$

a daná řada diverguje.

(d) $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)a}{(3n+1)(3n+5)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{9}$, je podle cvičení 15 řada konvergentní pro $a > 9$ a divergentní pro $a < 9$. Je-li $a = 9$, potom platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{9n^2+27n+18}{9n^2+18n+5} = \frac{9n^2+18n+5+9n+13}{9n^2+18n+5} = 1 + \frac{9n+13}{9n^2+18n+5} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{9n^2+13n}{9n^2+18n+5} = 1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{9n^2+18n+5-5n-5}{9n^2+18n+5} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{5(n+1)}{n(9n^2+18n+5)}$$

a podle cvičení 30 daná řada diverguje.

(e) Poněvadž je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{x(\alpha+n)(\beta+n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x},$$

je podle cvičení 15 daná řada konvergentní pro $x < 1$ a divergentní pro $x > 1$. Je-li $x = 1$, potom

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{n^2+n(\gamma+1)+\gamma-n^2-n(\alpha+\beta)-\alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\gamma-\alpha-\beta+1)+n(\gamma-\alpha\beta)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \gamma-\alpha-\beta+1.$$

Je-li nyní $\gamma > \alpha+\beta$, řada konverguje a pro $\gamma < \alpha+\beta$ diverguje. Pro $x = 1$ a $\gamma = \alpha+\beta$ platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{n^2+n(\alpha+\beta)+n+\alpha+\beta}{n^2+n(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = 1 + \frac{n+\alpha+\beta-\alpha\beta}{n^2+n(\alpha+\beta)+\alpha\beta} =$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{n^2+n(\alpha+\beta)+\alpha\beta-\alpha\beta(n+1)}{n^2+n(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{\alpha\beta(n+1)}{n(\alpha+n)(\beta+n)}$$

a řada podle cvičení 30 diverguje.

Poznámka: Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\,x^n$$

hraje v analýze velmi důležitou roli. Nazývá se (Gaussova) hypergeometrická řada a setkáme se s ní později ještě několikrát. Je zobecněním geometrické řady a mnoha dalších, které s ní souvisejí. Je-li např. $\alpha = \beta = \gamma = 1$, dostaneme okamžitě řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, pro $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 1$ řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ a podobně.

(f) Poněvadž je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)x + \alpha_{n+1}}{(n+1)x} = 1 + \frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)x},$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\alpha_{n+1}}{(n+1)x} = \frac{\alpha}{x}.$$

Je-li $\alpha = 0$, řada diverguje pro všechna $x > 0$, je-li $\alpha = +\infty$, řada konverguje pro všechna $x > 0$. Pro $\alpha > 0$ je řada konvergentní pro $x < \alpha$ a divergentní pro $x > \alpha$. Je-li $x = \alpha > 0$, je situace značně komplikovanější. Platí totiž

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n(\alpha_{n+1} - \alpha) - \alpha}{\alpha(n+1)n}$$

a jestliže je např. $|\alpha_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\gamma_n}{n^{\varepsilon}}$, kde $\{\gamma_n\}$ je omezená posloupnost a $\varepsilon > 0$, je řada divergentní. Jinými slovy, pokud posloupnost $\{\alpha_n\}$ konverguje dostatečně rychle k α, je daná řada divergentní. V případě, že však posloupnost $\{\alpha_n\}$ konverguje pomaleji, Gaussovo kritérium nerozhodne a musíme použít kritéria Bertrandova. Je zřejmé, že můžeme předpokládat, že $\alpha = 1$, jinak čitatele i jmenovatele vydělíme α^n. Uvažme tedy řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+\alpha_1)(2+\alpha_2)\dots(n+\alpha_n)}\,, \quad \text{kde} \quad \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

Podle Bertrandova kritéria (cvičení 29) platí

$$\ln n\left\{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right\} =$$

$$= \ln n\left\{n\left(\frac{n!\,(1+\alpha_1)(2+\alpha_2)\dots(n+\alpha_n)(n+1+\alpha_{n+1})}{(n+1)!\,(1+\alpha_1)(2+\alpha_2)\dots(n+\alpha_n)} - 1\right) - 1\right\} =$$

$$= \ln n\left\{n\left(\frac{n+1+\alpha_{n+1}}{n+1} - 1\right) - 1\right\} = \ln n\left\{n\,\frac{n+1+\alpha_{n+1} - (n+1)}{n+1} - 1\right\} =$$

$$= \ln n\,\frac{n\,\alpha_{n+1} - n - 1}{n+1} = \ln n\,\frac{n(\alpha_{n+1} - 1) - 1}{n+1}\,.$$

Zvolíme-li nyní na příklad $\alpha_{n+1} = 1 + \frac{k}{\ln n}$, $n \geq 2$, $k \in \mathbf{R}$, dostaneme

$$\ln n\,\frac{\frac{k\,n}{\ln n} - 1}{n+1} = \frac{k\,n - \ln n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} k\,,$$

jestliže použijeme l'Hôspitalova pravidla. Tedy pak daná řada konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k < 1$. Takových posloupností je však mnoho a tedy bez konkrétního tvaru posloupnosti $\{\alpha_n\}$ nemůžeme o konvergenci nebo divergenci dané řady rozhodnout.

(g) Platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^p \quad \text{a tedy} \quad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{(2n+2)^p - (2n+1)^p}{(2n+1)^p}\right].$$

Podle binomického rozvoje platí $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$ a tedy

$$(2n+2)^p = 2^p n^p\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = 2^p n^p\left[1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Analogicky

$$(2n+1)^p = 2^p n^p \left(1+\frac{1}{2n}\right)^p = 2^p n^p \left[1+\frac{p}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

a odtud

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \frac{2^p\, n^{p+1}}{(2n+1)^p}\left[1+\frac{p}{n}-1-\frac{p}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{2^p\, n^p}{(2n+1)^p}\left[\frac{p}{2}+o(1)\right].$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \frac{p}{2}$ a řada konverguje pro $p>2$ a diverguje pro $p<2$. Nechť je nyní $p=2$. Potom platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^2 = \left\{1+\frac{1}{2n+1}\right\}^2 = 1+\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2} =$$

$$= 1+\frac{1}{n}+\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(2n+1)^2} = 1+\frac{1}{n}+\frac{2n(2n+1)-(2n+1)^2+n}{n(2n+1)^2} =$$

$$= 1+\frac{1}{n}-\frac{n(n+1)}{n^2(2n+1)^2} = 1+\frac{1}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2},$$

kde $\gamma_n = -\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}$ je omezená posloupnost a tedy daná řada diverguje.

(h) Poněvadž je $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^p \left(\frac{n+1}{n}\right)^q$, dostaneme odtud, že

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1 = \frac{2^p\,(n+1)^{p+q}}{n^q\,(2n+1)^p}-1 = \frac{1}{n^q\,(2n+1)^p}\left\{\,2^p\,(n+1)^{p+q}-n^q\,(2n+1)^p\,\right\} =$$

$$= \frac{2^p\, n^{p+q}}{n^q\,(2n+1)^p}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+q}-\left(1+\frac{1}{2n}\right)^p\right\} =$$

$$= \frac{2^p\, n^{p+q}}{n^q\,(2n+1)^p}\left\{1+\frac{p+q}{n}-1-\frac{p}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Tedy

$$n\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right\} = \frac{2^p\, n^p}{(2n+1)^p}\left\{\frac{p+2q}{2}+o(1)\right\} \text{ a odtud } \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right\} = \frac{p}{2}+q.$$

Odtud plyne, že pro $\frac{p}{2}+q>1$ je řada konvergentní a pro $\frac{p}{2}+q<1$ diverguje. Nechť je nyní $\frac{p}{2}+q=1$, tedy $q=\frac{2-p}{2}$ a odtud

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{2n+2}{2n+1}\right]^p \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2-p}{2}} = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2-p}{2}} =$$

$$= \left\{1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\cdot\left\{1+\frac{2-p}{2n}+\frac{p(p-2)}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} =$$

$$= 1+\frac{2-p}{2n}+\frac{p}{2n+1}+\frac{1}{n^2}\,O(1) = 1+\frac{1}{n}+\frac{(2-p)(2n+1)+2pn-2(2n+1)}{2n(2n+1)}+\frac{1}{n^2}\,O(1) =$$

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{-pn}{2(2n+1)}+\frac{1}{n^2}\,O(1) = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\,O(1)$$

a daná řada diverguje.

(i) Poněvadž je $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \frac{q+n+1}{n+1}$, plyne odtud, že

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{(n+1)^p(q+n+1) - n^p(n+1)}{n^{p-1}(n+1)}.$$

Zavedeme-li substituci $\frac{1}{n} = t$, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{t\to 0_+} \frac{\left(\frac{1}{t}+1\right)^p\left(q+\frac{1}{t}+1\right) - \frac{1}{t^p}\left(\frac{1}{t}+1\right)}{\frac{1}{t^{p-1}}\left(\frac{1}{t}+1\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{(1+t)^p(qt+1+t) - (t+1)}{t(t+1)} = \left| \begin{array}{c} \text{l'Hôsp.} \\ \text{prav.} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{p(1+t)^{p-1}(qt+1+t) + (1+t)^p(q+1) - 1}{t+1+t} = p+q.$$

Řada tedy konverguje pro $p+q>1$ a diverguje pro $p+q<1$. Nechť je dále $p+q=1$, tj. $p = 1-q$. Potom platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-q} \frac{q+n+1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-q}\left(1+\frac{q}{n+1}\right) =$$

$$= \left\{1 + \frac{1-q}{n} + \frac{q(q-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\left(1+\frac{q}{n+1}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1-q}{n} + \frac{q}{n+1} + \frac{1}{n^2}\,O(1) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{q}{n(n+1)} + \frac{1}{n^2}\,O(1)$$

a řada diverguje.

(j) Poněvadž platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{q+n}{p+n}\right]^\alpha = \left\{1 + \frac{q-p}{p+n}\right\}^\alpha = 1 + \frac{\alpha(q-p)}{p+n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

dostaneme odtud, že

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{\alpha\, n(q-p)}{p+n} + o(1) \text{ a tedy } \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha(q-p).$$

Je-li tudíž $\alpha(q-p) > 1$, je řada konvergentní a pro $\alpha(q-p) < 1$ diverguje. V případě, že $\alpha(q-p) = 1$, tj. $\alpha = \frac{1}{q-p}$, můžeme psát

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left[\frac{q+n}{p+n}\right]^{\frac{1}{q-p}} = \left\{1 + \frac{q-p}{p+n}\right\}^{\frac{1}{q-p}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{q-p}\cdot\frac{q-p}{p+n} + \frac{\frac{1}{q-p}\left(\frac{1}{q-p}-1\right)(q-p)^2}{2(p+n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{p+n} + \frac{1-q+p}{2(p+n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Poněvadž je $\frac{1}{p+n} = \frac{1}{n} - \frac{p}{n(n+1)}$, plyne odtud, že řada diverguje.

(k) Vzhlem k tomu, že je $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2-\sqrt[n+1]{a}}$, dostaneme

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{n(1-2+\sqrt[n+1]{a})}{2-\sqrt[n+1]{a}} = n\,\frac{\sqrt[n+1]{a}-1}{2-\sqrt[n+1]{a}}.$$

Poněvadž dále $\{2-\sqrt[n+1]{a}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1} = \ln a.$$

Jestliže je tedy $a > e$, řada konverguje a pro $a < e$ diverguje. Buď $a = e$. Potom je $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2-e^t}$, jestliže označíme $t = \frac{1}{n+1}$. Tedy

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{e^t}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^t}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{e^t}{2} + \frac{e^{2t}}{2^2} + \cdots + \frac{e^{kt}}{2^k} + \dots\right\}$$

a poněvadž

$$e^{kt} = 1 + kt + O(t^2), \quad \frac{e^{kt}}{2^k} = \frac{1}{2^k} + \frac{kt}{2^k} + O(t^2)\,,$$

dostaneme odtud

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{t}{2} + \frac{2t}{2^2} + \frac{3t}{2^3} + \dots\right\} + O(t^2) = 1 + t + O(t^2).$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ má podle cvičení 1.1.1c) součet 2 a poněvadž je $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}$, je daná řada pro $a = e$ divergentní.

(l) Platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\beta+n+1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} = \left(1 + \frac{\beta-1}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} =$$
$$= \left(1 + \frac{\beta-1}{n+2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta-1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

a tedy

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha + \frac{(\beta-1)n}{n+2} + o(1) \quad \text{a odtud} \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha + \beta - 1\,.$$

Je-li nyní $\alpha + \beta > 2$, je řada konvergentní a pro $\alpha + \beta < 2$ divergentní. Nechť je $\alpha + \beta = 2$, tedy $\beta = 2 - \alpha$. Potom je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \frac{1-\alpha}{n+2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = \left(1 + \frac{1-\alpha}{n+2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$
$$= 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{1-\alpha}{n+2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{2\alpha+n}{n(n+2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{2(\alpha-1)}{n(n+2)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

a řada diverguje.

33. Ukažte, že platí

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2} = 0$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0\,;\ a > 1$

Řešení:

(a) Uvažme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. Podle d'Alembertova kritéria platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

a dané řada konverguje. Z nutné podmínky konvergence plyne dané tvrzení.

(b) Analogicky jako v předchozím příkladu pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{\left[\,(n+1)!\,\right]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = 0$$

a tvrzení je ověřeno.

(c) Stejně jako v předchozích příkladech uvažme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} .$$

Potom je $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n!}{n^n}$ a podle cvičení a) je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ a daná řada konverguje.

(d) Stejně tak pro řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}}$$

platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{a^{(n+1)!-n!}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{a^{n\cdot n!}} .$$

Podle cvičení 2.2.7f) (Seminář z matematické analýzy I.) je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ a daná řada konverguje.

34. Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy. Jestliže existuje index $n_0 \geq 2$ a číslo $p > 1$ tak, že

$$(1 - \sqrt[n]{a_n})\,\frac{n}{\ln n} \geq p > 1 \quad \forall\, n \geq n_0 ,$$

potom daná řada konverguje. Je-li

$$(1 - \sqrt[n]{a_n})\,\frac{n}{\ln n} \leq 1 \quad \forall\, n \geq n_0 ,$$

pak daná řada diverguje.

Poznámka: Toto kritérium je v rusky psaných sbírkách označováno jako kritěrij Žame. Nepodařilo se mi zatím zjistit, jak se toto jméno má přepisovat, zda Jame, či Jammé, nebo nějak jinak? Prostě nevím. Autoři českého překladu sbírky Děmidovič: Sbornik zadač i upražněnij po matematičeskomu analizu se názvu tohoto kritéria vyhnuli.

Důkaz: Jestliže platí

$$(1 - \sqrt[n]{a_n})\,\frac{n}{\ln n} \geq p > 1 ,$$

pak dostaneme, že

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}) \geq \frac{p \ln n}{n} , \quad \text{neboli} \quad a_n \leq \left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)^n \quad \forall\, n \geq n_0 .$$

Analogicky, je-li

$$(1 - \sqrt[n]{a_n})\,\frac{n}{\ln n} \leq 1 , \quad \text{dostaneme} \quad a_n \geq \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n \quad \forall\, n \geq n_0 .$$

Podle cvičení 6k) je řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{p \ln n}{n}\right)^n$ konvergentní pro $p > 1$ a divergentní pro $p \leq 1$ a tvrzení plyne z 1. srovnávacího kritéria (cvičení 1).

35. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \left(\dfrac{1}{1+\beta_n}\right)^n$, kde $\beta_n \to 0$; b) $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+p}}$, $p \in \mathbf{R}$;

c) $a_n = \dfrac{1}{\ln(n!)}$, $n \geq 2$; d) $a_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; e) $a_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$;

f) $a_n = \ln \dfrac{1}{n^\alpha} - \ln\left(\sin\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha \in \mathbf{R}$; g) $a_n = a^{-\left(b \ln n + c \ln^2 n\right)}$, $a > 0$, $b, c \in \mathbf{R}$;

h) $a_n = \dfrac{n^{2n}}{(a+n)^{n+b}(b+n)^{n+a}}$, $a, b > 0$; i) $a_n = \dfrac{[\,(n+1)!\,]^n}{2!\,4!\,\ldots\,(2n)!}$.

Řešení:

(a) Podle příkladu 16q) je jediným nerozhodnutým případem $\beta_n > 0\ \forall n \geq n_0$. Jestliže využijeme cvičení 34, dostaneme

$$(1 - \sqrt[n]{a_n}\,)\,\frac{n}{\ln n} = \left(1 - \frac{1}{1+\beta_n}\right)\frac{n}{\ln n} = \frac{n\,\beta_n}{(1+\beta_n)\ln n}\,.$$

Poněvadž musí platit, že $n\,\beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, záleží chování dané řady na tom, jak rychle konverguje posloupnost $\{\beta_n\}$ k 0. Je-li rychlost konvergence jako $n^{-\gamma}$, kde $0 < \gamma < 1$, pak

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \sqrt[n]{a_n}\,)\,\frac{n}{\ln n} = +\infty$$

a řada konverguje. Jestliže však posloupnost $\{\beta_n\}$ konverguje rychleji, na příklad pro $\beta_n = \frac{k\,\ln n}{n}$ $(k > 0)$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \sqrt[n]{a_n}\,)\,\frac{n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{1 + \frac{k\,\ln n}{n}} = k\,.$$

Řada tedy konverguje pro $k > 1$ a diverguje pro $k < 1$. Pro $k = 1$ ani cvičení 34 o konvergenci nerozhodne. Je tedy vidět, že při dalším rozhodování musíme znát konkrétní tvar posloupnosti $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(b) Poněvadž je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}} = \frac{(n+1)^{n+p}}{e\;n^{n+p}},$$

plyne odtud, že

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(n+1)^{n+p} - e\;n^{n+p}}{e\;n^{n+p}}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e}\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} - e\right\} =$$

$$= \left|\begin{array}{c} \frac{1}{n} = t \\ t \to 0 \end{array}\right| = \frac{1}{e}\lim_{t\to 0_+} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}+p} - e}{t} = \lim_{t\to 0_+} \frac{e^{\left(\frac{1}{t}+p\right)\ln(1+t)-1} - 1}{\left(\frac{1}{t}+p\right)\ln(1+t) - 1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{t}+p\right)\ln(1+t) - 1}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{\left(\frac{1}{t}+p\right)\ln(t+1) - 1}{t} = \left|\begin{array}{c} \text{l'Hôsp.} \\ \text{pravid.} \end{array}\right| = \lim_{t\to 0_+} \frac{-\frac{1}{t^2}\ln(t+1) + \left(\frac{1}{t}+p\right)\cdot\frac{1}{t+1}}{1} =$$

$$= \lim_{t\to 0_+} \frac{\frac{1+tp}{t(t+1)} - \frac{1}{t^2}\ln(t+1)}{1} = \lim_{t\to 0_+} \frac{1}{t+1}\cdot\lim_{t\to 0_+} \frac{t + t^2p - (t+1)\ln(t+1)}{t^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{l'Hôsp.} \\ \text{pravid.} \end{array} \right| = \lim_{t\to 0_+} \frac{1+2tp-1-\ln(t+1)}{2t} = p - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0_+}\frac{\ln(t+1)}{t} = p - \frac{1}{2}.$$

Je-li nyní $p > \frac{3}{2}$, je řada konvergentní a pro $p < \frac{3}{2}$ diverguje.
Nechť je nyní $p = \frac{3}{2}$ a označme $b_n = \frac{1}{n}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!\,e^n}{n^{n+3/2}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

podle Stirlingovy formule $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$. Podle druhého srovnávacího kritéria je tedy daná řada divergentní.

(c) Jestliže opět využijeme Stirlingovy formule $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$, dostaneme, že pro členy dané řady platí

$$a_n \sim b_n\,, \quad \text{kde} \quad a_n = \frac{1}{\ln(n!)}\,,\ b_n = \frac{1}{\ln\left\{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right\}} = \frac{1}{n\,\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi\,n}}\,.$$

Řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ diverguje. Jestliže zvolíme $c_n = \frac{1}{n\,\ln n}$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\,\ln n}{n\,\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi\,n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{\ln n}+\frac{\ln\sqrt{2\pi\,n}}{n\,\ln n}} = 1$$

Řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n$ diverguje podle cvičení 21a) a diverguje tedy i řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ podle 2. srovnávacího kritéria a následně i řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$.

Poznámka: Pokud bychom chtěli k vyšetření konvergence dané řady použít některé z kritérií, zjistíme bez problémů, že Raabeho kritérium selže, poněkud delší výpočet ukáže, že selže i Bertrandovo kritérium (v obou případech vyjdou příslušné limity 1). Kritérium, které by mohlo rozhodnout, by pravděpodobně bylo Kummerovo kritérium, kde $c_n = n\,\ln n\,\ln\ln n$, pokud se nám podaří vypočítat odpovídající limitu.

(d) Platí

$$c_n = \frac{(n-1)\ln^2 2}{n^\alpha} \le a_n \le \frac{n\,\ln^2 n}{n^\alpha} = b_n\,.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje podle cvičení 21a) pro $\alpha > 2$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje pro $\alpha \le 2$.
Odtud plyne, že daná řada konverguje pro $\alpha > 2$ a diverguje pro $\alpha \le 2$.

(e) Opětným použitím Stirlingovy formule $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ můžeme psát

$$b_n = \frac{\ln\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{n^\alpha} = \frac{n\,\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi\,n}}{n^\alpha}$$

a uvažme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^\beta}$. Tato řada je podle cvičení 21a) konvergentní pro $\beta > 1$ a divergentní pro $\beta \le 1$. Dále platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta\left\{n\,\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi\,n}\right\}}{n^\alpha\ln n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\beta+1-\alpha}-\frac{n^{\beta+1-\alpha}}{\ln n}+\frac{n^{\beta-\alpha}\ln\sqrt{2\pi\,n}}{\ln n}}{1} = 1 \quad \text{pro} \quad \beta = \alpha - 1\,.$$

Podle 2. srovnávacího kritéria je řada konvergentní, je-li $\alpha - 1 > 1$ tj. $\alpha > 2$ a diverguje pro $\alpha \le 2$.

(f) Je

$$a_n = \ln\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right) = \ln\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sin\frac{1}{n^\alpha}} = \ln\frac{1}{n^\alpha\,\sin\frac{1}{n^\alpha}} = -\ln\left\{n^\alpha\,\sin\frac{1}{n^\alpha}\right\}.$$

Tedy

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\ln\left\{n^\alpha\,\sin\frac{1}{n^\alpha}\right\}}{\ln\left\{(n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right\}}$$

a odtud

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\,\frac{\ln\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\,\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}}\right\}}{\ln\left\{(n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right\}}.$$

Nyní

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\,\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}}\right\}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\,\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}} - 1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1}{\ln\left\{(n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right\}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty} n\,\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha\,\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}} - 1}{(n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}}\cdot$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty} n\,\frac{n^\alpha\,\sin\frac{1}{n^\alpha} - (n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{(n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1} = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{n^\alpha\,\sin\frac{1}{n^\alpha} - (n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{(n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1}.$$

Jestliže si všimneme limity jmenovatele, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{2\alpha}\left\{(n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1\right\} = \left|\begin{array}{c}\frac{1}{n+1} = t\\ n+1 = \frac{1}{t}\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0_+}\frac{\frac{1}{t^\alpha}\,\sin t^\alpha - 1}{t^{2\alpha}} = \lim_{t\to 0_+}\frac{\sin t^\alpha - t^\alpha}{t^{3\alpha}} = \left|\begin{array}{c}\text{l'Hôsp.}\\ \text{prav.}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{t\to 0_+}\frac{t^{\alpha-1}\left\{\cos t^\alpha - 1\right\}}{t^{3\alpha-1}} = \frac{1}{3}\lim_{t\to 0_+}\frac{\cos t^\alpha - 1}{t^{2\alpha}} = -\frac{1}{6}.$$

Platí tedy dále

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = -6\lim_{n\to\infty} n(n+1)^{2\alpha}\left\{n^\alpha\,\sin\frac{1}{n^\alpha} - (n+1)^\alpha\,\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right\} =$$

$$= \left|\begin{array}{c} n = \frac{1}{t}\\ n+1 = \frac{1+t}{t}\end{array}\right| = -6\lim_{t\to 0_+}\frac{1}{t}\,\frac{(1+t)^{2\alpha}}{t^{2\alpha}}\left\{\frac{\sin t^\alpha}{t^\alpha} - \frac{(1+t)^\alpha}{t^\alpha}\,\sin\left(\frac{t}{1+t}\right)^\alpha\right\} =$$

$$= -6\lim_{t\to 0_+}\frac{(1+t)^{2\alpha}\left\{\sin t^\alpha - (1+t)^\alpha\,\sin\left(\frac{t}{1+t}\right)^\alpha\right\}}{t^{3\alpha+1}}.$$

Pro výraz ve složené závorce v čitateli platí

$$\sin t^\alpha - (1+t)^\alpha\,\sin\left(\frac{t}{1+t}\right)^\alpha = t^\alpha - \frac{t^{3\alpha}}{3!} + o\left(t^{3\alpha+1}\right) -$$

$$-\left[(1+t)^\alpha\left\{\left(\frac{t}{1+t}\right)^\alpha - \frac{t^{3\alpha}}{3!\,(1+t)^{3\alpha}} + o\left(t^{3\alpha+1}\right)\right\}\right] =$$

$$= -\frac{t^{3\alpha}}{3!} + \frac{t^{3\alpha}}{3!\,(1+t)^{2\alpha}} + o\left(t^{3\alpha+1}\right) = -\frac{t^{3\alpha}}{3!} + \frac{t^{3\alpha}}{3!}\left(1 - 2\alpha t + o\left(t^2\right)\right) + o\left(t^{3\alpha+1}\right) =$$

$$= -\frac{2\alpha t^{3\alpha+1}}{3!} + o\left(t^{3\alpha+1}\right)\,.$$

Z tohoto vyjádření plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 2\alpha\,.$$

Je-li tedy $\alpha > \frac{1}{2}$, řada konverguje a pro $\alpha < \frac{1}{2}$ diverguje.
Buď nyní $\alpha = \frac{1}{2}$. Potom je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\ln\left(\sqrt{n}\,\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{n+1}\,\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)} \text{ a označme } p_n = \ln\left(\sqrt{n}\,\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\,,\ q_n = \sqrt{n}\,\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Potom je $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ a dále platí

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\,\frac{p_n - p_{n+1}}{p_{n+1}} = \frac{n\,(p_n - p_{n+1})}{p_{n+1}}\,.$$

K vyšetření konvergence dané řady použijeme Bertrandova kritéria a označme

$$u_n = \ln n\left\{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right\} =$$

$$= \ln n\left\{\frac{n\,(p_n - p_{n+1})}{p_{n+1}} - 1\right\} = \frac{n\,(p_n - p_{n+1}) - p_{n+1}}{p_{n+1}}\,\ln n\,.$$

Nejdříve si upravíme jmenovatel. Platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{q_{n+1} - 1} = 1 \quad \text{a tedy} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\{\,n(p_n - p_{n+1}) - p_{n+1}\}}{q_{n+1} - 1}\,.$$

Dále dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\{\,q_{n+1} - 1\} = \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{3}{2}}\left\{\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right\} =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}} = t\right| = \lim_{t\to 0_+}\frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{6}$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} u_n = -6\lim_{n\to\infty}\{\,n(p_n - p_{n+1}) - p_{n+1}\}\ (n+1)\ln n\,.$$

Jestliže se nyní podíváme na výraz ve složených závorkách, dostaneme

$$n(p_n - p_{n+1}) - p_{n+1} = n(\ln q_n - \ln q_{n+1}) - \ln q_{n+1} = \ln\left[\left(\frac{q_n}{q_{n+1}}\right)^n\frac{1}{q_{n+1}}\right]$$

a stačí vypočítat limitu výrazu $\left(\frac{q_n}{q_{n+1}}\right)^n$. Je

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q_n}{q_{n+1}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1 + \frac{q_n - q_{n+1}}{q_{n+1}}\right)^{\frac{q_{n+1}}{q_n - q_{n+1}}}\right\}^{\frac{n(q_n - q_{n+1})}{q_{n+1}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(q_n - q_{n+1})}{q_{n+1}}}\,.$$

$$\lim_{n\to\infty} n(q_n - q_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n}\,\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n+1}\,\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} n = \frac{1}{t} \\ n+1 = \frac{t+1}{t} \end{array} \right| = \lim_{t\to 0_+} \frac{1}{\sqrt{t^5}}\left(\sin\sqrt{t} - \sqrt{\frac{t+1}{t}}\,\sin\sqrt{\frac{t}{t+1}}\right)$$

Nyní platí

$$\sin\sqrt{t} = \sqrt{t} - \frac{t\sqrt{t}}{3!} + \frac{t^2\sqrt{t}}{5!} + o\left(\sqrt{t^5}\right)\ ,$$

$$\sqrt{1+t}\,\sin\sqrt{\frac{t}{1+t}} =$$

$$= \sqrt{1+t}\left\{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}} - \frac{t\sqrt{t}}{3!(1+t)\sqrt{1+t}} + \frac{t^2\sqrt{t}}{5!(1+t)^2\sqrt{1+t}} + o\left(\sqrt{t^5}\right)\right\} =$$

$$= \sqrt{t} - \frac{1}{3!}\,t\sqrt{t}\left(1 - t + o\left(t^2\right)\right) + \frac{1}{5!}\,t^2\sqrt{t}\,(1 + o(t))$$

a odtud

$$\sin\sqrt{t} - \sqrt{1+t}\,\sin\sqrt{\frac{t}{t+1}} = -\frac{1}{3!}\,t^2\sqrt{t} + o\left(\sqrt{t^5}\right)\ .$$

Tím pádem dostaneme, že $\lim\limits_{n\to\infty} n(q_n - q_{n+1}) = -\frac{1}{6}$ a následně $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$. Daná řada tedy pro $\alpha = \frac{1}{2}$ diverguje.

Poznámka: Jestliže použijeme Gaussova kritéria, dostaneme

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n(p_n - p_{n+1}) - p_{n+1}}{n\,p_{n+1}}\ .$$

Podle předchozího výpočtu je sice $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n(p_n - p_{n+1}) - p_{n+1}\right] = e^{-1/6}$, ale jmenovatel diverguje k $+\infty$ pomaleji než libovolná mocnina $n^{1+\varepsilon}$; $\varepsilon > 0$.

(g) Je zřejmé, že daná řada diverguje pro $a = 1$ (je to řada ze samých jedniček). Pro $a \neq 1$ platí

$$a_n = e^{-(b\,\ln n + c\,\ln^2 n)\ln a} = e^{-(b\,\ln a + c\,\ln a\,\ln n)\ln n} =$$

$$= e^{\ln\left(n^{-(b+c\,\ln n)\ln a}\right)} = n^{-(b+c\,\ln n)\ln a} = \frac{1}{n^{(b+c\,\ln n)\ln a}}\ .$$

Aby tato řada konvergovala, musí být $(b + c\,\ln n)\ln a > 1$.

α) Buď $c = 0$, potom je $b\,\ln a > 1$, neboli $a^b > e$.

β) Pro $c \neq 0$ musí platit, že $c\,\ln a > 0$, neboli $a^c > 1$ a b může být libovolné.

Poznámka: Tato řada by se měla přeřadit jinam, poněvadž řádné kritérium nevyžaduje. Stačí informace o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$.

(h) $n-$tý člen dané řady si nejdříve upravíme. Platí

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(a+n)^{n+b}(b+n)^{n+a}} = \frac{n^{2n+a+b}\,n^{-(a+b)}}{(a+n)^{n+b}(b+n)^{n+a}} = \frac{n^{-(a+b)}}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}}\ .$$

Poněvadž jmenovatel zůstává omezený, chová se a_n zhruba jako $n^{-(a+b)}$. Zvolme tedy $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n+\alpha}}{(a+n)^{n+b}\,(b+n)^{n+a}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n+a+b}\cdot n^{\alpha-a-b}}{(a+n)^{n+b}\,(b+n)^{n+a}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-a-b}}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha-a-b}}{\left\{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right\}^{\frac{a(n+b)}{n}} \left\{\left(1+\frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{b}}\right\}^{\frac{b(n+a)}{n}}} =$$

$$= \frac{1}{e^{a+b}} = e^{-(a+b)}\,, \quad \text{jakmile} \quad \alpha - a - b = 0\,, \quad \text{tedy} \quad \alpha = a + b\,.$$

Je-li tedy $a + b > 1$, je řada konvergentní a pro $a + b \leq 1$ diverguje.

(i) Je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{[(n+1)!\,]^n}{2!\cdot 4!\cdot\ \ldots\ \cdot(2n)!} \cdot \frac{2!\cdot 4!\cdot\ \ldots\ \cdot(2n)!\cdot(2n+2)!}{[(n+2)!\,]^{n+1}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n+2)}{(n+2)^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)\left(1+\frac{2}{n+2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n+2}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{n+2}(1+2+\cdots+n) \geq \frac{n(n+1)}{2(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty\,.$$

Podle d'Alembertova kritéria tedy daná řada konverguje.

36. Rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$; b) $a_n = \dfrac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$; c) $a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$;

d) $a_n = \displaystyle\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx$; e) $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx$; f) $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{x\,\sin^5 x}{1+x^2}\,dx$.

Řešení:

(a) Funkce $f(t) = \sqrt{t}$ je rostoucí a tedy pro $x \in \left\langle 0, \frac{1}{n}\right\rangle$ platí $\sqrt{x} \leq \sqrt{\frac{1}{n}}$ a odtud

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}\,.$$

Podle 1. srovnávacího kritéria (cvičení 1) je daná řada konvergentní.

(b) Poněvadž je $\sqrt[4]{1+x^4} \geq x$, plyne odtud, že

$$\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx \geq \int_0^n x\,dx = \frac{n^2}{2}\,.$$

Platí tedy odhad

$$a_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx} \leq \frac{2}{n^2}$$

a podle cvičení 1 daná řada konverguje.

(c) Pro $x \in \langle n\pi, (n+1)\pi\rangle$ platí $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$, tedy

$$a_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} (1-\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4(n+1)\pi} \sin 2x \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{1}{2(n+1)}$$

a podle cvičení 1 řada diverguje.

(d) Označme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_{1}^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Potom je

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = 2 \int\limits_{1}^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} u = t & v' = e^{-t} \\ u' = 1 & v = -e^{-t} \end{array} \right| = -2\left[\,t\,e^{-t}\,\right]_1^{+\infty} + 2 \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-t}\,dt = 4e^{-1}$$

a řada konverguje.

(e) Poněvadž je funkce $\sin t$ rostoucí v intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, dostaneme pro $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{n}\right\rangle$ odhad

$$\sin x \leq \sin\frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{n}\,, \quad \text{tedy} \quad \sin^3 x \leq \sin^3\frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi^3}{n^3}\,.$$

Odtud plyne, že

$$a_n = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}\,dx \leq \frac{\pi^3}{n^3} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{n}} \frac{dx}{1+x} = \frac{\pi^3\,\ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)}{n^3}$$

a daná řada konverguje opět podle cvičení 1.

(f) Analogicky jako ve cvičení e) dostaneme

$$a_n \leq \frac{\pi^5}{n^5} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{n}} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi^5}{2n^5} \ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}\right)$$

a daná řada konverguje.

37. Pomocí cvičení 26 rozhodněte o konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $\quad\left[\text{diverguje, } n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\right]$

(b) $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$ $\quad\left[\text{diverguje, } n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\right]$

(c) $a_n = \frac{1\cdot5\ldots(4n-3)}{2\cdot6\ldots(4n-2)}$ $\quad\left[\text{konverguje, } n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}\right]$

(d) $a_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$; $x > -1$ $\quad$ [konverguje pro $x > 1$, diverguje pro $x \leq 1$; $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$; pro $x = 1$ je $a_n = \frac{1}{n+1}$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$.]