# Seminář z matematické analýzy I.

Čížek Jiří-Kubr Milan

18. září 2007

# Obsah

# Kapitola 1

# Základní matematické pojmy.

## 1.1 Logika.

1. Před soudem stojí tři obvinění $A, B, C$.

   $A$ říká: jsem nevinen, pachatelem je $C$.

   $B$ říká: $C$ je nevinen, pachatelem je $A$.

   $C$ říká: jsem nevinen, $B$ není pachatel.

   Soud zjistil, že jeden z obviněných 2krát lhal, jeden říkal 2krát pravdu, jeden jednou lhal a jednou mluvil pravdu. Kdo je pachatel?

   **Řešení:** Z výpovědi $C$ plyne, že nemohl 2krát lhát, poněvadž by byl pachatelem on a zároveň $B$. Uvažme nyní následující případy:

   (a) Nechť $C$ 2krát mluvil pravdu, pak je $A$ pachatel
      i. Jestliže $A$ 2krát lhal, je $A$ pachatel. Jestliže $B$ jednou lhal, je pachatelem $B$ nebo $C$. Tento případ nemůže nastat.
      ii. Jestliže $B$ 2krát lhal, pak $C$ je pachatel, což je opět spor.

   (b) Nechť $C$ jednou lhal a jednou mluvil pravdu. Pak pachatelem může být $C$ nebo $B$.
      i. Jestliže $A$ 2krát lhal, je $A$ pachatel, což je spor.
      ii. $A$ tedy 2krát mluvil pravdu a $B$ 2krát lhal. Odtud plyne, že pachatelem je $C$.

2. Do polární expedice je třeba z osmi zájemců $A, B, C.D, E, F, G, H$ vybrat šest odborníků: biologa, hydrologa, synoptika, radistu, mechanika a lékaře. Kvalifikaci mají: na biologa $E$ a $G$, na hydrologa $B$ a $F$, na synoptika $F$ a $G$, na radistu $C$ a $D$, na mechanika $C$ a $H$, na lékaře $A$ a $D$. Každý bude vykonávat právě jednu funkci. Kdo pojede, když $F$ nemůže jet bez $B$, $D$ bez $H$ a bez $C$, $C$ nemůže jet s $G$ a $A$ nemůže jet s $B$?

   **Řešení:** Vypíšeme si jednotlivé profese a příslužné zájemce do tabulky.

   | | | | | | |
   |---|---|---|---|---|---|
   | Biolog | $E, G$ | Hydrolog | $B, F$ | Synoptik | $F, G$ |
   | Radista | $C, D$ | Mechanik | $C, H$ | Lékař | $A, D$ |

   (a) Kdyby $A$ jel s expedicí, pak nejede $B$ a nemůže jet ani $F$, tedy není možné obsadit funkci hydrologa. Zájemce $A$ tedy jet nemůže.

   (b) Poněvadž $A$ nejede, musí jet $D$ ve funkci lékaře, tedy $C$ ve funkci radisty a $H$ ve funkci mechanika. Ale $C$ nemůře jet s $G$, tedy $G$ nepojede. Odtud plyne, že $E$ jede ve funkci biologa, $F$ ve funkci synoptika a $B$ ve funkci hydrologa.

3. Rozhodněte o pravdivosti následujících implikací.

   (a) Končí-li celé číslo cifrou 5, je dělitelné 5. [ pravdivá ]
   (b) Je-li 6 prvočíslo, pak 12 je číslo složené [ pravdivá ]
   (c) Jestliže pro dvě čísla $a, b$ platí $ab = 0$, pak $a = b = 0$. [ nepravdivá ]
   (d) Je-li 6 prvočíslo, pak 12 je také prvoříslo. [ pravdivá ]

4. Rozhodněte o pravdivosti následujících ekvivalencí.

   (a) Číslo je dělitelné 3 právě tehdy, je-li jeho ciferný součet dělitelný 3. [ pravdivá ]
   (b) Číslo 9 je sudé právě když je dělitelné 2. [ pravdivá ]
   (c) Úhlopžíčky rovnoběžníka jsou na sebe kolmé tehdy a jen tehdy, jeli daný rovnoběžník čtverec. [ nepravdivá ]

5. Dvě definice snadnosti písemky jsou:

   (a) Písemka je snadná, jestliže každý příklad vyřešil alespoň jeden student.
   (b) Písemka je snadná, jestliže alespoň jeden student vyřešil všechny příklady.

   Může existovat písemka, která je

   $\alpha$) lehká ve smyslu a), ale ne ve smyslu b)?

   $\beta$) lehká ve smyslu b), ale ne ve smyslu a)? [ b) $\Rightarrow$ a) ]

6. Jsou dány výroky, týkající se výšky žáků tříd $A$ a $B$.

   (a) Každý žák z $B$ je vyšší než všichni žáci z $A$.
   (b) Nejvyšší žák z $B$ je vyšší než nejvyšší žák z$A$.
   (c) Ke každému žáku z $B$ existuje žák z $A$, který je menší.
   (d) Každý žák z $A$ je menší než alespoň jeden žák z $B$.
   (e) průměrná výška žáků z $B$ je větší než průměrná výška žáků z $A$.

   Jsou některé z těchto výroků ekvivalentní? Které? [ c) $\Leftrightarrow$ d) ]

7. Formulujte předpoklad a tvrzení v následujících větách.

   (a) Součin dvou po sobě jdoucích sudých čísel je dělitelný osmi.
   [ Předpoklad: Součin dvou po sobě jdoucích čísel.
   Tvrzení: Je dělitelný osmi. ]
   (b) Součet a rozdíl čtverců dvou po sobě jdoucích přirozených čísel je vždy lichý, jejich součin vždy sudý a dělitelný čtyřmi.
   [ Předpoklad: Součet a rozdíl čtverců dvou po sobě jdoucích přirozených čísel.
   Tvrzení: Je vždy lichý, jejich součin je vždy sudý a dělitelný čtyřmi. ]

8. Vyslovte negaci následujících výroků.

   (a) Všechny koeficienty jsou rovny nule. [ Alespoň jeden koeficient ke nenulový. ]
   (b) Všechny kořeny rovnice jsou reálné. [ Alespoň jeden kořen rovnice není reálný. ]
   (c) $4 < -2$. [ $4 \geq -2$. ]

9. K daným větám vyslovte věty obrácené.

   (a) Úhlopříčky kosočtverce půlí jeho úhly.
   [ Čtyřúhelník, jehož úhlopříčky půlí jeho úhly, je kosočtverec. ]

   (b) Je-li číslo dělitelné devíti, je jeho ciferný součet dělitelný devíti.
   [ Je-li ciferný součet čísla dělitelný devíti, je číslo dělitelné devíti. ]

10. Vyslovte následující věty ve tvaru nutné a postačující podmínky.

   (a) Rovnostranný trojúhelník má vnitřní úhly stejné.
   [ Trojúhelník je rovnostranný právě tehdy, má-li vnitřní úhly stejné. Nebo: Rovnost stran trojúhelníka je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby jeho vnitřní úhly byly stejné. ]

   (b) Jeden z kořenů kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, je nulový.
   [ Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ má alespoň jeden kožen nulový právě když $c = 0$. ]

   (c) V rovnoběžníku se úhlopříčky navzájem půlí.
   [ Ve čtyřúhelníku se úhlopříčky půlí právě tehdy, jde-li o rovnoběžník. ]

11. V následujících větách doplňte vynechaný text slovy „je nutné“, „stačí“, „je nutné a stačí“ tak, aby byly pravdivé.

   (a) Aby součet dvou přirozených čísel byl dělitelný dvěma,......, aby každý sčítanec byl dělitelný dvěma. [ stačí ]

   (b) Aby mnohočlen $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ byl dělitelný dvojčlenem $(x - \alpha)$, ......, aby číslo $\alpha$ bylo nulovým bodem tohoto mnohočlenu. [ je nutné a stačí ]

   (c) Aby celé číslo bylo dělitelné stem, ......, aby bylo dělitelné deseti. [ je nutné ]

   (d) Aby celé číslo bylo dělitelné stem, ......, aby bylo dělitelné tisícem. [ stačí ]

12. Určete všechna $n \in \mathbf{N}$, pro něž z výroků

$$A: \ n^2 - 2 \text{ je dělitelné } 7, \qquad B: \ n - 2 \text{ je dělitelné } 7, \qquad C: \ 4n^2 - 360n + 8099 < 0$$

jsou právě dva pravdivé.
[ $n = 45$; ukažte, že je-li $n - 2$ dělitelné 7, pak $n^2 - 2$ není dělitelné 7. ]

13. Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, aby právě jeden z výroků

$$A: \ x \text{ je celé}, \qquad B: \ x^2 - 3x \text{ je celé záporné}, \qquad C: \ x + \frac{1}{x} \text{ je celé kladné},$$

byl nepravdivý. $\left[ x \in \left\{ 2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\} \right]$

14. Napište následující výroky pomocí kvantifikátorů a určete, zda jsou pravdivé.

   (a) K libovolnému reálnému číslu $y$ existuje reálné číslo $x$ tak, že platí $x + y^2 < 1$.
   [ $\forall y \in \mathbf{R} \ \exists x \in \mathbf{R} : x + y^2 < 1$; pravdivý. ]

   (b) Pro libovolné reálné číslo $y$ platí $(y - 3)(y + 3) < y^2$.
   [ $\forall y \in \mathbf{R} : (y - 3)(y + 3) < y^2$; pravdivý. ]

   (c) Pro jakékoliv reálné číslo $x$ platí $x^2 - 6x + 15 > 0$.
   [ $\forall x \in \mathbf{R} : x^2 - 6x + 15 > 0$; pravdivý. ]

   (d) Existují reálná čísla $x$ taková, že platí $|x - 2| \leq 4$.
   [ $\exists x \in \mathbf{R} : |x - 2| \leq 4$; pravdivý. ]

(e) Existují reálná čísla $x$ taková, že platí $\log(x^2-1) = \log(x-1) - \log(x+2)$.
[ $\exists x \in \mathbf{R} : \log(x^2-1) = \log(x-1) - \log(x+2)$ ; nepravdivý.]

15. Dokažte sporem následující věty.

(a) Rovnice $ax = b$, $a \neq 0$ má jediné řešení.
(b) Rovnice $a + x = b$ má jediné řešení.
(c) $\sqrt[3]{7}$ je číslo iracionální.
(d) Rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá reálné kořeny.

16. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $x > -1$ platí

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad \text{( Bernoulliova nerovnost )}.$$

**Důkaz:** K důkazu použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Jestliže tuto nerovnost vynásobíme výrazem $1 + x > 0$, dostaneme

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

a důkaz je dokončen.

17. Nechť jsou $x_1, x_1 \ldots, x_n$ $(n \in \mathbf{N})$ jsou kladná čísla taková, že

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ \ldots \ \cdot x_n = 1.$$

Potom je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n.$$

**Důkaz:** Tvrzení budeme dokazovat opět matematickou indukcí. Je-li $n = 1$, je $x_1 = 1$, tedy $x_1 \geq 1$ a tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n$ a uvažme množinu čísel $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. Jestliže jsou všechna čísla rovna 1, je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = n + 1$$

a tvrzení platí. Jestliže existuje jedno z těchto čísel, které je menší než 1, musí existovat jiné číslo, které je větší než 1. Je totiž

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ \ldots \ \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1.$$

Nechť např. $x_n < 1$, $x_{n+1} > 1$. Uvážíme-li skupinu $n$ čísel

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1},$$

je jejich součin roven 1 a podle indukčního předpokladu platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n \cdot x_{n+1} \geq n.$$

Přičteme-li k oběma stranám této nerovnosti $x_n + x_{n+1}$ a součin $x_n x_{n+1}$ převedem na pravou stranu, dostaneme

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} \geq n + x_n + x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1} =$$

$$= n + 1 + x_{n+1}(1 - x_n) + x_n - 1 = n + 1 + (1 - x_n)(x_{n+1} - 1) \geq n + 1.$$

18. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ libovolná kladná čísla, $n \in \mathbf{N}$, potom platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\,.$$

Aritmetický průměr je vždy větší nebo roven geometrickému průměru.

**Důkaz:** Uvažme $n$ čísel

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}\,,\ \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}\,,\ \ldots\,,\ \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}\,.$$

Všechna tato čísla jsou kladná a jejich součin je roven 1. Podle předchozího příkladu je tedy

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \geq n$$

a odtud plyne, že

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\,.$$

19. Metodou matematické indukce dokažte, že pro libovolné přirozené $n$ platí

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$;

(c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

(d) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;

(e) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

(f) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$;

(g) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$;

(h) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, $n > 1$;

(i) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n$, $n > 1$;

(j) $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$;

[využijte vlastnosti kombinačních čísel $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$]

(k) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$; [ukažte, že $\frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1} > 0$]

(l) $n^7 - n$ je dělitelné 7;

[ukažte, že kombinační čísla $\binom{7}{1}, \binom{7}{2}, \binom{7}{3}, \binom{7}{4}, \binom{7}{5}, \binom{7}{6}$ jsou všechna dělitelná 7]

(m) Pro $n > 1$ dekadický zápis $2^{2^n} + 1$ končí číslicí 7;

[dokažte, že číslo $2^{2^n} - 6$ je dělitelné 10]

(n) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n > 1$;

[ukažte, že platí $\frac{2n+1}{2n+2} < \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}}$]

(o) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n > 1$;

[ukažte, že platí $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$]

(p) Buďte $x_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{1}{2}$. Potom je

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_n) \geq \frac{1}{2};$$

[ využijte vztahu $1 - x_n - x_{n+1} \leq (1 - x_n)(1 - x_{n+1})$ ]

20. Dokažte, že pro $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ a $n \in \mathbf{N}$ platí

(a) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$;

(b) $\sin x + 2 \sin 2x + \cdots + n \sin nx = \frac{(n+1) \sin nx - n \sin (n+1)x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$;

(c) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{nx}{2}$.

## 1.2 Množiny a jejich zobrazení.

1. Buďte $Y$, $X_\lambda$, $(\lambda \in \Lambda)$ množiny. Ukažte, že platí

$$Y - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda); \qquad Y - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda).$$

De Morganova pravidla.

**Důkaz:**

(a) Nechť $x \in Y - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Potom je $x \in Y$, $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, tedy $x \notin X_\lambda$ pro $\forall\, \lambda \in \Lambda$. Odtud plyne, že $x \in Y - X_\lambda$ pro $\forall\, \lambda \in \Lambda$, tedy $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda)$. Tím jsme dokázali, že

$$Y - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda).$$

(b) Obráceně, buď $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda)$. Potom je $x \in Y - X_\lambda$ pro $\forall\, \lambda \in \Lambda$, tedy $x \notin X_\lambda$ pro $\forall\, \lambda \in \Lambda$ a také $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Neboli $x \in Y - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ a platí, že

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda) \subset Y - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda.$$

(c) Analogicky nechť $x \in Y - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Potom $x \in Y$, $x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, tedy $\exists\, \lambda_0 \in \Lambda$, tak, že $x \notin X_{\lambda_0}$, neboli $x \in Y - X_{\lambda_0}$ a $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda)$. Dostáváme, že

$$Y - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda).$$

(d) Obráceně pro $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda)$ $\exists\, \lambda_0 \in \Lambda$ tak, že $x \in Y - X_{\lambda_0}$, neboli $x \in Y$, $x \notin X_{\lambda_0}$ a tedy $x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Následně $x \in Y - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ a platí inkluse

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Y - X_\lambda) \subset Y - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda.$$

**Poznámky:** i) Důkaz de Morganových pravidel je založen na vlastnosti množin

$$A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A\,.$$

Tohoto postupu budeme využívat v dalším velmi často, pokud se budeme chtít přesvědčit, že dvě množiny jsou si rovny.

ii) Množina $\Lambda$, které budeme říkat často indexová množina, může být libovolná, např. interval $(0,1)$. Většinou však bude buď $\Lambda = \mathbf{N}$ nebo $\Lambda \subset \mathbf{N}$.

2. Ukažte, že platí

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda - B_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda - \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\,.$$

Najděte množiny $A_\lambda$ a $B_\lambda$ tak, že nikde neplatí rovnost.

**Důkaz:** Buď $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda - \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$. Potom je $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, $x \notin \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$, tedy evistuje index $\lambda_0$ tak, že $x \in A_{\lambda_0}$, $x \notin B_{\lambda_0}$. (Je dokonce $x \notin B_\lambda\ \forall\,\lambda \in \Lambda$.) Odtud plyne, že $x \in A_{\lambda_0} - B_{\lambda_0}$, tedy $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda - B_\lambda)$ a prvá inkluse je dokázána.

Buď $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda - B_\lambda)$. Potom existuje $\lambda_0$ tak že $x \in A_{\lambda_0} - B_{\lambda_0}$, tedy $x \in A_{\lambda_0}$, $x \notin B_{\lambda_0}$. Tudíž $x \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, $x \notin \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ a druhá inkluse platí.

Buď

$$A_1 = \langle 0,1\rangle\,,\ A_2 = \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle\,,\ A_k = \emptyset \ \text{ pro }\ k \geq 3\,,$$

$$B_1 = \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle\,,\ B_2 = \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle\,,\ B_k = \emptyset \ \text{ pro }\ k \geq 3\,.$$

Potom je

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset\,,\quad \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k - B_k) = \left(\frac{1}{2}, 1\right\rangle\,,\quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k - \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \langle 0,1\rangle\,.$$

3. Ověřte rovnost množin $A = \{1, -5\}$; $B = \{x \in \mathbf{R}\,;\ x^2 + 4x - 5 = 0\}$.

4. Určete, zda $M \subset N$, jestliže

   (a) $M$ je množina všech rovnostranných trojúhejníků, $N$ je množina všech rovnoramenných trojúhelníků. [ Ano ]

   (b) $M$ je množina všech celých čísel, $N$ je množina všech lichých čísel. [ Ne ]

5. Buď $A = \{x \in \mathbf{N}\,;\ x \leq 3\}$. Najděte všechny vlastní a nevlastní podmnožiny $A$.

   [ Vlastní podmnožiny : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ ; ]

   [ nevlastní podmnožiny : $\emptyset$, $\{1,2,3\} = A$ . ]

6. Najděte množinu $B$ všech podmnožin množiny $A = \{1, 2\}$. [ $B = \{\emptyset, 1, 2, \{1,2\}\}$ ]

7. Najděte sjednocení, průnik a rozdíl následujících množin.

   (a) $A = \{1, 2, 4, 6, 9\}$, $B = \{3, 4, 5, 8, 10\}$; [ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{4\}$, $A - B = \{1, 2, 6, 9\}$, $B - A = \{3, 5, 8, 10\}$ ]

(b) $A = (4,8)\,,\ \ B = (1,4\rangle\,;$ $[\,(1,8)\,,\,\emptyset\,,\,(4,8)\,,\,(1,4\rangle\,]$

(c) $A = (-3,7\rangle\,,\ \ B = \langle 5,6\rangle\,;$ $[\,(-3,7\rangle\,,\,\langle 5,6\rangle\,,\,(-3,5)\cup(6,7)\,,\,\emptyset\,]$

(d) $A$ je množina všech sudých čísel, $B$ je množina všech lichých čísel. $[\,\mathbf{Z}\,,\,\emptyset\,,\,A\,,\,B\,]$

8. $A$ je množina všech sudých čísel, $B$ je množina všech lichých čísel, které nejsou dělitelné třemi, $C$ je množina všech čísel, dělitelných třemi. Najděte množiny

$$A\cup B\,,\ \ A\cup C\,,\ \ A\cup B\cup C\,,\ \ A\cap C\,.$$

[ $A\cup B$; množina celých čísel, kromě lichých násobků tří ]

[ $A\cup C$; množina všech celých čísel, kromě lichých, nedělitelných třemi,]

[ $A\cup B\cup C$; množina všech celých čísel ]

[ $A\cap C$; množina všech čísel dělitelných šesti ]

9. $A$ je množina všech čtyřúhelníků, $B$ množina všech pravidelných $n-$úhelníků. Najděte množiny $A-B$ a $B-A$. [ $A-B$: množina všech čtyřúhelníků, které nejsou čtverce.,]

[ $B-A$: množina všech pravidelných $n-$úhelníků, které nejsou čtverce. ]

10. Najděte množiny, které tvoří všechna řešení následujících rovnic.

$$\text{a)}\quad \cos\frac{\pi x}{2} = 0\,; \qquad\qquad \text{b)}\quad \sin\pi x = 0\,.$$

Určete průnik a sjednocení těchto množin.

[ a) množina všech lichých čísel; b) množina všech celých čísel ]

[ průnik je množina všech lichých čísel, sjednocení množina všech celých čísel ]

11. Buďte $X$ a $Y$ dvě množiny. Množinu

$$\triangle(X,Y) = X \vartriangle Y = (X-Y)\cup(Y-X)$$

nazýváme <u>symetrickou diferencí</u> množin $X$ a $Y$. Ukažte, že platí

(a) $X\subset Y \iff X\cup Y = Y \iff X\cap Y = X\,;$

(b) $X\subset Z\ \wedge\ Y\subset Z \iff X\cup Y\subset Z\,;$

(c) $Z\subset X\ \wedge\ Z\subset Y \iff Z\subset X\cap Y\,;$

(d) $X\cup(Y\cup Z) = (X\cup Y)\cup Z\,;$

(e) $X\cap(Y\cap Z) = (X\cap Y)\cap Z\,;$

(f) $X\cap(Y\cup Z) = (X\cap Y)\cup(X\cap Z)\,;$

(g) Je-li $M\subset X$, pak $X-(X-M) = M\,;$

(h) $X = (X-Y)\cup(X\cap Y)\,;$

(i) $X\cup Y = X\cup(Y-X)\,;$

(j) $X\cup Y = (X-Y)\cup(Y-X)\cup(X\cap Y)\,;$

(k) $(X\cup Y)-Z = (X-Z)\cup Y \iff Y\cap Z = \emptyset\,;$

(l) $X\vartriangle Y = X\cup Y - X\cap Y\,;$

(m) $X\vartriangle Y = \emptyset \iff X = Y\,;$

(n) $X\vartriangle Y = X \iff Y = \emptyset\,;$

(o) $X-(Y\cup Z) = (X-Y)-Z\,;$

(p) $X-(X-Y) = X\cap Y\,;$

(q) $(X-Y)\cap Z=(X\cap Z)-(Y\cap Z)$.
**Návod:** Při důkazech využijte vlastnosti $X=Y \iff X\subset Y \wedge Y\subset X$.

12. Ukažte příklady množin, pro něž platí

(a) $A\neq B\cup(A-B)$. Kdy platí rovnost? [ $A=\langle 0,1\rangle$, $B=(2,3)$; $B\subset A$ ]
(b) $A=B\cup D$, ale $A-B\neq D$. Kdy platí rovnost? [ $B=(0,2)$, $D=(1,3)$; $B\cap D=\emptyset$ ]
(c) $D=A\cup(B-E)$, $D\neq(A\cup B)-E$. Kdy platí rovnost?
[ $A=(0,2)$, $B=(1,2)$, $E=(1,3)$; $A\cap E=\emptyset$ ]
(d) $(A_1\cup A_2)-(B_1\cup B_2)\neq(A_1-B_1)\cup(A_2-B_2)$. Jaký vztah platí?
[ $A_1=(0,2)$, $A_2=(4,6)$, $B_1=(1,3)$, $B_2=(0,4)$;
$(A_1\cup A_2)-(B_1\cup B_2)\subset(A_1-B_1)\cup(A_2-B_2)$. ]

13. Určete vzájemný vztah množin $X$ a $Y$ (tj. $X=Y$, $X\subset Y$, $Y\subset X$) je-li

(a) $X=A\cup(B-C)$, $Y=(A\cup B)-(A\cup C)$; [ $X\supset Y$ ]
(b) $X=(A\cap B)-C$, $Y=(A-C)\cap(B-C)$; [ $X=Y$ ]
(c) $X=A-(B\cup C)$, $Y=(A-B)\cup(A-C)$. [ $X\subset Y$ ]

14. Najděte množiny $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}C_k$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}D_k$, je-li

$$A_k=\left\langle 0,1-\frac{1}{k}\right\rangle,\ B_k=\left(0,1-\frac{1}{k}\right),\ C_k=\left\langle 0,\frac{1}{k}\right\rangle,\ D_k=\left(0,\frac{1}{k}\right).$$

$$\left[\ \bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\langle 0,1),\ \bigcup_{k=1}^{\infty}B_k=(0,1),\ \bigcap_{k=1}^{\infty}C_k=\{0\},\ \bigcap_{k=1}^{\infty}D_k=\emptyset\ \right]$$

15. Ukažte, že $\triangle\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k,\ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k\right)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\triangle(A_k,B_k)$. [Využijte příkladu 1]

16. Nechť $A_1,A_2,A_3,\dots$ jsou množiny. Ukažte, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

Je-li $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\dots$, pak

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

Je-li $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\dots$, pak

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

**Návod:** Ukažte, že $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ je množina takových $x$, která leží ve všech $A_n$ až na konečný počet množin, zatímco $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ jsou takové prvky, které leží v nekonečně mnoha $A_n$.

**Poznámka:** Množinu $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ nazýváme <u>dolní limitou</u> posloupnosti množin a značíme $\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n$, množinu $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$ <u>horní limitou</u> posloupnosti množin a značíme $\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n$. Jestliže platí $\underline{\lim}_{n\to\infty}A_n=\overline{\lim}_{n\to\infty}A_n$, řekneme, že posloupnost množin má limitu a označíme ji $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

17. Nechť $A \subset C$ , $B \subset D$ . Ukažte, že $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$ .

**Důkaz:** a) Poněvadž platí $A \times B \subset A \times D$ , $A \times B \subset C \times B$ , je i $A \times B \subset (A \times D) \cap (C \times B)$ .
b) Nechť obráceně $(a, b) \in (A \times D) \cap (C \times B)$ . Potom je $(a, b) \in A \times D$ a zároveň $(a, b) \in C \times B$ . Tedy $a \in A$ , $b \in B$ , neboli $(a, b) \in A \times B$ a platí $(A \times D) \cap (C \times B) \subset A \times B$ .

18. Najděte množiny $A \times B$ a $B \times A$ , jestliže

(a) $A = \{x \in \mathbf{N} ; 1 < x < 4\}$ , $B = \{x \in \mathbf{N} ; x^2 - 4 = 0\}$ ;
$[\, A \times B = \{(2, 2), (3, 2)\} ; B \times A = \{(2, 2), (2, 3)\}\, ]$

(b) $A = \{1, 4, 5\}$ , $B = \{a, b\}$ .
$[\, A \times B = \{(1, a), (1, b), (4, a), (4, b), (5, a), (5, b)\} ;$
$B \times A = \{(a, 1), (a, 4), (a, 5)(b, 1), (b, 4), (b, 5)\}\, ]$

(c) $A = \mathbf{N}$ , $B = \emptyset$ . $[\, A \times B = B \times A = \emptyset\, ]$

19. Ukažte, že platí

(a) $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$ ;
(b) $A \times B \subset X \times Y \iff A \subset X \wedge B \subset Y$ ;
(c) $(A \times Y) \cup (B \times Y) = (A \cup B) \times Y$ ;
(d) $(X \times Y) \cap (A \times B) = (X \cap A) \times (Y \cap B)$ .

**Návod:** Využijte postupu z příkladu 17.

20. Buď $f : X \longrightarrow Y$ , $A, B \subset X$ . Ukažte, že

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) .$$

Je-li $f$ prosté zobrazení, je dokonce $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

**Důkaz:** a) Nechť $y \in f(A \cap B)$ . Potom existuje $x \in A \cap B$ tak, že $y = f(x)$ . Je tedy $y \in f(A)$ a zároveň $y \in f(B)$ , neboli $y \in f(A) \cap f(B)$ .
b) Obráceně předpokládejme, že $f$ je prosté a buď $y \in f(A) \cap f(B)$ . Potom existují $x_1 \in A$ , $x_2 \in B$ tak, že $y = f(x_1) = f(x_2)$ . Poněvadž je $f$ prosté, musí platit $x_1 = x_2 \in A \cap B$ neboli $y \in f(A \cap B)$ .

21. Buď $f : X \longrightarrow Y$ , $A, B \subset X$ . Ukažte, že

$$f(A) - f(B) \subset f(A - B) .$$

Na příkladu ukažte, že $f(A) - f(B) \neq f(A - B)$ .

**Důkaz:** Buď $y \in f(A) - f(B)$ . Potom je $y \in f(A)$ , $y \notin f(B)$ . Existuje tedy $x \in A$ tak, že $y = f(x)$ , ale $x \notin B$ . Odtud plyne, že $x \in A - B$ , neboli $y \in f(A - B)$ .
Stačí zvolit např $f : x \to x^2$ , $A = \langle -1, 1 \rangle$ , $B = \langle -1, 0 \rangle$ . Potom je

$$f(A - B) = (0, 1\rangle , \qquad f(A) - f(B) = \emptyset .$$

22. Buď $f : X \longrightarrow Y$ zobrazení. Ukažte, že platí

(a) $A \subset B \subset X \implies f(A) \subset f(B)$;
(b) $A, B \in X \implies f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
(c) $A, B \in Y \implies f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$;
(d) $A, B \in Y \implies f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;
(e) $A, B \in Y \implies f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

**Návod:** Vyjděte z definice příslušných množin a užijte metody příkladu 20.

23. Buď $f : X \longrightarrow Y$ zobrazení, $A \subset X$, $B \subset Y$ podmnožiny. Najděte $f(A)$ a $f^{-1}(B)$, je-li

(a) $X = Y = \mathbf{R}$, $f : x \to x^2$, $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$;
$[\, f(A) = \{0, 1, 4, 9\}\, ,\ f^{-1}(B) = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}\, ]$
(b) $X = \mathbf{N}$, $Y = \mathbf{R}$, $f : x \to x^2$, $A = \{1, 3, 10\}$, $B = \{3, 7, 9\}$;
$[\, f(A) = \{1, 9, 100\}\, ,\ f^{-1}(B) = \{3\}\, ]$
(c) $X = Y = \mathbf{R}$, $f : x \to \sin x$, $A = \langle 0, \pi \rangle$, $B = \left\{\frac{1}{2}\right\}$;
$[\, f(A) = \langle 0, 1 \rangle\, ,\ f^{-1}(B) = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}\, ]$
(d) $X = Y = \mathbf{R}$, $f : x \to \frac{1}{1+x^2}$, $A = \langle 0, +\infty)$, $B = (-\infty, 0)$. $[\, (0, 1\rangle\, ;\ \emptyset\, ]$

24. Buď $f : X \longrightarrow Y$ zobrazení. Potom je $f$ prosté právě když $f(A - B) = f(A) - f(B)$ pro všechny podmnožiny $B \subset A \subset X$.

**Důkaz:** Podle příkladu 21 je $f(A - B) \subset f(A) - f(B)$. Nechť je nyní $f$ prosté zobrazení a $y \in f(A - B)$. Potom existuje $x \in A - B$ tak, že $y = f(x)$. Poněvadž $x \in A$, $x \notin B$, musí být $y \in f(A)$, $y \notin f(B)$, ($f$ je prosté). Tedy $y \in f(A) - f(B)$, neboli

$$f(A - B) \subset f(A) - f(B).$$

Jestliže $f$ není prosté, existují $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ tak, že $f(x_1) = f(x_2) = y_1 \in Y$. Položme $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{x_1\}$. Potom

$$f(A - B) = \{y_1\}, \quad f(A) - f(B) = \emptyset, \qquad B \subset A \subset X.$$

25. Ukažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní

(a) $f : X \longrightarrow Y$ je prosté zobrazení;
(b) $f^{-1}(f(A)) = A$ pro $\forall A \subset X$;
(c) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pro $\forall A, B \subset X$;
(d) Je-li $A \cap B = \emptyset$, potom $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ pro $\forall A, B \subset X$;
(e) Pro libovolnou dvojici $B \subset A \subset X$ je $f(A - B) = f(A) - f(B)$.

**Návod:** Dokažte řadu implikací a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a). Užijte metody z příkladů 20, 21, 24.

26. Najděte příklady zobrazení $f : X \longrightarrow Y$ a podmnožiny $A \subset X$, pro něž

(a) $f(X - A) \subset Y - f(A)$; $[\, f(x) = x^2\, ,\ X = \langle 0, 1 \rangle\, ,\ Y = \mathbf{R}\, ,\ A \subset X$ libovolná množina$\,]$

(b) $f(X-A) \supset Y - f(A)$;

$[\, f(x) = x^2\,,\ X = \langle -1, 1\rangle\,,\ Y = \langle 0, 1\rangle\,,\ A \subset X$ libovolná podmnožina$\,]$

(c) ani jedna z množin $f(X-A)$ a $Y - f(A)$ není podmnožinou druhé.

$[\, f(x) = x^2\,,\ X = \langle -1, 1\rangle\,,\ Y = \mathbf{R}\,,\ A = \langle 0, 1\rangle\,;$

potom $f(X-A) = (0,1\rangle\,,\ f(A) = \langle 0, 1\rangle\,,\ Y - f(A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)\,]$

**Poznámka:** Platí dokonce následující tvrzení.

Je-li $f : X \longrightarrow Y$ zobrazení, pak je $f$ prosté právě když pro libovolnou množinu $A \subset X$ je $f(X-A) \subset Y - f(A)$.

$f$ je zobrazení $X$ na $Y$ právě když pro libovolnou množinu $A \subset X$ je $f(X-A) \supset Y - f(A)$.

27. Buďte $X, Y, Z$ množiny, $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, $h : Z \longrightarrow X$ zobrazení. Jsou-li mezi zobrazeními $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ dvě zobrazení <u>na</u> a třetí <u>prosté</u> nebo dvě <u>prostá</u> a třetí <u>na</u>, pak jsou všechna tři zobrazení <u>prostá zobrazení na</u>. Dokažte.

**Důkaz:** Označme $F = h \circ g \circ f$, $G = f \circ h \circ g$, $H = g \circ f \circ h$. Zřejmě platí následující implikace.

$\alpha$) Je-li $F$ prosté, je $f$ prosté.

$\beta$) Je-li $F$ na, je $h$ na.

$\gamma$) Je-li $F$ na a $h$ bijekce, je $h^{-1} \circ F$ na.

$\delta$) Je-li $H$ prosté a $h$ bijekce, pak $H \circ h^{-1}$ je prosté.

a) Nechť např. $F$ a $G$ jsou zobrazení na a $H$ je prosté. Poněvadž $F$ je zobrazení na, je podle vlastnosti $\beta$) zobrazení $h$ také na. Dále $H$ je prosté, tedy podle vlastnosti $\alpha$) je $h$ také prosté. Odtud plyne, že $h$ a tedy i $h^{-1}$ jsou bijekce.

Dále je $F$ zobrazení na a tedy také zobrazení $h^{-1} \circ F = g \circ f$ je na. $H$ je prosté zobrazení a podle $\delta$) je prosté i zobrazení $H \circ h^{-1} = g \circ f$. Tedy $g \circ f$ je bijekce.

Vzhledem k tomu, že $G$ je zobrazení na, je podle bodu $\beta$) zobrazení $f$ také na. $g \circ f$ je prosté zobrazení, tedy i $f$ je prosté, neboli je to bijekce.

Konečně $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ je jako složení dvou bijekcí také bijekce.

b) Nechť $F$ je zobrazení na $G$ a $H$ jsou prostá. Podle bodu a) je $h$ bijekce a stejně tak i $g \circ f$. Poněvadž je $G$ prosté zobrazení, je také $g$ prosté a poněvadž $g \circ f$ je bijekce, plyne odtud, že $g$ je zobrazení na, neboli bijekce. Vzhledem k tomu, že $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$, je také $f$ bijekce.

28. Buď $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ konečná množina o $n$ prvcích ($n \geq 0$ celé). Označme $2^A$ systém všech podmnožin množiny $A$. Potom je $m\left(2^A\right) = 2^n$.

**Důkaz:** Systém $2^A$ obsahuje prázdnou množinu a podmnožiny o jednom, dvou, až $n$ prvcích. Počet všech podmnožin o $k$ prvcích ($0 \leq k \leq n$) je $\binom{n}{k}$, tedy

$$m\left(2^A\right) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n\,.$$

**Poznámka:** Označení $2^A = \exp(A)$ pro systém všech podmnožin množiny $A$ se používá pro libovolnou množinu $A$. Číslice 2 je vlastně zkratka pro dvouprvkovou množinu, např. $\{0,1\}$. Obecně $B^A$ označuje množinu všech zobrazení $f : A \longrightarrow B$. Každé zobrazení $f : A \longrightarrow \{0,1\}$ charakterizuje libovolnou podmnožinu $M \subset A : x \in M \Leftrightarrow f(x) = 1$. Takovou funkci $f$ nazýváme charakteristickou funkcí množiny $M$.

29. Každá podmnožina spočetné množiny je konečná nebo spočetné.

**Důkaz:** Buď $A$ spočetná množina, $B \subset A$ podmnožina. Je-li $B$ konečná, je tvrzení zřejmé. Nechť je tedy $B$ nekonečná. Poněvadž $A$ je spočetná, lze její prvky napsat ve tvaru nekonečné posloupnosti $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Postupujeme nyní v této posloupnosti tak daleko, až narazíme na prvý prvek množiny $B$, třeba $a_{k_1} \in B$. Stejným postupem získáme index $k_2 > k_1$ tak, že $a_{k_2} \in B$. Tím dostaneme posloupnost $\{a_{k_1}, a_{k_2}, \dots\}$, která obsahuje všechny prvky množiny $B$ a $B$ je tedy spočetná.

30. Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

**Důkaz:** Buď $A$ nekonečná množina a zvolme prvek $a_1 \in A$. Poněvadž je množina $A - \{a_1\}$ opět nekonečná, lze zvolit prvek $a_2 \in A - \{a_1\}$. Obecně prvek $a_n$ zvolíme libovolně v množině $A - \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ (která je opět nekonečná). Tím způsobem dostaneme posloupnost $\{a_1, a_2, \dots\}$, která tvoří spočetnou podmnožinu $A$.

**Poznámka:** Předchozí tvrzení je zjednodušená formulace tzv. axiomu výběru. Buď $\{A_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$ systém po dvou disjunktních neprázdných množin, $A = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Pak existuje zobrazení $f : \Lambda \longrightarrow A$ tak, že $f(\lambda) \in A$ pro každé $\lambda \in \Lambda$. Axiom výběru zaručuje možnost výběru „reprezentanta“ množiny $A_\lambda$. Specielně v případech, kdy prvky množiny $A$ jsou opět nějaké množiny, je třeba axiomaticky zaručit možnost výběru „reprezentanta“.

31. Jsou-li $A, B$ spočetné množiny, pak $A \times B$ je také spočetná.

**Důkaz:** Je-li $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots\}$, pak $A \times B$ můžeme zapsat do schematu

$$\begin{array}{llll} (a_1, b_1), & (a_1, b_2), & (a_1, b_3), & \dots \\ (a_2, b_1), & (a_2, b_2), & (a_2, b_3), & \dots \\ (a_3, b_1), & (a_3, b_2), & (a_3, b_3), & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Tyto prvky lze zapsat do posloupnosti (např.)

$$(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_1), (a_2, b_2), (a_1, b_3), (a_4, b_1), \dots$$

a odtud plyne, že $A \times B$ je spočetná mnořina.

32. Je-li $A$ nekonečná množina, $B$ spočetná nebo konečná množina, pak jsou množiny $A \cup B$ a $A$ ekvivalentní (tedy mají stejnou mohutnost).

**Důkaz:** Platí $A \cup B = A \cup (B - A)$, kde sjednocení vpravo je disjunktní a podle příkladu 29 je množina $B - A$ konečná nebo spočetná. Podle příkladu 30 existuje spočetná množina $C \subset A$ a tedy $A = (A - C) \cup C$, $A \cup B = (A - C) \cup C \cup (B - A)$. Množina $C \cup (C - A)$ je spočetná a tedy ekvivalentní s $C$. Jestliže nyní přiřadíme každý prvek $A - C$ sám sobě, dostáváme požadované bijektivní zobrazení $A$ na $A \cup B$.

33. Buď $\Omega = \{a\,;\, a : \mathbf{N} \to \{0, 1\}\}$ množina všech posloupností nul a jedniček. Potom je $\Omega$ nespočetná množina.

**Důkaz:** Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že prvky $\Omega$ lze uspořádat do posloupnosti např.

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots\} \\ a^{(2)} &= \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots\} \\ a^{(3)} &= \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \dots\} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Buď $b = \{b_n\}$ definována vztahem $b_n = 1 - a_n^{(n)}$. Potom je $b \in \Omega$, $b \neq a^{(n)} \, \forall n \in \mathbf{N}$, což je spor.

**Poznámka:** Metoda důkazu se nazývá Cantotova diagonalizační metoda. Dokázali jsme tedy, $2^{\mathbf{N}} = \exp(\mathbf{N})$ je nespočetná. Obecně je mohutnost $\exp(A)$ větší než mohutnost $A$ pro každou množinu $A$.

34. Buď $\Omega_0 = \{a \in \Omega \,:\, a(n) = 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ s výjimkou konečně mnoha $n\}$. Potom je $\Omega_0$ spočetná množina.

**Důkaz:** Buď $n \in \mathbf{N}$ a nechť $A_n = \{a \in \Omega\,;\, a(k) = 0$ pro $k > n\}$. Podle příkladu 28 je $m(A_n) = 2^n$. Protože množina

$$\Omega_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{n+1} - A_n)$$

je sjednocení disjunktních konečných množin, lze prvky $\Omega_0$ uspořádat do posloupnosti, tj. $\Omega_0$ je spočetná množina.

**Poznámka:** Analogicky dostaneme, že $\Omega_1 = \{a \in \Omega\,;\, a(n) = 1$ až na konečný počet indexů$\}$ je spočetná množina. Tedy $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \overline{\Omega}$, kde pouze

$$\overline{\Omega} = \{a \in \Omega\,;\, \forall k \in \mathbf{N}\, \exists n_0, n_1 \in \mathbf{N} \,:\, n_0 > k \wedge n_1 > k \wedge a(n_0) = 0 \wedge a(n_1) = 1\}$$

je nespočetná. Množinově řečeno: systém všech konečných množin a množin s konečným doplňkem v $\exp(\mathbf{N})$ je spočetný. Systém všech podmnožin $\mathbf{N}$, které jsou nekonečné a mají nekonečný doplněk, je nespočetný.

35. Ukažte, že jsou následující množiny $X$ a $Y$ ekvivalentní a najděte příslušné bijektivní zobrazení $X$ na $Y$.

    (a) $X = \mathbf{N}$, $Y$ je množina vřech sudých kladných čísel; $[\, f(n) = 2n \,]$

    (b) $X = \mathbf{N}$, $Y = \mathbf{Z}$; $[\, f(n) = \frac{n}{2}$ pro $n$ sudé, $f(n) = \frac{1-n}{2}$ pro $n$ liché$]$

    (c) $X = (0,1)$, $Y = (a,b)$, $(a < b)$; $[\, f(x) = a + (b-a)x \,]$

    (d) $X = (0,1)$, $Y = \mathbf{R}$; $[\, f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi \,]$

    (e) $X = \mathbf{R}$, $Y = (0,+\infty)$; $[\, f(x) = e^x \,]$

    (f) $X = (0,+\infty)$, $Y = (a,+\infty)$, $a \in \mathbf{R}$; $[\, f(x) = x + a \,]$

    (g) $X = \langle 0,1 \rangle$, $Y = \langle 0,1)$;

    $\Big[\, f(0) = 0$, $f(x) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - x$, $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right\rangle$, $n \in \mathbf{N}$; (nakreslete si graf);

    nebo $f(x) = x$, $x \in \langle 0,1) - \left\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbf{N}\right\}$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$;

    srovnejte s důkazem cvičení 32$]$

36. Ukažte, že všechny intervaly mají stejnou mohutnost (omezené i neomezené). Tato mohutnost se nazývá mohutnost kontinua.

    **Návod:** Užijte výsledky předchozího cvičení.

37. Ukažte, že množina $\mathbf{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

    **Návod:** Ukažte, že $\mathbf{Q} \sim M_0$ , kde $M_0 \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ a použijte cvičení 29 a 31.

38. Nechť pro všechna $n \in \mathbf{N}$ je $A_n$ nejvýše spočetná množina. Potom je $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ také nejvýše spočetná množina. Dokažte.

    **Návod:** Jsou-li $A_n$ nekonečné, uspořádejte je do schématu jako v příkladu 31.

## 1.3 Reálná a komplexní čísla.

1. **Označení:** Zavedeme zkrácené označení součtů a součinů následujícími předpisy:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \,, \qquad a_1 \cdot a_2 \cdot \ \ldots \ \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

   a definujeme tzv. prázdný součet a součin předpisem $\sum\limits_{j=1}^{0} a_j = 0\,,\ \prod\limits_{k=1}^{0} a_k = 1\,.$

2. Ukažte, že platí

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\,; \qquad \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{j} a_{ij} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i}^{n} a_{ij}\,.$$

   **Řešení:** Je

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{jj}) = a_{11} + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23} + a_{33}) + \cdots +$$

$$+ (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn}) = (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + (a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{2n}) + \cdots +$$

$$+ (a_{n-1,n-1} + a_{n-1,n}) + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + a_{i,i+1} + \cdots + a_{in}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\,.$$

   Analogicky provedeme důkaz pro součin.

   **Poznámka:** Uvedený postup je poněkud dlouhý a těžkopádný. Danou rovnost je však možno ověřit okamžitě, jestliže situaci znázorníme graficky. viz obrázek

   Jestliže zaměníme dané sumace, je okamžitě vidět, že $i$ probíhá od 1 do $n$ a $j$ probíhá od $i$ do $n$ . Analogicky provedeme tvrzení pro součiny. Tohoto postupu bude později běžně používáno v souvislosti s výpočtem dvojných integrálů.

3. Buďte $r, n_1, n_2, \ldots, n_r$ přirozená čísla. Ukažte, že platí

$$\prod_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} a_i^{(j)} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_r=1}^{n_r} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}^{(r)} .$$

(Zobecnění distributivního zákona).

**Důkaz:** Důkaz provedeme indukcí podle $r$. Pro $r = 1$ vzorec platí. Podle distributivního zákona je $c \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} c a_i$. Předpokládejme nyní, že daný vzorec platí pro $r$ a dokážeme jeho platnost pro $r+1$. Položme

$$c = \sum_{i=1}^{n_{r+1}} a_i^{(r+1)} ;$$

potom

$$\prod_{j=1}^{r+1} \sum_{i=1}^{n_j} a_i^{(j)} = c \prod_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} a_i^{(j)} = c \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_r=1}^{n_r} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}^{(r)} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdot c \cdot \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_r=1}^{n_r} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}^{(r)} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_r=1}^{n_r} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}^{(r)} \cdot c =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_r=1}^{n_r} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{i_r}^{(r)} \sum_{i_{r+1}=1}^{n_{r+1}} a_{i_{r+1}}^{(r+1)} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_{r+1}=1}^{n_{r+1}} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{i_{r+1}}^{(r+1)} .$$

4. Ukažte, že platí

(a) $\sum_{j=1}^{n} a = na$;

(b) $c \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k$;

(c) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$; $\qquad \prod_{i=0}^{n} a_i = \prod_{i=2}^{n+2} a_{n-i+2}$;

(d) $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i b_j$;

(e) $\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ij}$;

(f) $\prod_{i=1}^{n} a = a^n$;

(g) $\left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right)^n = \prod_{i=1}^{r} a_i^n$;

(h) $\prod_{k=1}^{r} a^{n_k} = a^{\sum_{k=1}^{r} n_k}$;

(i) $\sum_{k=l+1}^{n} a_k = \sum_{k=l+1-r}^{n-r} a_{k+r}$;

(j) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\qquad \left[\text{užijte identity } 2 \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\right]$

(k) $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,,\ q \neq 1\,;$ $\left[\text{užijte identity } (q-1)\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \sum\limits_{k=1}^{n+1} q^k - \sum\limits_{k=0}^{n} q^k\right]$

(l) $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\,;$

(m) $(a-b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\,.$

5. Ukažte, že pro libovolnou dvojici reálných čísel $a, b\,(a < b)$ existuje racionální číslo $c$ tak, že $a < c < b$.

**Důkaz:** Předpokládejme, že $0 < a < b$ a nechť $a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$, $b = b_0, b_1b_2b_3\ldots$. Je-li některé z těchto čísel racionální s periodou 9, zapíšeme je ve tvaru rozvoje s periodou 0. Poněvadž je $a < b$, existuje celé nezáporné číslo $n$ tak, že $a_k = b_k$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ a $a_n < b_n$. Poněvadž dále 9 není periodou čísla $a$, existuje takové přirozené číslo $i > n$, že $a_i \neq 9$.

Uvažme nyní racionální číslo $c = c_0, c_1c_2\ldots c_i$, kde $c_k = a_k$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots i-1$, $c_i = a_i + 1$. Je zřejmé, že $c > a$, je však také $c < b$, poněvadž $c_n = a_n < b_n$.

6. Ukažte, že pro libovolnou dvojici reálných čísel $a, b\,(a < b)$ existuje iracionální číslo $\alpha$ tak, že $a < \alpha < b$.

**Důkaz:** Uvažujme racionální číslo $c$ z předchozího příkladu a sestrojme číslo

$$\alpha = c_0, c_1c_2\ldots c_i 0100100010000100000100000001\ldots\,.$$

Tento desetinný rozvoj je neperiodický a tedy $\alpha$ je iracionální číslo. Z předchozího příkladu je též zřejmé, že $a < \alpha < b$.

7. Komplexní číslo $\alpha$ se nazývá <u>algebraické</u>, je-li kořenem nenulového polynomu s celočíselnými koeficienty, tj. když existuje $P \in \mathbf{Z}[x]$, $P \neq 0$, tak, že $P(\alpha) = 0$. Komplexní číslo, které není algebraické, se nazývá <u>transcendentní</u>. Ukažte, že množina všech algebraických čísel je spočetná.

**Důkaz:** Buď $n \in \mathbf{N}$, $P_n$ množina všech polynomů s celočíselnými koeficienty stupně nejvýše $n-$tého. Potom je

$$P_n \sim \underbrace{\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}}_{n+1-\mathit{krát}} = \mathbf{Z}^{n+1}$$

a podle příkladu 1.2.31 je $P_n$ spočetná. Podle příkladu 1.2.38 je spočetná i množina

$$\mathbf{Z}[x] = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\,.$$

Každý nenulový polynom z $P_n$ má v oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$ nejvýše $n$ kořenů. Tedy množina všech algebraických čísel jako spočetné sjednocení konečných množin je (znovu podle příkladu 1.2.38) nejvýše spočetná. Protože není konečná, je spočetná.

**Poznámka:** Algebraická jsou samozřejmě všechna racionální čísla. Je-li $r = \frac{p}{q}$ racionální, pak má příslušná algebraická rovnice tvar $qx - p = 0$. Algebraická jsou však také všechny

odmocniny z přirozeného čísla, např. $\sqrt{2}\,(x^2 - 2 = 0)$, $\sqrt[3]{3}\,(x^3 - 3 = 0)$ apod. Další algebraická čísla můžeme získat sčítáním výše uvedených. Třeba $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ je opět algebraické s odpovídající algebraickou rovnicí $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

Čísla $\pi$ a $e$ (základ přirozených logaritmů) jsou transcendentní. Důkaz tohoto tvrzení je však značně komplikovaný a přesahuje rámec tohoto textu. Nicméně stojí za povšimnutí, že právě množina všech transcendentních iracionálních čísel je nespočetná, jak ukážeme v následujícím příkladu 9.

8. Množina $D = \{x \in \mathbf{R}\,;\, 0,a_1a_2a_3\ldots\,,\ \text{kde } a_i \in \{0,9\}\,,\ i \in \mathbf{N}\}$ (tj. množina reálných čísel z intervalu $\langle 0,1\rangle$, která mají desetinný rozvoj, složený je z cifer 0 a 9) je nespočetná. Dokažte.

**Důkaz:** Uvědomte si, že každé $x \in \langle 0,1\rangle$ má nejvýše jeden dekadický zápis tvaru $0,a_1a_2a_3\ldots$, kde $a_i \in \{0,9\}$. Podle příkladu 1.2.38 je množina těchto zápisů nespočetná a tedy je nespočetná i množina $D$. (Cifru 1 v příkladu 1.2.38 nahradíme cifrou 9).

**Poznámka:** Buď $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$. Potom

$$a_1 \in \{0,9\} \iff x \in \left\langle 0, \frac{1}{10}\right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{10}, 1\right\rangle,$$

$$a_1, a_2 \in \{0,9\} \iff x \in \left\langle 0, \frac{1}{100}\right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{100}, \frac{1}{10}\right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{10}, \frac{91}{100}\right\rangle \cup \left\langle \frac{99}{100}, 1\right\rangle \quad \text{atd.}$$

Množinu $D$ dostaneme tedy takto: z intervalu $D_0 = \langle 0,1\rangle$ vypustíme „prostředních“ osm desetin. Tím dostaneme množinu $D_1$. Množina $D_n$ je sjednocení $2^n$ disjunktních uzavřených intervalů. Množinu $D_{n+1}$ dostaneme tak, že vypustíme z každého intervalu množiny $D_n$ „prostředních“ osm desetin. Potom je

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\,.$$

Množina $D$ se nazývá Cantorovo diskontinuum. Součet délek intervalů $D_n$ je $\frac{1}{5^n}$. Tedy $D$ lze pokrýt konečným sjednocením intervalů s libovolně malým součtem délek. Říkáme, že množina $D$ má míru 0. Nechť $D_n^0$ vznikne z $D_n$ vypuštěním krajních bodů intervalů $D_n$. Potom je množina $\widetilde{D} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n^0$ nespočetná, poněvadž vynechané množina bodů je spočetná.

9. Množina všech reálných čísel je nespočetná.

**Důkaz:** Důkaz provedeme sporem. Kdyby $\mathbf{R}$ byla spočetná, pak je i množina $D \subset \mathbf{R}$ z předchozího cvičení podle příkladu 1.2.29 spočetná, což je spor.

10. Rozhodněte, které z reálných čísel $x, y$ je větší.

    (a) $x = 1,\overline{1234512}\,,\ y = 1,\overline{12345}\,;$ [$y$]

    (b) $x = 1,\overline{12302}\,,\ y = 1,\overline{123}\,.$ [$y$]

11. Napište následující zlomky ve tvaru periodického desetinného rozvoje

    (a) $\dfrac{2}{3}$; [$0,\overline{6}$] (b) $\dfrac{11}{20}$; [$0,55$] (c) $\dfrac{3}{14}$; [$0,2\overline{142857}$] (d) $-\dfrac{2}{7}$; [$-0,\overline{285714}$]

12. Zapište následující periodické desetinné rozvoje ve tvaru zlomku

(a) $0,125\,;\quad \left[\dfrac{1}{8}\right]$ (b) $0,\overline{3}\,;\quad \left[\dfrac{1}{3}\right]$ (c) $2,4\overline{31}\,;\quad \left[2+\dfrac{427}{990}\right]$ (d) $0,2\overline{9}\,;\quad \left[\dfrac{3}{10}\right]$

13. Najděte pět prvých dolních a horních aproximací následujících čísel.

(a) $\frac{3}{10}$ $[\,0;1\,|\,0,3;0,4\,|\,0,30;0,31\,|\,0,300;0,301\,|\,0,3000;0,3001\,]$

(b) $\frac{1}{3}$ $[\,0;1\,|\,0,3;0,4\,|\,0,33;0,34\,|\,0,333;0,334\,|\,0,3333;0.3334\,]$

(c) $\frac{11}{9}$ $[\,1;2\,|\,1,2;1,3\,|\,1,22;1,23\,|\,1,222;1,223\,|\,1,2222;1,2223\,]$

(d) $-\frac{5}{8}$ $[\,-1;0\,|\,-0,7;-0,6\,|\,-0,63;-0,62\,|\,-0,626;-0,625\,|\,-0,6251;-0,6250\,]$

14. Najděte tři prvé dolní a horní aproximace následujících čísel.

(a) $\sqrt{2}\,;$ $[\,1;2\,|\,1,4;1,5\,|\,1,41;1,42\,]$

(b) $\sqrt{5}\,;$ $[\,2;3\,|\,2,2;2,3\,|\,2,23;2,24\,]$

(c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}\,;$ $[\,0,3;0,4\,|\,0,31;0,32\,|\,0,317;0,318\,]$

(d) $\sqrt{2}-\sqrt{3}\,;$ $[\,-0,4;-0,3\,|\,-0,32;-0,31\,|\,-0,318;-0,317\,]$

(e) $\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}\,;$ $[\,2;3\,|\,2,1;2,2\,|\,2,14;2,15\,]$

Návod: Hledejte desetinný rozvoj $a_0,a_1a_2\dots a_n$ tak, aby

$$[\,a_0,a_1a_2\dots a_n\,]^2 < 2 < [\,a_0,a_1a_2\dots(a_n+1)\,]^2$$

Pro výpočet druhé odmocniny je známý algoritmus. Pokud spočítáte dolní aproximaci

$$a_0,a_1a_2a_3a_4 \ \text{ pro } \ \sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}\,,$$

snadno ověříte všechny uvedené výsledky.

15. Ukažte, že

(a) mezi dvěma různými racionálními čísly existuje nekonečně mnoho racionálních čísel;
[ využijte toho, že pro $a<b$ je $a<\frac{a+b}{2}<b$ ]

(b) mezi dvěma různými reálnými čísly existuje nekonečně mnoho raconálních čísel;
[ podle příkladu 5 najděte dvě racionální čísla $a<b$ s touto vlastností a pak užijte bod a) ]

(c) mezi dvěma různými reálnými čísly existuje nespočetně mnoho iracionálních čísel; přesněji: množina všech takových čísel má stejnou mohutnost jako $\mathbf{R}$;
[ podle 1.2.32 je $(\alpha,\beta)-\mathbf{Q}\sim(\alpha,\beta)$ a podle 1.2.36 $(\alpha,\beta)\sim\mathbf{R}$ ]

16. Buďte $X,Y$ omezené neprázdné podmnožiny $\mathbf{R}$ a označme

$$X+Y=\{z\,;\,z=x+y\,,\,x\in X\,,\,y\in Y\}\,.$$

Potom je

$$\sup(X+Y)=\sup X+\sup Y\,;\qquad \inf(X+Y)=\inf X+\inf Y\,.$$

**Důkaz:** Zvolme $\varepsilon>0$. Podle definice supréma existuje $x_0\in X$ tak, že $\sup X-\frac{\varepsilon}{2}<x_0$ a $y_0\in Y$ tak, že $\sup Y-\frac{\varepsilon}{2}<y_0$. Odtud

$$\sup X+\sup Y-\varepsilon<x_0+y_0\in X+Y\,,$$

tedy $\sup X+\sup Y$ je nejmenší horní odhad množiny $X+Y$, tj. $\sup(X+Y)=\sup X+\sup Y$. Analogicky dokážeme tvrzení pro infimum.

17. Buď $A = \left\{r \in \mathbf{Q}\,;\, r^2 < 2\right\}$ . Najděte $\inf A$ a $\sup A$. $\left[\inf A = -\sqrt{2}\,, \sup A = \sqrt{2}\,\right]$

18. Najděte $\inf A$ a $\sup A$ následujících množin.

    (a) $A = (0,1)$; $[\inf A = 0\,; \sup A = 1\,]$

    (b) $A = \{n\}_{n=1}^{\infty}$; $[\inf A = \min A = 1\,; \sup A = +\infty\,]$

    (c) $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $[\inf A = 0\,; \sup A = \max A = 1\,]$

    (d) $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\inf A = \min A = 0\,; \sup A = \max A = \frac{3}{2}\,\right]$

    (e) $A = \left\{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right\}_{n=0}^{\infty}$ . $[\inf A = \min A = 1\,; \sup A = 2\,]$

19. Buďte $A \subset B \subset \mathbf{R}$. Ukažte, že $\sup A \le \sup B$ , $\inf A \ge \inf B$ .

    [Užijte definice supréma a infima]

20. Buďte $X, Y \in \mathbf{R}$. Označme

$$-X = \{x\,;\, -x \in X\}\,; \quad XY = \{z\,;\, z = xy\,,\, x \in X, y \in Y\}\,;$$

$$X - Y = \{z\,;\, z = x - y\,,\, ,x \in X, y \in Y\}\,.$$

   Ukažte, že platí

   (a) $\sup(-X) = -\inf X\,; \inf(-X) = -\sup X$ ; [užijte definice supréma a infima]

   (b) $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y\,; \inf(X - Y) = \inf X - \sup Y$ ; oba vzorce platí za předpokladu, že všechny členy na pravé straně jsou vlastní čísla;

   [užijte příkladu 16. Je $X - Y = X + (-Y)$ ]

   (c) Buďte $\emptyset \ne X, Y \subset \mathbf{R}_0^+$ omezené podmnožiny. Potom

$$\sup(XY) = \sup X \cdot \sup Y\,; \quad \inf(XY) = \inf X \cdot \inf Y\,.$$

   [užijte definice supréma a infima]

   (d) Buďte $\emptyset \ne X, Y \subset \mathbf{R}$ omezené podmnožiny. Označme

$$M = \{\,\sup X \cdot \sup Y\,; \sup X \cdot \inf Y\,; \inf X \cdot \sup Y\,; \inf X \cdot \inf Y\,\}$$

   Potom platí

$$\sup(XY) = \max M\,, \quad \inf(XY) = \min M\,;$$

   [uvažte jednotlivé možnosti; např. pro $X \cup Y \subset (-\infty, 0)$ je
   $\max M = \inf X \inf Y$ , $\min M = \sup X \sup Y$ ]

21. Buďte $A, B \subset \mathbf{R}$. Ukažte, že platí

   (a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ ; [užijte vlastnosti $A \subset A \cup B$ , $B \subset A \cup B$ ]

   (b) $\sup(A \cap B) \le \min\{\sup A\,, \sup B\}$ ; na příkladu ukažte, že může platit i ostrá nerovnost;

   [užijte vztahu $A \cap B \subset A$ , $A \cap B \subset B$ ;
   uvažte např. $A = (0,1) \cup \{-2,4\}$ , $B = (0,1) \cup \{-1,5\}$ ]

   (c) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A\,, \inf B\}$ ;

   (d) $\inf(A \cap B) \ge \max\{\inf A\,, \inf B\}$ ; na příkladu ukažte, že může platit i ostrá nerovnost;

   [uvažte např. $A = (0,1) \cup \{-2,4\}$ , $B = (0,1) \cup \{-1,5\}$ ]

22. Buďte $f, g : A \longrightarrow \mathbf{R}$ zobrazení, kde $A$ je neprázdná množina a nechť jsou množiny $f(A)$, $f(B)$ omezené. Ukažte, že

$$\inf f(A) + \inf g(A) = \inf\{f(A) + g(A)\} \leq \sup\{f(A) + g(A)\} = \sup f(A) + \sup f(B)\,.$$

[Využijte příkladu 16]

23. Buďte $a \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom nerovnost $|x - a| < \varepsilon$ platí právě když $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

**Důkaz:** Nechť $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, tj.

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \iff |x - a| < \varepsilon\,.$$

**Poznámka:** Uvedenou nerovnost a její ekvivalentní vyjádření budeme později v souvislosti s limitami posloupností a funkcí používat velmi často.

24. Ukažte, že platí

(a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ pro $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$;

(b) $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$ pro $\forall\, a, b, c \in \mathbf{R}$;

(c) $(a + b + c)^3 \geq 27abc$ pro $\forall\, a, b, c \in \mathbf{R}$ nezáporná.

**Důkaz:**

(a) Poněvadž $(a-b)^2 \geq 0$ pro $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$, dostaneme $a^2+b^2-2ab \geq 0$, neboli $a^2+b^2 \geq 2ab$.

(b) podle předchozího cvičení a) platí $a^2+b^2c^2 \geq 2abc$, $b^2+c^2a^2 \geq 2abc$, $c^2+a^2b^2 \geq 2abc$. Sečtením těchto nerovností dostaneme požadované tvrzení.

(c) Podle příkladu 1.1.18 platí $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Jestliže tuto nerovnost umocníme na třetí a vynásobíme 27, dostaneme naše tvrzení.

25. Ukažte, že platí

(a) $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a + |b|$ pro $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$; [ k důkazu 2. nerovnosti využijte vztah $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$. Pro důkaz 1. nerovnosti použijte 2. nerovnost na výraz $|a| = |a + b - b|$.]

(b) $\left|x + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \geq |x| - \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$, $x, x_k \in \mathbf{R}$;

$\left[\text{použijte předchozí příklad a tvrzení } \left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|\right]$

(c) $\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $x_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. [Rozepište daný součin]

26. Řešte následující nerovnice

(a) $\frac{x-2}{1-3x} > 0$; $\left[x \in \left(\frac{1}{3}, 2\right)\right]$

(b) $\frac{2x-5}{x+2} < 3$; $[x \in (-\infty, -11) \cup (-2, +\infty)]$

(c) $(x - 4)(x + 1)(1 + 2x)(3 - x)(x^2 - x + 1) > 0$; $\left[x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, 4)\right]$

(d) $|x - 1| < \frac{1}{2}$; $\left[x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right]$

(e) $|x+2| \geq 10$; $[\, x \in (-\infty, -12\rangle \cup \langle 8, +\infty) \,]$

(f) $|4x+3| > 4x + |2x-7|$; $\left[\, x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (2,5) \,\right]$

(g) $|x(1-x)| < 0{,}05$; $\left[\, x \in \left(\frac{5-\sqrt{30}}{10}, \frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right) \cup \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{30}}{10}\right) \,\right]$

27. Ukažte, že libovolná nespočetná podmnožina $\mathbf{R}$ obsahuje omezenou nespočetnou množinu. Ukažte příklad spočetné množiny takové, že každá její omezená podmnožina je konečná.

**Řešení:** Je-li $A$ daná nespočetná množina, pak

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,, \ \text{ kde } \ A_n = A \cap \langle -n, n\rangle\,, \ \ n = 1, 2, \dots\,.$$

Každá množina $A_n$ je omezená. Kdyby byly všechny množiny $A_n$ spočetné, musí být i $A$ spočetná, což je spor.

Ohledně druhého případu stačí vzít množinu $\mathbf{N}$ všech přirozených čísel.

28. Buď $\langle a_n, b_n\rangle$, $n = 1, 2, \dots$ systém do sebe vnořených intervalů. Ukažte, že

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n\rangle \neq \emptyset$$

a je to bod nebo uzavřený interval.

**Důkaz:** Množina $A = \{a_n\,;\, n \in \mathbf{N}\}$ je neprázdná a shora omezená (např. $b_1$). Tedy podle věty o suprému existuje $\sup A = a$. Množina $B = \{b_n\,;\, n \in \mathbf{N}\}$ je neprázdná a zdola omezená, tedy existuje $\inf B = b$. Buďte $i, j \in \mathbf{N}$, $i \leq j$. Potom $a_i \leq a_j \leq b_j \leq b_i$ a tedy $a_i \leq b_j$ a $a_j \leq b_i$. Odtud plyne, že pro všechna $i, j \in \mathbf{N}$ platí $a_i \leq b_j$ a tedy $a_i \leq b \,\forall\, i \in \mathbf{N}$ a následně $a \leq b$.

Buď $x \in \mathbf{R}$ takové, že $a \leq x \leq b$. Potom

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \ \text{ platí } \ a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n\,, \ \text{ tj. } \ x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n\rangle\,.$$

Je-li $x < a$, pak existuje $k \in \mathbf{N}$ tak, že $a_k > x$; je-li $x > b$, existuje $l \in \mathbf{N}$ tak, že $b_l < x$. Neboli, jeli $x < a$ nebo $x > b$, pak $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n\rangle$. Platí tedy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n\rangle = \{x \in \mathbf{R}\,;\, a \leq x \leq b\}\,,$$

což je jednoprvková množina pro $a = b$, nebo interval $\langle a, b\rangle$, je-li $a < b$.

29. Ukažte, že pro libovolná dvě čísla $x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq y$ existují jejich okolí, která jsou disjuktní.

$\left[\, \text{Volte } U(x;\varepsilon) \text{ a } U(y;\varepsilon) \text{ tak, že } \varepsilon < \frac{1}{2}|x-y| \,\right]$

30. Najděte systém do sebe vnořených intervalů tak, aby

(a) jejich průnik byl prázdný; $\left[\, (a_n, b_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right) \,\right]$

(b) jejich průnik obsahoval právě jeden bod; $\left[\, \langle a_n, b_n\rangle = \left\langle 0, \frac{1}{n}\right) \,\right]$

(c) jejich průnik obsahoval interval. $\left[\, \langle a_n, b_n\rangle = \left\langle -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right\rangle \,\right]$

31. Buďte $\alpha, \beta$ libovolná komplexní čísla. Ukažte, že platí

(a) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$;

(b) $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

**Důkaz:** Nechť $\alpha = a_1 + a_2 i$, $\beta = b_1 + b_2 i$.

(a) Potom $\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 - a_2 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$ a tedy

$$|\alpha \cdot \beta| = \sqrt{(a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2} = \sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2} =$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

(b) Podle cvičení 24a) platí $a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \geq 2 a_1 a_2 b_1 b_2$ a tedy

$$a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \geq a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + 2 a_1 a_2 b_1 b_2,$$

neboli

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2.$$

Po odmocnění dostaneme

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2| \geq a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

(Cauchyova nerovnost v $\mathbf{R}^2$) a odtud

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \geq a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2).$$

Po přepsání dostáváme dále

$$\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\right)^2 \geq (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2,$$

neboli

$$|\alpha| + |\beta| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} = |\alpha + \beta|.$$

(Minkowského nerovnost v $\mathbf{R}^2$). Využitím této nerovnosti dostaneme

$$|\alpha| = |\alpha + \beta - \beta| \leq |\alpha + \beta| + |-\beta| = |\alpha + \beta| + |\beta|,$$

tedy $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta|$. Analogicky

$$|\beta| = |\alpha + \beta| + |\alpha|, \text{ tedy platí též } |\beta| - |\alpha| \leq |\alpha + \beta|.$$

Z těchto dvou nerovností plyne prvá nerovnost v b).

32. Buďte $\alpha, \beta$ libovolná komplexní čísla. Ukažte, že platí

(a) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$, $\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$;

(b) $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$;

(c) $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ pro $\beta \neq 0$.

**Návod:** Užijte definici komplexně sdruženého čísla.

33. Řešte rovnici $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$ pro reálná $x,y$. $\left[\, x=-\frac{4}{11}\,,\ y=\frac{5}{11}\,\right]$

34. Řešte v komplexním oboru následující kvadratické rovnice.

(a) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$; $[\,x_1=3-i\,,\ x_2=-1+2i\,]$

(b) $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$. $[\,x_1=2+i\,,\ x_2=1-3i\,]$

**Návod:** Užijte vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

35. **Označení:** Buď $\varphi\in\mathbf{R}$. Komplexní jednotku $\cos\varphi+i\sin\varphi$ značíme také $e^{i\varphi}$. Vztah

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

je tzv. Eulerova identita. Později (pomocí funkčních řad) dokážeme, že funkce $e^z$ je definována pro všechna $z\in\mathbf{C}$ a že platí tato identita. Pomocí Eulerovy identity si snadno zapamatujeme Moivreovu větu:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{in\varphi}=\cos n\varphi+i\sin n\varphi\,.$$

36. Ukažte, že

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\,,\qquad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\,.$$

**Důkaz:** Je

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \ \text{ a tedy } \ e^{-i\varphi}=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)=\cos\varphi-i\sin\varphi\,.$$

Sečtením a odečtením těchto identit dostáváme příslušné vzorce.

37. Vypočtěte mocniny následujících komplexních čísel.

(a) $(1+i)^{25}$; $\left[\,2^{12}(1+i)\,\right]$

(b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; $\left[\,2^9(1-i\sqrt{3})\,\right]$

(c) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$; $[\,-64\,]$

(d) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{20}$. $\left[\,(2-\sqrt{3})^{20}\,\right]$

38. Řešte následující binomické rovnice.

(a) $z^3-i=0$; $\left[\,-i\,;\ \frac{\sqrt{3}+i}{2}\,;\ \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\,\right]$

(b) $z^4+4=0$; $[\,1+i\,;\ 1-i\,;\ -1+i\,;\ -1-i\,]$

(c) $z^6+27=0$; $\left[\,i\sqrt{3}\,;\ -i\sqrt{3}\,;\ \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\,;\ \frac{3-i\sqrt{3}}{2}\,;\ -\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\,;\ \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\,\right]$

39. Vyjádřete $\cos nx$ a $\sin nx$ pomocí mocnin $\cos x$ a $\sin x$.

**Řešení:** Je

$$\cos nx+i\sin nx=(\cos x+i\sin x)^n=\sum_{k=0}^{n} i^k\binom{n}{k}\cos^{n-k}x\,\sin^k x\,.$$

Srovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x\,\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x\,\sin^4 x + \cdots + R\,,$$

$$\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1} x\,\sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3} x\,\sin^3 x + \cdots + S\,,$$

kde poslední členy $R$ a $S$ závisí na tom, zda je $n$ sudé nebo liché. Pro $n$ sudé je

$$R = (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n x\,, \qquad S = (-1)^{\frac{n}{2}-1}\, n\,\cos x\,\sin^{n-1} x\,,$$

pro $n$ liché platí

$$R = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n\,\cos x\,\sin^{n-1} x\,, \qquad S = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n x\,.$$

**Poznámka:** Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, dostaneme

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$ $\qquad \sin 2x = 2\sin x\,\cos x\,;$

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\,\sin^2 x\,,$ $\qquad \sin 3x = 3\cos^2 x\,\sin x - \sin^3 x\,;$

$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\,\sin^2 x + \sin^4 x\,,$ $\qquad \sin 4x = 4\cos^3 x\,\sin x - 4\cos x\,\sin^3 x\,;$

$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\,\sin^2 x + 5\cos x\,\sin^4 x\,,$

$\sin 5x = 5\cos^4 x\,\sin x - 10\cos^2 x\,\sin^3 x + \sin^5 x\,;$

$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x\,\sin^2 x + 15\cos^2 x\,\sin^4 x - \sin^6 x\,,$

$\sin 6x = 6\cos^5 x\,\sin x - 20\cos^3 x\,\sin^3 x + 6\cos x\,\sin^5 x\,.$

40. Vypočítejte $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, $\cos^4 x$, $\sin^4 x$ pomocí $\cos kx$ a $\sin kx$.

**Řešení:** $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\,,$ $\quad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\,.$
$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)\,,$ $\quad \sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)\,.$ Užijte příkladu 36.

# Kapitola 2

# Posloupnosti.

## 2.1 Základní vlastnosti posloupností.

1. Najděte předpis pro $n-$tý člen posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , je-li

   (a) $x_1 = a$ , $x_{n+1} = \frac{n+1}{x_n+1}$ , $n \in \mathbf{N}$ , $a \in \mathbf{R}$ je dané číslo ;

   (b) $x_{n+1} = ax_n + b$ , $n \in \mathbf{N}$ , $x_1, a, b \in \mathbf{R}$ jsou daná čísla ;

   (c) $x_1 = A$ , $x_2 = B$ , $ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$ , $n \in \mathbf{N}$ , $a, b, c, A, B \in \mathbf{R}$ , $a \neq 0 \neq b$ jsou daná čísla.

**Řešení:**

(a) Jestliže si napíšeme několik prvých členů posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , zjistíme, že

$$x_2 = \frac{2}{a+1} = \frac{2(a\alpha_1 + \beta_1)}{a\alpha_2 + \beta_2} , \quad x_3 = \frac{3(a+1)}{a+3} = \frac{3(a\alpha_2 + \beta_2)}{a\alpha_3 + \beta_3} ,$$

$$x_4 = \frac{4(a+3)}{4a+6} \frac{4(a\alpha_3 + \beta_3)}{a\alpha_4 + \beta_4} , \, x_5 = \frac{5(4a+6)}{8a+18} = \frac{2(a\alpha_4 + \beta_4)}{a\alpha_5 + \beta_5} ,$$

kde $\alpha_1 = 0$ , $\beta_1 = 1$ , $\alpha_2 = 1$ , $\beta_2 = 1$ . Způsob výpočtu koeficientů $\alpha_i, \beta_i$ , $i = 3, 4, \ldots$ bude zřejmý z dalších výpočtů. Je vidět, že platí

$$x_n = \frac{n(a\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})}{a\alpha_n + \beta_n} .$$

Ze zadaného rekurentního vzorce plyne

$$x_n = \frac{n}{x_{n-1}+1} = \frac{n}{\frac{(n-1)(a\alpha_{n-2}+\beta_{n-2})}{a\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} + 1} =$$

$$= \frac{n(a\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})}{a[\alpha_{n-1} + (n-1)\alpha_{n-2}] + \beta_{n-1} + (n-1)\beta_{n-2}} .$$

Srovnáním těchto dvou vyjádření dostáváme, že

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + n\alpha_{n-1} , \, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1 , \, n \geq 2 ;$$

$$\beta_{n+1} = \beta_n + n\beta_{n-1} , \, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1 , \, n \geq 2 .$$

Získaný předpis lze dokázat matematickou indukcí.

**Poznámka:** Z výsledku plyne, že se nám sice nepodařilo vyjádřit $x_n$ pomocí $n$ a $x_1$ , ale pro výpočet můžeme využít rekurentních vztahů pro $\alpha_n$ a $\beta_n$ , což jsou přirozená čísla.

(b) Poněvadž je
$$x_{k+1} = ax_k + b\,, \qquad x_k = ax_{k-1} + b\,,$$
dostaneme
$$x_{k+1} - x_k = a(x_k - x_{k-1}) = a^2(x_{k-1} - x_{k-2}) = \cdots = a^{k-1}(x_2 - x_1)\,.$$
Jestliže tyto rovnosti sečteme pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$, dostaneme
$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = (x_2 - x_1)\sum_{k=1}^{n-1} a^{k-1}$$
a tedy
$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1)\frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} = x_1 + [(a-1)x_1 + b]\,\frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} = a^{n-1}x_1 + b\,\frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}$$
pro $a \neq 1$. Je-li $a = 1$, je posloupnost $\{x_n\}_{n-1}^{\infty}$ aritmetická a $x_n = x_1 + (n-1)b$.

(c) Je-li $a = 0$ nebo $c = 0$, dostaneme předchozí případ. Hledejme nyní řešení ve tvaru $x_n = \lambda^n$, kde $\lambda$ je zatím neznámý parametr. Dosazením do dané rovnice dostaneme
$$\lambda^n(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$
a pokud je $|A| + |B| > 0$, musí být $\lambda^n \neq 0$ a tedy
$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0\,.$$
V dalším budeme rozlišovat tři případy.

i. Rovnice
$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
má dva reálné různé kořeny $\lambda_1 \neq \lambda_2$. (Je $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$, protože je $c \neq 0$). Pokusme se nyní hledat řešení ve tvaru
$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n\,,$$
kde $c_1$ a $c_2$ jsou neznámé konstanty. Využitím počátečních podmínek $x_1 = A$, $x_2 = B$ dostaneme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé $c_1, c_2$ tvaru
$$A = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2\,, \qquad B = c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2\,,$$
která má jediné řešení
$$c_1 = \frac{A\lambda_2 - B}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}\,, \qquad c_2 = \frac{B - A\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}\,.$$

ii. Nechť $\lambda_1 = \lambda_2$. Potom budeme hledat řešení ve tvaru
$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n\,.$$
Využití počátečních podmínek dostaneme soustavu
$$A = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_1\,, \qquad B = c_1\lambda_1^2 + 2c_2\lambda_1^2\,,$$
která má jediné řešení
$$c_1 = \frac{2A\lambda_1 - B}{\lambda_1^2}\,, \qquad c_2 = \frac{B - A\lambda_1}{\lambda_1^2}\,.$$

iii. Daná kvadratická rovnice má dvojici komplexně sdružených kořenů (vyjádřených v goniometrickém tvaru)

$$|\lambda|(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)\,, \quad \text{kde} \quad \sin\varphi \neq 0\,,$$

pro jejichž $n-$tou mocninu platí

$$|\lambda|^n(\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi)\,.$$

Pokusme se tedy nalézt řešení ve tvaru

$$x_n = |\lambda|^n(c_1\cos n\varphi + c_2\sin n\varphi)\,.$$

Využitím počátečních podmínek dostaneme soustavu

$$A = |\lambda|(c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi)\,, \qquad B = |\lambda|^2(c_1\cos 2\varphi + c_2\sin 2\varphi)$$

s jediným řešením

$$c_1 = \frac{A|\lambda|\sin 2\varphi - B\sin\varphi}{|\lambda|^2\sin\varphi}\,, \qquad c_2 = \frac{B\cos\varphi - A|\lambda|\cos 2\varphi}{|\lambda|^2\sin\varphi}\,.$$

**Poznámka:** Uvedené příklady jsou ukázky tzv. diferenčních rovnic, které hrají důležitou úlohu např. v numerických metodách. S analogickou metodou jako v příkladu c) se setkáme ve druhém semestru v souvislosti s řešením diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

2. Buď

$$a_n^{(1)} = 1\,,\ \forall\, n \in \mathbf{N}\,,\ \ a_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(r-1)} \ \text{ pro } \ r = 2, 3, \ldots\,.$$

Najděte předpis pro $a_n^{(r)}$ .

**Řešení:** Indukcí podle $r$ dokážeme, že

$$\forall\, r \in \mathbf{N} \ \text{ a } \ \forall\, n \in \mathbf{N} \ \text{ platí } \ a_n^{(r)} = \binom{n+r-2}{r-1}\,.$$

Pro $r = 1$ a pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$ je $a_n^{(1)} = \binom{n-1}{0} = 1$ a tvrzení platí.
Buď $r \in \mathbf{N}$ , $r \geq 2$ a nechť tvrzení platí pro $r - 1$ , tj.

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \ \text{ je } \ a_n^{(r-1)} = \binom{n+r-3}{r-2}\,.$$

Potřebujeme dokázat, že

$$\forall\, n \in \mathbf{N} \ \text{ platí } \ a_n^{(r)} = \binom{n+r-2}{r-1}\,.$$

Tuto část důkazu provedeme opět indukcí, tentokrát podle $n$ ($r$ bude pevné). Pro $n = 1$ je

$$a_1^{(r-1)} = \binom{r-2}{r-2} = 1 = \binom{r-1}{r-1} = a_1^{(r)}\,.$$

Nechť nyní $a_n^{(r)} = \binom{n+r-2}{r-1}$ . Potom

$$a_{n+1}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^{(r-1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(r-1)} + a_{n+1}^{(r-1)} =$$

$$a_n^{(r)} + a_{n+1}^{(r-1)} = \binom{n+r-2}{r-1} + \binom{n+r-2}{r-2} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

podle známé identity pro kombinační čísla.

3. Najděte prvých pět členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li

(a) $a_n = \frac{1}{2}(1+(-1)^n)$ ; $[\,0\,;\,1\,;\,0\,;\,1\,;\,0\,]$

(b) $a_n = n+(-1)^n$ ; $[\,0\,;\,3\,;\,2\,;\,5\,;\,4\,]$

(c) $a_n = \frac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}$ ; $\left[\,1\,;\,0\,;\,-\frac{3}{2}\,;\,0\,;\,\frac{5}{3}\,\right]$

(d) $a_n = (-1)^n\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$ ; $\left[\,0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,-\cos\frac{\pi}{5}\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\right]$

(e) $a_n = \frac{10^n-1}{3}$ ; $[\,3\,;\,33\,;\,333\,;\,3333\,;\,33333\,]$

(f) $a_n = \frac{10^{n-1}-1}{9}$ ; $[\,0\,;\,1\,;\,11\,;\,111\,;\,1111\,]$

(g) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ ; $\left[\,1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{9}\,;\,\frac{3}{32}\,;\,\frac{24}{625}\,\right]$

4. Ukažte, že posloupnost, pro jejíž členy platí vztah $a_{n-1} = \frac{a_n+a_{n-2}}{2}$, je aritmetická.

**Řešení:** Je $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \Longrightarrow a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = \cdots = a_2 - a_1 = d$.

5. Najděte předpis pro $n-$tý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li

(a) $\{\,8\,;\,14\,;\,20\,;\,26\,;\,32\,;\,\dots\}$ ; $[\,a_n = 2+6n\,]$

(b) $\left\{\,2\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{5}{4}\,;\,\frac{6}{5}\,;\,\dots\right\}$ ; $\left[\,a_n = \frac{n+1}{n}\,\right]$

(c) $\left\{\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{8}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{5}{32}\,;\,\dots\right\}$ ; $\left[\,a_n = \frac{n}{2^n}\,\right]$

(d) $\{\,1\,;\,5\,;\,1\,;\,5\,;\,1\,;\,5\,;\,\dots\}$ ; $[\,a_n = 3+2(-1)^n\,]$

(e) $\{\,-0,5\,;\,1,5\,;\,-4,5\,;\,13,5\,;\,-40,5\,;\,\dots\}$ ; $\left[\,a_n = \frac{(-3)^n}{6}\,\right]$

(f) $\left\{\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{3}{4}\,;\,\frac{4}{5}\,;\,\frac{5}{6}\,;\,\frac{6}{7}\,;\,\dots\right\}$ ; $\left[\,a_n = \frac{n+1}{n+2}\,\right]$

(g) $\left\{\,1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,2\,;\,\frac{1}{3}\,;\,3\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\dots\right\}$ ; $\left[\,a_{2n-1} = n\,,\ a_{2n} = \frac{1}{n+1}\,\right]$

6. Najděte předpis pro $n-$tý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li

(a) $a_{n+1} = a_n + \alpha$, $a_1, \alpha$ jsou daná čísla; $[\,a_n = a_1 + (n-1)\alpha\,]$

(b) $a_{n+1} = a_n \cdot q$, $a_1, q$ jsou daná čísla; $\left[\,a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\,\right]$

(c) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{n}{(n+2)a_n}$ ; $\left[\,a_n = \frac{n}{n+1}\,\right]$

(d) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ ; $[\,a_n = n!\,]$

(e) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{3(n+1)}$ ; $\left[\,a_n = \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}\cdot n!}\,\right]$

(f) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{n+2}{n\cdot a_n}$ ; $\left[\,a_n = \frac{n+1}{n}\,\right]$

(g) $a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, kde $b_{n+1} = b_n + d$, $b_1, d$ jsou daná čísla;
$\left[\,a_n = nb_1 + \frac{n(n-1)}{2}d\,;\right.$ užijte vlastnosti aritmetické posloupnosti$\left.\right]$

(h) $a =_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, kde $b_{n+1} = b_n \cdot q$; $b_1, q$ jsou daná čísla;
$\left[\,a_n = b_1\frac{q^n-1}{q-1}\right.$ pro $q \neq 1$, $a_n = nb_1$ pro $q = 1$;
užijte vlastnosti geometrické posloupnosti$\left.\right]$

(i) $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = \frac{n}{(n+2)a_n}$, $\alpha \in \mathbf{R} - \{0\}$ je dané; $\left[\,a_n = \frac{n}{n+1}\,(2\alpha)^{(-1)^{n-1}}\,\right]$

(j) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n+1}{n+1}$ ; $\left[\,a_n = \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n-1} k!\,\right]$

(k) $a_1 = a\,,\ a_{n+1} = (n+1)(a_n+1)\,,\ a \in \mathbf{R}$ je dané; $\quad \left[a_n = n!\left(a + \sum\limits_{k=1}^{n-1} k!\right)\right]$

**Návod:** V příkladech a) - k) si napište několik prvých členů dané posloupnosti.

(l) $a_1 = 0\,,\ a_2 = 1\,,\ a_{n+2} = \frac{3a_{n+1}-a_n}{2}\,;$ $\quad \left[a_n = 2 - 2^{2-n}\right]$

(m) $a_1 = 1\,,\ a_2 = 1\,,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\,,$ [tzv. Fibonacciho čísla];

$$\left[a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n\right)\right]$$

(n) $a_1 = \alpha\,,\ a_2 = \beta\,,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n\,,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ jsou daná;

$$\left[a_n = \frac{\beta-2\alpha}{3}(-1)^n + \frac{\alpha+\beta}{3}2^{n-1}\right]$$

(o) $a_1 = 0\,,\ a_2 = 1\,,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n\,;$ $\quad [a_n = n-1]$

(p) $a_1 = 1\,,\ a_2 = 0\,,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n\,;$ $\quad \left[a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}\right]$

**Návod:** V příkladech l) - p) použijte metody z příkladu 1c).

7. Vyjádřete následující součty

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ pro $p = 1, 2, 3, 4, 5\,;$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,q^k\,;$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k \cos kx\,,\ \sum_{k=1}^{n} r^k \sin kx\,;$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos kx\,,\ \sum_{k=1}^{n} k \sin kx\,;$ e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\,,\ \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}\,;$ f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\right]^2\,;$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\,.$

**Řešení:**

(a) Pro $p = 1$ dostaneme známý vzorec $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Buď nyní $p = 2$ a uvažujme identitu

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1\,.$$

Jestliže v této identitě budeme postupně dosazovat za $x = 1, 2, \ldots, n$ a všechny tyto nerovnosti sečteme, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + n\,.$$

Využitím rovnosti $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ dostaneme dále

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Pro $p = 3$ využijeme rovnosti

$$(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1\,.$$

Stejným postupem dostaneme

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2 .$$

Analogickýn způsobem najdeme

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} .$$

**Poznámka:** Je možné dokázat, že pro libovolné $p \in \mathbf{N}$ platí

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]} \frac{1}{2k}\binom{p}{2k-1} B_{2k}\, n^{p-2k+1} ,$$

kde $[x]$ je celá část čísla $x \in \mathbf{R}$, tj. celé číslo $k$ takové, že $k \le x < k+1$ a $B_n$ jsou tzv. Bernoulliho čísla, definovaná rekurentně vztahy

$$B_0 = 1 ,\ B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n-k+1} , \quad n \in \mathbf{N} .$$

Platí

$$B_1 = -\frac{1}{2} ,\ B_2 = \frac{1}{6} ,\ B_4 = -\frac{1}{30} ,\ B_6 = \frac{1}{42} ,\ B_8 = -\frac{1}{30} , \ldots ,\ B_{2n+1} = 0 ,\ n \in \mathbf{N} .$$

(b) Je-li $q = 1$, dostaneme předchozí případ ($p = 1$). Nechť je tedy $q \neq 1$. Podle vzorce pro $n-$tý částečný součet geometrické posloupnosti platí

$$(1-q)\sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n} kq^k - \sum_{k=1}^{n} kq^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} kq^k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)q^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} q^k - nq^{n+1} = \frac{q(1-q^n)}{1-q} - nq^{n+1} .$$

Odtud

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q(1-q^n)}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} .$$

(c) Uvažme výraz

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \cos kx + i\sum_{k=0}^{n} r^k \sin kx = \sum_{k=0}^{n} r^k e^{ikx}$$

podle Eulerovy identity (1.3.35). Toto je však součet $n+1$ členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q = re^{ix}$, tedy pro $re^{ix} \neq 1$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} r^k e^{ikx} = \frac{1 - r^{n+1} e^{i(n+1)x}}{1 - re^{ix}} = \frac{1 - r^{n+1}\cos(n+1)x - ir^{n+1}\sin(n+1)x}{1 - r\cos x - ir\sin x} =$$

$$= \frac{\left[1 - r^{n+1}\cos(n+1)x - ir^{n+1}\sin(n+1)x\right]\left[1 - r\cos x + ir\sin x\right]}{(1 - r\cos x)^2 + r^2\sin^2 x} =$$

$$= \frac{r^{n+2}\cos nx - r^{n+1}\cos(n+1)x - r\cos x + 1 + i\left[r^{n+2}\sin nx - r^{n+1}\sin(n+1)x + r\sin x\right]}{r^2 - 2r\cos x + 1}$$

po pronásobení a krátké úpravě. Jestliže nyní srovnáme reálné a imaginární části obou stran, dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \cos kx = \frac{r^{n+2}\cos nx - r^{n+1}\cos(n+1)x - r\cos x + 1}{r^2 - 2r\cos x + 1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \sin kx = \frac{r^{n+2}\sin nx - r^{n+1}\sin(n+1)x + r\sin x}{r^2 - 2r\cos x + 1}.$$

**Poznámka:** S uvedenými vyjádřeními se setkáme několikrát později, poprvé v souvislosti s nekonečnými řadami.

(d) Analogicky jako v předchozím příkladu můžeme psát

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos kx + i\sum_{k=1}^{n} k\sin kx = \sum_{k=1}^{n} ke^{ikx}.$$

Podle příkladu b) ($q = e^{ix}$) platí

$$\sum_{k=1}^{n} ke^{ikx} = \frac{e^{ix}(1 - e^{inx})}{(1 - e^{ix})^2} - \frac{ne^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{ix}\left[1 - e^{inx} - ne^{inx}(1 - e^{ix})\right]}{(1 - e^{ix})^2} =$$

$$= \frac{e^{ix}\left[1 - (n+1)e^{inx} + ne^{i(n+1)x}\right]}{-4e^{ix}\left(\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}\right)^2} = \frac{(n+1)e^{inx} - ne^{i(n+1)x} - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

jestliže využijeme vyjádření $\sin\frac{x}{2}$ pomocí exponenciely (1.3.36). Srovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos kx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\sin kx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

(e) Platí

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k+1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

Druhý součet rozepíšeme do tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

Pro $k \geq 2$ platí

$$k(k-1)\binom{n}{k} = k(k-1)\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n(k-1)\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} =$$

$$= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-2-k+2)!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

Tudíž

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} =$$

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

(f) Uvažujme identitu $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Podle binomické věty tedy platí

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}x^l = \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^j.$$

Jestliže v součinu na levé straně najdeme koeficient u $x^n$, dostaneme

$$\binom{n}{n}\binom{n}{0} + \binom{n}{n-1}\binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{0}\binom{n}{n}.$$

Poněvadž však platí, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, je tento koeficient roven

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\right]^2.$$

Odpovídající koeficient na pravé straně je $\binom{2n}{n}$, tedy

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\right]^2 = \binom{2n}{n}.$$

(g) Jestliže zlomek $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ rozložíme na parciální zlomky, dostaneme

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2}$$

a běžný výpočet dává soustavu lineárních rovnic

$$A + B + C = 0, \quad 3A + 2B + C = 0, \quad 2A = 1$$

s řešením $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$; tedy

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right\}.$$

Jestliže použijeme toto vyjádření, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}.$$

8. Vyjádřete následující součty.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; $\left[1-\frac{1}{n+1}\right]$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$; $\left[\frac{n}{3n+1}\right]$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$; $\left[\frac{n}{4n+1}\right]$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)$; [$n^2$; užijte vlastnosti aritmetické posloupnosti]

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$; [$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; užijte příklad 7a)]

(f) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$; [$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$; užijte příklad 7a)]

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$; [$\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$; užijte příklad 7c)]

(h) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$; [$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}$; užijte příklad 7c)]

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x$; [$\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$; užijte metody řešení příkladu 7c)]

(j) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos^2 kx$; [$\frac{n}{2}+\frac{\sin nx\,\cos(n+1)x}{2\sin x}$; užijte metody řešení příkladu 7c) a vzorce $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$]

(k) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{n}{k}$; [0; užijte binomickou větu na výraz $(1-1)^n$]

(l) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$; [$\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$; užijte postupu z příkladu 7e)]

(m) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k}$; [$(n+1)2^{n-1}$; užijte postupu z příkladu 7e)]

(n) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)\binom{n}{k}$; [$(n-2)2^{n-1}+1$; užijte postupu z příkladu 7e)]

(o) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$; [$\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$; užijte postupu z příkladu 7g)]

(p) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$; [$\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}$; užijte postupu z příkladu 7g)]

(q) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$. [$\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$; užijte postupu z příkladu 7g) a rozkladu $\frac{k^2}{4k^2-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4k^2-1+1}{4k^2-1}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4k^2-1}\right)$]

9. Ukažte, že jsou následující posloupnosti omezené.

a) $\left\{\frac{(-1)^n n+10}{\sqrt{n^2+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$; b) $\left\{\frac{\sqrt{n^2+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$; c) $\left\{n\left(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$;

d) $\left\{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$; e) $\left\{\sqrt{\frac{n^4+n}{n^2+1}}-\sqrt{n^2-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$; f) $\left\{\frac{n}{a^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $a>1$;

g) $\left\{n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$, $a>0$; h) $\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right\}_{n=1}^{\infty}$; i) $\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

**Důkaz:**

(a) Platí

$$|(-1)^n n+10| \le |(-1)^n n|+10 = n+10\,; \qquad \sqrt{n^2+1}\ge n\,,$$

tedy

$$\left|\frac{(-1)^n n+10}{\sqrt{n^2+1}}\right| \le \frac{n+10}{n} = 1+\frac{10}{n} \le 11\,.$$

(b) Je

$$n^2+2 \le n^2+2n+1\,,\ \text{ tedy } \sqrt{n^2+2}\le n+1 \ \text{ a odtud}$$

$$0 \le \frac{\sqrt{n^2+1}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)} \le \frac{n+1}{(n+3)(\sqrt{n}+1)} \le \frac{1}{\sqrt{n}+1} \le 1\,.$$

(c) Provedeme nejdříve následující úpravu:

$$n\left(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}\right) = \frac{n(n^4+n-n^4+n)}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}} = \frac{2n^2}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}}\,.$$

Nyní platí

$$\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n} \ge \sqrt{n^4+n} \ge \sqrt{n^4} = n^2\,,$$

a tedy

$$\frac{2n^2}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4-n}} \le \frac{2n^2}{n^2} = 2\,.$$

(d) Využitím vzorce $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ můžeme přepsat $n-$tý člen dané posloupnosti do tvaru

$$\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3-1} = \frac{2}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{n^6-1}+\sqrt[3]{(n^3-1)^2}}\,.$$

Protože jmenovatel tohoto zlomku je neustále větší než 1, platí

$$\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}\le 2\,.$$

(e) Nejdříve odhadneme prvou odmocninu. Platí

$$\frac{n^4+n}{n^2+1} = \frac{n^2\left(n^2+\frac{1}{n}\right)}{n^2+1} \le n^2 \ \text{ a odtud}$$

$$0 \le \sqrt{\frac{n^4+n}{n^2+1}}-\sqrt{n^2-1} \le n-\sqrt{n^2-1} = \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} \le 1\,.$$

(f) Podle Bernoulliho nerovnosti (cvičení 1.1.16) platí

$$a^n = (1+a-1)^n \ge n(a-1) \ \text{ a odtud } \ \frac{n}{a^n} \le \frac{n}{n(a-1)} = \frac{1}{a-1}\,.$$

(g) Nechť je nejdříve $a > 1$. Potom je též $a^{\frac{1}{n}} > 1$ a všechny členy dané posloupnosti jsou kladné. Jestliže využijeme vzorce

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}),$$

můžeme psát

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{a-1}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} + \cdots + \sqrt[n]{a} + 1} \leq \frac{a-1}{n} \text{ a odtud } n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) \leq a - 1.$$

Je-li $a = 1$, jsou všechny členy dané posloupnosti rovny 0 a tato posloupnost je omezená. Pro $0 < a < 1$ jsou všechny členy posloupnosti záporné (je $a^{\frac{1}{n}} < 1$) a ukážeme, že posloupnost $\left\{n\left(1 - a^{\frac{1}{n}}\right)\right\}$ je shora omezená. Napišme $a$ ve tvaru $a = \frac{1}{b}$, kde $b > 1$. Potom je

$$n\left(1 - a^{\frac{1}{n}}\right) = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{b}}\right) = n\frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}} \leq n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right) \leq b - 1$$

podle prvé části důkazu.

(h) Označme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Je $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{1}{2}$ a pro liché $n = 2l - 1$ platí

$$s_{2l+1} = s_{2l-1} - \frac{1}{2l} + \frac{1}{2l+1} \leq s_{2l-1} \leq s_1.$$

Pro sudá $n = 2j$ dostáváme

$$s_{2j+2} = s_{2j} + \frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2j+2} \geq s_{2j} \geq s_2.$$

Jestliže tyto výsledky shrneme, je vidět, že platí

$$1 = s_1 \geq s_{2j+1} = s_{2j} + \frac{1}{2j+1} \geq s_{2j} \geq s_2 = \frac{1}{2},$$

tedy

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \leq 1.$$

(i) Platí $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 1 + \sum\limits_{k=3}^{n} \frac{k}{2^k}$ a pro $k \geq 3$ je

$$2^k = (1+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \geq \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}.$$

Tedy $\frac{k}{2^k} \leq \frac{6}{(k-1)(k-2)}$. Pro součet $\sum\limits_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)(k-2)}$ platí

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)(k-2)} = \sum_{l=1}^{n-2} \frac{1}{1(l+1)} = \sum_{l=1}^{n-2} \left[\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right] = 1 - \frac{1}{n-1}.$$

Odtud plyne, že

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq 1 + 6\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \leq 7.$$

**Poznámka:** Uvedené postupy nejsou samozřejmě jediné a pravděpodobně také ne nejlepší. Kařdý si může zvolit jiný postup a popřípadě nalézt vhodnější odhady.

10. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných čísel. Potom je posloupnost

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\,, \text{ omezená právě když je omezená posloupnost } y_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)\,,\ n \in \mathbf{N}\,.$$

**Důkaz:** Buď $M = \sup\{s_n\,;\, n \in \mathbf{N}\}$. Je-li $M < 1$, položme $s_0 = n_0 = 0$. Pokud $M \geq 1$, existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $s_{n_0} \in (M-1, M)$. Pak pro $n > n_0$ platí

$$\widetilde{s_n} = s_n - s_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{x_k} \leq M - s_{n_0} = q\,, \quad q \in (0,1)\,.$$

Pak pro $n > n_0$ je

$$\widetilde{y_n} = \prod_{k=n_0+1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right) = 1 + \sum_{i=n_0+1}^{n}\frac{1}{x_i} + \sum_{i,j=n_0+1,i\neq j}^{n}\frac{1}{x_i x_j} + \cdots + \frac{1}{x_{n_0+1}\cdot \ldots \cdot x_n} \leq$$

$$\leq 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-n_0} \leq \frac{1}{1-q}\,.$$

tedy pro $n > n_0$ máme

$$y_n \leq \frac{1}{1-q}\prod_{k=1}^{n_0}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)\,.$$

Odtud plyne, že $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost. Protože dále platí

$$y_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_k}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} + \cdots > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} = s_n\,,$$

vidíme, že není-li posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená, pak také posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená.

11. Ukažte, že jsou následující posloupnosti omezené.

(a) $\left\{\frac{4n^2+1}{3n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\quad\left[\text{užijte rozkladu } \frac{4n^2+1}{3n^2+2} = \frac{4}{3} - \frac{5}{3(3n^2+2)}\right]$

(b) $\left\{\frac{2n^2-1}{2+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\quad$[proveďte analogicky jako v příkladu a)]

(c) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{3n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\quad\left[\text{užijte odhadu } |n+(-1)^n| \leq n+1\right]$

(d) $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\quad\left[\text{použijte odhadu } \sqrt{n^2+1} \geq n\right]$

(e) $\left\{\frac{3n+5}{\sqrt{4n^2-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\quad\left[\text{užijte odhadu } \sqrt{4n^2-1} \geq \sqrt{4n^2-4n+1} = 2n-1\right]$

(f) $\left\{\sqrt{n^2+1}-n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\quad$[užijte postupu z příkladu 9c)]

(g) $\left\{\frac{2^n+1}{3^n-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\quad\left[\text{využijte odhadů } 2^n+1 \leq 2^{n+1}\,,\ 3^n-2 \geq 3^{n-1}\right]$

(h) $\left\{\frac{\ln^2 n+10}{\ln^2 n^2+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\quad\left[\text{vyjádřete } \ln^2 n^2\right]$

(i) $\{\log(3n+5) - \log(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\quad\left[\text{odhadněte } \frac{3n+5}{n+1}\right]$

(j) $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\quad\left[\text{najděte součet } \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right]$

(k) $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} kq^k\right\}_{n=1}^{\infty}$, $|q| < 1$. $\qquad$ $\big[$užijte příklady 7b) a 9f) $\big(q = \frac{1}{a}\,,\ |a| > 1\big)\big]$

12. Ukažte, že následující posloupnosti jsou neomezené.

a) $\left\{\sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$; $\qquad$ b) $\left\{\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n^3}} - n\right\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\left\{\dfrac{3^n-2^n}{2^n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$; $\qquad$ d) $\left\{\sqrt[n]{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

e) $\left\{\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right\}_{n=1}^{\infty}$, kde $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)$, $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)$;

f) $\left\{\dfrac{a^n}{n^k}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $|a| > 1$, $k \in \mathbf{R}$; $\quad$ g) $\left\{\dfrac{n+1}{\log(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$; $\quad$ h) $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2\right\}_{n=1}^{\infty}$.

**Důkaz:** Abychom ukázali, že je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neomezená, musíme pro každé $M \in \mathbf{R}$ nalézt index $n(M)$ tak, že $|a_{n(M)}| > M$. Poněvadž je posloupnost přirozených čísel $\{n\}$ neomezená, stačí ke každému $n \in \mathbf{N}$ nalézt takový index $k_n$, že $|a_{k_n}| > n$.

(a) Je

$$\sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1} = \frac{2n^3}{\sqrt{n^4+n^3+1} + \sqrt{n^4-n^3+1}}$$

a poněvadž

$$\sqrt{n^4+n^3+1} + \sqrt{n^4-n^3+1} \le 2\sqrt{n^4+n^3+1} \le 2\sqrt{3n^4} \le 4n^2\,,$$

dostaneme

$$\sqrt{n^4+n^3+1} - \sqrt{n^4-n^3+1} \ge \frac{2n^3}{4n^2} = \frac{n}{2}$$

a stačí volit $k_n = 2n$.

(b) Provedeme analogickou úpravu jako v případě a).

$$\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n^3}} - n = \frac{(-1)^n\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n^3}} + n}$$

a poněvadž je

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n^3}} + n}\,,$$

můžeme použít odhadu

$$\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n^3}} + n \le 3n\,.$$

Platí tedy

$$|a_n| \ge \frac{\sqrt{n^3}}{3n} = \frac{1}{3}\sqrt{n}\,.$$

Posloupnost $b_n = \frac{1}{3}\sqrt{n}$ je neomezená; je totiž $3b_{n^2} = n$ a odtud plyne, že i posloupnost $\{a_n\}$ je neomezená.

(c) Výraz nejdříve upravíme. Je

$$\frac{3^n-2^n}{2^n+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{2^n}}$$

a poněvadž $\left(\frac{2}{3}\right)^n\le\frac{2}{3}$, můžeme psát, že

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\ge 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\,,\quad 1+\frac{1}{2^n}\le 2\ \text{ a tudíž }\ \frac{3^n-2^n}{2^n+1}\ge\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Posloupnost $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je neomezená. Platí totiž

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{2}\right)^n\ge\frac{n}{2}$$

podle Bernoulliovy nerovnosti (cvičení 1.1.16).

(d) Je-li $n$ sudé, platí

$$n!=1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\ \ldots\ \cdot n\,,$$

je-li $n$ liché, je

$$n!=1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\ \ldots\ \cdot n\,.$$

V každém případě je

$$n!\ge\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\quad\text{a odtud}\quad\sqrt[n]{n!}\ge\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{1}{n}}=\sqrt{\frac{n}{2}}\,.$$

(e) Je

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \ldots\ \cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}=2\cdot\frac{4}{3}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{2n}{2n-1}=$$

$$=(1+1)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right).$$

Podle příkladu 10 je tato posloupnost omezená právě když je omezená posloupnost

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\right\}_{n=1}^{\infty}.\ \text{ Označme }\ s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\,.$$

Potom

$$s_{2^n}\ge\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2^1\,\check{c}len\mathring{u}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}}_{2^2\,\check{c}len\mathring{u}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\,\check{c}len\mathring{u}}\right)\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+2^1\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right).$$

Protože posloupnost $\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{2}\right)\right\}$ není omezená, není omezená ani $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\right\}$.

(f) Poněvadž platí
$$\left|\frac{a^n}{n^k}\right| = \frac{|a|^n}{n^k}\,,$$
stačí ukázat, že daná posloupnost je neomezená pro $a > 1$. Nechť je nejdříve $k \le 0$. Potom platí
$$\frac{a^n}{n^k} \ge a^n = (1 + a - 1)^n \ge n(a-1)$$
a daná posloupnost je neomezená.
Je-li $k \ge 0$, pak existuje celé číslo $r = [k]$ tak, že $r \le k < r+1$. Odtud plyne, že
$$n^r \le n^k \le n^{r+1} \quad \text{a tedy} \quad \frac{a^n}{n^r} \ge \frac{a^n}{n^k} \ge \frac{a^n}{n^{r+1}}\,.$$
Z této nerovnosti plyne, že posloupnost $\left\{\frac{a^n}{n^k}\right\}$ je neomezená právě když je neomezená posloupnost $\left\{\frac{a^n}{n^r}\right\}$. Stačí tedy předpokládat, že $k \in \mathbf{N}$. Dále platí
$$a^n = (1 + a - 1)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}(a-1)^l \ge \binom{n}{k+1}(a-1)^{k+1}$$
pro $n > k$. Tedy
$$\frac{a^n}{n^k} \ge \frac{1}{n^k}\binom{n}{k+1}(a-1)^{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{n^k(k+1)!}(a-1)^{k+1} =$$
$$= \frac{1}{(k+1)!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)(n-k)(a-1)^{k+1}\,.$$
Protože je $\frac{j}{n} \le \frac{k}{n}$ pro $j = 1, 2, \dots, k-1$, platí
$$\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right) \ge \prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-1}$$
a pro $n \ge 2k$ je dokonce $\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{k-1} \ge \frac{1}{2^{k-1}}$. Odtud plyne, že pro $n \ge 2k$ platí
$$\frac{a^n}{n^k} \ge \frac{n-k}{2^{k-1}(k+1)!}(a-1)^{k+1}$$
a daná posloupnost je neomezená.

(g) Platí
$$\left\{\frac{n+1}{\log(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n}{\log n}\right\}_{n=2}^{\infty} \quad \text{a označme } x_n = \frac{n}{\log n}\,.$$
Nyní je $x_{10^n} = \frac{10^n}{n}$ a podle předchozího příkladu je tato posloupnost neomezená ($a = 10$, $k = 1$).

(h) Označme
$$s_n = \left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2\right\}.$$
Je zřejmé, že
$$1 = s_1 < s_3 < \dots < s_{2n+1}$$
a poněvadž
$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (2n)^2 + (2n+1)^2 = s_{2n-1} + 4n + 1 \ge s_1 + 4n + 1 > n\,,$$

plyne odtud neomezenost dané posloupnosti. Analogicky

$$0 = s_0 > s_2 > \cdots > s_{2n}$$

a vzhledem k tomu, že

$$s_{2n} = s_{2n-2} + (2n-1)^2 - 2n^2 = s_{2n-2} - 4n + 1 \leq -4n + 1\,,$$

není posloupnost $\{s_n\}$ omezená zdola ani shora.
Poněkud delší, ale také zábavnější, je nalezení součtu příslušné sumy. Dá se ukázat, že

$$s_n = (-1)^{n+1} \left\{ \left[ \frac{n-1}{2} \right] + 1 \right\} \frac{2n + 1 + (-1)^n}{2}\,,$$

kde $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ znamená opět celou část daného čísla.

**Poznámka:** Posloupnosti z příkladů a), c), d), e), g) a f) pro $a > 1$ jsou posloupnosti nezáporných čísel, tedy omezené zdola. Posloupnosti z příkladů b) a f) pro $a < -1$ nejsou omezené shora ani zdola.

13. Ukažte, že následující posloupnosti nejsou omezené. Které z nich jsou omezeny zdola resp. shora?

(a) $\{(-1)^n n\}$ ; [napište si $a_{2n-1}$ a $a_{2n}$]

(b) $\{n^2 - n\}$ ; [užijte úpravy $n^2 - n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ; zdola omezená]

(c) $\{5^n - 4^n\}$ ; [užijte metody příkladu 12c) ; zdola omezená]

(d) $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ ; [napište si několik členů dané posloupnosti ; zdola omezená]

14. Ukažte, že následující posloupnosti jsou monotonní, počínaje jistým indexem $n_0$.

$$\text{a)} \quad \left\{ \frac{4^{n-1} + 3^{n-1}}{4^n + 3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{b)} \quad \left\{ \frac{(3n+1)^2}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$\text{c)} \quad \{nq^n\}_{n=1}^{\infty}\,,\ 0 < q < 1\,; \qquad \text{d)} \quad \left\{ n^{\frac{1}{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{e)} \quad \{n - 6\log n\}_{n=1}^{\infty}\,;$$

$$\text{f)} \quad \left\{ \frac{a^n - 1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}\,,\ a > 0\,,\ a \neq 1\,; \qquad \text{g)} \quad \left\{ n\left(1 - a^{\frac{1}{n}}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}\,,\ a > 0\,,\ a \neq 1\,;$$

$$\text{h)} \quad \left\{ \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{i)} \quad \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)} - \frac{1}{2(n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

**Důkaz:**

(a) Jestliže vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem $4^{n-1}$, dostaneme

$$\frac{4^{n-1} + 3^{n-1}}{4^n + 3^n} = \frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{4 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} = \frac{1 + q^{n-1}}{4 + 3q^{n-1}}\,, \qquad \left(q = \frac{3}{4}\right).$$

Ukážeme, že tato posloupnost je klesající, tj.

$$\frac{1 + q^n}{4 + 3q^n} < \frac{1 + q^{n-1}}{4 + 3q^{n-1}}\,.$$

Po odstanění zlomků a jednoduché úpravě dostaneme $q^n < q^{n-1}$, neboli $q < 1$. Stačí tedy volit $n_0 = 1$.

(b) Jestliže vyjdeme z předpokladu, že daná posloupnost je opět klesající, dostaneme nerovnost

$$\frac{(3n+1)^2}{3^n} > \frac{(3n+4)^2}{3^{n+1}}\,,$$

která je ekvivalentní s nerovností

$$18n^2 - 6n - 13 > 0\,.$$

Tato nerovnost je splněna pro $n \geq 2$, tedy $n_0 = 2$.

(c) Ukážeme opět, že daná posloupnost je klesající, tedy

$$(n+1)q^{n+1} < nq^n \quad \text{a odtud} \quad q < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Řešením této nerovnosti vzhledem k $n$ dostaneme

$$n+1 > \frac{1}{1-q}\,, \quad \text{neboli} \quad n_0 = \left[\frac{1}{1-q}\right]\,.$$

(d) Pokusíme se dokázat, že

$$n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}\,.$$

Jestliže tuto nerovnost povýšíme na $n(n+1)$, dostaneme

$$n^{n+1} > (n+1)^n\,, \quad \text{neboli} \quad n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Ukážeme nyní, že stačí volit $n_0 = 3$, poněvadž posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená číslem 3. Platí totiž

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!\,n^k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\,.$$

Protože je každý člen v horním součinu menší než 1, dostáváme odtud dále

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} < 2+1 = 3\,.$$

Pro $k \geq 2$ totiž platí $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot k \geq 2^{k-1}$.

(e) Ukážeme, že tato posloupnost je rostoucí, tedy

$$n+1-6\log(n+1) > n - 6\log n \quad \text{a odtud} \quad 1 > 6\log\frac{n+1}{n} = 6\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\,.$$

Po odlogaritmování dostaneme nerovnost

$$1+\frac{1}{n} < \sqrt[6]{10}\,, \quad \text{tedy} \quad n > \frac{1}{\sqrt[6]{10}-1}$$

a stačí volit

$$n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[6]{10}-1}\right] + 1\,.$$

(f) Ukážeme, že daná posloupnost je rostoucí, tj. že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí

$$\frac{a^{n+1}-1}{n+1} > \frac{a^n-1}{n}\,,$$

neboli pro $a \in (0,1)$ je

$$\frac{a^{n+1}-1}{a^n-1} < \frac{n+1}{n}$$

a pro $a > 1$ platí

$$\frac{a^{n+1}-1}{a^n-1} > \frac{n+1}{n}\,.$$

Samozřejmě je

$$\frac{a^{n+1}-1}{a^n-1} = \frac{(a-1)(a^n+a^{n-1}+\cdots+a+1)}{(a-1)(a^{n-1}+\cdots+a+1)} = \frac{a^n+a^{n-1}+\cdots+a+1}{a^{n-1}+\cdots+a+1}\,.$$

Tedy pro $a \in (0,1)$ máme

$$\frac{a^{n+1}-1}{a^n-1} = \frac{a^n}{a^{n-1}+\cdots+a+1}+1 \le \frac{a^n}{na^{n-1}} = 1+\frac{a}{n} < 1+\frac{1}{n}$$

a pro $a > 1$ analogicky

$$\frac{a^{n+1}-1}{a^n-1} = \frac{a^n}{a^{n-1}+\cdots+a+1}+1 \ge \frac{a^n}{na^{n-1}} = 1+\frac{a}{n} > 1+\frac{1}{n}\,.$$

(g) Ukážeme, že daná posloupnost je rostoucí, tj. že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ je

$$(n+1)\left(1-a^{\frac{1}{n+1}}\right) > n\left(1-a^{\frac{1}{n}}\right)\,,$$

tzn. pro $a \in (0,1)$ je

$$\frac{1-a^{\frac{1}{n}}}{1-a^{\frac{1}{n+1}}} < \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$$

a pro $a > 1$ platí

$$\frac{1-a^{\frac{1}{n}}}{1-a^{\frac{1}{n+1}}} > \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}\,.$$

Označme $t = a^{\frac{1}{n(n+1)}}$. Pak

$$L = \frac{1-a^{\frac{1}{n}}}{1-a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{1-t^{n+1}}{1-t^n} = \frac{1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n}{1+t+\cdots+t^{n-1}} = 1+\frac{t^n}{1+t+\cdots+t^{n-1}}\,.$$

Pro $a \in (0,1)$ je $t \in (0,1)$ a tedy

$$L \le 1+\frac{t^n}{nt^{n-1}} = 1+\frac{t}{n} < 1+\frac{1}{n}$$

a pro $a > 1$ je $t > 1$, tedy

$$L \ge 1+\frac{t^n}{nt^{n-1}} = 1+\frac{t}{n} > 1+\frac{1}{n}\,.$$

(h) Výraz si upravíme. Platí

$$\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n} k\,k! = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}[(k+1)-1]k! = \frac{1}{(n+1)!}\left[\sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n}k!\right] =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[\sum_{k=2}^{n+1} k! - \sum_{k=1}^{n} k!\right] = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}\,.$$

Protože $\{(n+1)!\}$ je rostoucí posloupnost, je $\left\{\frac{1}{(n+1)!}\right\}$ klesající a obě posloupnosti $\left\{-\frac{1}{(n+1)!}\right\}$ a $\left\{1-\frac{1}{(n+1)!}\right\}$ jsou rostoucí.

(i) Po úpravě

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)} - \frac{1}{2(n+1)} = 1 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) - \frac{1}{2(n+1)} =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1}\right) - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

je vidět, že daná posloupnost je klesající.

15. Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní posloupnost. Ukažte, že $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ je také monotonní.

**Důkaz:** Buď $\{x_n\}$ rostoucí. Pak $x_k < x_{n+1}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Sečtením těchto nerovností dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} x_k < n x_{n+1}\,.$$

Přičteme-li k této nerovnosti výraz $n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, dostaneme

$$(n+1)\sum_{k=1}^{n} x_k < n \sum_{k=1}^{n+1} x_k\,. \quad \text{Odtud} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k < \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ a tedy posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Analogicky pro klesající, nerostoucí a neklesající posloupnost.

16. Ukažte, že jsou následující posloupnosti monotonní, počínaje jistým indexem $n_0$.

(a) $\left\{\frac{n+1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$; [klesající; $n_0 = 1$]

(b) $\left\{\frac{3n+4}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$; [rostoucí]

(c) $\left\{\frac{100n}{n^2+16}\right\}_{n=1}^{\infty}$; [klesající; $n_0 = 4$]

(d) $\left\{\frac{2^n+1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; [klesající]

(e) $\left\{\frac{1-n}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$; [klesající]

(f) $\left\{\sqrt{3n-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$; [rostoucí]

(g) $\{2^n - 100n\}_{n=1}^{\infty}$; [rostoucí; $n_0 = 7$]

(h) $\left\{\frac{100^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$; [klesající; $n_0 = 100$]

(i) $\left\{\frac{2^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; [rostoucí; $n_0 = 2$]

(j) $\left\{\frac{n^3}{n^2-3}\right\}_{n=1}^{\infty}$; [rostoucí; $n_0 = 3$, ukažte, že $\frac{n^3}{n^2-3} < \frac{(n+1)^3}{(n+1)^2-3} \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow n^4 + 2n^3 - 8n^2 - 9n - 3 = (n-3)(n^3 + 5n^2 + 7n + 12) + 33 > 0$]

(k) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{klesající; využijte úpravy } \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right]$

(l) $\left\{n^3-6n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{rostoucí; } n_0=7,\ \text{užijte vyjádření } n^3-6n^2=n^2(n-6)\right]$

(m) $\left\{\frac{n^2}{n^3+32}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{klesající; } n_0=4,\ \text{postupujte analogicky jako v příkladu j)}\right]$

(n) $\left\{\sqrt[3]{n^3-1}-n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{rostoucí; využijte úpravy } \sqrt[3]{n^3-1}-n=\frac{-1}{\sqrt[3]{(n^3-1)^2}+n\sqrt[3]{n^3-1}+n^2}\right]$

(o) $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+7}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{rostoucí; } n_0=7,\ \text{ukažte, že} \frac{(n+1)^2}{n^2+7}<\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2+7}\Longleftrightarrow\right.$

$\left.\Longleftrightarrow 2n^2-10n-20>0\right]$

(p) $\left\{\frac{n-3}{\sqrt{n^2+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{rostoucí; } n_0=4,\ \text{řešte jako příklad o)}\right]$

(q) $\left\{3^n-2^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{rostoucí; užijte vyjádření } 3^n-2^n=2^n\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}\right]$

(r) $\left\{2^n-3^{n-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{klesající; užijte vyjádření; } 2^n-3^{n-2}=-2^n\left\{\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}\right]$

(s) $\left\{\ln(n+1)-\ln n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{klesající; uvažte, že } \ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

(t) $\left\{\ln(n^2+9n)-2\ln n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{klesající; řešte analogicky jako cvičení s)}\right]$

(u) $\left\{\frac{n^3}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{klesající; } n_0=4,\ \text{ukažte, že } \left(1+\frac{1}{n}\right)^3<2\Longleftrightarrow n\geq 4\right]$

(v) $\left\{\ln n-n\right\}_{n=1}^{\infty}$ . $\left[\text{klesající; uvažte, že } 1+\frac{1}{n}<e\Longrightarrow\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1\right]$

17. Ukažte, že posloupnost $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ není monotonní.

**Důkaz:** Posloupnost $\{\sin n\}$ obsahuje nekonečně mnoho kladných členů. Skutečně ke každému $k\in\mathbf{N}$ existuje přirozené číslo $n_k$ tak, že $n_k\in(2k\pi,(2k+1)\pi)$ , protože délka daného intervalu je $\pi>1$ . Zobrazení $k\longrightarrow n_k$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel a $\sin n_k>0$ .
Analogicky ke každému $l\in\mathbf{N}$ existuje přirozené číslo $n_l$ tak, že $n_l\in((2l-1)\pi,2l\pi)$ a $\sin n_l<0$ . Vzhledem k tomu, že každá monotonní posloupnost (dokonce i monotonní pro $n\geq n_0$) má všechny členy s výjimkou konečně mnoha nezáporné nebo nekladné, není posloupnost $\{\sin n\}_{n\geq n_0}$ monotonní pro žádné $n_0\in\mathbf{N}$ .

18. Ukažte, že následující posloupnosti nejsou monotonní.

(a) $\left\{(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{uvažte posloupnosti } \{a_{2n-1}\} \text{ a } \{a_{2n}\}\right]$

(b) $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{vyšetřete členy } a_{4k+1},\ a_{4k+3}\right]$

(c) $\left\{n+(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; $\left[\text{ukažte, že pro každé } k\in\mathbf{N} \text{ je } a_{2k}>a_{2k+1} \text{ a } a_{2k+1}<a_{2k+2}\right]$

19. Zjistěte, které z následujících posloupností jsou i. monotonní, ii. omezené.

a) $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; b) $\left\{n+(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; c) $\left\{2^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; d) $\left\{-2^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ;

e) $\left\{(-2)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; f) $\left\{-(-2)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; g) $\left\{2^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ; h) $\left\{2^{-n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Řešení:** i. a), c), d), g), h)
ii. a), h)

20. Najděte největší (resp. nejmenší) člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , je-li

(a) $a_n=6n-n^2-5$ ; $\left[\text{největší člen } a_3=4\right]$

(b) $a_n = e^{10n-n^2-24}$; [největší člen $a_5 = e$]

(c) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{9+n}$; $\left[\text{největší člen } a_9 = \frac{1}{6}\right]$

(d) $a_n = 3n^2 - 10n - 14$; [nejmenší člen $a_2 = -22$]

(e) $a_n = 2n + \frac{512}{n^2}$; [nejmenší člen $a_8 = 24$]

(f) $a_n = -\frac{n^2}{2^n}$; $\left[\text{nejmenší člen } a_3 = -\frac{9}{8}\right]$

## 2.2 Limita posloupnosti.

1. Najděte index $n_0$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí pro členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ následující odhady.

$$\text{a)}\quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}\,,\ |a_n| < 0,1\,; \qquad \text{b)}\quad a_n = \frac{n+3}{n+1}\,,\ |a_n - 1| < 0,01\,;$$

$$\text{c)}\quad a_n = \frac{2+(-1)^n}{n^2+1}\,,\ |a_n| < 0,001\,.$$

**Řešení:**

(a) Má platit

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}\right| = \frac{1}{3^n} < \frac{1}{10}\,.$$

Tato nerovnost je splněna pro $n \geq n_0 = 3$.

(b) Platí

$$\left|\frac{n+3}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{1}{100}\,.$$

Odtud plyne, že $n + 1 > 200$, tedy $n > 199$ a stačí volit $n_0 = 200$.

(c) Je

$$\left|\frac{2+(-1)^n}{n^2+1}\right| \leq \frac{3}{n^2+1} < \frac{1}{1000}\,,$$

tedy

$$n^2 + 1 > 3000\,,\quad \text{neboli}\ \ n > \sqrt{2999} \doteq 54,8\ \ \text{a}\ \ n_0 = 55\,.$$

2. Užitím definice limity posloupnosti dokažte, že

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}\,; \qquad \text{b)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+a}}{n} = 1\,,\ a \in \mathbf{R}\,; \qquad \text{c)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-2^{n+1}}{1+2^n} = -2\,;$$

$$\text{d)}\quad \lim_{n\to\infty} 10^{\sqrt{n}} = +\infty\,; \qquad \text{e)}\quad \lim_{n\to\infty} \log_a n = +\infty\,,\ a > 1\,.$$

**Poznámky:** i. Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ umíme najít $r \in \mathbf{R}$ tak, že

$$\forall n \in \mathbf{N}\,:\, n > r \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon\,,$$

pak také platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Index $n_0 \in \mathbf{N}$ takový, že $|a_n - a| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$ je pak možno volit jako $n_0 = [\,r^+] + 1$, kde $r^+ = \max(r, 0)$.

ii. Buď $\varepsilon_0 > 0$. Stačí najít $n_0 \in \mathbf{N}$ ke každému $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0\rangle$, aby platilo, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Skutečně pro každé $\varepsilon > \varepsilon_0$ lze užít $n_0$, které odpovídá $\varepsilon_0$.

**Důkaz:**

(a) Podle definice platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \geq n_0 \quad \text{platí} \quad \left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{neboli} \quad \left| \frac{2n - 2n - 1}{2(2n+1)} \right| < \varepsilon \, .$$

Odtud dostaneme nerovnici $\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$ a jejím řešením je $n > \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \right\}$ . Stačí tedy volit

$$n_0 = \left[ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} - 1 \right\} \right] + 1 \ \text{ pro } \ \varepsilon \in \left( 0, \frac{1}{2} \right\rangle \, ; \qquad n_0 = 1 \ \text{ pro } \ \varepsilon > \frac{1}{2} \, .$$

(b) Buď $\varepsilon \in (0, 1\rangle$ . Protože

$$\left| \frac{\sqrt{n^2 + a}}{n} - 1 \right| = \frac{|\sqrt{n^2 + a} - n|}{n} = \frac{|a|}{n \left( \sqrt{n^2 + a} + n \right)} \leq \frac{|a|}{n^2} \, ,$$

stačí řešit nerovnici

$$\frac{|a|}{n^2} < \varepsilon \, . \quad \text{Řešení je} \quad n > \sqrt{\frac{|a|}{\varepsilon}}$$

a pro $\varepsilon \in (0, 1\rangle$ stačí volit

$$n_0 = \left[ \sqrt{\frac{|a|}{\varepsilon}} \right] + 1 \, .$$

(c) Je

$$\left| \frac{1 - 2^{n+1}}{1 + 2^n} + 2 \right| = \frac{|1 - 2^{n+1} + 2 + 2^{n+1}|}{1 + 2^n} = \frac{3}{1 + 2^n} < \varepsilon \, .$$

Řešením této nerovnice pro $\varepsilon \in \left( 0, \frac{3}{2} \right\rangle$ dostaneme $n > \log_2 \left( \frac{3}{\varepsilon} - 1 \right)$ a stačí volit

$$n_0 = \left[ \log_2 \left( \frac{3}{\varepsilon} - 1 \right) \right] + 1 \, .$$

(d) Podle definice platí

$$\forall K > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \geq n_0 \ \text{ platí } \ 10^{\sqrt{n}} > K \quad \text{neboli} \quad n > \log^2 K$$

a stačí volit

$$n_0 = \left[ \log^2 K \right] + 1 \ \text{ pro } \ K \geq 1 \, , \qquad n_0 = 1 \ \text{ pro } \ K < 1 \, ,$$

tedy obecně

$$n_0 = \left[ \left( \log^+ K \right)^2 \right] + 1 \, .$$

(e) Nerovnost $\log_a n > K$ je pro $a > 1$ ekvivalentní s nerovností $n > a^K$ a stačí volit

$$n_0 = \left[ a^K \right] + 1 \, .$$

3. Užitím definice limity posloupnosti dokažte, že

(a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+2} = 1$ ; $\quad \left[ n_0 = \left[ \frac{2}{\varepsilon} - 1 \right] \ \text{ pro } \ \varepsilon \in (0, 1\rangle \, ; \ \text{řešte nerovnost} \ \left| \frac{n}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon \right]$

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$ ; $\quad \left[ n_0 = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 \right]$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n-3}{n^2} = 0\,;$ $\quad\left[ n_0 = \left[\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1\,;\ \text{užijte odhadu } |(-1)^n - 3| \le 4 \right]$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n}{n+1} = +\infty\,;$ $\quad\left[ n_0 = [K+4]\,;\ \text{užijte odhadu } n^2 - 2n > (n+1)(n-3) \right]$

4. Ukažte, že následující posloupnosti nemají limitu.

$$\text{a)}\quad \{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}\,; \qquad \text{b)}\quad \left\{n^2 \sin\frac{n\pi}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}\,; \qquad \text{c)}\quad \left\{\left[\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

**Řešení:**

(a) Označme $a_n = (-1)^n n$. Stačí si nyní uvědomit, že

$$a_{2n} = 2n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\,; \qquad a_{2n-1} = -2n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\,.$$

(b) Analogicky

$$a_{4n} = 16n^2 \sin n\pi = 0\,,$$

$$a_{8n+2} = (8n+2)^2 \sin\frac{(8n+2)\pi}{4} = (8n+2)^2 \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (8n+2)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

(c) Platí

$$a_{2n} = \left[\frac{1}{2n}\right] = 0\,, \qquad a_{2n+1} = \left[-\frac{1}{2n+1}\right] = -1\,.$$

5. Ukažte, že následující posloupnosti nemají limitu.

(a) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}\,;$ $\quad$ [uvažte $a_{2n}$ a $a_{2n+1}$]

(b) $\left\{\frac{2-\cos n\pi}{2+\cos n\pi}\right\}_{n=1}^{\infty}\,;$ $\quad$ [analogicky jako v a)]

(c) $\left\{n^{(-1)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}\,;$ $\quad$ [užijte příkladu a)]

(d) $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}\,;$ $\quad$ [vyšetřete $a_{2n}$ a $a_{4n+1}$]

(e) $\left\{3\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}\,;$ $\quad$ [analogicky jako v a)]

(f) $\left\{\frac{n}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}\,;$ $\quad$ [vyjádřete $a_{3n}$ a $a_{3n+1}$]

6. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných nebo komplexních čísel. Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0\,.$$

**Důkaz:** Nechť

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty\,. \text{ Potom } \forall K > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \ge n_0 \Rightarrow |a_n| > K\,.$$

Zvolme číslo $\varepsilon > 0$ libovolně a najděme index $n_0$ k číslu $K = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Potom

$$\forall n \ge n_0 \text{ platí } |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}\,, \text{ tedy } \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0\,.$$

Obrácenou implikaci dokážeme analogicky.

7. Ukažte, že platí

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = +\infty\,,\ r>0\,;$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\,,\ |q|<1\,;$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty\,,\ a>1\,;$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,,\ a>0\,;$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,;$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^r}{a^n} = 0\,,\ a>1,\ r\in\mathbf{R}\,;$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0\,,\ a>1\,;$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a^r n}{n} = 0\,,\ a>1,\ r\in\mathbf{R}\,.$

**Důkaz:**

(a) Buď $K>0$ libovolné a hledejme $n_0\in\mathbf{N}$ tak, že $n^r>K$ pro všechna $n\ge n_0\,,\ r>0\,.$ Tato nerovnost je však ekvivalentní s nerovností $n>K^{\frac{1}{r}}$ a stačí volit

$$n_0 = \left[K^{\frac{1}{r}}\right]+1\,.$$

(b) Buď $\varepsilon>0$ libovolné a hledejme index $n_0$ tak, že pro všechna $n\ge n_0$ platí

$$|q^n-0| = |q|^n < \varepsilon\,.$$

Logaritmovámím této nerovnosti dostaneme

$$n\,\log|q| < \log\varepsilon \quad\text{a tedy}\quad n > \frac{\log\varepsilon}{\log|q|} \qquad (\text{je}\ \ \log|q|<0)\,.$$

Stačí tedy zvolit

$$n_0 = \left[\frac{\log\varepsilon}{\log|q|}\right]+1$$

(c) Poněvadž $a>1\,,$ je $\frac{1}{a}\in(0,1)$ a tedy podle cvičení b) je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0\,.$ Odtud podle příkladu 6 dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} |a^n| = +\infty\,.$$

(d) Je-li $a=1\,,$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že $a>1\,,$ potom je i $\sqrt[n]{a}>1$ a můžeme psát $\sqrt[n]{a}=1+h_n\,,$ kde $h_n>0\,.$ Odtud plyne, že

$$a=(1+h_n)^n \ge nh_n \quad\text{a tedy}\quad 0<h_n<\frac{a}{n}$$

Poněvadž

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0\,,\quad \text{platí}\quad \lim_{n\to\infty} h_n = 0 \quad\text{a tedy}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,.$$

Je-li $0<a<1\,,$ můžeme psát $a=\frac{1}{b}\,,$ kde $b>1$ a tedy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b_n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}} = 1\,.$$

(e) Označme $\sqrt[n]{n}=1+h_n\,,$ kde $h_n>0\,.$ Potom platí

$$n=(1+h_n)^n \ge 1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \ge \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

a tedy $h_n\le\sqrt{\frac{2}{n-1}}$ pro $n\ge 2\,.$ To však znamená, že

$$0<\sqrt[n]{n}-1\le\sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad\text{a poněvadž}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0\,,\quad\text{platí}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\,.$$

**Poznámka:** Pro $n \geq a \geq 1$ je $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$ . tedy ze vztahu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{plyne} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{pro} \quad a \geq 1\,.$$

(f) Je-li $r \leq 0$ , je tvrzení zřejmé vzhledem k příkladům c) a 6. Buď $r = 1$ , $a > 1$ . Pak pro $n \geq 2$ platí

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2} = \frac{2}{(n-1)(a-1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Buď nyní $r > 0$ , $a > 1$ . Potom je

$$a^{\frac{1}{r}} > 1 \quad \text{a tedy} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{\frac{n}{r}}}\,.$$

To však znamená, že

$$\forall \varepsilon > \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \,:\, 0 < \frac{n}{a^{\frac{n}{r}}} < \varepsilon^{\frac{1}{r}} \iff 0 < \frac{n^r}{a^n} < \varepsilon\,,$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{a^n} = 0\,.$$

(g) Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Máme ukázat, že existuje index $n_0$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon\,.$$

Tuto nerovnost je však možno přepsat do tvaru

$$\frac{\log_a n}{n} = \log_a n^{\frac{1}{n}} < \log_a a^{\varepsilon} = \varepsilon\,.$$

Odlogaritmováním této nerovnosti dostaneme $n^{\frac{1}{n}} < a^{\varepsilon}$ . Podle příkladu e) je

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

a poněvadž $a^{\varepsilon} > 1$ je pevné číslo, stačí volit $n_0$ tak, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo

$$n^{\frac{1}{n}} < a^{\varepsilon}\,.$$

(h) Tvrzení stačí dokázat pro $r > 0$ . Jestliže zvolíme $\varepsilon > 0$ libovolně, pak existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $k \geq k_0$ platí podle příkladu f)

$$\frac{(k+1)^r}{a^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{a}\,.$$

Buď $n \in \mathbf{N}$ takové, že $n \geq a^{k_0}$ . Potom existuje $k \geq k_0$ tak, že $a^k \leq n < a^{k+1}$ a odtud

$$0 < k \leq \log_a n < k+1 \Longrightarrow 0 < \log_a^r n < (k+1)^r\,,\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{a^k} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 < \frac{\log_a^r n}{n} < \frac{(k+1)^r}{a^k} < \varepsilon\,.$$

**Poznámky:** i. Cvičení f) plyne z cvičení g). Skutečně, vzhledem k tomu, že platí

$$\frac{n^r}{a^n} = a^{r\log_a n - n} = a^{n\left(\frac{\log_a n}{n} - 1\right)}$$

a podle cvičení g) je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, existuje index $n_0$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$\frac{\log_a n}{n} - 1 < -\frac{1}{2}\,.$$

Tedy podle cvičení b) dostaneme

$$0 < \frac{n^r}{a^n} < a^{-\frac{n}{2}} = \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

ii. V důkazu cvičení f) je dokázáno toto:

Buď $r > 0$, $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbf{N}$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n^r = 0$.

Jestliže tuto skutečnost použijeme v příkladu h), dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a^r n}{n} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^{\frac{1}{r}}} = 0 \text{ a odtud pro } \varepsilon = \frac{1}{r} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^{\varepsilon}} = 0$$

pro libovolné $\varepsilon > 0$. Obecně implikace

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$$

platí pro funkce $f(x) = x^{\alpha}$, $a^x$, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, ..., jakmile $a \in D(f)$, $a_n \in D(f)$ pro všechna $n \geq n_0$ (Heineova definice spojitosti funkce). Rozmyslete si, ve kterých příkladech se toto tvrzení užívá.

8. Nechť $x_n \neq 1\ \forall n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Najděte $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, je-li

   (a) $y_n = \frac{2x_n - 1}{x_n - 2}$; $\quad[-1]$

   (b) $y_n = \frac{x_n - 1}{x_n^2 - 1}$; $\quad\left[\frac{1}{2}\right]$

   (c) $y_n = \frac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1}$; $\quad[3]$

   (d) $y_n = \frac{x_n^2 - 3x_n + 2}{x_n^2 - 1}$. $\quad\left[-\frac{1}{2}\right]$

**Návod:** Užijte vět o limitách posloupností a v příkladech b) - d) jednoduchých úprav.

9. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = \alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0$, $k \in \mathbf{N}$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R}$;

b) $a_n = \dfrac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \cdots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_l n^l + \beta_{l-1} n^{l-1} + \cdots + \beta_1 n + \beta_0}$, $k, l \in \mathbf{N}$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbf{R}$.

**Řešení:**

(a) Nechť je $\alpha_k \neq 0$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = n^k \left\{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{\alpha_1}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_0}{n^k}\right\}.$$

Protože je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{k-1}}{n} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1}{n^{k-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_0}{n^k} = 0 \text{ a } \lim_{n\to\infty} n^k = +\infty\,,$$

je hledaná limita rovna $+\infty$, je-li $\alpha_k > 0$ a $-\infty$, je-li $\alpha_k < 0$.

(b) Předpokládejme, že $\alpha_k \neq 0 \neq \beta_l$ .

i. Nechť $l > k$ . Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha_k}{n^{l-k}} + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{l-k-1}} + \cdots + \frac{\alpha_1}{n^{l-1}} + \frac{\alpha_0}{n^l}}{\beta_l + \frac{\beta_{l-1}}{n} + \cdots + \frac{\beta_1}{n^{l-1}} + \frac{\beta_0}{n^l}} = 0\,,$$

poněvadž čitatel má limitu rovnu 0 a jmenovatel $\beta_l \neq 0$ .

ii. Je-li $k = l$ , pak dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{\alpha_1}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_0}{n^k}}{\beta_k + \frac{\beta_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{\beta_1}{n^{k-1}} + \frac{\beta_0}{n^k}} = \frac{\alpha_k}{\beta_k}\,.$$

iii. Předpokládejme nakonec, že $l < k$ . Potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_k n^{k-l} + \alpha_{k-1} n^{k-l-1} + \cdots + \alpha_{l+1} n + \alpha_l + \frac{\alpha_{l-1}}{n} + \cdots + \frac{\alpha_1}{n^{l-1}} + \frac{\alpha_0}{n^l}}{\beta_l + \frac{\beta_{l-1}}{n} + \cdots + \frac{\beta_1}{n^{l-1}} + \frac{\beta_0}{n^l}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha_k}{\beta_l} n^{k-l} + \frac{\alpha_{k-1}}{\beta_l} n^{k-l-1} + \cdots + \frac{\alpha_1}{\beta_l\, n^{l-1}} + \frac{\alpha_0}{\beta_l\, n^l}}{1 + \frac{\beta_{l-1}}{\beta_l\, n} + \cdots + \frac{\beta_1}{\beta_l\, n^{l-1}} + \frac{\beta_0}{\beta_l\, n^l}}\,.$$

Protože limita jmenovatele je rovna 1, je celá limita podle příkladu a) rovna $+\infty$ , je-li $\alpha_k \cdot \beta_l > 0$ a rovna $-\infty$ , je-li $\alpha_k \cdot \beta_l < 0$ .

**Poznámka:** Předchozí příklad ukazuje chování polynomu a racionální funkce pro $n \to \infty$ . Z příkladu a) plyne, že chování polynomu „pro velká $n$“ se řídí chováním nejvyšší mocniny.

10. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ , je-li

(a) $a_n = \frac{n}{3n+2}$ ; $\left[\frac{1}{3}\right]$

(b) $a_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$ ; $\left[\frac{1}{3}\right]$

(c) $a_n = \frac{5n^3-3n^2}{n^3+1}$ ; $[5]$

(d) $a_n = \frac{n-2}{n^2-n}$ ; $[0]$

(e) $a_n = \frac{n^3+27}{n^4-15}$ ; $[0]$

(f) $a_n = \frac{10^6 \cdot n}{n^2+1}$ ; $[0]$

(g) $a_n = \frac{(2n+1)(n-3)}{(n+2)(n+4)}$ ; $[2]$

(h) $a_n = \frac{5n^3-4}{n^4+6}$ ; $[0]$

(i) $a_n = \frac{5n^8-n^7+1}{2-8n^8}$ ; $\left[-\frac{5}{8}\right]$

(j) $a_n = \frac{n^2+5n-2}{3n^3-2n+7}$ ; $[0]$

(k) $a_n = \frac{n^3+n}{n^2+3n-2}$ ; $[+\infty]$

(l) $a_n = \frac{(n+3)^3}{1-n-5n^2}$ ; $[-\infty]$

(m) $a_n = \frac{-3n+(-1)^n}{4n-(-1)^n}$ ; $\left[-\frac{3}{4}\right]$

(n) $a_n = \frac{n \sin n}{n^2+1}$ ; $[0]$

(o) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ ; [1]

(p) $a_n = \frac{(n+5)^3 - n(n+7)^2}{n^2-1}$ ; [1 ; upravte čitatele]

(q) $a_n = \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3}$ ; $\left[\frac{2}{3}\right.$ ; upravte jmenovatele$\left.\right]$

(r) $a_n = \frac{n^2+1}{2n+1} - \frac{3n^2+1}{6n+1}$ ; $\left[-\frac{1}{6}\right.$ ; sečtěte oba zlomky$\left.\right]$

(s) $a_n = \frac{n^2}{n+3} - \frac{n^2}{n+2}$ ; [−1 ; sečtěte dané zlomky]

(t) $a_n = \frac{(n+1)! + (n+2)!}{(n+3)!}$ ; [0 ; vykraťte dané faktoriály]

(u) $a_n = \frac{n(n+3)! + (n+2)!}{(n+4)!}$ ; [1 ; upravte faktoriály]

(v) $a_n = \frac{n!}{(n+1)! - n!}$ ; [0]

(w) $a_n = \frac{2-n}{n+1} + \frac{n \cdot 2^{-n}}{n+2}$ ; [−1]

(x) $a_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) \sin n^2$ ; [0 ; využijte omezenosti funkce $\sin x$]

(y) $a_n = \frac{n^\alpha \cdot \sin n!}{n+1}$ , $\alpha < 1$ ; [0 ; využijte omezenosti funkce $\sin x$]

(z) $a_n = \frac{3n}{5+3^{n+1}}$ ; [0 ; vydělte čitatele i jmenovatele $3^n$ a užijte příkladu 7f)]

11. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ , je-li

a) $a_n = (n+1)^k - n^k$ , $0 < k < 1$ ; b) $a_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ , $a \in \mathbf{R}$ ;

c) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1}$ ; d) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{a^k}-1}{\sqrt[n]{a^r}-1}$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ , $k, r \in \mathbf{N}$ ;

e) $a_1 = \sqrt{2}$ , $a_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ , $a_3 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ , $a_4 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ , … ;

f) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$ ; g) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ ; h) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ ;

i) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3} - \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ;

j) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2^k}$ ; k) $a_n = \sqrt[n]{b_1^n + b_2^n + \cdots + b_k^n}$ , $b_j \geq 0$ , $j = 1, 2, \ldots, k$ .

**Řešení:**

(a) Platí

$$0 < (n+1)^k - n^k = n^k \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1 \right\} < n^k \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \right\} = n^{k-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

poněvadž je $0 < k < 1$ .

(b) i. Buď $a > 1$ . Potom vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $a^{2n}$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^{2n}} + 1} = 0$$

podle příkladů 7c) a 6.

ii. Pro $a = 1$ je zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ .

iii. Je-li $|a| < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ podle příkladu 7b), tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

iv. Pro $a = -1$ je $a_{2n} = \frac{1}{2}$, $a_{2n-1} = -\frac{1}{2}$, tedy hledaná limita neexistuje.

v. Je-li $a < -1$, pak

$$\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = +\infty$$

a podle bodu i. je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{16}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\left(\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\left(\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1\right)} = \frac{3}{4}$$

podle příkladu 7d).

(d) Použijeme-li vzorce pro rozklad $\alpha^k - \beta^k$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a^k}-1}{\sqrt[n]{a^r}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{a}-1)\left(\sqrt[n]{a^{k-1}}+\sqrt[n]{a^{k-2}}+\cdots+\sqrt[n]{a}+1\right)}{(\sqrt[n]{a}-1)\left(\sqrt[n]{a^{r-1}}+\sqrt[n]{a^{r-2}}+\cdots+\sqrt[n]{a}+1\right)} = \frac{k}{r}$$

opět podle příkladu 7d).

(e) Je $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{4}$, tedy

$$a_1 = 2\sin\frac{\pi}{4}, \quad a_2 = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = 2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$a_3 = \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2-2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^3}} = 2\sin\frac{\pi}{2^4}.$$

Odtud dostaneme indukcí, že $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ a ze spojitosti funkce sin plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(f) Zřejmě platí $a_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Na druhé straně je

$$\frac{1}{(n+k)^2} \le \frac{1}{n^2} \quad \text{pro} \quad k = 0,1,2,\ldots,n.$$

Sečtením těchto nerovností přes všechna $k$ dostaneme

$$a_n \le \frac{n+1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{a tedy} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(g) Pro $k = 0,1,2,\ldots,n$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{n+k}} \ge \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Sečtením podle $k$ dostaneme

$$a_n \ge \frac{n+1}{\sqrt{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \text{tedy} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

(h) Pro $k = 0,1,2,\ldots,n$ platí

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Sečtením podle $k$ dostaneme

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Poněvadž je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1, \quad \text{platí, že} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(i) Rozložíme-li $\frac{1}{n(n+1)}$ a $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ na parciální zlomky, dostaneme

$$a_n = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+$$

$$+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(2n+1)}$$

o odtud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

(j) Obecný člen $a_n$ si přepíšeme do tvaru

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4}}-\frac{n\,\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}$$

podle příkladu 2.1.7b). Odtud plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

(k) Označme $B = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Potom platí $B \le a_n \le B\sqrt[n]{k}$ a poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = B.$$

**Poznámka:** Předchozí cvičení k) lze zobecnit následujícím způsobem. Buď $\left\{b_r^{(j)}\right\}_{r=1}^{\infty}$ pro $j = 1, 2, \ldots, k$ $\;k$ posloupností nezáporných čísel a nechť existuje

$$\lim_{r\to\infty} b_r^{(j)} = b^{(j)} \in \mathbf{R} \quad \text{pro} \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Označme

$$B = \max\left\{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(k)}\right\}, \quad a_n = \sqrt[n]{\left[b_n^{(1)}\right]^n+\left[b_n^{(2)}\right]^n+\cdots+\left[b_n^{(k)}\right]^n}.$$

Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$.

**Důkaz:** Buď $B = \max\left\{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(k)}\right\} = b^{(j)}$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje index $n_0$ tak, že pro všechna $n \ge n_0$ je

$$B-\frac{\varepsilon}{2} \le a_n \le \left(B+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[n]{k} < B+\varepsilon.$$

Odtud plyne např.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n\,n^2+2}=3, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+4^n}{n+5^n}}=\frac{4}{5}$$

(viz příklad 14).

12. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = (4^{-n}-2)\,(5^{-n}-3)$; [ 6 ]

(b) $a_n = \frac{3^n-1}{3^n+1}$; [ 1; vydělte čitatele i jmenovatele $3^n$ ]

(c) $a_n = \frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}$; [ 4; vydělte čitatele i jmenovatele $4^n$ ]

(d) $a_n = \frac{2^{n+2}+3^{n+2}}{2^n+3^n}$; [ 9; vydělte čitatele i jmenovatele $3^n$ ]

(e) $a_n = \frac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+2\cdot 5^n}$; [ $-\frac{15}{2}$; vydělte čitatele i jmenovatele $5^n$ ]

(f) $a_n = \frac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}}$; $\left[\frac{1}{6};\ \text{vydělte čitatele i jmenovatele } 6^n\right]$

(g) $a_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}$; $\left[\frac{1}{2};\ \text{sečtěte výrazy v čitateli i ve jmenovateli}\right]$

(h) $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$; $\left[-\frac{1}{2};\ \text{sečtěte } 1+2+\cdots+n\right]$

(i) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; $\left[1;\ \text{rozložte } \frac{1}{k(k+1)} \text{ na parciální zlomky}\right]$

(j) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$; $\left[\frac{1}{2};\ \text{rozložte } \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right]$

(k) $a_n = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$, $k \in \mathbf{N}$; $\left[\frac{1}{k!}\ \text{užijte definice kombinačního čísla}\right]$

(l) $a_n = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k$; $\left[\frac{1}{2};\ \text{sečtěte } \sum\limits_{k=1}^{n} k\right]$

(m) $a_n = \frac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$; $\left[\frac{1}{3};\ \text{sečtěte } \sum\limits_{k=1}^{n} k^2;\ \text{užijte příkladu 2.1.7a)}\right]$

(n) $a_n = \frac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2$; $\left[\frac{4}{3};\ \text{užijte příklad 1.1.19f)}\right]$

(o) $a_n = \frac{1}{n^4-1} \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$, $n > 1$; $\left[\frac{1}{4};\ \text{užijte příklad 2.1.7a)}\right]$

(p) $a_n = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} (2j-1)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k}$; $\left[2;\ \text{sečtěte výrazy v čitateli i ve jmenovateli}\right]$

(q) $a_n = \frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}$, $|a| < 1$, $|b| < 1$; $\left[\frac{1-b}{1-a};\ \text{užijte vlastnosti geometrické posloupnosti}\right]$

(r) $a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{2}$; $\left[2;\ \text{vynásobte příslušné mocniny a stejném základu}\right]$

(s) $a_n = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$; $\left[\frac{1}{2}\right]$

(t) $a_n = \frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$; $[3]$

(u) $a_n = \frac{3n-1}{\sqrt{6n^2+2n-5}}$; $\left[\sqrt{\frac{3}{2}};\ \text{vydělte čitatele i jmenovatele } n\right]$

(v) $a_n = \frac{6n-5}{\sqrt[3]{8n^3+4n-7}}$; $\left[3;\ \text{vydělte čitatele i jmenovatele } n\right]$

(w) $a_n = \frac{2n+3}{\sqrt[4]{81n^4+n^3}}$; $\left[\frac{2}{3};\ \text{vydělte čitatele i jmenovatele } n\right]$

(x) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n-2}$; $\left[0;\ \text{vydělte čitatele i jmenovatele } n\right]$

(y) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$; $\left[1;\ \text{vydělte čitatele i jmenovatele } n\right]$

(z) $a_n = 6^{\frac{\sqrt{n}}{n+3}}$; $\left[1;\ \text{najděte limitu exponentu}\right]$

13. Najděte příklad posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že

(a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, ale $\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje.

(b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, ale posloupnost $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu.

(c) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, ale $|n(a_{n+1} - a_n)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(d) $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = A \in \mathbf{R}$, $A \geq 0$.

(e) $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty$.

(f) $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$ neexistuje.

(g) $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = B \in \mathbf{R}$, $B \geq 1$.

(h) $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje.

(i) $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$.

**Řešení:**

(a) Pro $a_n = \frac{1}{n!}$ je $\frac{a_n}{a_{n+1}} = n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(b) Položíme-li $a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{n}$, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ale

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n}{n+1} = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje.

(c) Je-li $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, je zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, ale

$$|n(a_{n+1} - a_n)| = \left| n(-1)^{n+1} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right| = n \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty .$$

(d) Stačí položit $a_n = An$ pro $A > 0$. Potom je $a_{n+1} - a_n = A$. Pro $A = 0$ zvolíme $a_n = \sqrt{n}$. Potom je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \ \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 .$$

**Poznámka:** Jestliže je $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = A < 0$, pak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající (počínaje jistým indexem) a tedy nemůže být $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Totéž platí pro $B < 1$ v bodě g) tohoto příkladu.

(e) Je-li $a_n = n^2$, pak $a_{n+1} - a_n = 2n + 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(f) Pro $a_n = n + (-1)^n$ je $a_{n+1} - a_n = 1 + 2(-1)^{n+1}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$ neexistuje.

(g) Je-li $B > 1$, stačí položit $a_n = B^n$, protože $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{B^{n+1}}{B^n} = B$. Je-li $B = 1$, je možné volit na příklad $a_n = n$.

(h) Je-li $a_n = n\,(2 + (-1)^n)$, pak

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n} .$$

Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ a označíme-li

$$b_n = \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n}, \quad \text{je} \quad b_{2n} = \frac{1}{3}, \ b_{2n+1} = 3 ,$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje.

(i) Stačí položit $a_n = n!$. Potom je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

14. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

a) $a_n = n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\,\right)$; b) $a_n = \dfrac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^3}}-1\right)$;

c) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}$; d) $a_n = \dfrac{3\sqrt[n]{16}-4\sqrt[n]{8}+1}{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)^2}$; e) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}$;

f) $a_n = \dfrac{3}{1-\sqrt[n]{8}}-\dfrac{5}{1-\sqrt[n]{32}}$; g) $a_n = n^{\frac{p}{n^k}}$, $p,k\in\mathbf{N}$;

h) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n^3+1}{3n^2-2}}$; i) $a_n = \sqrt[n^2]{\dfrac{n-1}{n+1}}+\sqrt[n]{3^n\cdot n^3+2}$;

j) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2^n}}$; k) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2+4^n}{n+5^n}}$.

**Řešení:**

(a) Doplněním výrazu v závorce na rozdíl čtverců ($a = \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$, $b = 2\sqrt{n}$) dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}\,\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}\left(n+1+n-1+2\sqrt{n^2-1}-4n\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}+2\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}+2\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^{\frac{3}{2}}(-1)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}+2\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}+2\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1\right)} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4},$$

jestliže čitatele i jmenovatele vydělíme $n^{\frac{3}{2}}$.

(b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3}\left(\sqrt[3]{n^3+3}-n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3\left(\sqrt[3]{(n^3+3)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3}+n^2\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^3}}+1} = \frac{1}{3},$$

jestliže výraz v závorce doplníme na rozdíl třetích mocnin $a^3-b^3$ a pak čitatele i jmenovatele vydělíme $n^2$.

(c) Doplněním čitatele na rozdíl $a^3-b^3$ a jmenovatele na $a^4-b^4$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\left(\sqrt[4]{(n+1)^3}+\sqrt[4]{n(n+1)^2}+\sqrt[4]{n^2(n+1)}+n^3\right)}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-\left(\sqrt[12]{\frac{(n+1)^9}{n^8}}+\sqrt[12]{\frac{(n+1)^6}{n^5}}+\sqrt[12]{\frac{(n+1)^3}{n^2}}+\sqrt[12]{n}\right)}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}} = -\infty,$$

jestliže čitatele i jmenovatele vydělíme $n^{\frac{2}{3}}$ (nejvyšší mocnina ve jmenovateli) a uvážíme, že jmenovatel má limitu 1 a čitatel limitu $-\infty$.

**Poznámka:** Předchozí příklad lze zobecnit následujícím způsobem. Buď $k \in \mathbf{N}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\frac{1}{k}} - n^{\frac{1}{k}}}{n^{\frac{1}{k}-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-\frac{1}{k}}}{(n+1)^{\frac{k-1}{k}} + (n+1)^{\frac{k-2}{k}} n^{\frac{1}{k}} + \cdots + n^{\frac{k-1}{k}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{k-2}{k}} + \cdots + 1} = \frac{1}{k}\,.$$

Až budete umět derivovat, rozmyslete si, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}}{n^{\alpha-1}} = f'(1)\,, \quad \text{kde} \quad f(x) = x^{\alpha}$$

tj. $f'(1) = \alpha$ pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}}{n^{-\frac{2}{3}}} \cdot \frac{n^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}} \cdot \left(-n^{\frac{1}{12}}\right) = -\infty\,.$$

(d) Jestliže označíme $\sqrt[n]{2} = t$, můžeme psát

$$a_n = \frac{3t^4 - 4t^3 + 1}{(t-1)^2} = \frac{(t-1)^2(3t^2+2t+1)}{(t-1)^2}$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(3\sqrt[n]{4} + 2\sqrt[n]{2} + 1\right) = 6\,.$$

(e) Zavedemne-li označení $\sqrt[n]{n} = t$, je možno $a_n$ přepsat do tvaru

$$a_n = \frac{t^4 + 2t^2 - 3}{t^2 - 3t + 2} = \frac{(t^2-1)(t^2+3)}{(t-1)(t-2)} = \frac{(\sqrt[n]{n}+1)\left(\sqrt[n]{n^2}+3\right)}{\sqrt[n]{n}-2}$$

a odtud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -8$.

(f) Platí

$$a_n = \frac{3}{1-\sqrt[n]{8}} - \frac{5}{1-\sqrt[n]{32}} = \frac{3(1-\sqrt[n]{32}) - 5(1-\sqrt[n]{8})}{(1-\sqrt[n]{8})(1-\sqrt[n]{32})} =$$

$$= \frac{-3\sqrt[n]{32} + 5\sqrt[n]{8} - 2}{(1-\sqrt[n]{2})^2\,(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}\,)\,(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{16}\,)} =$$

$$= \frac{(1-\sqrt[n]{2})^2\,(-3\sqrt[n]{8} - 6\sqrt[n]{4} - 4\sqrt[n]{2} - 2)}{(1-\sqrt[n]{2})^2\,(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}\,)\,(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{16}\,)}\,.$$

Po zkrácení dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

(g) Pro $k \in \mathbf{N}$ platí $n \le n^k$, tedy $\frac{1}{n} \ge \frac{1}{n^k}$ a odtud $n^{\frac{1}{n}} \ge n^{\frac{1}{n^k}} \ge 1$. Jestliže umocníme tuto nerovnost na $p \in \mathbf{N}$, dostaneme

$$n^{\frac{p}{n}} \ge n^{\frac{p}{n^k}} \ge 1\,.$$

Je však

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{p}{n}} = \left(\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}\right)^p = 1 \quad \text{a tedy} \quad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{p}{n}} = 1\,.$$

Důkaz projde i pro $p \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$. Vztah $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{p}{n}} = 1$ platí tudíž pro každé $p \in \mathbf{R}$ a $k > 0$.

(h) Poněvadž je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{3n^2-2} = +\infty\,,$$

existuje index $n_1$ tak, že $\forall\, n \ge n_1$ platí

$$\frac{2n^3+1}{3n^2-2} \ge 1\,.$$

Na druhé straně je

$$\frac{2n^3+1}{3n^2-2} = \frac{2}{3}n + \frac{\frac{4}{3}n+1}{3n^2-2}$$

a vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{3}n+1}{3n^2-2} = 0$, existuje index $n_2$ tak, že $\forall\, n \ge n_2$ je

$$\frac{2n^3+1}{3n^2-2} \le n\,.$$

Odtud pro $n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí

$$1 \le \sqrt[n]{\frac{2n^3+1}{3n^2-2}} \le \sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{a tedy} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1\,.$$

(i) Pro $n \ge 3$ platí

$$1 \le \frac{n+1}{n-1} \le n$$

a poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}} = 1$ podle příkladu g), je i $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{n^2}} = 1$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{n-1}{n+1}} = 1\,.$$

Pro druhý člen využijeme odhadu

$$2 \cdot 3^n \cdot n^3 \ge 3^n \cdot n^3 + 2 \ge 3^n \cdot n^3 \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}\,.$$

Protože je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n \cdot n^3} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n^3} = 3 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n \cdot n^3} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = 3\,,$$

je i

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n \cdot n^3 + 2} = 3\,.$$

Shrnutím obou výsledků dostaneme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$. Srovnejte postup s poznámkou za příkladem 11k). Jestliže této poznámky využijeme, můžeme si výpočet poněkud zkrátit.

(j) Pro $n \ge 1$ platí $2^{n-1} \ge n$, tedy $\frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2n}$ a odtud

$$\frac{1}{2n} \le \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n}\,.$$

Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(k) Je zřejmé, že platí

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{4^n}{5^n} \le \frac{n^2+4^n}{n+5^n}\,.$$

Na druhé straně vzhledem k nerovnosti $n^2 \le 4^n$, platné pro $n \in \mathbf{N}$, můžeme psát

$$\frac{n^2+4^n}{n+5^n} \le \frac{n^2+4^n}{5^n} \le 2\left(\frac{4}{5}\right)^n .$$

Poněvadž

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{4}{5},$$

je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{5}$. Srovnejte s poznámkou za příkladem 11k).

15. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \frac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$; [ 0 ]

(b) $a_n = \frac{\sqrt{n^2-3n+1}+\sqrt[3]{2n^2+1}}{n+2\sin n}$; [ 1 ; vydělte čitatele i jmenovatele $n$ ]

(c) $a_n = \frac{a^n}{1+a^n}$, $a \ne -1$; [ 0 pro $|a|<1$; $\frac{1}{2}$ pro $a=1$; 1 pro $|a|>1$ ]

(d) $a_n = \frac{b^n-b^{-n}}{b^n+b^{-n}}$, $b \ne 0$; [ $-1$ pro $|b|<1$; 0 pro $|b|=1$; 1 pro $|b|>1$ ]

(e) $a_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$; [ 0 ; doplňte na rozdíl čtverců ]

(f) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; [ 0 ]

(g) $a_n = 3n-\sqrt{9n^2-10n+1}$; [ $\frac{5}{3}$ ]

(h) $a_n = \log_4\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2 - \log_4\sqrt[3]{n^6+1}$; [ 1 ; využijte vlastností logaritmů ]

(i) $a_n = \sqrt{n^2+5n+2}-\sqrt{n^2+3n-7}$; [ 1 ]

(j) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; [ $\frac{1}{2}$ ]

(k) $a_n = \sqrt{(9n+1)(n+2)}-\sqrt{n(n-1)}$; [ 2 ]

(l) $a_n = \sqrt{3n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-4})$; [ $3\sqrt{3}$ ]

(m) $a_n = n-\sqrt[3]{n^3-n^2}$; [ $\frac{1}{3}$ ; využijte vzorce pro $a^3-b^3$ ]

(n) $a_n = \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$; [ 0 ]

(o) $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+5}-n$; [ $\frac{1}{3}$ ]

(p) $a_n = \sqrt{(n+a_1)(n+a_2)}-n$; [ $\frac{a_1+a_2}{2}$ ]

(q) $a_n = \sqrt[3]{(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)}-n$; [ $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ ]

(r) $a_n = \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)}$; [ $-2$ ]

(s) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$; [ 0 ]

(t) $a_n = \frac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$; [ $\frac{1}{6}$ ]

(u) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}-n-1}$; [ 0 ]

(v) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$; [ $+\infty$ ]

16. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \sqrt[n]{3^n-2^n}$; [ 3 ; vytkněte 3 a užijte odhadu $\frac{1}{3} \le 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \le 1$ ]

(b) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $a,b>0$; [ $\max\{a,b\}$ ; užijte příklad 11k) ]

(c) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$; [ 1 ]

(d) $a_n = \sqrt[3n]{n}$; [ 1 ]

(e) $a_n = \sqrt[n]{n+a}$; $\qquad [\,1\,]$

(f) $a_n = \sqrt[2n]{n^2-1}$; $\qquad \left[\,1\,;\ \text{užijte odhadu } n \le n^2-1 \le n^2\,,\ n \ge 2\,\right]$

(g) $a_n = \sqrt[n]{n^3+3n}$; $\qquad \left[\,1\,;\ \text{využijte odhadu } n^3 \le n^3+3n \le 3n^3\,\right]$

(h) $a_n = \sqrt[n]{n^3-3n+1}$; $\qquad \left[\,1\,;\ \text{použijte odhadu } \frac{n^3}{2} \le n^3-3n+1 \le n^3\,,\ n \ge n_0\,\right]$

(i) $a_n = \sqrt[n]{2^n \cdot n^2 + 2n - 1}$; $\qquad \left[\,2\,;\ \text{užijte odhadu } 2^n \cdot n^2 \le 2^n \cdot n^2 + 2n - 1 \le 2^{n+1} \cdot n^2\,\right]$

(j) $a_n = \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$; $\qquad \left[\,1\,;\ \text{užijte odhadu } 1 \le \frac{5n+1}{n+5} \le 5\,\right]$

(k) $a_n = \sqrt[3n]{\frac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$; $\qquad \left[\,1\,;\ \text{užijte odhadu } \frac{n^2}{2} \le \frac{n^4-2n+3}{n^2+1} \le n^2\,,\ n \ge n_0\,\right]$

17. Nechť $a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Důkaz:** Označme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$ a buď $q$ takové, že $p < q < 1$. Potom existuje index $n_0$ tak, že $\forall\, n \ge n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$. Tedy

$$a_{n_0+1} \le a_{n_0} \cdot q\,, \quad a_{n_0+2} \le a_{n_0+1} \cdot q \le a_{n_0} \cdot q^2$$

a odtud indukcí dostaneme, že

$$a_{n_0+k} \le a_{n_0} \cdot q^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \quad \text{neboli} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

**Poznámky:** i. V předchozím cvičení jsme vlastně dokázali následující tvrzení:

Nechť $a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$ a předpokládejme, že existuje číslo $q \in (0,1)$ tak, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ $\forall\, n \ge n_0$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Nelimitní verze cvičení 17).

ii. Analogicky můžeme dokázat: Nechť $a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. V nelimitní podobě má toto tvrzení tvar:

Nechť existují $n_0 \in \mathbf{N}$ a $q > 1$ tak, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge q$ platí $\forall\, n \ge n_0$. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

iii. Cvičení 17 není účinný nástroj k výpočtu limit posloupností. Vypočteme pouze ty, které jsou rovny 0 nebo $+\infty$ a to jem pro posloupnosti, které rostou (nebo klesají) exponenciálně.

18. Ukažte, že platí

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0\,,\ a \in \mathbf{R}\,; \qquad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\,.$$

**Řešení:**

(a) Pro $a = 0$ je tvrzení zřejmé. Je-li $a \ne 0$, potom je

$$|a_n| = \frac{|a|^n}{n!} > 0\,, \qquad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Tedy podle příkladu 17 dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

(b) Buď $b_n = \frac{n!}{n^n}$ . Potom je

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{1}{2}\,,$$

neboť podle Bernoulliho nerovnosti je

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2 \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}\,.$$

Odtud podle nelimitní verze příkladu 17 plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\,.$$

Existence limity $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bude dokázána v následujícím paragrafu.

19. Jsou-li $k \in \mathbf{N}$ , $a > 1$ a $p \in \mathbf{R}$ daná čísla, pak existuje index $n_0$ tak, že $\forall\, n \ge n_0$ platí

$$p \le \log_a n \le n^k \le a^n \le n! \le n^n\,.$$

**Důkaz:** Podle příkladů 2e) a 6 je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p}{\log_a n} = 0\,,$$

podle příkladu 7g) platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0\,,$$

podle 7f) je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

a předchozí příklad ukazuje, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0\,.$$

Odtud plynou příslušné nerovnosti.

**Poznámka:** Limity z důkazu cvičení 19 ukazují, že každá z posloupností

$$\{p\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \{\log_a n\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \left\{n^k\right\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \{a^n\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \{n!\}_{n=1}^{\infty}\ ,\ \{n^n\}_{n=1}^{\infty}$$

roste do nekonečna řádově rychleji, než posloupnost předchozí. Také u funkcí srovnáváme rychlost jejich růstu pomocí limity podílu.

20. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$. Potom je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a\,.$$

**Důkaz:** i. Nechť $a = 0$ . Potom

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \ge n_0 \quad \text{platí} \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dále platí, že $|a_n| < K$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$ (konvergentní posloupnost je omezená) a volme $n$ tak veliké, že

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0-1}}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\left(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0-1}|\right) \leq \frac{(n_0-1)K}{n} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Shrnutím dostaneme

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0-1} + a_{n_0} + \cdots + a_n}{n}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0-1}}{n}\right| + \frac{1}{n}\left(|a_{n_0}| + \cdots + |a_n|\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0 + 1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.$$

Platí tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0\,.$$

ii. Pro $a \in \mathbf{R}$ libovolné pišme $\alpha_n = a_n - a$. Potom

$$\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{a} \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}\,.$$

Podle prvé části důkazu platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} = 0\,, \quad \text{tedy} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a\,.$$

**Poznámka:** Tvrzení platí i pro $a = \pm\infty$, jak bude ukázáno v následujícím paragrafu (cvičení 2.3.20)

21. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 0\,.$

    **Návod:** Užijte cvičení 20.

22. Nechť $a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a\,.$$

**Důkaz:** i. Předpokládejme nejdříve, že $a = 1$ a označme $b_n = \log a_n$. Potom je $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ a podle předchozího příkladu je také

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = 0\,.$$

Je však

$$\frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \frac{1}{n}(\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n) = \log \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

o odtud

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\,.$$

Užili jsme spojitost funkce $\log x$ v bodě $x = 1$ a $10^x$ v bodě $x = 0$.

ii. Buď $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a > 0$ a označme $c_n = \frac{a_n}{a}$. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ a podle prvé části důkazu platí, že

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n} = \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\,,$$

neboli

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a\,.$$

**Poznámka:** Tvrzení platí i pro $a = 0$ a $a = +\infty$. Důkaz cvičení 22 lze provést přímo bez použití cvičení 20. Pokuste se o důkaz sami.

Naopak ze cvičení 22 plyne cvičení 20. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$, pak položíme $b_n = e^{a_n} > 0$. Potom je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = e^a > 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)} = e^a\,.$$

Odtud

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = a\,.$$

23. Buďte $a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$ a nechť existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a\,. \quad \text{Potom je} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a\,.$$

**Důkaz:** i. Předpokládejme nejdříve, že $a = 0$. Potom

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{je} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{neboli} \quad a_{n_0+1} < a_{n_0} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dále

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{tedy} \quad a_{n_0+2} < a_{n_0} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

a pro $p \in \mathbf{N}$ dostaneme indukcí

$$a_{n_0+p} < a_{n_0} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \quad \text{t.j.} \quad \sqrt[n_0+p]{a_{n_0+p}} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{p}{p+n_0}} \cdot a_{n_0}^{\frac{1}{n_0+p}} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Odtud tedy plyne, že existuje index $n_1$ tak, že

$$\forall\, n \geq n_1 \quad \text{je} \quad \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon\,, \quad \text{tedy} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0\,.$$

ii. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0$. Podle příkladu 22 je také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a\,.$$

**Poznámky:** i. Tvrzení 23 platí i pro případ, že $a = +\infty$. Stačí pouze modifikovat část i. v důkazu.

ii. Cvičení 22 plyne z tvrzení 23. Skutečně, buď $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a položme $b_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, $n \in \mathbf{N}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a \quad \text{a podle 23 je} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = a\,.$$

Tvrzení 20, 22 a 23 jsou vzájemně ekvivalentní.

iii. Obrácená implikace v příkladech 20, 22 a 23 neplatí. V případě příkladu 20 stačí vzít $a_n = (-1)^{n+1}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{neexistuje, ale} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0\,.$$

Pro případ příkladu 22 uvažme posloupnost

$$a_1 = 1\,,\ a_2 = 1\,,\ a_3 = \frac{1}{2}\,,\ a_4 = 2\,,\ a_5 = \frac{1}{3}\,,\ a_6 = 3\,, \ldots\,, \quad \text{tedy} \quad a_{2n-1} = \frac{1}{n}\,,\ a_{2n} = n\,(n \in \mathbf{N})\,.$$

Označme $b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Potom je

$$b_{2n} = 1\,, \quad b_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\,, \quad \text{ale} \quad \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{neexistuje.}$$

V příkladu 23 uvažme posloupnost $a_{2n} = \frac{1}{n}$, $a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$ pro $n \in \mathbf{N}$. Potom je

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{n}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,, \quad \text{ale} \quad \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = \frac{2n+1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\,,$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje, zatímco $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

24. Pomocí Bolzano-Cauchyovy podmínky rozhodněte o konvergenci posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li

$$\text{a)} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{3^k}\,; \qquad \text{b)} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,; \qquad \text{c)} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\,;$$

$$\text{d)} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k q^k\,, \quad |q| < 1\,, \quad |\alpha_k| \le c \quad \forall\, k \in \mathbf{N}\,;$$

$$\text{e)} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\,; \qquad \text{f)} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}\,.$$

**Řešení:**

(a) Pro libovolná $n, p \in \mathbf{N}$ platí

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k}{3^k} \right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\cos k|}{3^k} \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{3^k} =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{3^{k-n-1}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{2 \cdot 3^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Tedy k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0$ tak, že $\forall\, n \ge n_0$ je $\frac{1}{2\cdot 3^n} < \varepsilon$ a posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

(b) Platí
$$|a_{n+p}-a_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p} \ge \frac{p}{n+p}\,,$$
jestliže každý zlomek nahradíme nejmenším, tj. $\frac{p}{n+p}$. Odtud na příklad pro $p=n$ dostaneme $|a_{2n}-a_n| \ge \frac{1}{2}$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$ a daná posloupnost diverguje.

(c) Je
$$|a_{n+p}-a_n| = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\,.$$
Poněvadž platí
$$\frac{1}{(k+1)^2} \le \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\,,$$
můžeme psát
$$|a_{n+p}-a_n| \le \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right) =$$
$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} \le \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
a daná posloupnost konverguje.

(d) Je
$$|\,a_{n+p}-a_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k q^k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k||q|^k \le$$
$$\le c|q|^{n+1}\sum_{k=n+1}^{n+p} |q|^{k-n-1} = c|q|^{n+1}\frac{1-q^p}{1-|q|} \le \frac{c|q|^{n+1}}{1-|q|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
a posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje.

(e) Platí
$$|\,a_{n+p}-a_n| = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+p)!} =$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+p)}\right\} \le$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{p-1}}\right\} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1-\frac{1}{(n+2)^p}}{1-\frac{1}{n+2}} \le$$
$$\le \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{n+2}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$
a daná posloupnost konverguje.

(f) Je
$$|\,a_{n+p}-a_n| = \frac{n+1}{(n+2)^2}+\frac{n+2}{(n+3)^2}+\cdots+\frac{n+p}{(n+p+1)^2} \ge$$
$$\ge \frac{n+1}{(n+p+1)^2}+\frac{n+2}{(n+p+1)^2}+\cdots+\frac{n+p}{(n+p+1)^2} \ge \frac{p(n+1)}{(n+p+1)^2}\,.$$
Pro $p=n$ dostaneme
$$|\,a_{2n}-a_n| \ge \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\,.$$
Existuje tedy index $n_0$ tak, že
$$\forall\, n \ge n_0 \quad \text{je} \quad |\,a_{2n}-a_n| \ge \frac{1}{5} > 0$$
a daná posloupnost diverguje.

25. Pomocí Bolzano-Cauchyovy podmínky rozhodněte o konvergenci posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li

(a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{2^k}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; [ konverguje ; užijte příkladu 24a) ]

(b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)!!}$; [ konverguje ; využijte příkladu 24e) ]

(c) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$. [ konverguje ; užijte příkladu 24c) ]

## 2.3 Monotonní posloupnosti.

1. Existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

**Důkaz:** Označme $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a shora omezená.
i. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Uvažme podíl

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}.$$

Podle Bernoulliho nerovnosti je

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n} = 1$$

a tedy $a_{n+1} > a_n$.
ii. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená. To však bylo již ukázáno v příkladu 2.1.14d).

**Poznámka:** Protože je daná posloupnost konvergetní, je i pro každou vybranou posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ splněn vztah $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = e$. Navíc každá taková posloupnost je také rostoucí.

2. Ukažte, že posloupnost $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ je klesající a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$.

**Návod:** Vyšetřete podíl $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ a užijte postupu z příkladu 1.

3. Dokažte, že $e = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

**Důkaz:** Označme

$$x_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}, \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Podle příkladu 2.1.14d) je $\forall\, n \geq k \in \mathbf{N}$ ($k$ je pevné)

$$a_n = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$

$$+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)>$$

$$>2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Jestliže v této nerovnosti přejdeme k limitě pro $n\to\infty$, dostaneme

$$e\ge\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}=x_k\,.$$

Na druhé straně pro libovolné $n\in\mathbf{N}$ platí

$$a_n<x_n\le e\quad\text{a odtud}\quad\lim_{n\to\infty}x_n=e\,.$$

Navíc je okamžitě vidět, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.

**Poznámka:** Předchozí limita je vhodný prostředek k přibližnému výpočtu čísla $e$. Její přibližná hodnota je $e\doteq 2,718\,281\,828\,459$.

4. Pro každé $k\in\mathbf{N}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e$.

**Důkaz:** Z Bernoulliho nerovnosti plyne, že

$$1+\frac{k}{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\quad\forall\,n\in\mathbf{N}\quad\text{a odtud plyne}\quad\left(1+\frac{k}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn}<e^k\,.$$

Daná posloupnost je tedy omezená. Označme dále $a_n=\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$. Potom opět podle Bernoulliho nerovnosti platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{k}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}=\left(\frac{1+\frac{k}{n+1}}{1+\frac{k}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{k}{n}\right)=$$

$$=\left[\frac{n(n+1+k)}{(n+1)(n+k)}\right]^{n+1}\frac{n+k}{n}=\left[\frac{(n+1)(n+k)-k}{(n+1)(n+k)}\right]^{n+1}\frac{n+k}{n}=$$

$$=\left[1-\frac{k}{(n+1)(n+k)}\right]^{n+1}\frac{n+k}{n}>\left(1-\frac{k}{k+n}\right)\frac{n+k}{n}=1\,.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy rostoucí a existuje $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Abychom zjistili její hodnotu, stačí vypočítat $\lim\limits_{n\to\infty}a_{k_n}$ pro jistou vhodně vybranou posloupnost. Položme $n=pk$ pro $p\in\mathbf{N}$. Potom je

$$a_{pk}=\left[\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\right]^k\quad\text{a poněvadž}\quad\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p=e\,,\quad\text{platí}\quad\lim_{p\to\infty}a_{pk}=e^k\,.$$

Je tedy

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{p\to\infty}a_{pk}=e^k\,.$$

5. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} = 0$.

**Řešení:** Jestliže označíme $a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$, potom platí

$$\frac{(n+1)!\,(2n+1)!!}{n!\,(2n+3)!!} = \frac{n+1}{2n+3} < 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

a posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající. Poněvadž $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dále platí $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}\, a_n$ a přechodem k limitě dostaneme $a = \frac{1}{2}a$, tedy $a = 0$.

**Poznámka:** Výsledek můžeme též okamžitě dostat z cvičení 2.2.17, poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$. Naopak tvrzení 2.2.17 lze dokázat postupem z tohoto příkladu (limitním přechodem pro $n \to \infty$ ve vztahu $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\, a_n$).

6. Ukažte, že následující posloupnosti konvergují.

$$\text{a)} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{b)} \left\{ \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{c)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$\text{d)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{e)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{4^k} \right\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \text{f)} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

**Návod:** Ukažte, že jsou dané posloupnosti monotonní a omezené. V příkladu e) užijte odhadu $k^2 \leq 2^k$ pro $\forall\, n \geq 4$. V příkladu f) užijte cvičení 2.1.10.

7. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a \in \mathbf{R}$; [ 0 ]

(b) $a_n = \left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n$; [ 0 ]

(c) $a_n = \left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n$; [ 0 ]

(d) $a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}$; [ 1 ]

(e) $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{n}}{1-n}}$; [ 1 ]

(f) $a_n = \left(\frac{3n^2+n+1}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{n^3}{1-n}}$; [ 0 ]

8. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

(a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ [ $e^2$ ]

(b) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$ [ $e^{-2}$ ]

(c) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$ [ $e$ ]

(d) $a_n = \left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$ [ $e$ ]

(e) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n$, $k \in \mathbf{N}$ [ $e$ ]

(f) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ [ $e^{-1}$ ]

(g) $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n+3}$ $\left[\, e^{-2}\,\right]$

9. Ukažte, že platí následující nerovnosti.

   (a) $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$ , $n \in \mathbf{N}$ ;
   [ užijte indukce a skutečnosti, že posloupnost $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ roste k číslu $e$ a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \le \frac{1}{2}$ ]

   (b) $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{n^{n+1}}{n!}$ pro $n \ge n_0$ . Najděte příslušné $n_0$ ;
   [užijte indukce pro $n \ge n_1 = 1$ v prvé nerovnosti a $n \ge n_2 = 7$ ve druhé nerovnosti]

10. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ , je-li

    (a) $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ; $[\, e\,]$

    (b) $x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$ ; $\left[\,\frac{4}{e}\,\right]$

    (c) $x_n = \frac{\sqrt[p]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$ , $p > 1$ . $[\,0\,]$

    **Návod:** Užijte příklad 2.2.23 na posloupnosti $a_n = \frac{n^n}{n!}$ a $a_n = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{n^n}$ .

11. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ , je-li

    (a) $a_n = \frac{4^n \cdot n!}{(3n)^n}$ ; $[\,0\,]$

    (b) $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ . $[+\infty$ ; užijte cvičení 2.2.17$]$

12. Buď $c > 0$ a definujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ předpisy

$$a_1 = \sqrt{c}\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\,.$$

Ukažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a najděte ji.

**Řešení:** Posloupnost kladných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí právě tehdy, když

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{c + a_n} - a_n \Longleftrightarrow a_n^2 - a_n - c < 0 \Longleftrightarrow a_n \in \left(0, \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4c}\,\right)\right)\,.$$

Indukcí ukážeme, že tento vztah platí pro všechna $n \in \mathbf{N}$ . Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Nechť platí pro $n \in \mathbf{N}$ . Potom

$$0 < a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{\frac{1}{2}\left(2c + 1 + \sqrt{1+4c}\,\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4c}\,\right)\,.$$

Označme $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ . Přejdeme-li ve vyjádření $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ k limitě, platí $a = \sqrt{c + a}$ . Tato rovnice má v $\mathbf{R}$ jediné řešení

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4c}\,\right)\,.$$

**Poznámka:** Příklad 12 lze zobecnit následujícím způsobem. Buď

$$c \ge -\frac{1}{4}\,, \quad a_1 \ge \frac{1}{2}\,, \quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}\,.$$

Pak je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definována, konvergentní a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4c}\,\right) = a$. Pro $a_1 \in \left\langle \frac{1}{2}, a\right)$ je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí, shora omezená; pro $a_1 = a$ je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konstantní a pro $a_1 \in (a, +\infty)$ je klesající a zdola omezená.

Pro funkci $f(x) = \sqrt{c+x}$ je $x < f(x) < a$ pro $x \in \left\langle \frac{1}{2}, a\right)$; $f(a) = a$; $a < f(x) < a$ pro $x \in (a, +\infty)$. Nakreslete si obrázek.

13. Najděte $\lim\limits_{n\to\infty}$, kde $a_1 = \sqrt[k]{\alpha}$, $a_{n+1} = \sqrt[k]{\alpha\, a_n}$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, $\alpha > 0$.

**Řešení:** Je

$$a_2 = \sqrt[k]{\alpha\, a_1} = \sqrt[k]{\alpha \sqrt[k]{\alpha}} = \alpha^{\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}}$$

a odtud indukcí dostaneme, že

$$a_n = \alpha^{\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^n}}.$$

Nechť $\alpha > 1$. Ukážeme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a shora omezená. Platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^n}+\frac{1}{k^{n+1}}}}{\alpha^{\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^n}}} = \alpha^{\frac{1}{k^{n+1}}} > 1.$$

tedy $a_{n+1} > a_n$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Dále

$$a_1 < \alpha\,,\ a_2 = \sqrt[k]{\alpha\, a_1} < \alpha^{\frac{2}{k}} \leq \alpha \quad \text{a indukcí dostaneme, že} \quad a_n \leq \alpha \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Pro $\alpha < 1$ je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha^{\frac{1}{k^{n+1}}} < 1,$$

tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a zdola omezená. Je totiž $a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$. Poněvadž existuje $\lim\limits_{n\to\infty} = a$, je možno ve vztahu $a_{n+1} = \sqrt[k]{\alpha\, a_n}$ přejít k limitě a dostaneme $a = \sqrt[k]{\alpha\, a}$. Odtud $a = \sqrt[k-1]{\alpha}$.

**Poznámka:** Příklad 13 je možno vypočítat podstatně rychleji, jestliže využijeme spojitosti funkce $f(x) = x^p$ v bodě $x = \alpha$. Je totiž

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{k^i}} = \alpha^{\frac{1}{k-1}}.$$

14. Buďte $a > b > 0$ a definujme posloupnosti

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n\, b_n}, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Potom existují

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{a platí} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

**Důkaz:** Podle cvičení 1.1.18 platí $a > a_1 > b_1 > b$ a odtud indukcí dostaneme, že

$$a > a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n > b \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Tedy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou monotonní a omezené. Existují tedy limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Na druhé straně je $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ a přechodem k limitě dostáváme

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \text{neboli} \quad \alpha = \beta.$$

**Poznámka:** Společnou hodnotu předchozích limit nazýváme aritmeticko-geometrickým průměrem čísel $a, b$. K vyjádření její hodnoty je však třeba eliptický integrál, což zatím přesahuje naše možnosti.

15. Ukažte, že následující posloupnosti konvergují a najděte jejich limity.

(a) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $n \in \mathbf{N}$; [3]

(b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$, $n \in \mathbf{N}$; [4]

(c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n}$, $n \in \mathbf{N}$; [2]

(d) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{a_n}}$, $n \in \mathbf{N}$;
[přibližná hodnota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \doteq 1,83117$; užijte cvičení 12]

16. Buď $a_1 = c > 0$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Najděte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**Řešení:** Je zřejmé, že $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Dále

$$a_2 = 1 + \frac{1}{c} = \frac{c+1}{c}, \quad a_3 = 1 + \frac{c}{c+1} = \frac{2c+1}{c+1}, \quad a_4 = \frac{3c+2}{2c+1}, \quad a_5 = \frac{5c+3}{3c+2}, \dots$$

a předpokládejme, že $a_1 < a_3$, tedy $c^2 + c < 2c + 1$. Odtud dostaneme nerovnici $c^2 - c - 1 < 0$, která je splněna pro $c \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

i. Nechť $c \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Potom je $a_1 < a_3$, tedy $a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} > 1 + \frac{1}{a_3} = a_4$. Indukcí nyní dostaneme, že

$$a_1 < a_3 < \dots < a_{2k-1} < a_{2k+1} < \dots, \qquad a_2 > a_4 > \dots > a_{2k-2} > a_{2k} > \dots > 0.$$

Odtud plyne, že existuje $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$. Protože je

$$a_{2k} = 1 + \frac{1}{a_{2k-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-2}}} = 1 + \frac{a_{2k-2}}{1 + a_{2k-2}},$$

dostaneme pro $k \to \infty$ rovnost $a = 1 + \frac{a}{a+1}$, neboli $a^2 - a - 1 = 0$, $a \geq 0$, tj.

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dále platí

$$a_{2k+1} = 1 + \frac{1}{a_{2k}} \quad \text{a tedy} \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

ii. Je-li $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, je $a_2 = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a tedy

$$a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{a také} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

iii. Pro $c > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ platí

$$a_1 > a_3 > \dots > a_{2k-1} > a_{2k+1} > \dots > 0 \quad \text{a} \quad a_2 < a_4 < \dots < a_{2k-2} < a_{2k} < \dots .$$

tedy

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

a analogickým postupem jako v bodu i. je též

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

**Poznámka:** Pro $c < -1$ je $a_2 = 1 + \frac{1}{c} > 0$ a platí opět, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pro $c \in \langle -1, 0)$ je situace poněkud komplikovanější. V posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se může na jistém místě vyskytnout 0 a žádný následující člen tedy není definován. Označíme-li $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, pak $a_1$ se nesmí postupně rovnat

$$A_1 = 0\,,\; A_2 = f^{-1}(A_1)\,, \ldots,\; A_{n+1} = f^{-1}(A_n)\,, \ldots$$

tj. posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definována rekurentně vztahy

$$A_1 = 0\,,\;\; A_{n+1} = \frac{1}{A_n - 1}\,, \quad \text{tj.} \quad A_2 = -1\,,\, A_3 = -\frac{1}{2}\,,\, A_4 = -\frac{2}{3}\,,\, A_5 = -\frac{3}{5}\,,\, A_6 = -\frac{5}{8}\,, \ldots .$$

Obecně platí $A_n \in (-1, 0)$ pro $n \geq 3$. Dále je

$$A_{n+2} = \frac{1}{\frac{1}{A_n - 1} - 1} = \frac{A_n - 1}{2 - A_n}\,.$$

Je-li tedy $A_n > \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pak

$$A_{n+2} > \frac{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = -\frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4} = -\frac{-2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Stejně tak platí

$$A_n < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow A_{n+2} < \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Tedy

$$A_{2n-1} > \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,, \quad A_{2n} < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \forall\, n \in \mathbf{N}\,.$$

Dále

$$A_{n+2} - A_n = \tfrac{A_n^2 - A_n - 1}{2 - A_n} < 0 \quad \text{pro} \quad n \quad \text{liché}\,,$$

$$A_{n+2} - A_n = \tfrac{A_n^2 - A_n - 1}{2 - A_n} > 0 \quad \text{pro} \quad n \quad \text{sudé}\,.$$

To tedy znamená, že $\{A_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající posloupnost a $\{A_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, tedy jsou obě konvergentní. Jejich limity $a_l$ a $a_s$ jsou kořeny rovnice

$$x = \frac{x-1}{2-x}\,, \quad \text{které leží v intervalu} \quad \langle -1, 0\rangle\,. \quad \text{Odtud} \quad \lim_{n\to\infty} A_n = a_l = a_s = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Je-li $c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pak

$$a_2 = 1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}} = a_1\,, \quad \text{tedy} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Buď $a_1 = c \in (A_{2n}, A_{2n+2})$ , $n \in \mathbf{N}$ . Potom

$$a_2 \in (f(A_{2n+2}), f(A_{2n})) = (A_{2n+1}, A_{2n-1}) , \; a_3 \in (A_{2n-2}, A_{2n}) , \ldots ,$$

$$a_{2n} \in (A_3, A_1) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) , \; a_{2n+1} < -1 , \; a_{2n+2} > 0 .$$

Analogicky, je-li

$$a_1 \in (A_{2n+1}, A_{2n-1}) , \quad \text{pak} \quad a_{2n-1} \in (A_3, A_1) , \, a_{2n+1} > 0 .$$

Jestliže nyní shrneme dosažené výsledky, dostaneme

i. Pro $c \in \{A_n ; n \in \mathbf{N}\}$ posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není definována (resp. je definována jen pro konečně mnoho členů).

ii. Je-li $c = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = A_0$ , pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

iii. Pro $c \in \mathbf{R} - \{A_n ; n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

17. Vyšetřete posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a najděte její limitu, je-li $a_{n+1} = \alpha\, a_n - a_n^2 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ , $0 \le \alpha \le 2$ .

**Řešení:** i. Předpokládejme, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ . potom musí platit $a = \alpha\, a - a^2$ - a jediné možnosti jsou buď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nebo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha - 1$ . V ostatních případech buď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje nebo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ . Nemůže být $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ , poněvadž pro $a > \alpha$ je $a_{n+1} = \alpha\, a_n - a_n^2 < 0$ . To platí pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ .

ii. Buď $\alpha = 1$ . Z příslušného obrázku je patrné, že

viz obrázek

$$a_n \in (-\infty, 0) \Longrightarrow a_{n+1} < a_n ; \qquad a_n = 0 \Longrightarrow a_{n+1} = 0 ; \qquad a_n \in (0,1) \Longrightarrow a_{n+1} \in (0, a_n) ;$$

$$a_n = 1 \Longrightarrow a_{n+1} = 0 ; \qquad a_n \in (1, +\infty) \Longrightarrow a_{n+1} \in (-\infty, 0) .$$

Je-li tedy $a_1 \in \{0; 1\}$ , pak $a_n = 0 \quad \forall n \ge 2$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ .

Je-li $a_1 \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ , pak je posloupnost $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ záporná a klesající a podle bodu i. je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ .

Je-li $a_1 \in (0,1)$ , pak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající posloupnost čísel z intervalu $(0,1)$ a opět podle bodu i. je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ .

iii. Buď $\alpha \in (1,2)$ . Z příslušného obrázku je vidět, že

viz obrázek

$$a_n \in (-\infty, 0) \Longrightarrow a_{n+1} \in (-\infty, a_n) ; \quad a_n = 0 \Longrightarrow a_{n+1} = 0 ;$$

$$a_n \in (0,\alpha-1) \Longrightarrow a_{n+1} \in (a_n,\alpha-1)\,; \quad a_n = \alpha-1 \Longrightarrow a_{n+1} = \alpha-1\,;$$
$$a_n \in (\alpha-1,1) \Longrightarrow a_{n+1} \in (\alpha-1,a_n)\,; \quad a_n = 1 \Longrightarrow a_{n+1} = \alpha-1\,;$$
$$a_n \in (1,\alpha) \Longrightarrow a_{n+1} \in (0,\alpha-1)\,; \quad a_n = \alpha \Longrightarrow a_{n+1} = 0\,; \quad a_n \in (\alpha,+\infty) \Longrightarrow a_{n+1} < 0\,.$$

Je-li tedy $a_1 \in \{\alpha-1;1\}$, pak $a_n = \alpha-1 \quad \forall\, n \geq 2$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha-1$.

Je-li $a_1 \in \{0;\alpha\}$, je $a_n = 0 \quad \forall\, n \geq 2$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Je-li $a_1 \in (-\infty,0)\cup(\alpha,+\infty)$, je $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ záporná a klesající posloupnost, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Je-li $a_1 \in (0,\alpha-1)\cup(1,\alpha)$, je $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ rostoucí posloupnost, $a_n \in (0,\alpha-1) \quad \forall\, n \geq 2$ tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha-1$.

Je-li $a_1 \in (\alpha-1,1)$, je $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} \subset (\alpha-1,1)$ klesající posloupnost, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha-1$.

Proveďte sami pro $\alpha = 2$.

iv. Buď $\alpha \in (0,1)$. Z obrázku plyne, že

<u>viz obrázek</u>

$$a_n \in (-\infty,\alpha-1) \Longrightarrow a_{n+1} \in (-\infty,a_n)\,; \quad a_n = \alpha-1 \Longrightarrow a_{n+1} = \alpha-1\,;$$
$$a_n \in (\alpha-1,0) \Longrightarrow a_{n+1} \in (a_n,0)\,; \quad a_n = 0 \Longrightarrow a_{n+1} = 0\,; \quad a_n \in (0,\alpha) \Longrightarrow a_{n+1} \in (0,a_n)\,;$$
$$a_n = \alpha \Longrightarrow a_{n+1} = 0\,; \quad a_n \in (\alpha,1) \Longrightarrow a_{n+1} \in (\alpha-1,0)\,;$$
$$a_n = 1 \Longrightarrow a_{n+1} = \alpha-1\,; \quad a_n \in (1,+\infty) \Longrightarrow a_{n+1} \in (-\infty,\alpha-1)\,.$$

Neboli pro $a_1 \in \{\alpha-1;1\}$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha-1$.

Pro $a_1 \in \{0;\alpha\}$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Pro $a_1 \in (-\infty,\alpha-1)\cup(1,+\infty)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Pro $a_1 \in (\alpha-1,0)\cup(0,\alpha)\cup(\alpha,1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proveďte sami pro $\alpha = 0$.

**Poznámka:** Pokud je $\alpha > 2$, je situace jasná pouze pro $a_1 \in (-\infty,0)\cup(\alpha,+\infty)$, kde platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ a pro $a_1 \in \{0;\alpha\}$, kde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Označme $f(x) = x(\alpha-x)$ pro $x \in (0,\alpha)$, $I_0 = (\alpha,+\infty)$. Pro $\alpha > 4$ je $f^{-1}(I_0)$ otevřený interval. Omezíme se na tento případ. Definujeme

$$I_{n+1} = f^{-1}\left(I_n\right)\,,\ n \in \mathbf{N}\cup\{0\}\,; \quad I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\,.$$

$I_n$ je sjednocení $2^{n-1}$ disjunktních intervalů (načrtněte si obrázek).

$$\text{Pro} \quad a_1 \in I \quad \text{platí} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\,.$$

Analogicky definujme

$$J_0 = \{\alpha\}\,,\ J_{n+1} = f^{-1}(J_n)\,,\ J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\,; \qquad K_0 = \{\alpha-1\}\,,\ K_{n+1} = f^{-1}(K_n)\,,\ K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\,.$$

$$\text{Pro} \quad a_1 \in J \quad \text{je} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,; \qquad \text{pro} \quad a_1 \in K \quad \text{je} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha - 1\,.$$

Množiny $I, J, K$ jsou tzv. **fraktály**. Na počítačích se často kreslí fraktály, které dostaneme jako množinu všech $z \in \mathbf{C}$ takových, že konverguje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_1 = z$, $a_{n+1} = c + a_n^2$, $c \in \mathbf{C}$ je dané.

18. Stolzova věta.

Buďte $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ a existuje index $n_0$ tak, že $b_{n+1} > b_n \quad \forall\, n \geq n_0$. Jestliže existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A\,, \quad \text{potom} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A\,.$$

**Důkaz:** i. Předpokládejme nejdřív, že $A$ je vlastní. Potom

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbf{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall\, n \geq N \quad \text{je} \quad \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

neboli

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < A + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Jestliže zvolíme $N$ tak, aby bylo $N \geq n_0$, je $b_{n+1} - b_n > 0 \quad \forall\, n \geq N$ a platí

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N+1} - b_N) < a_{N+1} - a_N < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N+1} - b_N)\;;$$

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N+2} - b_{N+1}) < a_{N+2} - a_{N+1} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{N+2} - b_{N+1})\;;$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n-1}) < a_n - a_{n-1} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n-1})\;.$$

Sečtením všech těchto nerovností dostaneme

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} < A + \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{tedy} \quad \left| \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Rozdíl $\frac{a_n}{b_n} - A$ přepíšeme nyní do tvaru

$$\frac{a_n}{b_n} - A = \frac{a_N - A b_N}{b_n} + \left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right)\left(\frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} - A\right)$$

a odtud

$$\leq \left| \frac{a_N - A b_N}{b_n} \right| + \left| \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} - A \right|\,.$$

$\Big($Je totiž $\quad 0 < \frac{b_N}{b_n} < 1\Big)$. Druhý sčítanec na pravé straně je pro $n \geq N$ menší než $\frac{\varepsilon}{2}$, pro prvý sčítanec platí

$$\left| \frac{a_N - A b_N}{b_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro $n$ dostatečně veliká, např. $n \geq N_1$. Je totiž $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Platí tedy, že

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - A \right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_1\,.$$

ii. Nechť
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = +\infty\,.$$
Poněvadž je $b_{n+1}-b_n > 0 \quad \forall\, n \ge n_0$, musí existovat index $n_1$ tak, že
$$a_{n+1}-a_n > b_{n+1}-b_n \quad \forall\, n \ge n_1 \qquad \left(\text{je} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = +\infty\right).$$
tedy pro $n \ge n_1$ platí
$$\begin{gathered} a_{n_1+1}-a_{n_1} > b_{n_1+1}-b_{n_1}\,; \\ a_{n_1+2}-a_{n_1+1} > b_{n_1+2}-b_{n_1+1}\,; \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_n - a_{n-1} > b_n - b_{n-1}\,. \end{gathered}$$
Sečtením těchto nerovností dostaneme
$$a_n - a_{n_1} > b_n - b_{n_1}\,, \quad \text{tedy} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$
a stačí bod i. aplikovat na posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž limita je pro $n \to \infty$ rovna 0.

iii. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = -\infty$, užijeme bod ii. na posloupnosti $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Poznámky:** i. Obrácená implikace ve Stolzově větě neplatí. Stačí zvolit
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0,1,0,2,0,3,0,4,0,5,\dots\}\,; \qquad \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}\,.$$
Potom je
$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \quad \text{ale} \quad \frac{a_{2n}-a_{2n-1}}{b_{2n}-b_{2n-1}} = \frac{n}{4n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\,, \quad \frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{b_{2n+1}-b_{2n}} = -\frac{n}{4n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}\,,$$
tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ neexistuje.

ii. Stolzova věta nahrazuje pro výpočet limit posloupností l'Hôspitalovo pravidlo.

19. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, je-li

$$\text{a)} \quad x_n = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}\,,\ k \in \mathbf{N}\,; \qquad \text{b)} \quad x_n = \frac{1^k + 3^k + \dots + (2n-1)^k}{n^{k+1}}\,,\ k \in \mathbf{N}\,;$$
$$\text{c)} \quad x_n = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\,,\ k \in \mathbf{N}\,.$$

**Řešení:**

(a) Jestliže označíme
$$a_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k\,, \qquad b_n = n^{k+1}\,,$$
je posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ zřejmě rostoucí do $+\infty$ a
$$a_{n+1}-a_n = (n+1)^k\,, \quad b_{n+1}-b_n = (n+1)^{k+1} - n^{k+1}\,;$$
$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^k + n(n+1)^{k-1} + \dots + n^{k-1}(n+1) + n^k} =$$
$$= \frac{1}{1 + \frac{n}{n+1} + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{k-1} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k+1} \quad \text{a tedy} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{k+1}\,.$$

(b) Položme

$$a_n = 1^k + 3^k + \cdots + (2n-1)^k \,; \qquad b_n = n^{k+1} \,.$$

Potom

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(2n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}} = \frac{2^k n^k + k2^{k-1}n^{k-1} + \cdots + 1}{(k+1)n^k + \frac{k+1)}{2}n^{k-1} + \cdots + 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2^k}{k+1}$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2^k}{k+1}$ .

(c) Je

$$x_n = \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k)}{(k+1)n^k}$$

a označíme-li opět

$$a_n = (k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k) \,, \qquad b_n = (k+1)n^k \,,$$

je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotonní a $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ . Dále

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{(k+1)(n+1)^k - (n+1)^{k+1} + n^{k+1}}{(k+1)\left[(n+1)^k - n^k\right]} =$$

$$= \frac{(k+1)\left(n^k + kn^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}n^{k-2} + \cdots + kn + 1\right)}{(k+1)\left(kn^k + \frac{k(k-1)}{2}n^{k-2} + \cdots + 1\right)} -$$

$$- \frac{n^{k+1} + (k+1)n^k + \frac{(k+1)k}{2}n^{k-1} + \cdots + (k+1)n + 1 - n^{k+1}}{(k+1)\left(kn^k + \frac{k(k-1)}{2}n^{k-2} + \cdots + 1\right)} =$$

$$= \frac{\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1} + \left[\frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k+1)k(k-1)}{6}\right]n^{k-2} + \cdots + (k^2-1)n}{(k+1)\left(kn^k + \frac{k(k-1)}{2}n^{k-2} + \cdots + 1\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

a odtud $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$ .

20. Dokažte pomocí Stolzovy věty cvičení 2.2.20.

**Návod:** Zvolte $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ , $\;b_n = n$ . Tedy cvičení 2.2.20 platí i pro $A = \pm\infty$ .

21. Ukažte, že posloupnost $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ konverguje.

**Důkaz:** Ukážeme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a zdola omezená. Podle příkladu 2 platí $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ a odtud

$$1 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} , \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n \,.$$

Přičtením výrazu $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ k oběma stranám nerovnosti dostaneme

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = x_n \,.$$

Podle příkladu 1 je $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e \quad \forall k \in \mathbf{N}$ a tedy $\ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$ . Sečtením těchto nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n$ dostaneme

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \,,$$

tedy

$$0 < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = x_n\,.$$

Existuje tedy limita $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

**Poznámka:** $C \doteq 0{,}577\,216\ldots$ se nazývá Eulerova konstanta.

## 2.4 Částečné limity posloupností.

1. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost reálných čísel. Ukažte, že číslo $a \in \mathbf{R}$ je částečnou limitou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, když pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro nekonečně mnoho indexů $n$. Analogicky $+\infty$ (resp. $-\infty$) je částečnou limitou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, když pro libovolné $K > 0$ (resp. $L < 0$) nerovnost $a_n > K$ (resp. $a_n < L$) platí pro nekonečně mnoho indexů $n$.

**Poznámka:** Někdy se místo částečná limita říká hromadná hodnota.

**Důkaz:** i. Nechť $a$ je částečná limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. Tedy

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \text{je} \quad |a_{k_n} - a| < \varepsilon$$

a podmínka platí.

ii. Jestliže obráceně pro každé $\varepsilon > 0$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro nekonečně mnoho indexů $n$, pak pro $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ existuje $k_n \in \mathbf{N}$ tak, že $|a_{k_n} - a| < \frac{1}{n}$ a $k_n > k_{n-1}$, $(n > 1)$. Potom je zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Analogicky se dokáže tvrzení pro případ částečné limity $+\infty$ nebo $-\infty$.

2. Buď $x_k \in \mathbf{R}$ částečná limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro každé $k \in \mathbf{N}$ a nechť $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Potom je $x$ také částečná limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Důkaz:** Buď $x \in \mathbf{R}$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $x_{k_0}$ tak, že $|x_{k_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože $x_{k_0}$ je částečná limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, existuje nekonečně mnoho indexů $n$ tak, že $|a_n - x_{k_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro tato $n$ nyní platí

$$|a_n - x| \leq |a_n - x_{k_0}| + |x_{k_0} - x| < \varepsilon\,.$$

Analogicky se provede důkaz pro $x = +\infty$ nebo $x = -\infty$.

**Poznámka:** Říkáme, že množina hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je uzavřená.

3. Najděte částečné limity posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a též $\sup\{a_n\}$ a $\inf\{a_n\}$, je-li

a) $a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ b) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$; c) $a_n = \cos^n \dfrac{2\pi n}{3}$;

d) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$; e) $a_n = n\,2^{n\,(-1)^n}$; f) $a_n = (-n)^{\sin\frac{n\pi}{2}}$;

g) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n\,(-1)^n}}$; h) $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{n}{n}$;

i) $a_n = \frac{1}{2}\left(n-2-3\left[\frac{n-1}{3}\right]\right)\left(n-3-3\left[\frac{n-1}{3}\right]\right)$ ;

j) $a_n = \left\{1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ 1+\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ 1+\frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ 1+\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \dots\right\}$ ;

k) $a_n = \left\{0\,,\ 1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{2}{3}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{3}{4}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \frac{2}{5}\,,\ \frac{3}{5}\,,\ \frac{4}{5}\,,\ \frac{1}{6}\,,\ \frac{5}{6}\,,\ \frac{1}{7}\,,\ \frac{2}{7}\,,\ \frac{3}{7}\,,\ \frac{4}{7}\,,\ \frac{5}{7}\,,\ \dots\right\}$ ;

l) $a_n = \left\{\frac{1}{2}\,,\ \frac{2}{2}\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{2}{4}\,,\ \frac{3}{4}\,,\ \frac{4}{4}\,,\ \frac{5}{4}\,,\ \frac{1}{8}\,,\ \frac{2}{8}\,,\ \dots\,,\ \frac{9}{8}\,,\ \dots\,,\ \frac{1}{2^n}\,,\ \dots\,,\ \frac{2^n+1}{2^n}\,,\ \dots\right\}$ ;

m) $a_n = \left\{\frac{1}{2}\,,\ \frac{2}{2}\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{2}{4}\,,\ \frac{3}{4}\,,\ \frac{4}{4}\,,\ \dots\,,\ \frac{9}{4}\,,\ \frac{1}{8}\,,\ \dots\,,\ \frac{27}{8}\,,\ \dots\,,\ \frac{1}{2^n}\,,\ \dots\,,\ \frac{3^n}{2^n}\,,\ \dots\right\}$ ;

n) $a_n = \sin nx_0\,, \quad x_0 \in (0,\pi)\,.$

**Řešení:**

(a) Je

$$a_{4n} = 2\,, \quad a_{4n+1} = 6\,, \quad a_{4n+2} = -4\,, \quad a_{4n+3} = 0$$

a odtud plyne, že částečné limity jsou $-4\,,\ 0\,,\ 2\,,\ 6\,,\quad \inf\{a_n\} = -4\,,\quad \sup\{a_n\} = 6\,.$

(b) Je

$$a_{3n} = \frac{3n-1}{3n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\,; \quad a_{3n+1} = -\frac{1}{2}\frac{3n}{3n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\,; \quad a_{3n+2} = -\frac{1}{2}\frac{3n+1}{3n+3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

a tedy $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}\,,\quad \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1\,.$ Žádné jiné částečné limity posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá. Poněvadž je posloupnost $\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$ klesající, platí

$$\inf\{a_n\} = -\frac{1}{2}\,, \qquad \sup\{a_n\} = 1\,.$$

(c) Platí

$$a_{3n} = 1\,; \quad a_{3n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{3n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,; \quad a_{3n+2} = \frac{(-1)^n}{2^{3n+2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a tedy $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0\,,\quad \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1\,.$ Je zřejmé, že $\sup\{a_n\} = 1$ a poněvadž je posloupnost $\left\{\frac{1}{2^{3n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ klesající, je $\inf\{a_n\} = a_1 = -\frac{1}{2}\,.$

(d) Snadno se ukáže, že

$$\lim_{n\to\infty} a_{8n} = e\,;\ \lim_{n\to\infty} a_{8n+1} = -e + \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ \lim_{n\to\infty} a_{8n+2} = e+1\,;\ \lim_{n\to\infty} a_{8n+3} = -e + \frac{\sqrt{2}}{2}\,;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{8n+4} = e\,;\ \lim_{n\to\infty} a_{8n+5} = -e - \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ \lim_{n\to\infty} a_{8n+6} = e-1\,;\ \lim_{n\to\infty} a_{8n+7} = -e - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

a částečné limity dané posloupnosti jsou

$$-e - \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ -e + \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ e-1\,,\ e\,,\ e+1\,.$$

Poněvadž je posloupnost

$$a_{8n+2} = \left(1 + \frac{1}{8n+2}\right)^{8n+2} + 1 \quad \text{rostoucí, je} \quad \sup\{a_n\} = e+1\,.$$

Analogicky je

$$a_{8n+5} = -\left(1 + \frac{1}{8n+5}\right)^{8n+5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{klesající a tedy} \quad \inf\{a_n\} = -e - \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

(e) Je

$$a_{2n} = 2n \cdot 2^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty\,, \qquad a_{2n+1} = (2n+1)2^{-(2n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a tedy $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0\,,\quad \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty\,.$ Poněvadž $a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$, platí

$$\inf\{a_n\} = 0 \qquad \text{a zřejmě} \qquad \sup\{a_n\} = +\infty\,.$$

(f) Platí

$$a_{4n} = 1\,,\quad a_{4n+1} = -4n-1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\,,\quad a_{4n+2} = 1\,,\quad a_{4n+3} = -\frac{1}{4n+3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a částečné limity jsou $-\infty\,,\ 0\,,\ 1\,.$ Zřejmě je $\inf\{a_n\} = -\infty\,,\quad \sup\{a_n\} = 1\,.$

(g) Je

$$a_{2n} = \sqrt[2n]{1+2^{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\,, \qquad a_{2n+1} = \sqrt[2n+1]{1+\frac{1}{2^{2n+1}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

a platí $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1\,,\quad \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 2\,.$ Poněvadž $a_n > 1\ \forall\, n \in \mathbf{N}$, je $\inf\{a_n\} = 1\,.$ Dále platí

$$1+\frac{1}{2^n} > 1+\frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{a odtud} \quad \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{n}.$$

Po odmocnění a vynásobení 2 dostaneme

$$2\sqrt[n]{1+\frac{1}{2^n}} > 2\sqrt[n+1]{1+\frac{1}{2^{n+1}}} \quad \text{neboli} \quad \sqrt[n]{1+2^n} > \sqrt[n+1]{1+2^{n+1}}\,.$$

Posloupnost $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy klesající a $\sup\{a_n\} = a_2 = \sqrt{5}\,.$

(h) Protože $a_n = \frac{1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot n}{n}$, je zřejmé, že

$$a_{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,,\quad a_{2n} = -\frac{1}{2} \quad \text{a tedy} \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}\,,\quad \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\,.$$

Dále posloupnost $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a tedy

$$\sup\{a_n\} = a_1 = 1\,, \qquad \inf\{a_n\} = -\frac{1}{2}\,.$$

(i) Je

$$\begin{aligned}
a_{3n-2} &= \frac{1}{2}\left(3n-4-3\left[\frac{3n-3}{3}\right]\right)\left(3n-5-3\left[\frac{3n-3}{3}\right]\right) = \\
&= \frac{1}{2}(3n-4-3(n-1))(3n-5-3(n-1)) = 1\,,\\
a_{3n-1} &= \frac{1}{2}\left(3n-3-3\left[\frac{3n-2}{3}\right]\right)\left(3n-4-3\left[\frac{3n-2}{3}\right]\right) = \\
&= \frac{1}{2}(3n-3-3(n-1))(3n-4-3(n-1)) = 0\,,\\
a_{3n} &= \frac{1}{2}\left(3n-2-3\left[\frac{3n-1}{3}\right]\right)\left(3n-3-3\left[\frac{3n-1}{3}\right]\right) = \\
&= \frac{1}{2}(3n-2-3(n-1))(3n-3-3(n-1)) = 0
\end{aligned}$$

a tedy

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} = 0\,, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = 1\,.$$

(j) Jestliže se podíváme trochu blíže na strukturu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , je vidět, že z ní můžeme vybrat následující posloupnosti.

$$\left\{1\,,\ \frac{1}{2}\,,\frac{1}{3}\,,\frac{1}{4}\,,\dots\right\} = \{a_1,a_2,a_4,a_7,a_{11},\dots\} = \left\{a_{1+\frac{n(n+1)}{2}}\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,;$$

$$\left\{1+\frac{1}{2}\,,\ 1+\frac{1}{3}\,,\ 1+\frac{1}{4}\,,1+\frac{1}{5}\,,\dots\right\} = \{a_3,a_5,a_8,a_{12},\dots\} =$$

$$= \left\{a_{2+\frac{n(n+1)}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1+\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{5}\,,\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\,,\dots\right\} = \{a_6,a_9,a_{13},a_{18},\dots\} =$$

$$= \left\{a_{3+\frac{n(n+1)}{2}}\right\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right\}_{n=2}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

$$\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{3}+\frac{1}{5}\,,\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\,,\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\,,\dots\right\} = \{a_{10},a_{14},a_{19},a_{25},\dots\} =$$

$$= \left\{a_{4+\frac{n(n+1)}{2}}\right\}_{n=3}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}\right\}_{n=3}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\left\{\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\,,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k+2}\,,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k+3}\,,\frac{1}{k}+\frac{1}{k+4}\,,\dots\right\} =$$

$$= \left\{a_{\frac{k^2+3k+2}{2}}\ ,\ a_{\frac{k^2+5k+4}{2}}\ ,\ a_{\frac{k^2+7k+8}{2}}\ ,\ a_{\frac{k^2+9k+14}{2}}\ ,\ \dots\right\} =$$

$$= \left\{a_{k+1+\frac{n(n+1)}{2}}\right\}_{n=k}^{\infty} = \left\{\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\right\}_{n=k}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Tuto skutečnost můžeme přehledněji zapsat do schématu

$$\begin{array}{ccccccc}
1\,, & & & & & & \\
\frac{1}{2}\,, & 1+\frac{1}{2}\,, & & & & & \\
\frac{1}{3}\,, & 1+\frac{1}{3}\,, & \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,, & & & & \\
\dots & \dots & \dots & & & & \\
\frac{1}{k+1}\,, & 1+\frac{1}{k+1}\,, & \frac{1}{2}+\frac{1}{k+1}\,, & \dots\,, & \frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\,, & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
\frac{1}{n+1}\,, & 1+\frac{1}{n+1}\,, & \frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\,, & \dots\,, & \frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}\,, & \dots\,, & \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\,, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & & \\
0\,, & 1\,, & \frac{1}{2}\,, & \dots & \frac{1}{k}\,, & \dots &
\end{array}$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má za částečné limity čísla

$$0,\,1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \dots\,,\ \frac{1}{k}\,,\ \dots\,.$$

Ukážeme dále, že žádné jiné částečné limity neexistují. Buď $k \in \mathbf{N}$ a $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2k(k+1)}\right)$ . Pak $a_n \in \left(\frac{1}{k+1} + \varepsilon, \frac{1}{k} - \varepsilon\right)$ platí nejvýše pro konečně mnoho $n \in \mathbf{N}$ , neboť všechny prvky $(2k + 2)-$ho sloupce (a tedy i sloupců následujících) jsou menší než $\frac{1}{k+1}$ a v $i-$tém sloupci, kde $i \in \{2, \dots, 2k+1\}$ , slňuje podmínku $a_n \in \left(\frac{1}{k+1} + \varepsilon, \frac{1}{k} - \varepsilon\right)$ jen konečně mnoho členů $a_n$ , vzhledem k tomu, že

$$\mathcal{U}_\varepsilon\left(\frac{1}{i-1}\right) \cap \left(\frac{1}{k+1} + \varepsilon, \frac{1}{k} - \varepsilon\right) = \emptyset$$

(v prvním sloupci takový člen neleží žádný). Tedy v intervalu $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ neleží žádná částečná limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .
Analogicky v intervalech $(-\infty, -\varepsilon)$ a $(\varepsilon, +\infty)$ leží nejvýše konečně mnoho členů $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a tedy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá žádnou částečnou limitu v množině $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ .
Platí tedy, že

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 0\,, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 1\,.$$

Dále $a_n > 0 \ \forall\, n \in \mathbf{N}$ a tedy $\inf\{a_n\} = 0$ . Protože všechny výše uvedené posloupnosti jsou klesající, je $\sup\{a_n\} = a_3 = \frac{3}{2}$ .

(k) Poněvadž se posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ skládá ze všech racionálních čísel intervalu $\langle 0, 1\rangle$ , tvoří množinu všech částečných limit podle příkladu 1 interval $\langle 0, 1\rangle$ a tedy

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \inf\{a_n\} = 0\,, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \sup\{a_n\} = 1\,.$$

Všiměte si, že toto zdůvodnění platí pro každé uspořádání množiny $\mathbf{Q} \cap \langle 0, 1\rangle$ do posloupnosti.

(l) Je vidět, že žádné $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cup \{-\infty\,;\, +\infty\}$ není částečnou limitou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Buď $x \in \langle 0, 1\rangle$ a $\varepsilon > 0$ libovolné a zvolme index $n_0$ tak, že $\forall\, n \geq n_0$ platí $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Pro každé takové $n \in \mathbf{N}$ najdeme v bloku

$$\frac{1}{2^n}\,, \frac{2}{2^n}\,, \frac{3}{2^n}\,, \dots\,, \frac{2^n+1}{2^n} \quad \text{prvek} \quad a_{k_n} \quad \text{tak, že} \quad 2^n + n - 2 \leq k_n \leq 2^{n+1} + n - 2$$

$$\text{a} \qquad |a_{k_n} - x| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon\,.$$

Tedy nerovnost $|a_n - x| < \varepsilon$ platí pro nekonečně mnoho indexů $n$ a podle příkladu 1 je $x$ částečná limita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Dále platí $\inf\{a_n\} = 0\,, \quad \sup\{a_n\} = 1$ .

**Poznámka:** Buď $\varepsilon > 0$ . Množinu $S$ nazveme $\varepsilon-$sítí intervalu $\langle a, b\rangle$ , jestliže platí

$$\forall\, x \in \langle a, b\rangle \quad \exists\, y \in S \quad \text{tak, že} \quad |x - y| < \varepsilon\,.$$

V předchozím cvičení jsme vlastně dokázali následující tvrzení. Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $n_0 \in \mathbf{N}$ existuje <u>konečná</u> $\varepsilon-$síť $S \subset \{a_n\,;\, n \geq n_0\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ , pak

$$\langle a, b\rangle \subset \{x \in \mathbf{R}\,;\, x \text{ je částečná limita } \{a_n\}\}\,.$$

(m) Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = +\infty$ , je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty$ . Buďte $K > 0$ , $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon$ malé, $K$ velké). Existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \text{je} \quad \frac{3^n}{2^n} \geq K \quad \text{a} \quad \frac{1}{2^n} < \varepsilon\,.$$

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \text{je} \quad \left\{ \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{3^n}{2^n} \right\} \cap \langle 0, K\rangle \ \ \varepsilon - \text{síť v} \quad \langle 0, K\rangle\,,$$

tedy podle předchozí poznámky je každé $x \in \langle 0, K\rangle$ částečnou limitou $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Protože toto platí pro každé $K > 0$ a $a_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$, je množina všech částečných limit posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rovna $\langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Dále $\inf\{a_n\} = 0\,,\ \sup\{a_n\} = +\infty$.

(n) V řešení použijeme zobrazení $\mathbf{R}$ na jednotkovou kružnici

$$x \longrightarrow [\,\cos x, \sin x\,] = \widetilde{x}\,.$$

Je-li $x = \frac{2\pi}{q}$, $q \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, pak posloupnosti $\{nx\}_{n=1}^{\infty}$ odpovídá posloupnost $\{\widetilde{nx}\}_{n=1}^{\infty} = \{\widetilde{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ vrcholů pravidelného $q-$úhelníka

$$\widetilde{x_n} = \left[\cos\frac{2k\pi}{q}\,, \sin\frac{2k\pi}{q}\right]\,, \ \text{je-li } n = ql + k\,,\ l \in \mathbf{N} \cup \{0\}\,,\ k = 0, 1, \dots, q-1\,.$$

Buď $\varepsilon > 0$, $x \in P_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$, $n_0 = \left[\frac{2\pi}{|x|}\right]$. Pak každých $n_0 + 1$ za sebou jdoucích bodů posloupnosti $\{\widetilde{nx}\}_{n=1}^{\infty} = \{\widetilde{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří konečnou $\varepsilon-$síť na jednotkové kružnici, tj.

$$\forall\, \widetilde{y} \quad \forall\, m \in \mathbf{N} \quad \exists\, k \in \mathbf{Z} \cap \langle 0, n_0\rangle$$

tak, že velikost úhlu $\overrightarrow{O\widetilde{y}}$ a $\overrightarrow{O\widetilde{x_{m+k}}}$ je menší než $\varepsilon$. Situace je znázorněna na obrázku.
viz obrázek

Buď $x_0 \in (0, \pi)$. Rozlišíme dva případy.

i. $\frac{x_0}{2\pi} = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, $(p, q) = 1$. Každý bod $\widetilde{x_n} = \widetilde{nx_0}$ je vrcholem pravidelného $q-$úhelníka, vepsaného do jednotkové kružnice s vrcholem v bodě $[1, 0]$. Buď

$$A = \{1, 2, \dots, q-1\}\,, \quad B = \left\{\frac{1}{q}\,, \frac{2}{q}\,, \dots\,, \frac{q-1}{q}\right\}$$

a definujme zobrazení

$$f\,:\, A \longrightarrow B \quad \text{tak, že} \quad f\,:\, k \longrightarrow k\frac{p}{q} - \left[k\frac{p}{q}\right]\,.$$

Potom je $f$ prosté zobrazení. Skutečně nechť $f(k_1) = f(k_2)$; pak

$$(k_1 - k_2)\frac{p}{q} = \left[k_2\frac{p}{q}\right] - \left[k_1\frac{p}{q}\right] = k_3 \in \mathbf{Z}\,,$$

tj. $q|(k_1 - k_2)p$. Protože $(p, q) = 1$, platí $q|(k_1 - k_2)$. Je ale $k_1, k_2 \in A$, neboli $|k_1 - k_2| \leq q - 1$ a tedy $k_1 = k_2$. Existuje tedy $k \in A$ tak, že $\widetilde{x_k} = \widetilde{kx_0} = \frac{2\pi}{q}$. Odtud plyne, že $\{\widetilde{x_{kn}}\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost vrcholů pravidelného $q-$úhelníka popsaného v úvodu. Tedy množina všech částečných limit posloupnosti $\{\sin nx_0\}_{n=1}^{\infty}$ je

$$\left\{0\,, \sin\frac{2\pi}{q}\,, \sin\frac{4\pi}{q}\,, \dots\,, \sin\frac{2\pi(q-1)}{q}\right\}\,.$$

ii. $\frac{x_0}{2\pi} \notin \mathbf{Q}$. Nejdříve dokážeme pomocné tvrzení:
Buď $x \in (-\pi, \pi)$ takové, že $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbf{Q}$. Potom existují $n_1 \in \mathbf{N}$ a $y \in \mathbf{R}$ taková, že

$$\widetilde{n_1 x} = \widetilde{y}\,, \quad y \in \left(0, \frac{1}{2}|x|\right).$$

Označme $n_0 = \left[\frac{2\pi}{|x|}\right]$. potom

$$n_0 - 1 < \frac{2\pi}{|x|} < n_0\,, \quad (n_0 - 1)|x| < 2\pi < n_0|x|\,.$$

Pro $x > 0$ je $(n_0-1)x < 2\pi < n_0 x$ a za $y$ zvolíme to z čísel $(n_0-1)x-2\pi$, $n_0 x - 2\pi$, které má menší absolutní hodnotu (a $n_1$ je pak $n_0 - 1$ nebo $n_0$). Pak $|y| < \frac{1}{2}|x|$. Analogicky pro $x < 0$ zvolíme

$$y = (n_0 - 1)x + 2\pi \quad \text{nebo} \quad y = n_0 x + 2\pi\,.$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje $k \in \mathbf{N}$ tak, že $\frac{x_0}{2^k} < \varepsilon$. Zopakujeme-li předchozí pomocné tvrzení $k-$krát, dostaneme, že existují čísla $n_i \in \mathbf{N}$ a $x_i \in \mathbf{R}$ tak, že

$$\widetilde{n_i x_{i-1}} = \widetilde{x_i}\,, \quad |x_i| \in \left(0, \frac{1}{2}|x_{i-1}|\right), \quad i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Položíme-li $y = x_k$, $l = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$, pak $\widetilde{l_x} = \widetilde{y}$, $|y| \in (0, \varepsilon)$ a tedy každých $n_0 + 1 = \left[\frac{2\pi}{|y|}\right] + 1$ za sebou jdoucích členů $\{\widetilde{ny}\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří $\varepsilon-$síť na jednotkové kružnici, tedy každých $n_0+1$ za sebou jdoucích členů posloupnosti $\{\sin ny\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří $\varepsilon-$síť intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Protože $\{\sin ny\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{\sin nx_0\}_{n=1}^{\infty}$, ověřili jsme podmínku z poznámky za příkladem l) a tedy každý bod intervalu $\langle -1, 1\rangle$ je částečná limita posloupnosti $\{\sin nx_0\}_{n=1}^{\infty}$. Protože v množině $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ neleží žádný bod posloupnosti $\{\sin nx_0\}_{n=1}^{\infty}$, neleží v $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ani žádná částečná limita této posloupnosti. Samozřejmě platí $\inf\{a_n\} = -1$, $\sup\{a_n\} = 1$.

4. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby

   (a) neměla konečné částečné limity; [ například $a_n = n$ ]
   (b) měla jednu konečnou částečnou limitu a nekonvergovala; [ například $[1 + (-1)^n] \cdot n$ ]
   (c) měla částečné limity $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$;
   [ například $\{a_n\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots\}$ ]
   (d) nekonečně mnoho částečných limit; [ například cvičení 3j) ]
   (e) každý její člen byl částečnou limitou; [ například cvičení 3l) ]
   (f) částečné limity vyplnily $\mathbf{R}$; [ například množina všech racionálních čísel ]

5. Najděte částeěné limity posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a též $\inf\{a_n\}$ a $\sup\{a_n\}$, je-li

   (a) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$; $\left[\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1; \inf\{a_n\} = 0; \sup\{a_n\} = 1\right]$

   (b) $a_n = (-1)^n \cdot n$; $\left[\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} = -\infty; \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = +\infty\right]$

   (c) $a_n = n^{(-1)^n}$; $\left[\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} = 0; \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = +\infty\right]$

   (d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$; $\left[\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0; \inf\{a_n\} = -1; \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1; \sup\{a_n\} = \frac{3}{2}\right]$

(e) $a_n = -n\,[2 + (-1)^n]$ ; $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty\,;\sup\{a_n\} = -1\right]$

(f) $a_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$ ; $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -2\,;\inf\{a_n\} = -\frac{7}{2}\,;\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2\,;\sup\{a_n\} = 5\right]$

(g) $a_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$ ; $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 1\,;\inf\{a_n\} = -2\,;\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 5\,;\sup\{a_n\} = 5\right]$

(h) $a_n = \frac{1+(-1)^n\cdot n}{n}$ ; $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} = -1\,;\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1\,;\sup\{a_n\} = \frac{3}{2}\right]$

(i) $a_n = \frac{[1-(-1)^n]\cdot 2^n+1}{2^n+3}$ ; $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} = 0\,;\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = 2\right]$

(j) $a_n = \sqrt[n]{4^{(-1)^n} + 2}$ ; $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1\,;\sup\{a_n\} = \sqrt{6}\right]$

(k) $a_n = \frac{1}{2}\left[(a+b) + (-1)^n(a-b)\right]$ ;

$$\left[\varliminf_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} = \min\{a,b\}\,;\ \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = \max\{a,b\}\right]$$

(l) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{3}{4}\,,\ \frac{1}{8}\,,\ \frac{7}{8}\,,\ \frac{1}{16}\,,\ \frac{15}{16}\,,\ \ldots\,,\ \frac{1}{2^n}\,,\ \frac{2^n-1}{2^n}\,,\ \ldots\right\}$ ;

$$\left[\varliminf_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} = 0\,;\ \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = 1\right]$$

(m) $a_n = 1 + n\sin\frac{n\pi}{2}$ ; $[-\infty\,,\ 1\,,\ +\infty\,;\inf\{a_n\} = -\infty\,;\ ;\sup\{a_n\} = +\infty\,;$ vyšetřete posloupnosti $\{a_{4n}\}\,,\ \{a_{4n+1}\}\,,\ \{a_{4n+2}\}\,,\ \{a_{4n+3}\}]$

(n) $a_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$ ; $\left[0\,,\ \frac{1}{2}\,,\ 1\,;\inf\{a_n\} = 0\,;\ ;\sup\{a_n\} = 1\right.$ rozhodněte, kolika hodnot nabývá $\left.\sin^2\frac{n\pi}{4}\right]$

(o) $a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$ ; $\left[0\,,\ 1\,,\ 2\,;\inf\{a_n\} = 0\,;\sup\{a_n\} = 2\,;\right.$ vyšetřete hodnoty $\left.\cos\frac{n\pi}{2}\right]$

(p) $a_n = \frac{n^2}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$ ; $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\} = -\infty\,;\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = +\infty\,;\right.$ uvažte hodnoty $\left.\cos\frac{2\pi n}{3}\right]$

(q) $a_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{n\pi}{3}$ ; $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ 0\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,;\inf\{a_n\} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\sup\{a_n\} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right.$ postupujte jako v příkladu o)$]$

(r) $a_n = \left(\cos\frac{n\pi}{2}\right)^{n+1}$ . $[-1\,,\ 0\,,\ 1\,;\inf\{a_n\} = -1\,;\sup\{a_n\} = 1]$

6. Nechť $x_1 = 0\,,\ x_{2k} = \frac{x_{2k-1}}{2}\,,\ x_{2k+1} = 1 + x_{2k}\,,\ k \in \mathbf{N}$ . Najděte $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ a $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ .

**Řešení:** $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1\,,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ . Ukažte, že $x_{2k-1} = \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-2}}\,,\ x_{2k} = \frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}$ .

7. Buďte $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě libovolné posloupnosti reálných čísel Potom platí

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n \le \varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \le \varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n\,,$$

jakmile mají součty, vyskytující se v soustavě nerovností, smysl. Ukažte na příkladu, že mohou všude platit ostré nerovnosti.

**Důkaz:** Stačí dokázat pouze poslední dvě nerovnosti. Zbývající nerovnosti dokážeme analogicky, nebo přejdeme k posloupnostem $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{-b_n\}_{n=1}^{\infty}$ , jelikož zřejmě platí

$$\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\varliminf_{n\to\infty} a_n\,,\quad \varliminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} a_n\,.$$

Označme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{a}\,, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{a}\,, \quad \limsup_{n\to\infty} b_n = \overline{b}\,, \quad \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha$$

a předpokládejme, že $\alpha > \overline{a} + \overline{b}$. Zvolme čísla $s$ a $t$ tak, že $s > \overline{a}$, $t > \overline{b}$, ale $\alpha > s + t$. Potom existuje index $n_0$ tak, že

$$\forall\, n \geq n_0 \text{ je } a_n \leq s\,,\, b_n \leq t\,, \text{ tedy } a_n + b_n \leq s + t < \alpha\,.$$

To je však spor, poněvadž nerovnost $a_n + b_n > s + t$ musí platit pro nekonečně mnoho $n$.

Předpokládejme dále, že $\alpha < \underline{a} + \overline{b}$ a zvolme čísla $u < \underline{a}$ a $v < \overline{b}$, ale $\alpha < u + v$. Potom existuje index $n_1$ tak, že pro $\forall\, n \geq n_1$ platí $a_n > u$ a nerovnost $b_n > v$ platí pro nekonečně mnoho indexů $n$. Sečtením dostaneme, že nerovnost $a_n + b_n > u + v > \alpha$ platí pro nekonečně mnoho indexů $n$. To je však spor se vztahem $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha$.

Zvolme posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ následujícím způsobem:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 0, -1, 1, 0, -1, \dots\}\,, \quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, -1, 1, 0, -1, 1, \dots\}$$

Potom je $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots\}$ a odtud

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n = -2\,, \quad \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -1\,, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 0\,,$$

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 1\,, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 2\,.$$

8. Nechť existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Potom platí

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

pro každou posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou má součet vpravo smysl.

**Důkaz:** Podle cvičení 7 platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

a všude tedy musí platit rovnost.

**Poznámka:** Analogické tvrzení platí pro dolní limity.

9. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jestliže pro libovolnou posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\,,$$

pak je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní.

**Důkaz:** Kdyby platilo $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n < \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, pak pro $b_n = -a_n$ dostaneme

$$0 = \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} (-a_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n > 0\,,$$

což je spor.

**Poznámka:** Předchozí věta platí i pro případ, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená posloupnost, důkaz se však musí příslušně modifikovat.

10. Jsou-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti nezáporných čísel, potom

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} b_n \le \varliminf_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \le \varliminf_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n \le \varlimsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n \,,$$

pokud žádný ze součinů není neurčitý výraz $0 \cdot \infty$. Ukažte na příkladu, že ve všech vztazích mohou platit ostré nerovnosti.

**Návod:** Aplikujte metodu důkazu cvičení 7 na součin. Uvažte na příklad posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots\}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 1, 3, 2, 1, 3, \dots\}$.

11. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost nezáporných čísel a nechť existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Potom platí

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

pro každou posloupnost nezáporných čísel $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že součin na pravé straně má smysl.

**Návod:** Využijte předchozího cvičení a postupu z cvičení 8.

12. Nechť $a_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$ a předpokládejme, že

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 1 \,.$$

Potom je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní.

**Návod:** Využijte cvičení 10 a skutečnosti, že

$$1 = \lim_{n\to\infty} \left( a_n \cdot \frac{1}{a_n} \right) = \varliminf_{n\to\infty} \left( a_n \cdot \frac{1}{a_n} \right) .$$

13. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost nezáporných čísel a nechť $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n > 0$. Jestliže pro libovolnou posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \varlimsup_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n \,,$$

potom je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní.

**Návod:** Užijte metody cvičení 9.

14. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní posloupnost. Potom existuje index $n_0$ tak, že

$$a_{n_0} = \sup\{a_n\} \quad \text{nebo} \quad a_{n_0} = \inf\{a_n\} \,.$$

**Důkaz:** Označme $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Je-li $a = \sup\{a_n\} = \inf\{a_n\}$, potom $a_n = a \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$ a $n_0$ můžeme zvolit libovolně.

Nechť třeba $a < \sup\{a_n\} = \alpha$. Potom

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_1 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \ge n_1 \quad \text{je} \quad a_n < a + \varepsilon$$

a zvolme $\varepsilon$ tak malé, že $a + \varepsilon < \alpha$. Potom je zřejmě

$$\alpha = \max\{a_1\,,\, a_2\,,\, \dots\,,\, a_{n_1-1}\} \,.$$

Analogicky provedeme důkaz, jestliže $a > \inf\{a_n\}$.

15. Nechť $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n < \sup\{a_n\} = \alpha_1$ . Potom existuje index $n_1$ tak, že $a_{n_1} = \alpha_1$ .

**Důkaz:** Označme $\overline{a} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ . Potom pro každé $\varepsilon > 0$ platí nerovnost $a_n > \overline{a} + \varepsilon$ nejvýše pro konečný počet indexů $n$ . Volme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\overline{a} + \varepsilon < \alpha_1$ . Odtud plyne, že existuje $n_1 \in \mathbf{N}$ tak, že $a_{n_1} = \alpha_1$ .

**Poznámky:** i. Předpoklad $\overline{a} < \alpha_1$ je splněn na příklad, je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ .

ii. Přechodem k posloupnosti $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ můžeme dokázat implikaci

$$\inf\{a_n\} < \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \implies \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \text{tak, že} \quad a_{n_0} = \inf\{a_n\} .$$

16. Buď $k \in \mathbf{N}$ a nechť $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n < \alpha_k = \sup\{a_{n+k-1}\}$ . Potom existuje index $n_k \geq k$ tak, že $a_{n_k} = \alpha_k$ . Těchto indexů je konečně mnoho, tj. $n_k$ lze zvolit tak, že $a_n < \alpha_k$ pro $n > n_k$ .

**Důkaz:** Stačí užít příklad 15 na posloupnost $\{a_{n+k-1}\}_{n=1}^{\infty}$ . Kdyby existovalo nekonečně mnoho $n \geq k$ takových, že $a_n \geq \alpha_k$ , pak je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \geq \alpha_k$ , což je spor.

**Poznámky:** i. Jestliže v předchozím příkladu položíme $k = 1$ , dostaneme cvičení 15.

ii. Buď $k \in \mathbf{N}$ . Obměna implikace z příkladu 16 říká, že pokud $a_n < \alpha_k = \sup\{a_{n+k-1}\}$ pro $\forall\, n \geq k$ , pak $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \alpha_k$ . Protože je posloupnost

$$\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty} \quad \text{nerostoucí a} \quad \lim_{m\to\infty} \alpha_m = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n ,$$

znamená to, že posloupnost $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ je konstantní, počínaje $k-$tým členem. Jestliže naopak $\alpha_m = \overline{a}$ pro všechna $m \geq k$ , pak o tom, zda množina $\{a_{n+k-1}\}_{n=1}^{\infty}$ nabývá svého maxima, nelze obecně nic říci. Srovnejte s příkladem 19 a poznámkou za ním.

17. Nechť $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n < \alpha_k = \sup\{a_{n+k-1}\}$ pro všechna $k \in \mathbf{N}$ . Potom existuje rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $a_m < a_{n_k}$ , jakmile je $m > n_k$ .

**Důkaz:** Protože pro všechna $k \in \mathbf{N}$ je $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n < \alpha_k$ a posloupnost $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí, existuje nekonečně mnoho indexů $n$ tak, že $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ . Tyto indexy stačí uspořádat do rostoucí posloupnosti $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

**Poznámka:** Posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je tedy klesající.

18. Nechť $a_n < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{a}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ . Potom existuje podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $n_1 > 1$ a $a_m < a_{n_k}$ , jakmile je $m < n_k$ .

**Důkaz:** Označme $\alpha'_n = \max\{a_1 , a_2 , \dots , a_n\}$ . Pak je $\{\alpha'_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupnost, $\alpha'_n < \overline{a}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ , $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha'_n = \overline{a}$ . Hledaná posloupnost indexů $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je nyní množina všech řešení nerovnice $\alpha'_n > \alpha'_{n-1}$ , uspořádaná do rostoucí posloupnosti.

19. Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $a_n < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{a}$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak existuje rostoucí posloupnost indexů $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $n_1 > n_0$ a $a_m < a_{n_k}$, jakmile $n_0 \leq m < n_k$.

**Důkaz:** Stačí užít příklad 18 na posloupnost $\{a_{n+n_0-1}\}_{n=1}^{\infty}$.

**Poznámky:** i. Posloupnost v příkladu 19 je tedy rostoucí. Předpoklad z příkladu 17 znamená, že existuje nekonečně mnoho indexů $n$ tak, že $a_n > \overline{a}$, předpoklad z cvičení 19 říká, že pro „skoro všechna“ $n \in \mathbf{N}$, (tj. až na konečně mnoho) platí $a_n < \overline{a}$. Zbývají posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro něž je $a_n > \overline{a}$ jen pro konečně mnoho $n \in \mathbf{N}$, ale $a_n = \overline{a}$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbf{N}$. Je-li $m_0 - 1 \in \mathbf{N}$ největší $n \in \mathbf{N}$, pro které je $a_n > \overline{a}$ a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost všech $n \in \mathbf{N}$, $n \geq m_0$, $a_n = \overline{a}$ ($m_0 = 1$, pokud neexistuje $n \in \mathbf{N}$ tak, že $a_n > \overline{a}$), potom má $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ vlastnosti popsané ve cvičeních 17 a 19, jen nerovnost $a_m < a_{n_k}$ je třeba nahradit nerovností neostrou. Napište sami, co plyne z příkladů 17 a 19 a této poznámky pro posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že posloupnost $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje předpoklad cvičení 17, resp. 19, resp. nesplňuje ani jeden z těchto předpokladů.

ii. Příklady 17, 19 a předchozí poznámka umožňují z obecné posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrat dvě monotonní posloupnosti (s limitami $\overline{a}$ a $\underline{a}$) a další vlastností. Tyto dvě posloupnosti mohou být různé. Jsou-li stejné, pak mají dvě opačné vlastnosti {až na konečně mnoho $n$ jsou jsou předcházející členy menší (resp. nejsou větší) a následující jsou větší (resp. nejsou menší) nebo naopak}. Posloupnosti, které splňují podmínku v závorce (její první část dokonce bez výjimky prvních konečně mnoha členů) se nazývají <u>blokově monotonní</u> (viz poznámku za cvičením 21).

20. Nechť $a_n > 0$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Potom existuje nekonečně mnoho indexů $n$, pro něž $a_n < a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

**Důkaz:** Stačí použít cvičení 18 na posloupnost $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

**Poznámka:** Z předchozího cvičení plyne, že z každé posloupnosti lze vybrat posloupnost monotonní. Tvrzení je zřejmé v případě, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená. Jestliže $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, uvažme posloupnost $b_n = a_n - \alpha$, kde $\alpha = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Jestliže $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje nekonečně mnoho 0, je daná vybraná posloupnost $b_{k_n} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Jestliže $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje nekonečně mnoho záporných členů, utvoříme z nich vybranou posloupnost $\{b_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ a použijeme cvičení 20 na posloupnost $\{-b_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$. V případě, že $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nekonečně mnoho kladných členů, můžeme použít cvičení 20 přímo.

21. Nechť $a_n > 0$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Potom existuje nekonečně mnoho indexů $n$ takových, že $a_n > a_{n+k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

**Důkaz:** Tvrzení plyne okamžitě z cvičení 17.

**Poznámka:** Předpoklady cvičení 21 jsou silnější než předpoklady cvičení 20 a položme si následující otázku. Existuje posloupnost $a_n > 0$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ tak, že

a) Množiny všech indexů z příkladů 20 a 21 jsou různé?

b) Tyto množiny jsou stejné a mají nekonečný doplněk?

Jinak řečeno. Chceme nalézt posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ tak, aby obor pravdivosti výrokové formy s definičním oborem $\mathbf{N}$

$$V(n) \,:\, \forall\, m \in \mathbf{N} \,:\, m \neq n \implies (m-n)(a_m - a_n) < 0$$

byla nekonečná množina s nekonečným doplňkem. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ z bodu b) je blokově klesající, ale není klesající, ani klesající počínaje jistým indexem.

22. Buď $a_n > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbf{N}$. Potom platí

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Ukažte na příkladu, že mohou všude platit ostré nerovnosti.

**Důkaz:** Označme $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \beta$ a předpokládejme, že $\beta < \alpha$. Zvolme číslo $q$ tak, aby $\beta < q < \alpha$. Potom nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q$ platí pouze pro konečně mnoho indexů $n$, neboli

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \text{je} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q\,.$$

Odtud dostaneme postupně, že

$$a_{n_0+p} \leq q^p \cdot a_{n_0} \quad \text{pro} \quad p \in \mathbf{N}$$

a po odmocnění

$$\sqrt[p+n_0]{a_{n_0+p}} \leq q \cdot \sqrt[p+n_0]{\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} q\,.$$

Tedy $\alpha = \limsup\limits_{p\to\infty} \sqrt[p+n_0]{a_{n_0+p}} \leq q$ a to je spor.

Analogicky se dokáže nerovnost $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,,\,1\,,\,2\,,\,\dots\}$, potom

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\,, \quad \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1\,, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\,.$$

Pro posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2^n\,,\,3^n\,,\,2^n\,,\,3^n\,,\,2^n\,,\,3^n\,,\,\dots\}$ platí dokonce ostré nerovnosti všude. Je totiž

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0\,, \quad \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2\,, \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 3\,, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty\,.$$

**Poznámka:** Předchozí cvičení ukazuje, že existuje-li $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, pak existuje i limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ a obě limity jsou si rovny. Tím dostáváme cvičení 2.2.23.

23. **Stolzova věta:**

Buďte $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Předpokládejme dále, že existuje index $n_0$ tak, že

$$b_{n+1} > b_n \quad \text{pro} \quad \forall\, n \geq n_0\,.$$

Potom platí

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\,.$$

**Důkaz:** Stačí dokázat poslední nerovnost (střední je zřejmá, první dostaneme přechodem k posloupnosti $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$). Ta platí, je-li $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = +\infty$.

Buď tedy $A \in \mathbf{R}$. Potom platí

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbf{N}\,,\ N \geq n_0 \quad \text{tak, že} \quad \forall\, n \geq N \quad \text{je} \quad \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < A + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{tj.}$$

$$a_{k+1} - a_k < \Big(A + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\,(b_{k+1} - b_k) \quad \text{pro} \quad k \geq N\,.$$

Sečtením těchto nerovností pro $k = N, N+1, \ldots, n-1$ dostaneme

$$a_n - a_N < \Big(A + \frac{\varepsilon}{2}\Big)\,(b_n - b_N)\,, \quad \text{tedy} \quad \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} < A + \frac{\varepsilon}{2}$$

pro všechna $n \geq N$. Dále

$$\frac{a_n}{b_n} = \Big(1 - \frac{b_N}{b_n}\Big)\,\frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} + \frac{a_N}{b_n} < A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{a_N}{b_n}\,.$$

Poněvadž $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, existuje $N_1 \geq N$ tak, že $\frac{a_N}{b_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $n \geq N_1$. Tedy pro $n \geq N_1$ platí

$$\frac{a_n}{b_n} < A + \varepsilon \quad \text{tj.} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{a_n}{b_n} \leq A\,.$$

**Poznámka:** Z předchozího cvičení plyne, že

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\,.$$

Pro $a_n > 0$ je toto tvrzení ekvivalentní s

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \ldots\ \cdot a_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \ldots\ \cdot a_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\,.$$

24. Nechť $a_n > 0$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 0$. Potom existuje index $n_0$ a konstanta $C$ tak, že $a_n > Cq^n$ pro $\forall\, n \geq n_0$.

**Důkaz:** Poněvadž je $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} > q$, platí nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pouze pro konečně mnoho indexů $n$. Tedy

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \text{platí} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > q$$

a odtud

$$a_{n_0+p} > q^p\, a_{n_0}\,,\ \ p \in \mathbf{N}\,, \quad \text{neboli} \quad a_{n_0+p} > q^{n_0+p}\,\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} = C\, q^{n_0+p}\,,\ \ p \in \mathbf{N}\,.$$

**Poznámka:** Analogicky platí: je-li $a_n > 0$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, potom existuje index $n_0$ a konstanta $C$ tak, že $a_n < Cq^n$ pro $\forall\, n \geq n_0$. Odtud plyne nelimitní verze cvičení 2.2.17 (poznámky za tímto cvičením).

25. Buď $a_n > 0$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{q^n} = 0$.

**Důkaz:** Označme $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ a buď $p$ takové, že $\alpha < p < q$. Potom

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \text{platí} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < p$$

a odtud

$$a_{n_0+k} < a_{n_0} p^k < a_{n_0} q^k \quad \text{pro} \quad k \in \mathbf{N}\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$a_{n_0+k} < \frac{a_{n_0}}{p^{n_0}} \cdot p^{n_0+k} < \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \cdot q^{n_0+k}\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{a_{n_0+k}}{q^{n_0+k}} < \frac{a_{n_0}}{p^{n_0}} \left(\frac{p}{q}\right)^{n_0+k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

**Poznámky:** i. Je-li $q = 1$, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a dostaneme zobecnění cvičení 2.2.17.

ii. Analogicky platí: je-li $a_n > 0$ pro $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 0$. potom je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{q^n} = +\infty$.

26. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost taková, že

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0\,.$$

potom částečné limity $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří interval $\langle \alpha, \beta \rangle$, kde $\alpha = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, $\quad \beta = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

**Důkaz:** Buď $k > 2$ celé a označme $\delta = \frac{\beta - \alpha}{k}$. Číselnou osu rozdělíme na $k$ intervalů tvaru

$$(-\infty, \alpha + \delta\rangle\,,\ \langle \alpha + \delta, \alpha + 2\delta\rangle, \,,\ \dots\,,\ \langle \beta - 2\delta, \beta - \delta\rangle\,,\ \langle \beta - \delta, +\infty)\,.$$

Potom existuje index $N$ tak, že

$$\forall\, n \geq N \quad \text{je} \quad |a_{n+1} - a_n| < \delta\,.$$

Buď $n_1$ prvý index takový, že $n_1 \geq N$ a $a_{n_1} \in (-\infty, \alpha + \delta\rangle$, $n_2 > n_1$ prvý index takový, že $a_{n_2} \in \langle \beta - \delta, +\infty)$. V každém ze zbývajících $k - 2$ intervalů musí ležet alespoň jeden člen konečné posloupnosti $a_{n_1}, a_{n_1+1}, \dots, a_{n_2-1}, a_{n_2}$ (je totiž $|a_{n+1} - a_n| < \delta$). Tímto způsobem budeme pokračovat dále.

Buď $n_3 > n_2$ nejmenší takový index, že $a_{n_3} \in (-\infty, \alpha + \delta\rangle$, $n_2 > n_1$ prvý index takový, že $a_{n_4} \in \langle \beta - \delta, +\infty)$ a uvažme opět konečnou posloupnost $a_{n_3}, a_{n_3+1}, \dots, a_{n_4-1}, a_{n_4}$. Jestliže pokračujeme tímto způsobem do nekonečna, dostáváme, že v každém z intervalů $\langle \alpha + l\delta, \alpha + (l+1)\delta\rangle$, $l = 1, 2, \dots, k-3, k-2$ leží nekonečně mnoho členů dané posloupnosti. Poněvadž $\delta \to 0$ pro $k \to \infty$, plyne odtud tvrzení.

**Poznámka:** V důkazu jsme ověřili podmínku z poznámky za řešením cvičení 3l) (existence sítě). Předpoklad omezenosti posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze vypustit - viz řešení úlohy 3m).

27. Nechť $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n(a_n - a_{n+1}) > 0$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

**Důkaz:** Existuje $p > 0$ a $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $n(a_n - a_{n+1}) > p$ pro všechna $n \geq n_0$. Odtud plyne, že pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí

$$a_{n_0} - a_{n_0+k} > p \sum_{n=n_0}^{n_0+k-1} \frac{1}{n}, \quad a_{n_0+k} < a_{n_0} - p \sum_{n=n_0}^{n_0+k-1} \frac{1}{n} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

podle cvičení 2.2.24b) a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

**Poznámka:** Analogicky, je-li $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n(a_n - a_{n+1}) < 0$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Tedy musí být

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, n(a_n - a_{n+1}) \leq 0 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n(a_n - a_{n+1}),$$

pokud posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu $\pm\infty$.

28. Najděte nerostoucí posloupnost kladných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, n(a_n - a_{n+1}) = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n(a_n - a_{n+1}) = 1.$$

**Řešení:** Uvažte posloupnost

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots\right\},$$

tedy $a_k = \frac{1}{n}$ pro $k = n^2, n^2+1, \dots, (n+1)^2 - 1$.

29. Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n \qquad \forall\, m, n \in \mathbf{N}.$$

Potom posloupnost $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ buď konverguje nebo je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = -\infty$. Dále platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\}.$$

**Důkaz:** Předpokládejme, že $\alpha = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ je konečné. Buď $\varepsilon > 0$ a $m \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\frac{a_m}{m} < \alpha + \varepsilon.$$

Každé přirozené číslo $n$ je možno vyjádřit ve tvaru $n = q \cdot m + r$, kde $r$ je jedno z čísel $0, 1, \dots, m-1$. Potom pro $n \geq m$ platí

$$a_n = a_{qm+r} \leq \underbrace{a_m + a_m + \cdots + a_m}_{q-krát} + a_r = qa_m + a_r, \quad (a_0 = 0),$$

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{qm+r}}{qm+r} \leq \frac{a_m}{m} \cdot \frac{qm}{qm+r} + \frac{a_r}{n} \quad \text{a odtud} \quad \alpha \leq \frac{a_n}{n} < (\alpha+\varepsilon)\frac{qm}{qm+r} + \frac{a_r}{n}.$$

Protože platí

$$\frac{n-m+1}{n} \leq \frac{qm}{qm+r} = \frac{\left[\frac{n}{m}\right] m}{n} \leq 1, \quad \text{je} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{qm}{qm+r} = 1$$

a tedy

$$\alpha \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \alpha + \varepsilon$$

$\left(\text{je zřejmě } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_r}{n} = 0\right)$. Odtud plyne, že existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}.$$

Analogicky se provede důkaz v případě, že $\alpha = -\infty$.

**Poznámka:** Chceme-li se vyhnout limitnímu přechodu pro $n \to \infty$, stačí si uvědomit, že

$$\frac{a_m}{m} \cdot \frac{qm}{qm+r} < \max\left\{\alpha + \varepsilon\,,\ (\alpha+\varepsilon)\frac{n-m+1}{n}\right\} \le \alpha + \varepsilon + \frac{|\alpha+\varepsilon| m}{n}\,,$$

tedy

$$\frac{a_n}{n} \le \alpha + \varepsilon + \frac{1}{n}\left(|\alpha+\varepsilon| m + \max_{r=0,\dots,m-1} |a_r|\right).$$

Odtud pro dostatečně velká $n$ platí

$$\alpha \le \frac{a_n}{n} \le \alpha + 2\varepsilon\,.$$