Základy funkcionální analýzy

Kubr Milan

14. února 2006

Obsah

Kapitola 1

Metrické prostory.

1.1 Základní vlastnosti.

Definice: Množinu $\mathbf{X}$ nazveme metrickým prostorem, je-li na kartézském součinu $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ definována reálná funkce $\mathbf{d}$ s následujícími vlastnostmi:
1. $\mathbf{d}(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in \mathbf{X}$; $\mathbf{d}(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$.
2. $\mathbf{d}(y,x) = \mathbf{d}(x,y) \quad \forall\, x,y \in \mathbf{X}$.
3. $\mathbf{d}(x,z) \leq \mathbf{d}(x,y) + \mathbf{d}(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbf{X}$ (trojúhelníková nerovnost).

Funkci $\mathbf{d}$ nazýváme metrikou a metrický prostor $\mathbf{X}$ značíme též $(\mathbf{X},\mathbf{d})$.

Příklady: 1. Eukleidovský prostor $\mathbf{R}^n$ je množina uspořádaných n-tic reálných čísel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s metrikou

$$\mathbf{d}(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Analogicky je definován prostor $\mathbf{C}^n$, kde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $x_j \in \mathbf{C}$.

2. Prostory $\mathbf{l}_p^n$ a $\mathbf{l}_\infty^n$ tvoří množina všech uspořádaných n-tic reálných nebo komplexních čísel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s metrikou

$$\mathbf{d}_p(x,y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} ,\ p \geq 1;\ \mathbf{d}_\infty(x,y) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|.$$

3. Označme $C(a,b)$ množinu všech spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ s metrikou

$$\mathbf{d}(f,g) = \max_{t \in \langle a,b \rangle} |f(t) - g(t)|;\ f,g \in C(a,b).$$

4. Prostor $\mathbf{s}$ je množina všech posloupností reálných nebo komplexních čísel. Je-li $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, potom

$$\mathbf{d}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Poznámka: K ověření axiomů metrického prostoru pro metriku $\mathbf{d}_p(x,y)$ z příkladu 2 budeme potřebovat Minkowského nerovnost, kterou nyní odvodíme.

Lemma: Buďte $a, b > 0,\ p > 1,\ q$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz: Pro $p = 2$ dostaneme známou nerovnost $2ab \le a^2 + b^2$. Je-li $p > 1$ libovolné, uvážíme funkci $\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$ pro $t > 0$. Tato funkce má pro t=1 minimum $\varphi(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (ověřte si detailně) a tedy $1 = \varphi(1) \le \varphi(t)\ \ \forall t > 0$. Jestliže položíme $t = a^{\frac{1}{q}} b^{-\frac{1}{p}}$, dostaneme

$$1 \le \frac{a^{\frac{p}{q}} b^{-1}}{p} + \frac{a^{-1} b^{\frac{q}{p}}}{q}$$

a po vynásobení

$$ab \le \frac{a^{\frac{p}{q}+1}}{p} + \frac{b^{\frac{q}{p}+1}}{q}.$$

Poněvadž platí $1 + \frac{p}{q} = p$, $1 + \frac{q}{p} = q$ (ověřte), plyne odtud tvrzení lemmatu.

Věta: (Hölderova nerovnost)
Buďte $a_1, \ldots, a_n,\ \ b_1, \ldots, b_n\ \ (n \in \mathbf{N})$ nezáporná čísla, $p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Důkaz: Položme $A_k = \frac{a_k}{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}}$, $B_k = \frac{b_k}{\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}}$. Podle předchozího lemmatu platí

$$A_k B_k \le \frac{A_k^p}{p} + \frac{B_k^q}{q} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

neboli

$$\frac{a_k b_k}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}} \le \frac{a_k^p}{p \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{b_k^q}{q \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}.$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

a odtud plyne tvrzení.

Věta: (Minkowského nerovnost)
Buďte $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\ \ (n \in \mathbf{N})$ nezáporná, $p \ge 1$. Potom platí

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Důkaz: Je-li $p = 1$, je nerovnost zřejmá. Nechť je tedy $p > 1$. Potom můžeme psát

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k + \sum_{k=1}^{n} c_k b_k \,,$$

kde $c_k = (a_k + b_k)^{p-1}$. Podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} c_k^q\right\}^{\frac{1}{q}} \left[\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right]$$

a odtud

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p}{\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^{q(p-1)}\right\}^{\frac{1}{q}}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Poněvadž je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, plyne odtud, že $q(p-1) = p$,

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right\}^{1-\frac{1}{q}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right\}^{\frac{1}{p}} ,$$

což je daná nerovnost.

Poznámka: Hölderova i Minkowského nerovnost platí i pro nekonečné řady nebo integrály. Je však třeba doplnit předpoklady o jejich konvergenci. Tyto skutečnosti později upřesníme, až je budeme používat. Tedy zatím formálně:

Hölderova nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right\}^{\frac{1}{q}} .$$

Minkowského nerovnost

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\left\{\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Definice: Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost bodů metrického prostoru $\mathbf{X}$. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ <u>konverguje k bodu x</u>, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, x) = 0$, nebo stručněji zapsáno $\mathbf{d}(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Poznámka: Ukazuje se, že v prostorech uspořádaných n-tic $[\mathbf{R}^n = \mathbf{l}_2^n, \mathbf{l}_p^n, \mathbf{l}_\infty^n]$ různé předpisy pro metriku neovlivní skutečnost, že nějaká posloupnost bodů konverguje.

Definice: O dvou metrikách $\mathbf{d}$ a $\mathbf{d}'$ na prostoru $\mathbf{X}$ řekneme, že jsou ekvivalentní, jestliže existují konstanty $\alpha, \beta > 0$ tak, že $\forall x, y \in \mathbf{X}$ platí

$$\alpha\mathbf{d}(x,y) \leq \mathbf{d}'(x,y) \leq \beta\mathbf{d}(x,y).$$

Poznámka: Je-li posloupnost $\{x_n\}$ bodů metrického prostoru $\mathbf{X}$ konvergentní v metrice $\mathbf{d}$, je konvergentní i v metrice $\mathbf{d}'$ a obráceně.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $x \in \mathbf{X}$ bod, $\varepsilon > 0$ reálné číslo. Potom ε-okolím bodu x rozumíme množinu

$$S(x;\varepsilon) = \{y \in \mathbf{X}; \mathbf{d}(x,y) < \varepsilon\}.$$

Jsou-li $A, B \subset \mathbf{X}$ dvě neprázdné množiny, pak jejich vzdáleností rozumíme číslo

$$\mathbf{d}(A,B) = \inf_{x\in A,\, y\in B} \mathbf{d}(x,y).$$

Průměrem množiny A, který budeme značit $\delta(A)$ rozumíme číslo

$$\delta(A) = \sup_{x,\, y\in A} \mathbf{d}(x,y).$$

Je-li $\delta(A) < \infty$, řekneme, že A je omezená množina.

Poznámky: 1. Množinu $S(x;\varepsilon)$ nazýváme také někdy koulí (nebo otevřenou koulí) o středu x a poloměru ε.

2. Místo označení $S(x;\varepsilon)$ se též užívá značení $B(x;\varepsilon)$ nebo $U(x;\varepsilon)$.

Lemma: Sjednocení konečného počtu omezených množin je omezená množina.

Důkaz: Buďte $x, y \in A \cup B$ libovolné dva body, $a \in A$, $b \in B$ pevné body.
Potom platí $\mathbf{d}(x,y) \leq \delta(A)$, je-li $x, y \in A$, $\mathbf{d}(x,y) \leq \delta(B)$, je-li $x, y \in B$.
Pro $x \in A, y \in B$ platí

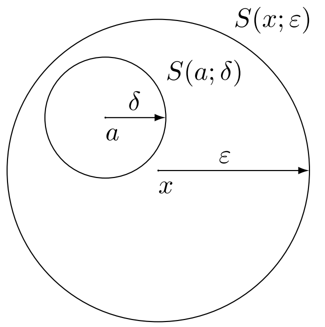
$$\mathbf{d}(x,y) \leq \mathbf{d}(x,a) + \mathbf{d}(a,b) + \mathbf{d}(b,y) \leq \delta(A) + \mathbf{d}(a,b) + \delta(B) < \infty.$$

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor $G, F \subset \mathbf{X}$ jeho podmnožiny. Řekneme, že G je otevřená, jestliže ke každému bodu $x \in G$ existuje okolí $S(x;\varepsilon)$ takové, že $S(x;\varepsilon) \subset G$. O množině F řekneme, že je uzavřená, je-li $\mathbf{X} - F$ otevřená množina.

Poznámky: 1. Platí též obráceně: je-li G otevřená množina, potom je $\mathbf{X} - G$ uzavřená množina. Skutečně je $\mathbf{X} - (\mathbf{X} - G) = G$ a tedy $\mathbf{X} - G$ je uzavřená množina.

2. Uzavřenost a otevřenost množiny se nevylučují. Existují tedy množiny, které jsou zároveň uzavřené i otevřené. Příkladem je celý prostor $\mathbf{X}$ a prázdná množina $\emptyset$.

Lemma: Množina $S(x;\varepsilon)$ je otevřená.



Důkaz: Buď $a \in S(x;\varepsilon)$. Potom je $\mathbf{d}(x,a) < \varepsilon$ a existuje tedy číslo $\delta > 0$ tak, že $\mathbf{d}(x,a) + \delta < \varepsilon$. Dále platí, že $S(a;\delta) \subset S(x;\varepsilon)$. Skutečně, je-li $y \in S(a;\delta)$, platí $\mathbf{d}(x,y) \leq \mathbf{d}(x,a) + \mathbf{d}(a,y) < \mathbf{d}(x,a) + \delta < \varepsilon$ a $S(x;\varepsilon)$ je otevřená množina.

! Věta: Sjednocení libovolného systému a průnik konečného systému otevřených množin je otevřená množina. Průnik libovolného systému a sjednocení konečného systému uzavřených množin je množina uzavřená.

Důkaz: 1. a) Buď $G_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ systém otevřených množin a $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$. Pak existuje α_0 tak, že $x \in G_{\alpha_0}$ a tedy i

$$S(x;\varepsilon) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$$

pro nějaké $\varepsilon > 0$.

b) Je-li $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} G_j$, pak $x \in G_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$ a tedy existují $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n > 0$ tak, že

$$S(x, \varepsilon_j) \subset G_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Položíme-li $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$, potom $S(x;\varepsilon_0) \subset G_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$, tedy

$$S(x;\varepsilon_0) \subset \bigcap_{j=1}^{n} G_j.$$

2. Tvrzení pro uzavřené množiny plyne z de Morganových pravidel. Buďte $F_\alpha \quad (\alpha \in \Lambda)$ uzavřené množiny. Potom jsou $G_\alpha = \mathbf{X} - F_\alpha$ otevřené a platí $F_\alpha = \mathbf{X} - G_\alpha$. Odtud

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha = \mathbf{X} - \bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$$

a vzhledem k otevřenosti množiny $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ dostaneme okamžitě tvrzení. Analogicky platí

$$\bigcup_{j=1}^{n} F_j = \mathbf{X} - \bigcap_{j=1}^{n} G_j\,.$$

Poznámky: 1. Jestliže uvažujeme spočetné průniky otevřených množin, nemusíme již dostat otevřenou množinu. Analogicky spočetné sjednocení uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Dostáváme další systémy množin t. zv. G_δ a F_σ množiny. Tedy řekneme, že A je množina typu G_δ , je-li

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\,,$$

kde G_n jsou otevřené. Analogicky B je množina typu F_σ , je-li

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \,,$$

kde F_n jsou uzavřené.

2. Předchozí věta dává možnost zavedení obecnější struktury na dané množině $\mathbf{X}$, než je metrika, a sice topologie. Topologií τ na množině $\mathbf{X}$ budeme rozumět takový systém podmnožin $\mathbf{X}$, který má první vlastnost z předchozí věty; tedy sjednocení libovolného systému množin z τ a průnik libovolného konečného systému množin z τ je opět množina z τ. Tyto množiny budeme nazývat otevřené a dvojici $(\mathbf{X}, \tau)$ nazveme topologickým prostorem.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $A \subset \mathbf{X}$ podmnožina. Řekneme, že $x \in A$ je vnitřním bodem A , jestliže existuje takové okolí $S(x;\varepsilon)$, že

$$S(x;\varepsilon) \subset A.$$

Množinu všech vnitřních bodů množiny A nazýváme jejím vnitřkem a označíme $\operatorname{Int} A$. Uzávěrem množiny A nazýváme množinu všech bodů $x \in \mathbf{X}$ takových, že

$$\mathbf{d}(x, A) = 0$$

a značíme $\overline{A}$. Hranicí množiny A nazveme množinu

$$F(A) = \partial(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}.$$

Věta: $\operatorname{Int} A$ je otevřená množina. Množina G je otevřená právě když $G = \operatorname{Int} G$.

Důkaz: Prvá část tvrzení je zřejmá.

a) Buď G otevřená množina. Je zřejmé, že $\operatorname{Int} G \subset G$. Dále je každý bod $x \in G$ vnitřním bodem G, neboli

$$G \subset \operatorname{Int} G.$$

b) Nechť obráceně $G \subset \operatorname{Int} G$. Potom s každým bodem $x \in G$ patří do G i jisté okolí $S(x;\varepsilon)$ a to je charakterizace otevřené množiny.

Věta: $\overline{A}$ je uzavřená množina. Množina F je uzavřená právě když $\overline{F} = F$.

Důkaz: Buď $G = \mathbf{X} - \overline{A}$ a $x \in G$ libovolný bod. Potom je $\mathbf{d}(x, A) > 0$ a na příklad

$$S(x; \frac{1}{2}\mathbf{d}(x, A)) \subset G\,.$$

Množina G je tedy otevřená a $\overline{A}$ je uzavřená. Je zřejmé, že $F \subset \overline{F}$.

a) Je-li $F = \overline{F}$, pak je F uzavřená.

b) Obráceně kdyby F byla uzavřená a existovalo $x \in \overline{F} - F$, je $x \in \mathbf{X} - F$ a existuje okolí

$$S(x;\varepsilon) \subset \mathbf{X} - F.$$

Potom ale nemůže být $\mathbf{d}(x, F) = 0$ a to je spor s definicí uzávěru množiny.

Věta: Buď $x \in \mathbf{X}$, $A \subset \mathbf{X}$ podmnožina. Potom $x \in \overline{A}$ právě když existuje posloupnost

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in A \ \text{ tak, že } \ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Důkaz: a) Je-li $\{x_n\}$ posloupnost bodů z věty, potom $\mathbf{d}(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ a tedy $\mathbf{d}(x, A) = 0$.

b) Je-li $\mathbf{d}(x, A) = 0$, potom ke každému $n \in \mathbf{N}$ existuje takové $x_n \in A$, že $\mathbf{d}(x_n, x) < \frac{1}{n}$, neboli $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $A \subset \mathbf{X}$ podmnožina. Řekneme, že bod $x \in \mathbf{X}$ je <u>hromadným bodem</u> množiny A, jestliže každé okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A. Bod množiny A, který není jeho hromadným bodem, nazýváme <u>izolovaným bodem</u>.

Věta: Bod $x \in \mathbf{X}$ je hromadným bodem množiny $A \subset \mathbf{X}$ právě když existuje posloupnost bodů

$$x_n \in A,\ x_n \neq x \ \text{ tak, že } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Důkaz: a) Buď $x \in \mathbf{X}$ hromadný bod množiny A. Potom koule $S(x; \frac{1}{n})$ obsahuje nekonečně mnoho bodů A a zvolme

$$x_n \in S(x; \frac{1}{n}).$$

Tím dostaneme požadovanou posloupnost.

b) Je-li obráceně

$$x_n \in A,\ \ x_n \neq x,\ \ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x,$$

potom je zřejmě $x \in \mathbf{X}$ hromadný bod A.

Poznámka: Z předchozího plyne, že množina A je uzavřená právě když obsahuje všechny své hromadné body.

1.2 Úplné, separabilní a kompaktní prostory.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $A \subset \mathbf{X}$ podmnožina. Řekneme, že A je <u>hustá</u> v $\mathbf{X}$, je-li $\overline{A} = \mathbf{X}$.

Příklad: Buď $\mathbf{X} = \mathbf{R}$, $A = \mathbf{Q}$ (racionální čísla). Potom $\overline{A} = \mathbf{R}$. Existují však i jiné husté podmnožiny (vlastní). Je-li B množina všech iracionálních čísel, je opět $\overline{B} = \mathbf{R}$. Mezi těmito příklady však existuje podstatný rozdíl, který bude v dalším důležitý. Množina A je spočetná, zatímco B není.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů prostoru $\mathbf{X}$ je <u>cauchyovská</u> nebo <u>fundamentální</u>, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna $n, m \geq n_0$ platí $\mathbf{d}(x_n, x_m) < \varepsilon$. Prostor $\mathbf{X}$ nazveme <u>úplným</u>, jestliže každá cauchyovská posloupnost bodů prostoru $\mathbf{X}$ je konvergentní v $\mathbf{X}$.

Poznámka: Není těžké ukázat, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská, obrácené tvrzení však neplatí.

Příklad: Prostor $\mathbf{R}^n$ je úplný.

Důkaz: Buď $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská posloupnost v $\mathbf{R}^n$, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. Je-li

$$\lim_{k,l\to\infty} \mathbf{d}(x^{(k)}, x^{(l)}) = 0, \text{ tedy } \lim_{k,l\to\infty} \{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - x_i^{(l)})^2\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

potom je $\lim_{k,l\to\infty} |x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Tedy posloupnost $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská pro $i = 1, 2, \dots, n$ a tudíž konvergentní. Označme $x_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Nyní je zřejmé, že $x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$.

Věta: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor a nechť $A \subset \mathbf{X}$ je úplná množina. Potom je A uzavřená.

Důkaz: Buď $a \in \overline{A}$. Potom existuje posloupnost

$$x_n \in A \text{ tak, že } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Poněvadž je A úplná množina a $\{x_n\}$ cauchyovská, musí být $a \in A$, tedy $\overline{A} = A$.

Poznámka: Předchozí věta ukazuje, že úplnost množiny je vlastnost nezávislá na prostoru, ve kterém leží. Obrácené tvrzení ale platí pouze v úplných prostorech.

Věta: Buď $\mathbf{X}$ <u>úplný</u> metrický prostor, $A \subset \mathbf{X}$. Potom je A uzavřená právě když je úplná.

Důkaz: a) Je-li A úplná, je podle předchozí věty uzavřená.
b) Buď A uzavřená, tedy

$$\overline{A} = A \text{ a } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ cauchyovská posloupnost, } x_n \in A.$$

Poněvadž $\mathbf{X}$ je úplný prostor, existuje $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, $a \in \mathbf{X}$. Z uzavřenosti A plyne, že $a \in A$.

Definice: Metrický prostor $\mathbf{X}$ nazveme <u>separabilní</u>, jestliže v $\mathbf{X}$ existuje hustá spočetná podmnožina.

Příklad: Prostor $\mathbf{R}^n$ je separabilní.

Důkaz: Uvažme množinu všech bodů tvaru $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, kde $r_i \in \mathbf{Q}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Tato množina je spočetná (dokažte) a tvoří hustou podmnožinu.

Věta: Každá podmnožina separabilního metrického prostoru $\mathbf{X}$ je separabilní.

Důkaz: Buď $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$, $A \subset \mathbf{X}$ hustá spočetná podmnožina, neboli

$$\overline{A} = \mathbf{X}, \ A = \{x_1, x_2, \dots\}.$$

Označme

$$S_{m,n} = S(x_m; \frac{1}{n}) \text{ pro } m, n = 1, 2, \dots.$$

Tento systém je spočetný. Je-li $\mathbf{Y} \cap S_{m,n} \neq \emptyset$, zvolme libovolně bod $\xi_{m,n} \in \mathbf{Y} \cap S_{m,n}$. Množina B všech těchto bodů je spočetná a ukážeme, že je hustá v $\mathbf{Y}$. Buď $x \in \mathbf{Y}$ libovolný bod a $n \in \mathbf{N}$ libovolné. Potom existuje x_m tak, že

$$\mathbf{d}(x, x_m) < \frac{1}{n}, \text{ tedy } x \in \mathbf{Y} \cap S_{m,n}.$$

Pro příslušné $\xi_{m,n}$ platí $\mathbf{d}(x_m, \xi_{m,n}) < \frac{1}{n}$ a odtud

$$\mathbf{d}(x, \xi_{m,n}) \leq \mathbf{d}(x, x_m) + \mathbf{d}(x_m, \xi_{m,n}) < \frac{2}{n}\,.$$

Lemma: Nechť množiny G_λ $(\lambda \in \Lambda)$ tvoří disjunktní systém neprázdných otevřených množin v separabilním prostoru $\mathbf{X}$. Potom je Λ spočetná množina.

Důkaz: Buď A hustá spočetná podmnožina $\mathbf{X}$. Každému $\lambda \in \Lambda$ přiřaďme bod $x_\lambda \in A$ tak, že $x_\lambda \in G_\lambda$. Tyto body tvoří spočetnou množinu $B \subset A$. Je-li nyní $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak nutně $G_{\lambda_1} \neq G_{\lambda_2}$. Kdyby bylo $x_{\lambda_1} = x_{\lambda_2}$, potom $G_{\lambda_1} \cap G_{\lambda_2} \neq \emptyset$ a tedy $\lambda_1 = \lambda_2$. Tím dostaneme prosté zobrazení Λ na B a Λ je spočetná.

Definice: Buď A množina. Řekneme, že systém množin $B_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ tvoří pokrytí A, jestliže

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\,.$$

Věta: (Lindelöfova pokrývací věta)
Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ separabilní podmnožina. Buďte $G_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ otevřené množiny pokrývající $\mathbf{Y}$. Potom existuje spočetná část

$$\Sigma \subset \Lambda \text{ tak, že } \mathbf{Y} \subset \bigcup_{\lambda \in \Sigma} G_\lambda\,.$$

Důkaz: Buď $A \subset \mathbf{Y}$ hustá spočetná podmnožina tvořená body $x_1, x_2, \ldots$ a uvažme koule

$$S_{m,n} = S(x_m, \frac{1}{n}) \ (m, n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Tyto koule tvoří spočetný systém. Je-li $x \in \mathbf{Y}$, pak existuje $S_{m,n}$ tak, že $x \in S_{m,n} \subset G_\lambda$ pro nějaké λ (G_λ jsou otevřené). Označme odpovídající množinu G_λ jako $G_{m,n}$. Poněvadž takto vybrané koule pokrývají $\mathbf{Y}$, stačí tedy vybrat příslušné množiny $G_{m,n}$ z daného pokrytí tak, že $S_{m,n} \subset G_{m,n}$.

Poznámka: Předchozí věta je topologická charakterizace separabilního prostoru. Tedy separabilní topologický prostor je takový, že z každého jeho pokrytí otevřenými množinami je možné vybrat spočetné pokrytí.

Definice: Metrický prostor $\mathbf{X}$ nazveme kompaktní, jestliže každá posloupnost bodů $\mathbf{X}$ obsahuje vybranou posloupnost konvergentní v $\mathbf{X}$.

Příklad: Libovolný uzavřený interval $\langle a, b\rangle \subset \mathbf{R}$ je kompaktní. Analogicky každý interval

$$I = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$$

je kompaktní v $\mathbf{R}^n$.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor. Řekneme, že množina $K(\varepsilon) \subset \mathbf{X}$ tvoří ε-síť prostoru $\mathbf{X}$, je-li

$$\mathbf{d}(x, K(\varepsilon)) < \varepsilon \text{ pro každé } x \in \mathbf{X}.$$

O množině $A \subset \mathbf{X}$ řekneme, že je totálně omezená, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť A.

Lemma: Každá totálně omezená podmnožina metrického prostoru je omezená.

Důkaz: Buď $A \subset \mathbf{X}$ totálně omezená. Pak existuje konečná 1-síť

$$K(1) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset A$$

tak, že $\mathbf{d}(x, K(1)) < 1 \ \forall x \in A$. Nyní platí

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{k} S(a_j; 1)$$

a sjednocení omezených množin je omezená množina.

Lemma: Každý totálně omezený metrický prostor je separabilní.

Důkaz: Buď $\mathbf{X}$ totálně omezený. Potom ke každému $n \in \mathbf{N}$ existuje konečná $\frac{1}{n}$-síť $K(\frac{1}{n})$ a označme $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K(\frac{1}{n})$. A je spočetná a zřejmě $\overline{A} = \mathbf{X}$.

! Věta: Metrický prostor $\mathbf{X}$ je kompaktní právě když je úplný a totálně omezený.

Důkaz: 1. Buď $\mathbf{X}$ kompaktní, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná cauchyovská posloupnost. Ta obsahuje konvergentní podposloupnost a je tedy sama konvergentní. Odtud plyne, že $\mathbf{X}$ je úplný metrický prostor.

Nechť pro nějaké $\varepsilon > 0$ neexistuje konečná ε-síť $\mathbf{X}$. Zvolme libovolně $x_1 \in \mathbf{X}$; potom existuje $x_2 \in \mathbf{X}$ tak, že $\mathbf{d}(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Buď $x_{n+1} \in \mathbf{X}$ takový bod, že $\mathbf{d}(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$ pro $j = 1, 2, \dots, n$. Tím dostáváme posloupnost, ze které nelze vybrat konvergentní podposloupnost a to je spor s kompaktností $\mathbf{X}$.

2. Buď $\mathbf{X}$ úplný a totálně omezený a nechť

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbf{X}$$

je libovolná posloupnost. Poněvadž je $\mathbf{X}$ totálně omezený, existuje konečná 1-síť $\mathbf{X}$ a tedy koule S_1, která obsahuje nekonečně mnoho bodů posloupnosti $\{x_n\}$. Označme ji $\{x_n^{(1)}\}$. Poněvadž S_1 je totálně omezená, existuje konečná $\frac{1}{2}$-síť S_1 a tedy koule S_2, která obsahuje nekonečně mnoho bodů $\{x_n^{(1)}\}$. Označme ji $\{x_n^{(2)}\}$. Jestliže budeme takto pokračovat dále, sestrojíme posloupnost $\{x_n^{(k)}\}$, která leží v kouli S_k o poloměru $\frac{1}{k}$. Hledaná vybraná posloupnost je nyní následující:

$$\{x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots\},$$

která je zřejmě cauchyovská (odvoďte detailně) a tedy konvergentní, poněvadž $\mathbf{X}$ je úplný prostor.

Důsledek: Množina $K \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní právě když je omezená a uzavřená.

Důkaz: Poněvadž je $\mathbf{R}^n$ úplný prostor, je uzavřená podmnožina úplná. Další část plyne z toho, že každá omezená podmnožina $\mathbf{R}^n$ je totálně omezená. To je ponecháno jako cvičení.

Věta: Buďte $X_1, X_2, \dots$ neprázdné a kompaktní množiny a nechť

$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots . \text{ Potom je } \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset .$$

Důkaz: Zvolme $x_n \in X_n \quad (n = 1, 2, \dots)$. Pak existuje vybraná posloupnost

$$\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \text{ tak, že } x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X_1$$

(X_1 je kompaktní). Je-li nyní n_0 libovolné, pak pro $k_n \geq n_0$ platí $x_{k_n} \in X_{k_n} \subset X_{n_0}$ a tedy $x \in X_{n_0}$. Poněvadž n_0 bylo libovolné, je $x \in X_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$, tedy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$.

Příklad: Jestliže budeme v předchozí větě předpokládat pouze uzavřenost, věta již neplatí. Buď $X_n = \langle n, \infty)$. Potom je

$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots , \text{ ale } \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset.$$

Věta: (Borelova pokrývací věta)
Buď $\mathbf{X}$ kompaktní metrický prostor, $G_\lambda \ (\lambda \in \Lambda)$ pokrytí otevřenými množinami. Potom existuje konečná část $\Sigma \subset \Lambda$ tak, že

$$\mathbf{X} = \bigcup_{\lambda \in \Sigma} G_\lambda .$$

Důkaz: Poněvadž $\mathbf{X}$ je separabilní, je podle Lindelöfovy věty možno z daného pokrytí vybrat spočetné pokrytí. Označme je

$$H_1, H_2, \cdots \ , \text{ tedy } \bigcup_{p=1}^{\infty} H_p = \mathbf{X} .$$

Buďte

$$K_n = H_1 \cup \cdots \cup H_n, \quad L_n = \mathbf{X} - K_n .$$

Potom jsou množiny L_n uzavřené a tedy kompaktní. Dále

$$L_1 \supset L_2 \supset \cdots \text{ a přitom } \bigcap_{p=1}^{\infty} L_p = \mathbf{X} - \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p = \mathbf{X} - \bigcup_{p=1}^{\infty} H_p = \emptyset .$$

Podle předchozí věty musí tedy existovat n_0 tak, že $L_{n_0} = \emptyset$ a tedy $\mathbf{X} = \bigcup_{p=1}^{n_0} H_p$.

Poznámka: Borelova pokrývací věta je topologická charakterizace kompaktnosti. Tedy topologický prostor je kompaktní, jestliže z každého otevřeného pokrytí je možno vybrat konečné pokrytí.

1.3 Zobrazení metrických prostorů.

Definice: Buďte $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ a $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\varrho})$ dva metrické prostory, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ zobrazení. Řekneme, že f je spojité v bodě $x_0 \in \mathbf{X}$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že jakmile $\mathbf{d}(x, x_0) < \delta$, potom $\boldsymbol{\varrho}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Řekneme, že f je spojité na $\mathbf{X}$, je-li spojité v každém bodě $x \in \mathbf{X}$.

Poznámka: Předchozí definice říká, že ke každému okolí

$$V = \{y \in \mathbf{Y}; \boldsymbol{\varrho}(y, f(x_0)) < \varepsilon\} \text{ bodu } f(x_0)$$

existuje okolí

$$U = \{x \in \mathbf{X}; \mathbf{d}(x, x_0) < \delta\} \text{ bodu } x_0$$

tak, že $f(U) \subset V$. Tím dostaneme ekvivalentní formulaci spojitosti f. Jestliže navíc přijmeme dohodu, že okolím bodu v topologickém prostoru budeme rozumět libovolnou otevřenou množinu, obsahující x, dostaneme topologickou charakterizaci spojitosti.

Věta: Zobrazení $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ je spojité v bodě $x_0 \in \mathbf{X}$ právě když ke každému okolí V bodu $f(x_0)$ existuje okolí U bodu x_0 tak, že $f(U) \subset V$.

Poznámka: V metrických prostorech je spojitost v bodě též možno formulovat pomocí posloupností.

Věta: Zobrazení $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ je spojité v bodě $x_0 \in \mathbf{X}$ právě když pro každou posloupnost

$$x_n \in \mathbf{X}, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \text{ platí } f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)\,.$$

Důkaz: a) Buď f spojité v bodě $x_0 \in \mathbf{X}$, $\{x_n\}$ $(x_n \in \mathbf{X})$ taková posloupnost, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že jakmile

$$\mathbf{d}(x, x_0) < \delta, \text{ pak } \boldsymbol{\varrho}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Poněvadž $x_n \to x_0$, existuje index n_0 tak, že pro $\forall n \geq n_0$ platí $\mathbf{d}(x_n, x_0) < \delta$ a tedy

$$\boldsymbol{\varrho}(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon, \text{ neboli } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\,.$$

b) Nechť f není spojité v bodě x_0. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že ke každému $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$ existuje $x_n \in \mathbf{X}$ tak, že

$$\mathbf{d}(x_n, x_0) < \frac{1}{n}, \text{ ale } \boldsymbol{\varrho}(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon\,.$$

Tedy posloupnost $\{f(x_n)\}$ nemůže konvergovat k $f(x_0)$.

Poznámka: V dalším zformulujeme podmínky spojitosti na celém prostoru $\mathbf{X}$.

Definice: Buď f spojité zobrazení metrického prostoru $\mathbf{X}$ na metrický prostor $\mathbf{Y}$. Je-li zobrazení f^{-1} (pokud existuje) spojité, řekneme, že f je <u>homeomorfní</u> nebo topologické zobrazení. O prostorech $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ pak řekneme, že jsou homeomorfní.

! Věta: Buďte $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ metrické prostory, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ zobrazení. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní.

a) f je spojité na $\mathbf{X}$.

b) Je-li $G \subset \mathbf{Y}$ libovolná otevřená množina, pak je $f^{-1}(G)$ otevřená v $\mathbf{X}$. Tedy vzor každé otevřené množiny je množina otevřená.

c) Je-li $F \subset \mathbf{Y}$ uzavřená množina, je $f^{-1}(F)$ uzavřená v $\mathbf{X}$. Tedy vzor každé uzavřené množiny je množina uzavřená.

Důkaz: 1. Buď f spojité na $\mathbf{X}$, $G \subset \mathbf{Y}$ libovolná otevřená množina, $f(x) \in G$, V okolí bodu $f(x)$ takové, že $V \subset G$. Potom existuje okolí U bodu x tak, že

$$f(U) \subset V \subset G, \text{ tedy } U \subset f^{-1}(G)$$

a odtud plyne, že $f^{-1}(G)$ je otevřená množina.

2. Nechť pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbf{Y}$ je $f^{-1}(G)$ otevřená v $\mathbf{X}$ a buď V okolí bodu $f(x)$. Potom je $f^{-1}(V)$ otevřená množina a položme $U = f^{-1}(V)$. Platí tedy $f(U) \subset V$, což jsme chtěli dokázat.

3) Ekvivalence $b) \Leftrightarrow c)$ plyne okamžitě ze vztahu

$$f^{-1}(\mathbf{Y} - G) = \mathbf{X} - f^{-1}(G)\,.$$

Poznámka: Vlastnost b) z předchozí věty je topologická charakterizace spojitého zobrazení a slouží v obecném topologickém prostoru za definici spojitosti.

! Věta: Buďte $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ metrické prostory, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ spojité zobrazení a nechť je $\mathbf{X}$ kompaktní. Potom platí.
a) $f(\mathbf{X})$ je kompaktní.
b) Je-li f prosté, je i f^{-1} spojité, tedy f je homeomorfní zobrazení.

Důkaz: a) Nechť $y_n \in f(\mathbf{X})$ je libovolná posloupnost. Potom existují $x_n \in \mathbf{X}$ tak, že $f(x_n) = y_n$. Posloupnost $\{x_n\}$ obsahuje konvergentní podposloupnost $x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in \mathbf{X}$. Ze spojitosti f plyne, že

$$y_{k_n} = f(x_{k_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

a $f(\mathbf{X})$ je kompaktní.

b) Je $f^{-1} : f(\mathbf{X}) \to \mathbf{X}$ a buď $F \subset \mathbf{X}$ libovolná uzavřená množina (tedy kompaktní). Potom je $[f^{-1}]^{-1}(F) = f(F)$ a poněvadž je $f(F)$ kompaktní, je automaticky uzavřená. Tedy vzor každé uzavřené množiny je množina uzavřená a f^{-1} je spojité.

Důsledek: Buď f spojité zobrazení metrického prostoru $\mathbf{X}$ do $\mathbf{R}$. Je-li $\mathbf{X}$ kompaktní, pak $f(\mathbf{X})$ obsahuje nejmenší a největší číslo. Jinými slovy každá spojitá reálná funkce na kompaktním metrickém prostoru nabývá své nejmenší a největší hodnoty.

Důkaz: Buď

$$\alpha = \inf f(\mathbf{X}),\ \ \beta = \sup f(\mathbf{X})\,.$$

Poněvadž je $\boldsymbol{\varrho}(f(\mathbf{X}), \alpha) = 0$, platí

$$\alpha \in \overline{f(\mathbf{X})} = f(\mathbf{X})\,.$$

Poznámka: V dalším se budeme zabývat otázkou vnoření metrického prostoru do úplného metrického prostoru.

Definice: Buď f zobrazení metrického prostoru $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ na metrický prostor $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\varrho})$. Řekneme, že f je <u>izometrické zobrazení</u> nebo izometrie, jestliže pro všechna $x, y \in \mathbf{X}$ platí

$$\mathbf{d}(x, y) = \boldsymbol{\varrho}(f(x), f(y))\,.$$

Poznámka: Je zřejmé, že každá izometrie je prosté zobrazení. Jednoduché ukázky izometrií jsou na příklad shodná zobrazení známá z elementární geometrie.

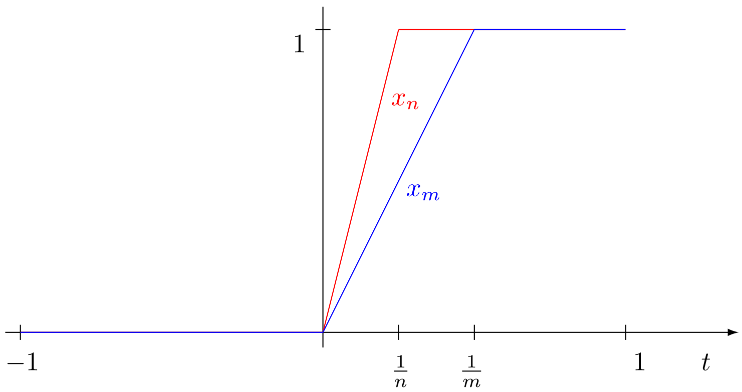
Definice: Buď $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ libovolný metrický prostor. <u>Úplný</u> metrický prostor $(\mathbf{X}^*, \mathbf{d}^*)$ nazveme <u>zúplněním</u> nebo úplným obalem prostoru $\mathbf{X}$, jestliže platí

a) $\mathbf{X}$ je izometrický s podprostorem $\mathbf{X}_0$ prostoru $\mathbf{X}^*$.

b) $\overline{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}^*$, tedy $\mathbf{X}_0$ je hustý v $\mathbf{X}^*$.

Příklad: Buď $\mathbf{X} = C(a,b)$ s metrikou $\mathbf{d}(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|dt$ a položme $a = -1, b = 1$. Ukážeme, že $\mathbf{X}$ není v této metrice úplný prostor. Uvažme posloupnost

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad -1 \le t \le 0\,, \\ nt & \text{pro} \quad 0 < t \le \frac{1}{n}\,, \\ 1 & \text{pro} \quad \frac{1}{n} < t \le 1. \end{cases}$$



Nechť $n > m$. Potom

$$|x_n(t) - x_m(t)| = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad -1 \le t \le 0, \\ (n-m)t & \text{pro} \quad 0 < t \le \frac{1}{n}, \\ 1 - mt & \text{pro} \quad \frac{1}{n} < t \le \frac{1}{m}, \\ 0 & \text{pro} \quad \frac{1}{m} < t \le 1. \end{cases}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} |x_n(t) - x_m(t)|dt = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Tedy posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, nekonverguje však v prostoru $C(-1,1)$. Je totiž

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t), \text{ kde } \quad x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad -1 \le t \le 0, \\ 1 & \text{pro} \quad 0 < t \le 1. \end{cases}$$

! Věta: Ke každému metrickému prostoru existuje úplný obal. Všechny úplné obaly k danému metrickému prostoru jsou izometrické.

Důkaz: Důkaz věty je konstruktivní, tedy ukazuje, jak úplný obal vypadá a provedeme jej v několika krocích. Buď $\mathbf{X}$ daný metrický prostor.

1. Množinu všech cauchyovských posloupností prostoru $\mathbf{X}$ rozložíme na třídy pomocí ekvivalence. Dvě posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ nazveme ekvivalentní a označíme $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, jestliže $\mathbf{d}(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (Ukažte, že tento vztah ekvivalence je reflexivní, symetrický a transitivní.) Tím se všechny cauchyovské posloupnosti $\mathbf{X}$ rozpadnou na ekvivalentní třídy, které budeme značit

$x^*, y^*, \dots$ a $\mathbf{X}^*$ množinu všech těchto tříd. Dále $x' = \{x, x, \dots\}$, kde $x \in \mathbf{X}$ značíme tak zvané stacionární posloupnosti, nebo přesněji ekvivalentní třídu posloupností, obsahující x'.

2. V $\mathbf{X}^*$ zavedeme metriku

$$\mathbf{d}^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, y_n)\,,$$

kde $\{x_n\} \in\ x^*$ a $\{y_n\} \in y^*$ jsou libovolné cauchyovské posloupnosti. Ukážeme, že $\mathbf{d}^*$ nezávisí na výběru $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ a že tvoří skutečně metriku. Nejdříve však musíme dokázat, že limita na pravé straně existuje. Platí

$$|\mathbf{d}(x_n, y_n) - \mathbf{d}(x_m, y_m)| = |\mathbf{d}(x_n, y_n) - \mathbf{d}(x_n, y_m) + \mathbf{d}(x_n, y_m) - \mathbf{d}(x_m, y_m)| \leq$$

$$\leq |\mathbf{d}(x_n, y_n) - \mathbf{d}(x_n, y_m)| + |\mathbf{d}(x_n, y_m) - \mathbf{d}(x_m, y_m)| \leq \mathbf{d}(y_n, y_m) + \mathbf{d}(x_n, x_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Je totiž

$$\mathbf{d}(x_n, y_n) \leq \mathbf{d}(x_n, y_m) + \mathbf{d}(y_m, y_n) \ \text{ a } \ \mathbf{d}(x_n, y_m) \leq \mathbf{d}(x_n, x_m) + \mathbf{d}(x_m, y_m)\,.$$

Tedy číselná posloupnost $s_n = \mathbf{d}(x_n, y_n)$ je cauchyovská a existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, y_n)$.

Buďte

$$\{x_n^{(1)}\},\ \{x_n^{(2)}\} \in x^* \quad \text{a} \quad \{y_n^{(1)}\},\ \{y_n^{(2)}\} \in y^*\,.$$

Potom platí

$$|\mathbf{d}(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) - \mathbf{d}(x_n^{(2)}, y_n^{(2)})| \leq \mathbf{d}(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) + \mathbf{d}(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

a $\mathbf{d}^*$ nezávisí na výběru posloupností $\{x_n\}, \{y_n\}$. Je totiž

$$\mathbf{d}(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}) \leq \mathbf{d}(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) + \mathbf{d}(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}) + \mathbf{d}(y_n^{(2)}, y_n^{(1)})\,.$$

Pokud se týče ověření axiomů metriky, je zřejmé, že vlastnosti 1. a 2. platí. Ohledně trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{d}(x_n, z_n) \leq \mathbf{d}(x_n, y_n) + \mathbf{d}(y_n, x_n)$$

a odtud

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(y_n, z_n)$$

neboli

$$\mathbf{d}^*(x^*, z^*) \leq \mathbf{d}^*(x^*, y^*) + \mathbf{d}^*(y^*, z^*)\,.$$

3. Prostor $\mathbf{X}^*$ obsahuje část $\mathbf{X}_0$, která je izometrická s $\mathbf{X}$. Jestliže jako $\mathbf{X}_0$ označíme množinu všech stacionárních posloupností $x' = \{x, x, \dots\}$ pro $x \in \mathbf{X}$, je zřejmé, že

$$\mathbf{d}(x, y) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x, y) = \mathbf{d}^*(x', y')\,.$$

Tedy zobrazení $x \to x'$ je izometrie.

4. $\overline{\mathbf{X}}_\mathbf{0} = \mathbf{X}^*$. Je-li $x^* \in \mathbf{X}^*$ libovolný bod a $\{x_n\} \in x^*$, pak

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \text{ tak, že } \ \forall m, n \geq n_0 \ \text{ je } \ \mathbf{d}(x_n, x_m) < \varepsilon$$

a položme $x' = \{x_{n_0}\}$. Potom platí

$$x' \in \mathbf{X}_0 \ \text{ a } \ \mathbf{d}^*(x^*, x') = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, x_{n_0}) \leq \varepsilon$$

a tedy $\overline{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}^*$.

5. $\mathbf{X}^*$ je úplný prostor. Připomeňme nejdříve, že každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}$ bodů prostoru $\mathbf{X}$ reprezentuje prvek $x^* \in \mathbf{X}^*$, neboli cauchyovská posloupnost $\{x'_n\}$ prvků $x'_n \in \mathbf{X}_0$ konverguje k prvku $x^* \in \mathbf{X}$. Je-li nyní $\{x^*_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná cauchyovská posloupnost bodů $\mathbf{X}^*$, pak

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists x'_n \in \mathbf{X}_0 \text{ tak, že } \mathbf{d}^*(x^*_n, x'_n) < \frac{1}{n} \ (\text{je } \overline{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}^*)\,.$$

Odtud plyne, že $\{x^*_n\}$ konverguje a $\lim_{n\to\infty} x^*_n = x^*$.

6. $\mathbf{X}^*$ je určeno jednoznačně až na izometrii. Buďte $\mathbf{X}^*$ a $\mathbf{X}^{**}$ dvě zúplnění prostoru $\mathbf{X}$. Potom platí $\mathbf{X}^* = \overline{\mathbf{X}}_0$ a $\mathbf{X}^{**} = \overline{\mathbf{X}}_0$ a definujme zobrazení $\varphi : \mathbf{X}^* \to \mathbf{X}^{**}$ předpisem $\varphi(x') = x'$ pro $x' \in \mathbf{X}_0$. Je-li $x^* \in \mathbf{X}^*$ libovolný bod, potom existuje posloupnost

$$\{x'_n\}, \quad x'_n \in \mathbf{X}_0 \text{ tak, že } x'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*\,.$$

Poněvadž $\mathbf{X}^{**}$ je úplný prostor, existuje

$$x^{**} \in \mathbf{X}^{**} \text{ tak, že } x'_n \to x^{**} \text{ a položme } \varphi(x^*) = x^{**}\,.$$

Ukážeme, že φ je izometrie. Buďte $x^*, y^* \in \mathbf{X}^*$ libovolné body, $\{x'_n\}, \{y'_n\}$; $x'_n, y'_n \in \mathbf{X}_0$ takové, že

$$x'_n \to x^*,\ y'_n \to y^* \text{ v } \mathbf{X}^* \text{ a také } x'_n \to x^{**},\ y'_n \to y^{**} \text{ v } \mathbf{X}^{**}\,.$$

Potom je

$$\mathbf{d}^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}^*(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{d}^{**}(x'_n, y'_n) = \mathbf{d}^{**}(x^{**}, y^{**})$$

a φ je izometrie.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ zobrazení. Řekneme, že f je kontraktivní zobrazení nebo kontrakce, jestliže existuje $\alpha \in (0,1)$ tak, že pro všechna $x, y \in \mathbf{X}$ platí

$$\mathbf{d}(f(x), f(y)) \leq \alpha \mathbf{d}(x, y)\,.$$

Poznámky: 1. Každá kontrakce je spojité zobrazení. Skutečně, je-li $x_n \to x$, potom $f(x_n) \to f(x)$ podle definice kontrakce.

2. V úplném metrickém prostoru platí t. zv. věta o pevném bodu pro kontraktivní zobrazení, která má velmi důležité aplikace.

! Věta: (Banachova věta o kontrakcích)
Buď $\mathbf{X}$ úplný metrický prostor, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ kontraktivní zobrazení. Potom existuje právě jeden bod $x \in \mathbf{X}$ tak, že $f(x) = x$. Tento bod nazýváme pevným bodem zobrazení f.

Důkaz: 1. Existence
Buď $x_0 \in \mathbf{X}$ libovolný bod a uvažme posloupnost $\{x_n\}$, definovanou předpisem

$$x_n = f(x_{n-1}) \ \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Ukážeme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská. Buďte $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$. Potom je $m = n+k$, kde $k \in \mathbf{N}$ a platí

$$\mathbf{d}(x_m, x_n) = \mathbf{d}(x_{n+k}, x_n) = \mathbf{d}(f(x_{n+k-1}), f(x_{n-1})) \leq \alpha \mathbf{d}(x_{n+k-1}, x_{n-1})\,.$$

Odtud indukcí plyne, že $\mathbf{d}(x_m, x_n) \leq \alpha^n \mathbf{d}(x_k, x_0)$. Ale

$$\mathbf{d}(x_k, x_0) \leq \mathbf{d}(x_0, x_1) + \mathbf{d}(x_1, x_2) + \cdots + \mathbf{d}(x_{k-1}, x_k) \leq \{1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{k-1}\} \mathbf{d}(x_0, x_1) \leq \frac{\mathbf{d}(x_0, x_1)}{1 - \alpha}\,.$$

(Je $\alpha \in (0,1)$). Neboli

$$\mathbf{d}(x_m, x_n) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\mathbf{d}(x_0, x_1) \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Poněvadž $\mathbf{X}$ je úplný metrický prostor, je posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Vzhledem ke spojitosti f platí

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

a x je tedy pevný bod f.

2. Jednoznačnost
Nechť $f(x) = x$ a $f(y) = y$. Potom platí

$$\mathbf{d}(x,y) = \mathbf{d}(f(x), f(y)) \le \alpha \mathbf{d}(x,y)\,.$$

Poněvadž je $\alpha \in (0,1)$, platí $\mathbf{d}(x,y) = 0$, tedy $x = y$.

Poznámka: Předpis $x_{n+1} = f(x_n)$ udává metodu přibližného řešení úlohy $f(x) = x$. Zároveň je možno udat chybu po n-té aproximaci. Platí

$$\mathbf{d}(x_m, x_n) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\mathbf{d}(x_0, x_1)$$

a pro $m \to \infty$ dostaneme

$$\mathbf{d}(x, x_n) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\mathbf{d}(x_0, x_1)\,.$$

Příklad: Uvažme otázku řešitelnosti Cauchyovy úlohy

$$y' = f(t,y), \;\; y(t_0) = y_0 \;\text{ v }\; \mathbf{C}(a,b)\,.$$

Tato úloha je ekvivalentní s řešitelností integrální rovnice

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau\,.$$

Označme

$$T(y) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau$$

a předpokládejme, že spojitá funkce f splňuje Lipschitzovu podmínku

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le K|y_1 - y_2|\,.$$

Potom platí

$$|T(y) - T(z)| = |\int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, z(\tau))d\tau| \le \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))|d\tau \le$$

$$\le K \int_{t_0}^{t} |y(\tau) - z(\tau)|d\tau \le K(b-a) \max_{a\le t\le b} |y(t) - z(t)|$$

pro $t \geq t_0$. Analogický odhad dostaneme však i pro $t \leq t_0$, jen musíme uvážit

$$\int_t^{t_0} |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))| d\tau \,.$$

Odtud plyne, že

$$\max_{a \leq t \leq b} |T(y) - T(z)| = \mathbf{d}(T(y), T(z)) \leq K(b-a)\mathbf{d}(y, z) \,.$$

Je-li $K(a-b) < 1$ (čehož se dá vždy dosáhnout, je-li $t_0 \in (a, b)$ a tento interval je dostatečně malý), dostaneme odtud, že T je kontrakce a daná úloha má jediné řešení.

Kapitola 2

Normované prostory.

2.1 Normované a unitární prostory.

Poznámka: V úvodu připomeneme některé známé pojmy z lineární algebry. Pod pojmem číselné těleso budeme rozumět množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ nebo množinu komplexních čísel $\mathbf{C}$. Těleso budeme obyčejně značit $\mathbf{\Phi}$.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ množina, jejíž prvky budeme značit $x, y, \ldots$, $\mathbf{\Phi}$ těleso, jehož prvky budeme značit $\alpha, \beta, \ldots$. Řekneme, že $\mathbf{X}$ tvoří lineární vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{\Phi}$, jsou-li v $\mathbf{X}$ definovány 2 operace: sčítání vektorů (prvků) $\mathbf{X}$ a násobení prvků $\mathbf{X}$ elementy $\mathbf{\Phi}$ (skaláry), které mají následující vlastnosti:

A_1 Ke každé dvojici $x, y \in \mathbf{X}$ existuje jejich součet $x + y \in \mathbf{X}$.
A_2 $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbf{X}$.
A_3 $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbf{X}$.
A_4 Existuje prvek $0 \in \mathbf{X}$, nazývaný nulový vektor tak, že $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbf{X}$.
A_5 Ke každému $x \in \mathbf{X}$ existuje prvek $-x \in \mathbf{X}$, nazývaný opačný vektor tak, že $x + (-x) = 0$.

M_1 Ke každému $x \in \mathbf{X}$ a ke každému $\alpha \in \mathbf{\Phi}$ existuje jejich součin $\alpha x \in \mathbf{X}$.
M_2 $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in \mathbf{\Phi}, \forall x, y \in \mathbf{X}$.
M_3 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{\Phi}, \forall x \in \mathbf{X}$.
M_4 $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{\Phi}, \forall x \in \mathbf{X}$.
M_5 $1 \cdot x = x \quad 1 \in \mathbf{\Phi}, \forall x \in \mathbf{X}$.

Poznámka: Prvky $\mathbf{X}$ nazýváme vektory, prvky $\mathbf{\Phi}$ skaláry. Vektorový prostor složený jen z nulového vektoru 0 budeme značit $\{0\}$.

Definice: Neprázdnou podmnožinu $\mathbf{Y}$ lineárního vektorového prostoru $\mathbf{X}$ nazýváme <u>podprostorem</u>, jestliže

$$x + y \in \mathbf{Y} \text{ jakmile } x, y \in \mathbf{Y} \text{ a } \alpha x \in \mathbf{Y} \text{ jakmile } x \in \mathbf{Y}, \alpha \in \mathbf{\Phi}\,.$$

Řekneme, že vektory $x_1, \ldots, x_n$ jsou <u>lineárně závislé</u>, jestliže existují skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, které nejsou všechny nulové tak, že

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0\,.$$

Je-li možno tuto rovnost splnit jen tak, že

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0\,,$$

řekneme, že vektory $x_1, \ldots, x_n$ jsou lineárně nezávislé. Nekonečnou množinu M nazveme lineárně nezávislou, je-li každá její konečná podmnožina lineárně nezávislá.

O lineárním prostoru $\mathbf{X}$ řekneme, že má konečnou dimensi n, jestliže v $\mathbf{X}$ existuje n lineárně nezávislých vektorů a každá skupina o více než n vektorech je lineárně závislá. Jestliže ke každému přirozenému číslu k existuje v $\mathbf{X}$ k lineárně nezávislých vektorů, řekneme, že $\mathbf{X}$ má nekonečnou dimensi.

Poznámka: Lineární algebra se zabývá vyšetřováním konečnědimensionálních prostorů, funkcionální analýza zkoumá většinou prostory nekonečné dimense. Ty bývají často normované.

Definice: Lineární vektorový prostor $\mathbf{X}$ nazveme lineárním normovaným prostorem, je-li na $\mathbf{X}$ definována reálná nezáporná funkce $\|x\|$, nazývaná norma s následujícími vlastnostmi:

1. $\|x\| \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbf{X};\;\; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \;\; \forall \alpha \in \mathbf{\Phi} \;\; \forall x \in \mathbf{X}.$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;\; \forall x, y \in \mathbf{X}$ (trojúhelníková nerovnost).

Lemma: Každý normovaný prostor je metrický prostor, jestliže definujeme $\mathbf{d}(x, y) = \|x - y\|$. Obráceně lineární metrický prostor je normovaný, jestliže metrika $\mathbf{d}$ má následující 2 vlastnosti:

1. $\mathbf{d}(x, y) = \mathbf{d}(x - y, 0) \;\; \forall x, y \in \mathbf{X}.$
2. $\mathbf{d}(\alpha x, 0) = |\alpha| \mathbf{d}(x, 0) \;\; \forall \alpha \in \mathbf{\Phi}, \;\; \forall x \in \mathbf{X}.$

V tomto případě stačí položit $\|x\| = \mathbf{d}(x, 0)$.

Důkaz: a) Je zřejmé, že $\mathbf{d}(x, y) = \|x - y\|$ má prvé dvě vlastnosti metriky. Pokud se týče trojúhelníkové nerovnosti, platí

$$\mathbf{d}(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \mathbf{d}(x, y) + \mathbf{d}(y, z)\,.$$

b) Obráceně definujeme-li $\|x\| = \mathbf{d}(x, 0)$, je zřejmé, že platí 1. vlastnost normy. Druhá plyne z dodatečné vlastnosti 2. Pro trojúhelníkovou nerovnost platí

$$\|x + y\| = \mathbf{d}(x + y, 0) = \mathbf{d}(x, -y) \leq \mathbf{d}(x, 0) + \mathbf{d}(0, -y) =$$

$$= \|x\| + \mathbf{d}(-y, 0) = \|x\| + |-1| \cdot \mathbf{d}(y, 0) = \|x\| + \|y\|\,.$$

Definice: Řekneme, že normovaný lineární prostor $\mathbf{X}$ je Banachův prostor (nebo B-prostor), jeli úplný v metrice indukované normou $\mathbf{X}$.

Poznámka: Vzhledem k větě o vnoření do úplného metrického prostoru budeme v dalším pracovat většinou s B-prostory. Dalším důležitým případem normovaného prostoru je unitární prostor nebo jeho zúplnění Hilbertův prostor.

Definice: Buď H lineární prostor nad tělesem $\mathbf{\Phi}$. Řekneme, že H je unitární nebo pre-Hilbertův prostor, je-li na $H \times H$ definována funkce (x, y) s hodnotami ve $\mathbf{\Phi}$, nazývaná skalární součin, která má následující vlastnosti:

1. $(x, x) \geq 0 \qquad \forall x \in H; \qquad (x, x) = 0 \;\Leftrightarrow x = 0.$
2. $(y, x) = \overline{(x, y)} \qquad \forall x, y \in H.$
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \qquad \forall x_1, x_2, y \in H.$
4. $(\alpha x, y) = \alpha (x, y) \qquad \forall \alpha \in \mathbf{\Phi};\;\; \forall x, y \in H.$

Lemma: Pro skalární součin (x,y) platí

$$\begin{array}{ll} 1.\ (x,y_1+y_2)=(x,y_1)+(x,y_2) & \forall x,y_1,y_2\in H, \\ 2.\ (x,\alpha y)=\overline{\alpha}(x,y) & \forall \alpha\in\mathbf{\Phi}\,;\ \forall x,y\in H. \end{array}$$

Důkaz: 1. Je

$$(x,y_1+y_2)=\overline{(y_1+y_2,x)}=\overline{(y_1,x)+(y_2,x)}=\overline{(y_1,x)}+\overline{(y_2,x)}=(x,y_1)+(x,y_2)\,.$$

2. Analogicky

$$(x,\alpha y)=\overline{(\alpha y,x)}=\overline{\alpha(y,x)}=\overline{\alpha}\overline{(y,x)}=\overline{\alpha}(x,y)\,.$$

! Věta: (Cauchyova nerovnost)
Buď H unitární prostor. Potom pro libovolné $x,y\in H$ platí

$$|(x,y)|^2\le(x,x)(y,y)\,.$$

Rovnost platí právě když jsou x a y lineárně závislé.

Důkaz: Pro libovolné $x,y\in H$ a $\alpha,\beta\in\mathbf{\Phi}$ platí

$$0\le(\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y)=\alpha\overline{\alpha}(x,x)+\alpha\overline{\beta}(x,y)+\overline{\alpha}\beta\overline{(x,y)}+\beta\overline{\beta}(y,y)\,.$$

Jestliže položíme

$$\alpha=t\in\mathbf{R};\ \ \beta=\begin{cases}\frac{(x,y)}{|(x,y)|} & \text{pro}\quad (x,y)\neq 0\\ 1 & \text{jinak}\end{cases}$$

dostaneme

$$0\le t^2(x,x)+2t|(x,y)|+(y,y)\,.$$

Tedy diskriminant tohoto kvadratického trojčlenu musí být menší nebo roven 0. Neboli

$$|(x,y)|^2-(x,x)(y,y)\le 0\,.$$

1. Je-li $y=\lambda x$, potom

$$|(x,y)|^2=|(x,\lambda x)|^2=|\lambda|^2(x,x)^2=(x,x)|\lambda|^2(x,x)=(x,x)(\lambda x,\lambda x)=(x,x)(y,y)\,.$$

2. Nechť

$$|(x,y)|^2=(x,x)(y,y)\,.$$

Potom platí

$$\begin{gathered}0\le((x,y)y-(y,y)x,(x,y)y-(y,y)x)=\\ =|(x,y)|^2(y,y)-(y,y)|(x,y)|^2-|(x,y)|^2(y,y)+(y,y)^2(x,x)\,.\end{gathered}$$

Je-li $y=0$, je tvrzení zřejmé. Pro $y\neq 0$ zkrátíme (y,y) a dostaneme

$$0\le(y,y)(x,x)-|(x,y)|^2=0$$

a odtud $(x,y)y-(y,y)x=0$, tedy x a y jsou lineárně závislé.

Definice: Řekneme, že unitární prostor H je Hilbertův prostor, je-li H úplný normovaný prostor v normě
$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}\,.$$

Věta: Rovnost $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ definuje normu. V trojúhelníkové nerovnosti
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in H$$
platí rovnost právě když $y = \lambda x$, kde $\lambda \geq 0$.

Důkaz: Je zřejmé, že $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in H$ a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Dále
$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x,x)} = |\alpha| \cdot \|x\|\,.$$
Pokud se týče trojúhelníkové nerovnosti, platí
$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 + 2Re(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$
podle Cauchyovy nerovnosti.

1. Nechť $y = \lambda x$, kde $\lambda \geq 0$. Potom
$$\|x+y\| = \|(1+\lambda)x\| = \|x\| + \lambda\|x\| = \|x\| + \|y\|\,.$$

2. Je-li
$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|\,,$$
potom z předchozí části důkazu plyne, že
$$Re(x,y) = \|x\| \cdot \|y\|\,.$$
Poněvadž však platí obecně
$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,,$$
dostaneme odtud, že $(x,y) = \|x\| \cdot \|y\|$. Podle předchozí věty platí $y = \lambda x$ a tedy
$$(x,y) = (x,\lambda x) = \overline{\lambda}\|x\|^2 \ \text{ a zároveň } \ \|x\| \cdot \|y\| = |\lambda| \cdot \|x\|^2\,,$$
neboli $\overline{\lambda} = |\lambda|$ a $\lambda \geq 0$.

Poznámky: 1. Skalární součin je spojitá funkce 2 proměnných ve smyslu, že pokud
$$x_n \to x, \ y_n \to y, \ \text{ pak } \ (x_n, y_n) \to (x,y)\,.$$
Je totiž
$$|(x_n,y_n) - (x,y)| = |(x_n,y_n) - (x_n,y) + (x_n,y) - (x,y)| \leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq$$
$$\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

2. Skalární součin umožňuje zavést pojem ortogonality nebo kolmosti vektorů, známý z lineární algebry.

Definice: Buď M množina vektorů lineárního prostoru $\mathbf{X}$. Množinu všech konečných lineárních kombinací prvků M nazveme lineárním obalem M a označíme $[M]$.

Podmnožinu S unitárního prostoru H nazveme <u>ortogonální</u>, je-li $(x,y) = 0$, jakmile $x,y \in S$, $x \neq y$. Řekneme, že S je <u>ortonormální</u>, je-li navíc $\|x\| = 1$ pro všechna $x \in S$.

Poznámka: S ortonormální množinou se počítá velmi dobře a ukazuje se, že z libovolného nezávislého systému vektorů v unitárním prostoru lze vytvořit systém ortonormální.

Věta: (Gram-Schmidtova ortogonalizace)
Buď $\{x_n\}$ spočetná lineárně nezávislá množina. Potom existuje ortonormální množina $\{u_n\}$ tak, že pro každé přirozené k platí

$$[\{x_1, \dots, x_k\}] = [\{u_1, \dots, u_k\}] \, .$$

Důkaz: Je $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Definujme $y_1, y_2, \dots \;, u_1, u_2, \dots$ následujícím způsobem

$$\begin{array}{ll}
y_1 = x_1 & u_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} \\
y_2 = x_2 - (x_2, u_1)u_1 & u_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \\
\dots & \dots \\
y_{k+1} = x_{k+1} - \sum\limits_{j=1}^{k} (x_{k+1}, u_j)u_j & u_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|} \, .
\end{array}$$

Tento proces skončí, je-li $\{x_n\}$ konečná množina, jinak pokračuje do nekonečna. Indukcí dostaneme, že

$$[\{x_1, \dots, x_k\}] = [\{u_1, \dots, u_k\}] \quad \forall k \in \mathbf{N} \, .$$

Dále je zřejmé, že $(u_i, u_j) = 0$ pro $i \neq j, \quad \|u_i\| = 1$.

Věta: Buď H unitární prostor. Nutná a postačující podmínka pro to, aby byly vektory $x_1, \dots, x_n \in H$ lineárně nezávislé je, aby jejich Gramův determinant byl nenulový, t. j.

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1), & \cdots & ,(x_n, x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x_1, x_n), & \cdots & ,(x_n, x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \, .$$

Důkaz: 1. Jsou-li $x_1, \dots, x_n$ závislé, je zřejmě

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n) = 0 \, .$$

2. Nechť jsou $x_1, \dots, x_n$ nezávislé. Potom má soustava

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

pouze triviální řešení $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ a tedy také soustava

$$\begin{array}{ccc}
\lambda_1(x_1, x_1) + & \cdots & + \lambda_n(x_n, x_1) = 0 \\
\dots & \dots & \dots \\
\lambda_1(x_1, x_n) + & \cdots & + \lambda_n(x_n, x_n) = 0
\end{array} \, .$$

To je však možné pouze když $\Gamma(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Poznámky: 1. Další vlastnosti Hilbertova prostoru budou uvedeny později.
2. Vzájemný vztah mezi prostory, se kterými jsme se zatím setkali, je možno vyjádřit symbolicky inklusemi
„$\mathbf{R}^n \subset$ Hilbertovy prostory $\subset$ Banachovy prostory $\subset$ Metrické prostory $\subset$ Topologické prostory.“

2.2 Příklady normovaných prostorů.

1. Prostor $\mathbf{l}_p$ $(1 \le p < \infty)$.

Definice: Prostorem $\mathbf{l}_p$ nazveme množinu všech číselných posloupností $x = \{\alpha_n\}$ takových, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < \infty$. Norma je definována předpisem

$$\|x\| = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Věta: $\mathbf{l}_p$ tvoří separabilní Banachův prostor, jestliže algebraické operace definujeme předpisem:

$$\text{Je-li } x = \{\alpha_n\},\ y = \{\beta_n\},\ \lambda \in \mathbf{\Phi},\ \text{ pak } x + y = \{\alpha_n + \beta_n\},\ \lambda x = \{\lambda \alpha_n\} .$$

Důkaz: Skutečnost, že $x + y \in \mathbf{l}_p$ plyne z Minkowského nerovnosti. Je totiž

$$\|x+y\| = \{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n + \beta_n|^p\}^{\frac{1}{p}} \le \{\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p\}^{\frac{1}{p}} + \{\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^p\}^{\frac{1}{p}} = \|x\| + \|y\| .$$

To zároveň dokazuje trojúhelníkovou nerovnost. Ostatní vlastnosti normy jsou zřejmé.

Separabilita

Označme Y množinu všech vektorů z $\mathbf{l}_p$ tvaru

$$y = \{r_1, r_2, \dots, r_n, 0, \dots\} ,$$

kde r_j jsou racionální a $n \in \mathbf{N}$. Potom je Y spočetná množina. Ukážeme, že je hustá v $\mathbf{l}_p$. Buď $x \in \mathbf{l}_p$. Potom

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \sum_{n=k+1}^{\infty} |\alpha_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} .$$

Dále existuje takové

$$y = \{r_1, \dots, r_k, 0, 0, \dots\} \text{ tak, že } \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n - r_n|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} .$$

Odtud plyne, že $\|x - y\|^p < \varepsilon^p$, tedy $\|x - y\| < \varepsilon$.

Úplnost

Buď

$$\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} = \{\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \dots\}$$

cauchyovská posloupnost. Potom

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \text{ tak, že } \forall k, l \ge n_0 \text{ platí } \|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon ,$$

tedy

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon .$$

Odtud plyne, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ je $|\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}| < \varepsilon$ a posloupnost (číselná) $\{\alpha_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je cauchyovská pro každé $n \in \mathbf{N}$, neboli existuje

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_n^{(k)} = \alpha_n .$$

Označme $x = \{\alpha_n\}$. Pro každé přirozené $s \in \mathbf{N}$ platí

$$\sum_{n=1}^{s} |\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}|^p < \varepsilon^p \,.$$

Odtud pro $l \to \infty$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{s} |\alpha_n^{(k)} - \alpha_n|^p \le \varepsilon^p$$

a pro $s \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^{(k)} - \alpha_n|^p \le \varepsilon^p \,.$$

To však znamená, že $x^{(k)} - x \in \mathbf{l}_p$ a tedy i $x = x^{(k)} - (x^{(k)} - x) \in \mathbf{l}_p$.

Věta: Prostor $\mathbf{l}_2$ tvoří Hilbertův prostor, jestliže definujeme

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n} \,.$$

Důkaz: Vlastnosti skalárního součinu jsou zřejmé, jestliže ukážeme, že daná řada konverguje absolutně. To však plyne z Hölderovy nerovnosti. Platí totiž

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \overline{\beta_n}| \le \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{\beta_n}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \|x\| \cdot \|y\| \,.$$

Zároveň to též ukazuje, že platí Cauchyova nerovnost $|(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

Poznámky: 1. Prostory $\mathbf{l}_p^n$ a $\mathbf{R}^n$ (po případě $\mathbf{C}^n$) tvoří uzavřené podprostory $\mathbf{l}_p$ a $\mathbf{l}_2$, jestliže prvky $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ztotožníme s vektory $\mathbf{l}_p$ tvaru

$$x' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots) \,.$$

2. Prostor $\mathbf{l}_p$ má nekonečnou dimensi. Vektory

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots), \;\; \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots), \;\; \dots$$

jsou lineárně nezávislé.
3. Jestliže označíme

$$K = \{x \in \mathbf{l}_p; \;\; \|x\| \le 1\} \,,$$

pak je K omezená a uzavřená množina, která však není kompaktní. Ukazuje se totiž, že kompaktnost uzavřené jednotkové koule v Banachově prostoru $\mathbf{X}$ je nutná a postačující podmínka pro to, aby $\mathbf{X}$ byl konečnědimensionální.

2. Prostor $\mathbf{l}_\infty$.

Definice: Prostorem $\mathbf{l}_\infty$ (nebo $\mathbf{m}$) nazveme množinu všech omezených číselných posloupností $x = \{\alpha_n\}$. Norma v $\mathbf{l}_\infty$ je definována předpisem

$$\|x\| = \sup_n |\alpha_n| \,.$$

Věta: $\mathbf{l}_\infty$ tvoří Banachův prostor, jestliže algebraické operace definujeme jako v případě $\mathbf{l}_p$. $\mathbf{l}_\infty$ není separabilní.

Důkaz: Je zřejmé, že výše uvedený předpis definuje normu.

<u>Úplnost</u>

Buď

$$x^{(k)} = \{\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \dots\}$$

cauchyovská posloupnost. Potom existuje číslo M_k tak, že $|\alpha_n^{(k)}| \le M_k \ \forall n \in \mathbf{N}$. Dále

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall k, l \ge n_0 \ \text{platí} \ \|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon$$

a tedy

$$|\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}| < \varepsilon \ \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{\alpha_n^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a tedy konverguje k číslu

$$\alpha_n = \lim_{k\to\infty} \alpha_n^{(k)}\,.$$

Označme $x = \{\alpha_n\}$. Ukážeme, že x tvoří omezenou posloupnost. Poněvadž $|\alpha_n^{(k)} - \alpha_n^{(l)}| < \varepsilon$, dostaneme pro $l \to \infty$ $|\alpha_n^{(k)} - \alpha_n| \le \varepsilon$. Nyní

$$|\alpha_n| \le |\alpha_n - \alpha_n^{(k)}| + |\alpha_n^{(k)}| \le \varepsilon + M_k\,.$$

Označme Y podmnožinu $\mathbf{l}_\infty$ složenou ze všech posloupností tvaru

$$y = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)\,.$$

Tato množina je nespočetná (ukažte proč) a při tom pro

$$y, z \in Y, \ \ y \ne z \ \text{platí} \ \|y - z\| = 1\,.$$

Definice: Prostorem $\mathbf{c}$ nazveme množinu všech konvergentních číselných posloupností $x = \{\alpha_n\}$ s normou

$$\|x\| = \sup_n |\alpha_n|\,.$$

Prostorem $\mathbf{c}_0$ nazveme množinu všech číselných posloupností, které konvergují k 0 s normou

$$\|x\| = \sup_n |\alpha_n|\,.$$

Věta: Prostor $\mathbf{c}$ je uzavřeným podprostorem $\mathbf{l}_\infty$, prostor $\mathbf{c}_0$ je uzavřeným podprostorem $\mathbf{c}$. Prostor $\mathbf{c}$ je dále separabilní.

Důkaz: Jestliže dokážeme uzavřenost $\mathbf{c}$ a $\mathbf{c}_0$, plyne odtud automaticky, že $\mathbf{c}$ i $\mathbf{c}_0$ jsou Banachovy prostory. Ze separability $\mathbf{c}$ plyne i separabilita $\mathbf{c}_0$. Nechť

$$x^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x, \ \ x^{(k)} \in \mathbf{c}\,.$$

Potom $x = \{\alpha_n\} \in \mathbf{l}_\infty$. Zbývá dokázat, že $\{\alpha_n\}$ je konvergentní, tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m, n \ge n_0 \ \ \Rightarrow |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon\,.$$

Poněvadž $x^{(k)} \to x$, platí, že

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbf{N} \ \forall k \ge k_0 \ \ \Rightarrow \ \ \|x^{(k)} - x\| < \varepsilon\,,$$

neboli $|\alpha_n^{(k)} - \alpha_n| < \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbf{N}$. Nyní je

$$|\alpha_n - \alpha_m| \leq |\alpha_n - \alpha_n^{(k)}| + |\alpha_n^{(k)} - \alpha_m^{(k)}| + |\alpha_m^{(k)} - \alpha_m| < 3\varepsilon$$

pro dostatečně veliká k, m, n.

<u>Separabilita $\mathbf{c}$</u>

Označme Y množinu všech prvků $\mathbf{c}$ tvaru

$$y = \{r_1, \ldots, r_n, r, r, \ldots\}\,,$$

kde $r_1, \ldots, r_n, r$ jsou racionální čísla. Potom je Y spočetná množina. Nechť nyní $x = \{\alpha_n\} \in \mathbf{c}$. Pak existuje

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \ \text{ a } \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \ \forall n \geq n_0 \ \text{ je } \ |\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Buď r takové, že

$$|\alpha - r| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ a } \ r_1, \ldots, r_{n_0-1} \ \text{ taková, že } \ |\alpha_j - r_j| < \varepsilon \ \ j = 1, \ldots, n_0 - 1\,.$$

Pro $n \geq n_0$ je

$$|\alpha_n - r| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\alpha - r| < \varepsilon, \ \text{ tedy } \ \|x - y\| < \varepsilon\,.$$

Poznámky: 1. Prostor $\mathbf{l}_\infty^n$ tvoří uzavřený podprostor $\mathbf{c}_0$, jestliže vektory $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ztotožníme s vektory $\mathbf{c}_0$ tvaru $x' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots\}$.

2. Prostory $\mathbf{l}_\infty$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_0$ mají nekonečnou dimensi.

<u>3. Prostor $B(S)$.</u>

Definice: Buď S libovolná množina. Prostorem $B(S)$ nazveme množinu všech omezených skalárních funkcí, definovaných na S s normou

$$\|f\| = \sup_{s\in S} |f(s)|\,.$$

Věta: $B(S)$ tvoří Banachův prostor, jestliže algebraické operace definujeme předpisy:

$$\begin{array}{ll} (f+g)(s) = f(s) + g(s) & \forall f, g \in B(S) \ \ \forall s \in S\,. \\ (\alpha f)(s) = \alpha f(s) & \forall f \in B(S), \forall \alpha \in \mathbf{\Phi} \ \ \forall s \in S. \end{array}$$

$B(S)$ není separabilní, je-li S nekonečná.

Důkaz: Je zřejmé, že $B(S)$ tvoří lineární normovaný prostor. Buď nyní $\{f_n\}$ fundamentální posloupnost v $B(S)$. Potom

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall m, n \geq n_0 \ \text{ je } \ \|f_m - f_n\| < \varepsilon\,,$$

tedy $|f_m(s) - f_n(s)| < \varepsilon \ \ \forall s \in S$. Neboli existuje

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s) \quad \forall s \in S\,.$$

Nyní

$$|f(s)| \leq |f(s) - f_n(s)| + |f_n(s)| < \varepsilon + K_n \quad \forall s \in S\,.$$

Je-li S konečná, na příklad $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, potom je $B(S) = \mathbf{l}_\infty^k$. Je-li však S nekonečná, stačí vzít funkce z $B(S)$, které nabývají pouze hodnot 0 a 1. Množina všech těchto funkcí je nespočetná a pro dvě libovolné různé funkce f, g tohoto typu platí $\|f - g\| = 1$.

Poznámky: 1. Z definice normy v $B(S)$ plyne, že konvergence v $B(S)$ je stejnoměrná konvergence na S.

2. Jak již bylo řečeno v důkazu předchozí věty, je $B(S) = \mathbf{l}_\infty^n$, je-li S konečná a $B(S) = \mathbf{l}_\infty$ pro S spočetnou.

4. Prostor $C(S)$.

Definice: Buď S kompaktní metrický prostor. Prostorem $C(S)$ nazveme množinu všech spojitých skalárních funkcí, definovaných na S s normou

$$\|f\| = \max_{s \in S} |f(s)| .$$

Věta: $C(S)$ tvoří Banachův prostor, jestliže algebraické operace definujeme jako v případě $B(S)$. Je-li

$$S \subset \mathbf{R}^n, \text{ je } C(S)$$

separabilní.

Důkaz: Úplnost $C(S)$ plyne ze skutečnosti, že konvergence v prostoru $C(S)$ je stejnoměrná konvergence na S. Je-li $S \subset \mathbf{R}^n$, je množina všech polynomů v n proměnných s racionálními koeficienty spočetná a hustá v $C(S)$.

5. Prostor $L_p(M)$.

Definice: Buď $M \subset \mathbf{R}^n$ měřitelná množina. O dvou měřitelných funkcích f a g na M řekneme, že jsou ekvivalentní, jestliže

$$f(x) = g(x) \text{ s. v. v } M .$$

Definice: Buď $p \geq 1$, $M \subset \mathbf{R}^n$ měřitelná množina. Potom prostorem $L_p(M)$ nazveme množinu všech ekvivalentních tříd měřitelných funkcí v M takových, že

$$\int_M |f(x)|^p dx < \infty .$$

Normu v $L_p(M)$ definujeme předpisem

$$\|f\| = \left\{ \int_M |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} .$$

Věta: $L_p(M)$ tvoří separabilní Banachův prostor, jestliže algebraické operace definujeme obvyklým způsobem.

Poznámka: Prostor L_p tvoří třídy navzájem ekvivalentních funkcí, ale v dalším budeme používat opět název funkce pro prvky L_p.

Důkaz: Nebudeme provádět detailně. Separabilita L_p plyne z konstrukce Lebesgueova integrálu jako limity jednoduchých μ-integrovatelných funkcí. Jestliže vezmeme jednoduché μ-integrovatelné funkce s racionálními hodnotami, dostaneme spočetnou hustou podmnožinu. Úplnost plyne z vlastností Lebesgueova integrálu.

Zbývá ukázat, že uvedený předpis je skutečně norma. Je-li $\|f\| = 0$, pak $f(x) = 0$ s. v. , neboli f je nulový prvek L_p. Vlastnost $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ je zřejmá. Trojúhelníková nerovnost plyne z Minkowského nerovnosti. Je totiž

$$\|f+g\| = \left\{ \int_M |(f+g)(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_M |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_M |g(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \|f\| + \|g\|.$$

Věta: Prostor $L_2(M)$ tvoří Hilbertův prostor, jestliže definujeme

$$(f,g) = \int_M f \cdot \overline{g} dx.$$

Důkaz: Vlastnosti skalárního součinu jsou zřejmé, jestliže ukážeme, že daný integrál konverguje absolutně. To však plyne z Hölderovy nerovnosti. Je totiž

$$\int_M |f \cdot \overline{g}| dx \leq \left\{ \int_M |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_M |\overline{g(x)}|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \|f\| \cdot \|g\|.$$

6. Prostor $L_\infty(M)$.

Definice: Buď $M \subset \mathbf{R}^n$ měřitelná množina. Prostorem $L_\infty(M)$ rozumíme množinu všech měřitelných funkcí v M, které jsou s. v. konečné v M. Norma v $L_\infty(M)$ je definována předpisem

$$\|f\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in M} |f(x)|, \quad \text{kde} \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x \in M} |f(x)| = \inf_{N;\mu(N)=0} \sup_{x \in M-N} |f(x)|.$$

Věta: $L_\infty(M)$ tvoří Banachův prostor, jestliže algebraické operace definujeme obvyklým způsobem. $L_\infty(M)$ není separabilní, je-li M nekonečná množina.

Důkaz: Důkaz nebudeme provádět, zájemci jej mohou nalézt v textu, věnovaném Lebesgueovu integrálu.

7. Sobolevovy prostory.

Poznámka: Uvažme prostor $L_2(\Omega)$, kde Ω je otevřená omezená podmnožina $\mathbf{R}^n$ s hladkou hranicí. Jestliže uvážíme prostor C^∞ všech funkcí na Ω, které mají spojité parciální derivace všech řádů, je C^∞ hustý podprostor $L_2(\Omega)$, tedy

$$\overline{C^\infty} = L_2(\Omega).$$

Jestliže však změníme normu, dostaneme další podprostory (uzavřené), tedy Hilbertovy prostory.

Označení: Buďte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nezáporná celá čísla, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Potom označíme

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n .$$

Je-li $f(x_1, \ldots, x_n)$ funkce n proměnných, pak označíme

$$D^\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad D^\alpha f \cdot D^\alpha g = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = |\alpha|} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \cdot \frac{\partial^\alpha g}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definice: Buď $k \geq 0$ celé, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ otevřená omezená množina s hladkou hranicí. Symbolem $\mathcal{H}^k$ (resp $\mathcal{H}^k(\Omega)$) označíme množinu všech funkcí $f \in L_2(\Omega)$ takových, že pro $0 \leq |\alpha| \leq k$ existují derivace $D^\alpha f$ a patří do L_2. V $\mathcal{H}^k$ zavedeme skalární součin a normu předpisem

$$(f,g)_k = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha f \cdot \overline{D^\alpha g}\, dx \ , \qquad \|f\|_k = \sqrt{(f,f)_k}\,.$$

Prostor $\mathcal{H}^k$ nazveme Sobolevovým prostorem řádu k.

Věta: $\mathcal{H}^k$ je Hilbertův prostor.

Důkaz: Předepsaný skalární součin splňuje zřejmě všechny vlastnosti, stejně tak norma. Zbývá ukázat, že $\mathcal{H}^k$ je úplný normovaný prostor. Buď $\{f_j\}$ cauchyovská posloupnost v $\mathcal{H}^k$. Potom

$$\|D^\alpha f_j - D^\alpha f_m\|^2 = \int_\Omega |D^\alpha f_j - D^\alpha f_m|^2 dx \leq \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha f_j - D^\alpha f_m|^2 dx = \|f_j - f_m\|_k^2 \underset{j,m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Tedy $\{D^\alpha f_j\}$ je cauchyovská posloupnost v L_2 a konverguje k jistému prvku $f^{(\alpha)} \in L_2$. Tuto limitu budeme považovat za příslušnou derivaci limitní funkce.

Poznámky: 1. V dalším výkladu upřesníme pojem zobecněné nebo distributivní derivace. Potřebujeme k tomu však pojem spojitého lineárního funkcionálu a adjungovaného prostoru.

2. Jestliže se podíváme na definici $\mathcal{H}^k$, platí zřejmě

$$C^\infty \subset \cdots \subset \mathcal{H}^{k+1} \subset \mathcal{H}^k \subset \cdots \subset \mathcal{H}^0 = L_2\,.$$

Navíc platí věta:

Věta: Uzávěr C^∞ v normě $\|\cdot\|_k$ je roven $\mathcal{H}^k$.

Důkaz: Nebudeme provádět.

Příklady: 1. Je-li $\Omega = (a,b)$, pak má sklalární součin v $\mathcal{H}^k$ tvar

$$(f,g)_k = \int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx + \int_a^b f'(x)\cdot\overline{g'(x)}\,dx + \cdots + \int_a^b f^{(k)}(x)\cdot\overline{g^{(k)}(x)}\,dx\,.$$

2. Pro libovolné $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je skalární součin v $\mathcal{H}^1$ tvaru

$$(f,g)_1 = \int_\Omega f\cdot\overline{g}\,dx + \int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\overline{\frac{\partial g}{\partial x_j}}\,dx = \int_\Omega f\cdot\overline{g}\,dx + \int_\Omega (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \overline{g})dx\,.$$

2.3 Zobrazení normovaných prostorů.

Definice: Buďte $\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$ dva lineární vektorové prostory nad týmž tělesem tělesem $\mathbf{\Phi}$. Řekneme, že zobrazení $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ je lineární, jestliže platí:

1. Definiční obor $D(T)$ zobrazení T je podprostor $\mathbf{X}$.
2. $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbf{\Phi},\ \forall x,y \in D(T)\,.$

Lineární zobrazení nazýváme též někdy <u>lineární operátor</u>.

Poznámky: 1. Úplnou indukcí dostaneme, že pro lineární zobrazení platí

$$T(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j T x_j \quad \forall p \in \mathbf{N} \,.$$

2. Je-li $T : D(T) \to \mathbf{Y}$ lineární operátor, pak jeho obor hodnot $R(T)$ je také lineární vektorový prostor (podprostor $\mathbf{Y}$).

Důkaz: Je-li

$$y_1, y_2 \in R(T), \;\; y_1 = Tx_1, \; y_2 = Tx_2 \,,$$

pak

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 = T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in R(T) \,.$$

3. Je-li T lineární operátor, pak T^{-1} existuje právě když $Tx = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$. Existuje-li T^{-1}, je to opět lineární operátor.

Důkaz: Je-li $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$, neboli $x_1 = T^{-1}y_1$, $x_2 = T^{-1}y_2$, potom

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

a tedy

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 T^{-1} y_1 + \alpha_2 T^{-1} y_2 = T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \,.$$

V prostorech nekonečné dimenze je však důležitá otázka spojitosti lineárního zobrazení.

Věta: Lineární zobrazení, které je spojité v jednom bodě svého definičního oboru, je spojité všude.

Důkaz: Buď T spojité v bodě x_0 a nechť $x \in D(T)$ je libovolný bod,

$$x_n \in D(T), \;\; x_n \to x \,.$$

Potom

$$x_n - x + x_0 \to x_0 \,,$$

tedy $T(x_n - x + x_0) \to Tx_0$. Je však

$$T(x_n - x + x_0) = Tx_n - Tx + Tx_0$$

a odtud

$$Tx_n - Tx \to 0, \;\; \text{t.j.} \;\; Tx_n \to Tx \,.$$

Poznámka: Ověření spojitosti T se provádí většinou v bodě $x = 0$.

Definice: Buďte $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ normované prostory, $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ lineární operátor. Řekneme, že T je omezený, jestliže existuje konstanta M tak, že

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in \mathbf{X} \,.$$

Věta: Buďte $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ lineární normované prostory, $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ lineární operátor. Potom je T spojitý právě když je omezený.

Důkaz: 1. Buď T omezený, t. j.

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in \mathbf{X} \,.$$

Potom je T zřejmě spojitý v bodě $x = 0$ a tedy všude.

2. Nechť je obráceně T spojitý v bodě 0. Potom je

$$\|Tx\| < 1 \text{ jakmile } \|x\| < \delta \text{ pro nějaké } \delta > 0\,.$$

Je-li nyní $x \neq 0$ libovolné, pak položme $x_0 = \frac{\delta x}{2\|x\|}$. Poněvadž je

$$\|x_0\| = \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ platí } \|Tx_0\| < 1, \text{ neboli } \|Tx\| \leq \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|$$

a stačí položit $M = \frac{2}{\delta}$.

Věta: Buďte $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ lineární normované prostory. Potom množina všech spojitých lineárních operátorů z $\mathbf{X}$ do $\mathbf{Y}$, kterou značíme $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, tvoří lineární normovaný prostor, jestliže definujeme

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|\,.$$

Je-li $\mathbf{Y}$ B-prostor, je i $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ B-prostor.

Důkaz: Buďte $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $\alpha \in \mathbf{\Phi}$. Potom definujeme $T_1 + T_2$ a αT předpisem

$$(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x\,, \quad (\alpha T)x = T(\alpha x)\,.$$

Odtud plyne, že $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tvoří lineární vektorový prostor.

Ze spojitosti $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ plyne existence konstanty M takové, že

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in \mathbf{X}$$

tedy pro $\|x\| \leq 1$ dostaneme

$$\|Tx\| \leq M \text{ a odtud } \|T\| \leq M < \infty\,.$$

Buď nyní $\|T\| = 0$, neboli

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = 0\,.$$

Odtud plyne, že $Tx = 0$ pro $\|x\| \leq 1$. Je-li $x \neq 0$ libovolné, pak pro

$$x_0 = \frac{x}{2\|x\|} \text{ platí } \|x_0\| \leq 1 \text{ a tedy } 0 = Tx_0 = Tx\,, \text{ neboli } T = 0\,.$$

Poněvadž je

$$\|\alpha Tx\| = |\alpha| \cdot \|Tx\|\,,$$

plyne odtud, že $\|\alpha T\| = |\alpha| \cdot \|T\|$.
Buď $\|x\| \leq 1$. Potom pro trojúhelníkovou nerovnost platí

$$\|(T_1 + T_2)x\| \leq \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$$

a odtud

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(T_1 + T_2)x\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|\,.$$

Odtud plyne, že $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ je normovaný prostor.

Předpokládejme nyní, že $\mathbf{Y}$ je B-prostor a buď $\{T_n\}$ libovolná cauchyovská posloupnost v $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall m, n \geq n_0 \ \Rightarrow \ \|T_n - T_m\| < \varepsilon\,.$$

To však znamená, že pro $\|x\| \leq 1$ platí

$$\|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\|$$

a je-li $x \neq 0$ libovolné, dostaneme, že

$$\|(T_n - T_m)\frac{x}{\|x\|}\| \leq \|T_n - T_m\|\,, \text{ neboli } \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon\|x\|\,.$$

Tedy $\forall x \in \mathbf{X}$ je $\{T_n x\}$ fundamentální posloupnost v $\mathbf{Y}$ a tedy konvergentní v $\mathbf{Y}$. Označme

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x\,.$$

Stačí ukázat, že

$$T \in \mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \text{ a } \|T - T_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

T je lineární, poněvadž

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n\to\infty} \{\alpha_1 T_n x_1 + \alpha_2 T_n x_2\} =$$

$$= \alpha_1 \lim_{n\to\infty} T_n x_1 + \alpha_2 \lim_{n\to\infty} T_n x_2 = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2\,.$$

Z nerovnosti

$$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon\|x\|$$

plyne pro $n \to \infty$, že

$$\|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon\|x\|\,,$$

tedy $T - T_m$ je omezené zobrazení a také

$$T = (T - T_m) + T_m\,,$$

neboli $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Z nerovnosti

$$\|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

vyplývá, že $\|T - T_m\| \leq \varepsilon$, tedy

$$T_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} T$$

a $\mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ je B-prostor.

Poznámka: Normu lineárního operátoru je možno vyjádřit jedním z následujících způsobů:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|\,; \quad \|T\| = \inf\{M; \|Tx\| \leq M\|x\|\}\,;$$
$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\,; \quad \|T\| = \sup_{x\neq 0} \tfrac{\|Tx\|}{\|x\|}\,.$$

Důkaz tohoto tvrzení je ponechán do cvičení.

Věta: Buď $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ lineární operátor. Potom T^{-1} existuje a je spojitý právě když existuje konstanta $m > 0$ taková, že

$$m\|x\| \leq \|Tx\| \;\; \forall x \in \mathbf{X}\,.$$

Důkaz: 1. Buď $Tx = 0$. Potom $x = 0$ a T^{-1} existuje. Je-li $y = Tx$, pak

$$x = T^{-1}y \text{ a tedy } m\|T^{-1}y\| \leq \|Tx\|\,,$$

neboli

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$$

a T^{-1} je spojitý. Zároveň platí, že

$$\|T^{-1}\|^{-1} = \sup\{m; m\|x\| \leq \|Tx\|\} .$$

2. Buď T^{-1} spojitý, neboli

$$\|T^{-1}y\| \leq M\|y\| , \text{ a tedy } \frac{1}{M}\|x\| \leq \|Tx\| .$$

2.4 Hahn-Banachova věta.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ lineární normovaný prostor nad tělesem $\mathbf{\Phi}$. Potom B-prostor $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{\Phi})$ nazýváme adjungovaným nebo duálním prostorem k prostoru $\mathbf{X}$ a značíme $\mathbf{X}^*$. Každý prvek $x^* \in \mathbf{X}^*$ nazýváme lineární formou nebo lineárním funkcionálem na $\mathbf{X}$.

Poznámka: V dalším se podíváme na vlastnosti adjungovaného prostoru a otázky rozšiřování lineárního funkcionálu.

Definice: Buď $\mathbf{X}$ lineární prostor nad tělesem $\mathbf{\Phi}$ $A \subset \mathbf{X}$ podmnožina. Řekneme, že A je konvexní, jestliže

$$\forall\, x, y \in A \text{ platí } \alpha x + (1-\alpha)y \in A \text{ pro } \alpha \in \langle 0, 1\rangle .$$

O zobrazení $p : \mathbf{X} \to \mathbf{\Phi}$ řekneme, že je konvexní funkcionál (nebo Minkowského funkcionál), jestliže platí

$$\begin{array}{lll} 1. & p(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbf{X} , \\ 2. & p(x+y) \leq p(x) + p(y) & \forall x, y \in \mathbf{X} , \\ 3. & p(\alpha x) = \alpha p(x) & \forall x \in \mathbf{X},\ \forall \alpha \geq 0 . \end{array}$$

Poznámky: 1. Příkladem konvexního funkcionálu je norma (pokud je na daném lineárním prostoru $\mathbf{X}$ definována).

2. Je-li A konvexní podmnožina vektorového prostoru $\mathbf{X}$ taková, že $0 \in A$, s další vlastností

$$\forall x \in \mathbf{X}\ \exists \alpha \in \mathbf{\Phi} \text{ tak, že } \alpha x \in A,$$

pak se ukazuje, že

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0;\ \alpha^{-1}x \in A\}$$

je konvexní funkcionál.

! Věta: (Hahn-Banachova)

Buď $\mathbf{X}$ lineární prostor nad tělesem $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{Y}$ jeho podprostor. Nechť p je konvexní funkcionál na $\mathbf{X}$, f lineární funkcionál, definovaný na $\mathbf{Y}$ takový, že

$$|f(y)| \leq p(y)\ \ \forall y \in \mathbf{Y} .$$

Potom existuje lineární funkcionál F, definovaný na $\mathbf{X}$ tak, že

$$F(y) = f(y)\ \ \forall y \in \mathbf{Y} ; \qquad |F(x)| \leq p(x)\ \ \forall x \in \mathbf{X} .$$

Důkaz: Důkaz vyžaduje základní seznámení s částečně uspořádanými množinami a nebudeme jej provádět. Zájemci o důkaz se mohou podívat do některé ze standardních monografií z funkcionální analýzy nebo si počkat na inovovanou verzi.

Poznámky: 1. Hahn-Banachova má důležité aplikace v normovaných prostorech, i když sama platí i v obecnějších prostorech bez normy.

2. Je-li $\mathbf{X}$ lineární normovaný prostor s prvky $x, y, \dots$, $\mathbf{X}^*$ jeho adjungovaný (duální) prostor s prvky $x^*, y^*, \dots$, pak hodnotu $x^*(x)$ budeme obvykle značit $<x, x^*>$. Je to totiž t. zv. bilineární forma, tedy lineární jak v x, tak v x^*.

Věta: Buď $\mathbf{X}$ normovaný prostor, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ podprostor. Potom ke každému $y^* \in \mathbf{Y}^*$ existuje $x^* \in \mathbf{X}^*$ tak, že

$$<y, y^*> = <y, x^*> \ \forall y \in \mathbf{Y}; \qquad \|x^*\| = \|y^*\| .$$

Důkaz: Poněvadž je $y^* \in \mathbf{Y}^*$, platí pro $y \in \mathbf{Y}$

$$|<y, y^*>| \leq \|y\| \cdot \|y^*\| .$$

Definujme nyní funkcionál

$$p(x) = \|y^*\| \cdot \|x\| \ \text{ pro } \ \forall x \in \mathbf{X} .$$

Je zřejmé, že $p(x)$ je konvexní funkcionál a dále $\forall y \in \mathbf{Y}$ platí

$$|<y, y^*>| \leq p(y) .$$

Podle Hahn-Banachovy věty existuje funkcionál $x^* \in \mathbf{X}$, který je rozšířením y^* a dále

$$\forall x \in \mathbf{X} \ \text{ je } \ |<x, x^*>| \leq p(x) = \|y^*\| \cdot \|x\| .$$

Tedy $\|x^*\| \leq \|y^*\|$. Poněvadž je x^* rozšířením y^*, nemůže být $\|x^*\| < \|y^*\|$.

Věta: Buď $\mathbf{X}$ lineární normovaný prostor, $x_0 \in \mathbf{X}$ libovolný vektor. Potom existuje $x^* \in \mathbf{X}^*$ tak, že

$$\|x^*\| = 1 , \quad <x_0, x^*> = \|x_0\| .$$

Důkaz: Položme $\mathbf{Y} = [\{x_0\}]$, neboli $\mathbf{Y} = \{\alpha x_0\}$, $\alpha \in \mathbf{\Phi}$ a definujme $y^* \in \mathbf{Y}^*$ předpisem $<\alpha x_0, y^*> = \alpha \cdot \|x_0\|$. y^* je zřejmě spojitý lineární funkcionál, pro nějž je

$$|<x, y^*>| = |\alpha| \cdot \|x_0\| = \|x\| , \ \text{ tedy } \ \|y^*\| = 1 .$$

Nyní stačí y^* rozšířit podle předchozí věty na $x^* \in \mathbf{X}^*$.

Důsledky: 1. Je-li $\mathbf{X} \neq \{0\}$, je i $\mathbf{X}^* \neq \{0\}$.

2. Jestliže pro nějaké $x \in \mathbf{X}$ platí

$$<x, x^*> = 0 \ \forall x^* \in \mathbf{X}^*, \ \text{ pak } \ x = 0 .$$

3. Jsou-li $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$, $x_1 \neq x_2$, pak existuje

$$x^* \in \mathbf{X}^* \ \text{ tak, že } \ <x_1, x^*> \neq <x_2, x^*> .$$

Věta: Buď $\mathbf{Y}$ podprostor normovaného prostoru $\mathbf{X}$ a předpokládejme, že pro vektor $x_1 \in \mathbf{X}$ platí $\mathbf{d}(x_1, \mathbf{Y}) = d > 0$. Potom existuje $x^* \in \mathbf{X}^*$ tak, že

$$\|x^*\| = 1 , \ <x_1, x^*> = d , \ <\mathbf{Y}, x^*> = 0 .$$

Důkaz: Buď $\mathbf{Z} = [\mathbf{Y} \cup \{x_1\}]$. Každé $z \in \mathbf{Z}$ lze tedy psát ve tvaru $z = y + \alpha x_1$ $(y \in \mathbf{Y})$. Definujme nyní $z^* \in \mathbf{Z}^*$ předpisem $<z, z^*> = \alpha \cdot d$. Platí

$$<y, z^*> = 0 \ \text{ (je } \ \alpha = 0) \ \forall y \in \mathbf{Y} , \ <x_1, z^*> = d .$$

Ukážeme nyní, že $\|z^*\| = 1$ a rozšíříme jej na $x^* \in \mathbf{X}^*$. Pro $\alpha \neq 0$ platí

$$\|z\| = \|y + \alpha x_1\| = \| - \alpha(-\frac{y}{\alpha} - x_1)\| = |\alpha| \cdot \| - \frac{y}{\alpha} - x_1\| \,.$$

Poněvadž $-\frac{y}{\alpha} \in \mathbf{Y}$ a

$$d = \mathbf{d}(x_1, \mathbf{Y}) = \inf_{y \in \mathbf{Y}} \|y - x_1\| \,, \text{ je } \| - \frac{y}{\alpha} - x_1\| \geq d$$

a tedy

$$\|z\| \geq |\alpha| \cdot d \text{ neboli } |<z, z^*>| = |\alpha| \cdot d \leq \|z\| \;\; \forall z \in \mathbf{Z}$$

a odtud $\|z^*\| \leq 1$. Dále

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists y \in \mathbf{Y} \text{ tak, že } \|y - x_1\| < d + \varepsilon$$

a položme $z = \frac{y - x_1}{\|y - x_1\|}$. Je zřejmé, že $\|z\| = 1$ a dále

$$|<z, z^*>| = \frac{1}{\|y - x_1\|} \cdot |<y - x_1, z^*>| = \frac{d}{\|y - x_1\|} > \frac{d}{d + \varepsilon} \,.$$

Odtud plyne, že $\|z^*\| > \frac{d}{d+\varepsilon}$ a poněvadž $\varepsilon > 0$ je libovolné, platí $\|z^*\| \geq 1$. Nyní stačí z^* rozšířit na celý prostor $\mathbf{X}$.

Poznámka: Vlastnosti prostoru $\mathbf{X}^*$ mají vliv též na prostor $\mathbf{X}$. Platí totiž:

! Věta: Buď $\mathbf{X}$ normovaný prostor. Je-li $\mathbf{X}^*$ separabilní, je i $\mathbf{X}$ separabilní.

Důkaz: Označme

$$S^* = \{x^* \in \mathbf{X}^*; \|x^*\| = 1\} \,.$$

Poněvadž každá podmnožina separabilního prostoru je separabilní, musí být S^* separabilní a buď $x_1^*, x_2^*, \ldots$ hustá podmnožina S^*. Poněvadž je $\|x_n^*\| = 1$, platí, že

$$\forall n \in \mathbf{N} \;\; \exists x_n \in \mathbf{X} \text{ tak, že } \|x_n\| = 1 \,, \;\; |<x_n, x_n^*>| > \frac{1}{2} \,.$$

Položme

$$\mathbf{Y} = \overline{[\{x_1, x_2, \ldots\}]}$$

a předpokládejme, že $\mathbf{Y} \neq \mathbf{X}$. Pak existuje $x_0 \in \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ takové, že $\mathbf{d}(x_0, \mathbf{Y}) = d > 0$. Tedy existuje $x^* \in \mathbf{X}^*$ tak, že

$$\|x^*\| = 1 \,, \;\; <x_0, x^*> = d \,, \;\; <\mathbf{Y}, x^*> = 0 \,.$$

Neboli také $<x_n, x^*> = 0 \;\; \forall n \in \mathbf{N}$. Dále

$$<x_n, x_n^*> = <x_n, x_n^* - x^*> + <x_n, x^*> \,, \;\; \text{tedy } |<x_n, x_n^*>| = |<x_n, x_n^* - x^*>| \leq \|x_n^* - x^*\| \,.$$

Poněvadž je však $|<x_n, x_n^*>| > \frac{1}{2}$, dostáváme spor se skutečností, že množina $\{x_n^*\}$ je hustá v S^*. Platí tedy, že $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ a poněvadž stačí uvažovat jen racionální lineární kombinace prvků $\{x_n\}$, dostaneme, že X je separabilní.

Poznámky: 1. Obrácené tvrzení neplatí, tedy je-li X separabilní, nemusí být X^* separabilní.

2. Je-li X normovaný lineární prostor, je X^* B-prostor a můžeme vytvořit prostor $X^{**} = (X^*)^*$. Existuje velmi úzký vztah mezi prostorem X a X^{**}.

Definice: Buďte $\mathbf{X}\,, \mathbf{Y}$ lineární normované prostory. Jestliže existuje <u>prosté spojité lineární zobrazení</u> T prostoru $\mathbf{X}$ na prostor $\mathbf{Y}$ [t. j. $T\mathbf{X} = \mathbf{Y}$], řekneme, že $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jsou <u>izomorfní</u>. Je-li navíc $\|Tx\| = \|x\| \;\; \forall x \in \mathbf{X}$, řekneme, že T je <u>izometrický izomorfismus</u>.

Definice: Duď X lineární normovaný prostor, X^{**} prostor adjungovaný k B-prostoru X^*. Zobrazení $\kappa : x \to \hat{x}$ prostoru X do X^{**}, definované rovností

$$<x^*, \hat{x}> = <x, x^*> \ \forall x^* \in \mathbf{X}^*$$

nazýváme přirozeným (kanonickým) vnořením X do X^{**}. Obor hodnot zobrazení κ označíme $\widehat{\mathbf{X}}$.

Věta: Přirozené vnoření lineárního normovaného prostoru $\mathbf{X}$ do $\mathbf{X}^{**}$ je izometrický izomorfismus $\mathbf{X}$ a $\widehat{\mathbf{X}}$.

Důkaz: 1. κ je lineární zobrazení. Pro $x^* \in \mathbf{X}^*$ platí

$$<x^*, \kappa(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)> = <x^*, \alpha_1 \widehat{x_1 + \alpha}_2 x_2> = <\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, x^*> =$$

$$= \alpha_1 <x_1, x^*> + \alpha_2 <x_2, x^*> = \alpha_1 <x^*, \widehat{x_1}> + \alpha_2 <x^*, \widehat{x_2}> = <x^*, \alpha_1 \widehat{x_1} + \alpha_2 \widehat{x_2}> =$$

$$= <x^*, \alpha_1 \kappa(x_1) + \alpha_2 \kappa(x_2)>, \ \text{ tedy } \ \kappa(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \kappa(x_1) + \alpha_2 \kappa(x_2)\,.$$

2. κ je izometrické zobrazení. Platí

$$|<x^*, \hat{x}>| = |<x, x^*>| \le \|x\| \cdot \|x^*\|$$

a odtud plyne, že $\|\hat{x}\| \le \|x\|$. Obráceně podle Hahn-Banachovy věty

$$\forall x \in \mathbf{X} \ \exists x_0^* \in \mathbf{X}^*, \|x_0^*\| = 1 \ \text{ tak, že } \ <x, x_0^*> = \|x\|\,.$$

Tedy platí

$$\|\hat{x}\| \ge |<x_0^*, \hat{x}>| = |<x, x_0^*>| = \|x\|\,.$$

Poznámka: Je-li $\mathbf{X}$ B-prostor, je i $\widehat{\mathbf{X}}$ B-prostor, tedy uzavřený podprostor $\mathbf{X}^{**}$.

Definice: Řekneme, že B-prostor X je reflexivní, jestliže $\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^{**}$ [tedy $\kappa(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{**}$].

Poznámka: V definici reflexivity figuruje přirozené vnoření $\mathbf{X}$ do $\mathbf{X}^{**}$. Jinak existují příklady izometricky izomorfního zobrazení $\mathbf{X}$ na $\mathbf{X}^{**}$ a přesto $\mathbf{X}$ není reflexivní.

2.5 Příklady adjungovaných prostorů.

1. Prostory $\mathbf{l}_p^*$.

Věta: Prostory $\mathbf{l}_1^*$ a $\mathbf{l}_\infty$ jsou izometricky izomorfní. Tedy

$$\forall f \in \mathbf{l}_1^* \ \exists u \in \mathbf{l}_\infty \ \ u = \{\xi_j\}_{j=1}^\infty \ \text{ tak, že } \ \forall x \in \mathbf{l}_1 \ \ x = \{\alpha_j\}_{j=1}^\infty$$

platí

$$<x, f> = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j \xi_j\,; \ \ \|f\| = \|u\|\,.$$

Obráceně každý vektor $u \in \mathbf{l}_\infty$ reprezentuje funkcionál $f \in \mathbf{l}_1^*$.

Důkaz: Platí

$$|<x, f>| \le \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j \xi_j| \le \sup_j |\xi_j| \sum_{j=1}^\infty |\alpha_j| = \|u\| \cdot \|x\|\,.$$

Tedy daný předpis definuje spojitý lineární funkcionál na $\mathbf{l}_1$ takový, že $\|f\| \le \|u\|$. Nyní dokážeme, že platí i obrácená nerovnost a též, že jiné spojité lineární funkcionály neexistují kromě výše popsaných. Označme $e_k = \{0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots\}$, kde jednička je na k-té pozici. Potom je $e_k \in \mathbf{l}_1$ a každé $x \in \mathbf{l}_1$ $x = \{\alpha_j\}$ je možno zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j .$$

Je totiž

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\| = \|\{0, 0, \cdots, 0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \cdots\}\| = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\alpha_i| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Buď nyní $f \in \mathbf{l}_1^*$ libovolný funkcionál a označme $\xi_k = <e_k, f>$. Potom platí

$$<x, f> = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k <e_k, f> = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$$

a přitom

$$|\xi_k| = |<e_k, f>| \le \|e_k\| \cdot \|f\| = \|f\| .$$

Neboli $\|u\| = \sup\limits_k |\xi_k| \le \|f\|$, tudíž

$$u \in \mathbf{l}_\infty \;\text{ a }\; \|u\| = \|f\| .$$

Věta: Buď $p > 1$, q takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom je $\mathbf{l}_p^*$ izometricky izomorfní s prostorem $\mathbf{l}_q$. Tedy

$$\forall f \in \mathbf{l}_p^* \;\; \exists u \in \mathbf{l}_q \;\; u = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ tak, že } \forall x \in \mathbf{l}_p \;\; x = \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$$

platí

$$<x, f> = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi_j \, ; \;\; \|f\| = \|u\| .$$

Jiné spojité funkcionály neexistují.

Důkaz: Podle Hölderovy nerovnosti platí

$$|<x, f>| \le \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j \xi_j| \le \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^q \right\}^{\frac{1}{q}} = \|x\| \cdot \|u\| .$$

Odtud plyne, že f je spojitý lineární funkcionál a $\|f\| \le \|u\|$. Obrácenou nerovnost odvodíme analogicky jako v předchozí větě.

Poznámky: 1. Prostory $\mathbf{l}_p$ jsou pro $p > 1$ reflexivní, $\mathbf{l}_1$ a $\mathbf{l}_\infty$ reflexivní nejsou.

2. Každý prvek $x \in \mathbf{l}_1$ reprezentuje funkcionál na $\mathbf{l}_\infty$. Zdaleka to však nejsou všechny spojité funkcionály.

2. Prostory $\mathbf{c}_0^*$ a $\mathbf{c}^*$.

Věta: Prostory $\mathbf{c}_0^*$ a $\mathbf{l}_1$ jsou izometricky izomorfní. Tedy

$$\forall f \in \mathbf{c}_0^* \;\; \exists u \in \mathbf{l}_1 , \;\; u = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ tak, že } \forall x \in \mathbf{c}_0 , \;\; x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$$

platí

$$<x, f> = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k , \;\; \|f\| = \|u\| .$$

Jiné spojité funkcionály neexistují.

Důkaz: Zřejmě platí

$$|<x,f>| \le \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k| \le \sup_k |\alpha_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\| \cdot \|u\| \,.$$

Odtud plyne, že $\|f\| \le \|u\|$. Obráceně označme

$$e_k = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\} \text{ pro } k = 1, 2, \dots \text{ a } x^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\overline{\xi_k}}{|\xi_k|} \cdot e_k \,, \text{ kde } \xi_k = <e_k, f> .$$

Potom je

$$x^{(N)} \in \mathbf{c}_0 \,, \ \|x^{(N)}\| \le 1 \text{ a platí } <x^{(N)}, f> = \sum_{k=1}^{N} \frac{\overline{\xi_k}}{|\xi_k|} <e_k, f> = \sum_{k=1}^{N} |\xi_k| = \|x^{(N)}\| \,.$$

Odtud plyne, že $\|f\| \ge \|u\|$, tedy $\|f\| = \|u\|$.

Buď nyní $f \in \mathbf{c}_0^*$ libovolný funkcionál. Musíme ukázat, že je výše uvedeného tvaru. Je-li

$$x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbf{c}_0 \,, \text{ potom } x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \,.$$

Je totiž

$$\|x - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k\| = \sup_{n>N} |\alpha_k| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \,.$$

Poněvadž f je spojitý, platí

$$<x, f> = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k <e_k, f> = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$$

a stačí dokázat, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$ konverguje. Položíme-li opět

$$x^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\overline{\xi_k}}{|\xi_k|} \cdot e_k \,, \text{ platí } x^{(N)} \in \mathbf{c}_0 \,, \ \|x^{(N)}\| \le 1$$

$$\text{a } \sum_{k=1}^{N} |\xi_k| = \sum_{k=1}^{N} |<e_k, f>| = \sum_{k=1}^{N} \frac{\overline{\xi_k}}{|\xi_k|} <e_k, f> = <x^{(N)}, f> \le \|f\| \,,$$

tedy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty$.

Věta: Prostory $\mathbf{c}^*$ a $\mathbf{l}_1$ jsou izometricky izomorfní. Tedy

$$\forall f \in \mathbf{c}^* \ \exists u \in \mathbf{l}_1 \,, \ u = \{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \text{ tak, že } \forall x \in \mathbf{c} \,, \ x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$$

platí

$$< x, f> = \xi_0 \lim_{n \to \infty} \alpha_n + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \,, \ \|f\| = \|u\| \,.$$

Jiné spojité funkcionály neexistují.

Důkaz: Provede se analogicky jako v pro případ $\mathbf{c}_0^*$.

3. Prostory $\mathbf{L}_p^*$.

Věta: Buď $p > 1$. Potom jsou prostory $\mathbf{L}_p^*$ a $\mathbf{L}_q$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ izometricky izomorfní. Tedy

$$\forall f \in \mathbf{L}_p^* \ \exists u \in \mathbf{L}_q \text{ tak, že } \forall x \in \mathbf{L}_p \text{ platí } <x, f> = \int_M x(t) u(t) dt \,; \ \|f\| = \|u\| \,.$$

Žádné jiné spojité lineární funkcionály neexistují.

Důkaz: Podle Hölderovy nerovnosti platí

$$|<x,f>| \le \int\limits_M |x(t)u(t)|dt \le \left\{ \int\limits_M |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int\limits_M |u(t)|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} = \|x\| \cdot \|u\|$$

a odtud plyne, že f je skutečně spojitý lineární funkcionál a $\|f\| \le \|u\|$. Zbytek důkazu nebudeme provádět.

Věta: Buď $f \in \mathbf{L}_1^*(M)$. potom existuje prvek $u \in \mathbf{L}_\infty(M)$ tak, že

$$\forall x \in \mathbf{L}_1 \text{ platí } <x,f> = \int\limits_M x(t)u(t)dt\,; \;\; \|f\| = \|u\|\,.$$

Důkaz: Nebudeme provádět.

4. Prostor $\mathbf{C}^*(a,b)$.

Poznámka: Pro odvození obecného tvaru spojitého lineárního funkcionálu na prostoru $\mathbf{C}(a,b)$ budeme potřebovat pojem Riemann-Stieltjesova integrálu a s tím spojený pojem funkce s konečnou variací. To nyní stručně zavedeme.

Definice: Buď $\langle a,b\rangle$ omezený interval. Potom dělením D_n tohoto intervalu rozumíme konečnou posloupnost bodů

$$D_n: \;\; a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \;\; (n \in \mathbf{N})\,.$$

Normou dělení D_n, kterou budeme značit $\nu(D_n)$ rozumíme číslo

$$\nu(D_n) = \max_{i=1,2,\ldots,n} (t_i - t_{i-1})\,.$$

Definice: Řekneme, že funkce u, definovaná na intervalu $\langle a,b\rangle$ má na tomto intervalu konečnou variaci, jestliže je číslo $V(u)$ konečné, kde

$$V(u) = \sup_{D_n} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|\,,$$

a suprémum bereme přes všechna dělení intervalu $\langle a,b\rangle$.

Poznámka: Není těžké ukázat, že všechny funkce s konečnou variací na intervalu $\langle a,b\rangle$ tvoří vektorový prostor. Tento prostor je navíc normovaný, jestliže zavedeme $\|u\| = |u(a)| + V(u)$. Budeme jej v dalším značit $\mathbf{BV}(a,b)$.

Definice: Buď $x \in \mathbf{C}(a,b)\,,\;\; u \in \mathbf{BV}(a,b)$. Potom integrálním součtem, příslušným funkcím $x\,,u$ a dělení D_n rozumíme výraz

$$S(x,u;D_n) = \sum_{j=1}^{n} x(t_j)[u(t_j) - u(t_{j-1})]\,.$$

Poznámky: 1. Ukazuje se, že existuje číslo $\mathcal{I}$ tak, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že jakmile $\nu(D_n) < \delta$, potom

$$|\mathcal{I} - S(x,u;D_n)| < \varepsilon\,.$$

Toto číslo budeme nazývat Riemann-Stieltjesovým integrálem a značit

$$\mathcal{I} = \int_a^b x(t)du(t)\,.$$

2. Z předchozí poznámky plyne, že $\int_a^b x(t)du(t)$ lze psát jako limitu posloupnosti integrálních součtů. Tedy

$$\int_a^b x(t)du(t) = \lim_{n\to\infty} S(x,u;D_n)\,, \text{ kde } \nu(D_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

3. Je-li $u(t) = t$, dostaneme definici Riemannova integrálu.

4. Jestliže má funkce u spojitou derivaci, potom platí

$$\int_a^b x(t)du(t) = \int_a^b x(t)u'(t)dt\,.$$

5. Riemann-Stieltjesův integrál je lineární zobrazení jak v prvém, tak ve druhém argumentu. Tedy jsou-li $x_1\,, x_2 \in \mathbf{C}(a,b)\,,\ \alpha_1\,,\alpha_2 \in \mathbf{\Phi}$, potom

$$\int_a^b [\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]du(t) = \alpha_1 \int_a^b x_1(t)du(t) + \alpha_2 \int_a^b x_2(t)du(t)\,.$$

Analogicky pro $u_1\,, u_2 \in \mathbf{BV}(a,b)\,,\ \beta_1\,,\beta_2 \in \mathbf{\Phi}$ platí

$$\int_a^b x(t)d[\beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t)] = \beta_1 \int_a^b x(t)du_1(t) + \beta_2 \int_a^b x(t)du_2(t)\,.$$

6. Pro Riemann-Stieltjesův integrál platí odhad

$$\left| \int_a^b x(t)du(t) \right| \le \max_{t\in\langle a,b\rangle} |x(t)| \cdot V(u)\,.$$

Tento odhad platí totiž pro každý integrální součet a tedy i pro integrál.

7. V důkazu následující věty budeme potřebovat pojem znaménka pro libovolné kompklexní číslo. Definujeme

$$\operatorname{sgn}\xi = \frac{\overline{\xi}}{|\xi|} \text{ pro } \xi \neq 0\,,\ \operatorname{sgn} 0 = 0\,.$$

Platí $\xi \cdot \operatorname{sgn}\xi = |\xi|$.

! Věta: (Rieszova věta o reprezentaci funkcionálu na $\mathbf{C}(a,b)$)
Každý omezený lineární funkcionál $f \in \mathbf{C}^*(a,b)$ je tvaru

$$<x,f> = \int_a^b x(t)du(t)\,, \text{ kde } x \in \mathbf{C}(a,b)\,,\ u \in \mathbf{BV}(a,b) \text{ a } \|f\| = V(u)\,.$$

Důkaz: 1. Je zřejmé, že daný předpis definuje spojitý lineární funkcionál na $\mathbf{C}(a,b)$. Platí totiž

$$|<x,f>| = |\int_a^b x(t)du(t)| \le \max_{t\in\langle a,b\rangle} |x(t)| \cdot V(u)$$

podle poznámky 6 a odtud $\|f\| \le V(u)$.

2. Obráneně buď $f \in \mathbf{C}^*(a,b)$ libovolný funkcionál. Poněvadž $\mathbf{C}(a,b)$ je uzavřený podprostor $\mathbf{B}(a,b)$, existuje podle Hahn-Banachovy věty funkcionál $F \in \mathbf{B}^*(a,b)$ tak, že

$$<x,f> = <x,F> \ \ \forall x \in \mathbf{C}(a,b) \ \text{ a } \ \|F\| = \|f\|\,.$$

Potřebnou funkci u nyní sestrojíme. Buď

$$\varphi_t(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \qquad t \in \langle a,t\rangle\,, \\ 0 & \text{jinde}\,. \end{cases}$$

Funkci φ_t nazýváme charakteristickou funkcí intervalu $\langle a,t\rangle$. Je zřejmé, že $\varphi_t \in \mathbf{B}(a,b)$. Definujme funkci u následujícím způsobem

$$u(a) = 0\,; \ \ u(t) = <\varphi_t, F> \ \text{ pro } \ t \in (a,b\rangle\,.$$

Ukážeme, že $V(u) \le \|f\|$. Buď

$$D_n: \ \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \ \text{ a označme } \ \alpha_k = \operatorname{sgn}\{u(t_k) - u(t_{k-1})\}\,.$$

Potom platí

$$\sum_{k=1}^n |u(t_k) - u(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \alpha_k\{u(t_k) - u(t_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \alpha_k <\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}, F> =$$

$$= <\sum_{k=1}^n \alpha_k\{\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}\}, F> \ \le \ \|F\| \cdot \left\|\sum_{k=1}^n \alpha_k\{\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}\}\right\|\,.$$

Poněvadž pro funkci $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k\{\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}\}$ platí $|\alpha_k| = 1$ a $\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}$ nabývá pouze hodnot 0 a ± 1, dostaneme, že

$$\left\|\sum_{k=1}^n \alpha_k\{\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}\}\right\| = 1 \ \text{ a tedy } \ \sum_{k=1}^n |u(t_k) - u(t_{k-1})| \le \|F\| = \|f\|\,.$$

Odtud přechodem k suprému na levé straně dostáváme $V(u) \le \|f\|$.

Nyní ukážeme, že pro tuto funkci u platí

$$<x,f> = \int_a^b x(t)du(t) \quad \forall x \in \mathbf{C}(a,b)\,.$$

Buď $x \in \mathbf{C}(a,b)$ libovolný prvek. Potom $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tak, že jakmile $|t' - t''| < \delta$, potom $|x(t') - x(t'')| < \varepsilon$ [$x(t)$ je stejnoměrně spojitá]. Buď nyní D_n takové dělení intervalu $\langle a,b\rangle$, že $\nu(D_n) < \delta$ a definujme schodovitou funkci $x^{(\varepsilon)}$ předpisem

$$x^{(\varepsilon)}(a) = x(a)\,; \ \ x^{(\varepsilon)}(t) = x(t_k) \ \text{ pro } \ t_{k-1} < t \le t_k \ \ (k = 1,2,\ldots,n)\,.$$

Je zřejmé, že $x^{(\varepsilon)}(t)$ lze zapsat ve tvaru

$$x^{(\varepsilon)}(t) = \sum_{k=1}^n x(t_k)\{\varphi_{t_k} - \varphi_{t_{k-1}}\}\,.$$

Dále platí, že

$$|x(t) - x^{(\varepsilon)}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in \langle a,b\rangle\,, \ \text{ tedy } \ \|x - x^{(\varepsilon)}\| < \varepsilon \ \text{ a } \ x^{(\varepsilon)} \in \mathbf{B}(a,b)\,.$$

Aplikací funkcionálu F na $x^{(\varepsilon)}$ dostaneme

$$<x^{(\varepsilon)}, F> = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\{<\varphi_{t_k}, F> - <\varphi_{t_{k-1}}, F>\} = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\{u(t_k) - u(t_{k-1})\}\,.$$

To však představuje integrální součet integrálu $\int_a^b x(t)du(t)$. Jestliže vezmeme dostatečně jemné dělení D_n intervalu $\langle a, b\rangle$, dostaneme

$$\left| <x^{(\varepsilon)}, F> - \int_a^b x(t)du(t) \right| < \varepsilon\,.$$

Současně však platí

$$|<x, F> - <x^{(\varepsilon)}, F>| \le \|F\| \cdot \|x - x^{(\varepsilon)}\| \le \|F\| \cdot \varepsilon\,.$$

Následně

$$|<x, F> - \int_a^b x(t)du(t)| \le |<x, F> - <x^{(\varepsilon)}, F>| \, + \, |<x^{(\varepsilon)}, F> - \int_a^b x(t)du(t)| < \varepsilon(1 + \|F\|)\,.$$

Poněvadž ε bylo libovolné, plyne odtud, že $<x, f> = \int_a^b x(t)du(t)\,.$

Poznámky: 1. Funkce u v předchozí větě není určena jednoznačně. Jestliže chceme dosáhnout jednoznačnosti vyjádření, musíme funkce z $\mathbf{BV}(a, b)$ normalizovat tak, že budeme uvažovat pouze takové funkce $u \in \mathbf{BV}(a, b)$, pro něž $u(a) = 0$ a $u(t+) = u(t)$ pro $t \in \langle a, b)$, kde $u(t+) = \lim\limits_{\tau \to t_+} u(\tau)\,.$

2. Čtenář, který se již dříve seznámil se základy teorie Lebesgueova integrálu, může dané integrály považovat za Lebesgue-Stieltjesovy. u je sice obecná komplexní funkce, ale lze ji zapsat ve tvaru $u = u_1 + iu_2$, kde $V(u_1)$ a $V(u_2)$ jsou konečné. Podle Jordanova rozkladu lze u_i vyjádřit ve tvaru $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, kde $u_i^{(k)}$ $(i, k = 1, 2)$ jsou nerostoucí funkce, tedy mají konečnou variaci. Daný integrál lze napsat ve tvaru

$$\int_a^b x(t)du(t) = \int_a^b x(t)du_1^{(1)}(t) - \int_a^b x(t)du_1^{(2)}(t) + i\left\{\int_a^b x(t)du_2^{(1)}(t) - \int_a^b x(t)du_2^{(2)}(t)\right\}$$

a míry, podle kterých se integruje, jsou nezáporné.

5. Prostory distribucí.

Definice: Reálnou funkci p, definovanou na lineárním prostoru $\mathbf{X}$, nazveme pseudonormou, jestliže platí:

$$p(x + y) \le p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in \mathbf{X}\,,$$
$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \qquad \forall \alpha \in \mathbf{\Phi}\ \ \forall x \in \mathbf{X}\,.$$

Poznámky: 1. Pro každou pseudonormu platí $p(0) = 0\,,\ \ p(x) \ge 0\ \ \forall x \in \mathbf{X}\,.$

Důkaz: Platí

$p(x) = p(x - y + y) \le p(x - y) + p(y)$ a též $p(y) = p(y - x + x) \le p(y - x) + p(x) = p(x - y) + p(x)\,.$

Odtud plyne, že $p(x - y) \ge |p(x) - p(y)|$, specielně tedy $p(x) \ge 0$.

2. Pro to, aby pseudonorma byla normou, je třeba dodat požadavek $p(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0\,.$

3. Jestliže nemáme v lineárním vektorovém prostoru $\mathbf{X}$ k disposici normu, můžeme definovat topologii pomocí systému pseudonorem, jak ukážeme později.

Definice: Buď $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ funkce. Potom jejím nosičem, který označíme $\operatorname{supp} f$ nazveme množinu

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}\,.$$

Poznámka: Při vyšetřování prostorů hladších funkcí se dostaneme přirozeným způsobem k využití pseudonorem, jestliže vyžadujeme, aby na konvergenci v daném prostoru měly vliv i vyžší derivace. To ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad: $\mathbf{C}^r(a,b)$ pro $r \geq 0$ celé označíme množinu všech reálných nebo komplexních funkcí, které mají spojité derinace až do řádu r na $\langle a,b\rangle$. Na $\mathbf{C}^r(a,b)$ definujme systém pseudonorem

$$p_j(f) = \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f^{(j)}(x)|\,, \quad j = 0,1,\dots,r\,.$$

Pomocí tohoto systému můžeme definovat normu předpisem

$$\|f\|_r = \sum_{j=0}^{r} p_j(f)\,.$$

Konvergence v $\mathbf{C}^r(a,b)$ je stejnoměrná konvergence, tedy $f_n \to f$ v $\mathbf{C}^r(a,b)$ znamená, že $f_n^{(j)}(x) \to f^{(j)}(x)$ stejnoměrně v $\langle a,b\rangle$ pro $j = 0,1,\dots,r$. Odtud dostaneme okamžitě, že $\mathbf{C}^r(a,b)$ tvoří Banachův prostor.

Poznámky: 1. Je-li $K \subset \mathbf{R}^n$ kompaktní podmnožina, můžeme analogicky definovat prostor $\mathbf{C}^r(K)$ a systém pseudonorem

$$p_j(f) = \sup_{|\alpha| \leq j\,,\, x \in K} |D^\alpha f(x)| \ \text{ pro } \ j = 0,1,\dots,r\,, \ \text{ kde } \ D^\alpha f(x) = \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Místo supréma jsme samozřejmě mohli psát maximum.

2. Normu v $\mathbf{C}^r(a,b)$ [nebo v $\mathbf{C}^r(K)$] můžeme též definovat jedním z předpisů

$$\|f\|_{r,s} = \left\{ \sum_{j=0}^{r} p_j^s(f) \right\}^{\frac{1}{s}}\,, \quad s \geq 1 \ \text{ nebo } \ \|f\|_{r,\infty} = \max\{p_1(f), \cdots, p_r(f)\}\,.$$

Všechny tyto normy jsou ekvivalentní.

3. Přirozenější situace, která se také vyskytuje v aplikacích, je, že neuvažujeme funkce na kompaktní množině, nýbrž na otevřené podmnožině $\mathbf{R}^k$. Z hlediska zavedení vhodné topologie to však celkovou situaci komplikuje. V následujícím příkladu ukážeme cestu, kterou se při řešení tohoto problému vydáme. Ve zbytku tohoto příkladu bude Ω označovat neprázdnou otevřenou podmnožinu $\mathbf{R}^k$ $k \in \mathbf{N}$. [Po případě $\mathbf{R}^n$.]

Příklad: Prostor $\mathbf{C}(\Omega)$.

Prostorem $\mathbf{C}(\Omega)$ nazveme lineární prostor všech reálných nebo komplexních funkcí spojitých na Ω. Buď

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset K_{n+1} \subset \cdots$$

taková posloupnost kompaktních množin, že

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$$

a definujme systém pseudonorem $\{p_n\}$ předpisem

$$p_n(f) = \sup_{x \in K_n} |f(x)| \, .$$

Tento systém určuje topologii na $\mathbf{C}(\Omega)$, která je Hausdorffova. (Zhruba řečeno: je-li $p_n(f) = 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$, potom $f \equiv 0$ na Ω.) Poněvadž je tento systém navíc spočetný, je daná topologie metrizovatelná, neboli je indukována jistou metrikou. Definujme

$$\mathbf{d}(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} \, .$$

$\mathbf{d}$ je metrika, ve které je daný prostor úplný. Buď $\{f_j\}$ cauchyovská posloupnost v $\mathbf{C}(\Omega)$. Potom platí, že $p_n(f_i - f_j) \underset{i,j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$. Poněvadž je konvergence stejnoměrná na každém K_n, dostaneme, že $\{f_j\}$ konverguje na každém K_n k nějaké funkci $f \in \mathbf{C}(\Omega)$. Dále platí $\mathbf{d}(f, f_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Prostor s touto vlastností nazýváme Fréchetův prostor.

Poznámky: 1. Posloupnost kompaktních množin, která je využívána v předchozím příkladu, můžeme sestrojit na příklad takto: Označme $F = \mathbf{R}^k - \Omega$. Je-li $F = \emptyset$, pak zvolíme

$$K_n = \{x \in \mathbf{R}^k ; \|x\| \le n\} = \overline{S(0;n)} \, .$$

Jinak položme

$$G_n = \{x \in \mathbf{R}^k ; \mathbf{d}(x,F) < \frac{1}{n}\} \ \text{ a } \ K_n = (\mathbf{R}^k - G_n) \cap \overline{S(0;n)} \, .$$

2. Fréchetův prostor, který jsme v předchozím příkladu získali, je úplný lineární metrický prostor, který není obecně Banachův. První ukázka byl prostor $\mathbf{s}$, který jsme zavedli v 1. kapitole, paragrafu 1.1. Druhá ukázka je právě prostor $\mathbf{C}(\Omega)$. Navíc konstrukce, kterou jsme pro sestrojení topologie v $\mathbf{C}(\Omega)$ použili, je t. zv. induktivní limita posloupnosti prostorů $\mathbf{C}(K_n)$. Každý prostor $\mathbf{C}(K_n)$ je Banachův, tedy $\mathbf{C}(\Omega)$ je induktivní limita Banachových prostorů.

3. Situace se ještě trochu zkomplikuje, jestliže požadujeme hladkost funkcí, které budeme vyšetřovat. Uvažujme prostor $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ všech funkcí, které mají na množině Ω spojité derivace všech řádů. Buď opět $K_n \subset K_{n+1}$ posloupnost kompaktních množin tak, že $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ a zvolme n pevné. Definujme systém pseudonorem

$$p_{K_n,m}(f) = \sup_{|\alpha| \le m, x \in K_n} |D^\alpha f(x)| \ \text{ pro } \ m = 0,1,2,\dots \, .$$

Tento systém definuje na každém K_n topologii tak, že $\mathbf{C}^\infty(K_n)$ je Fréchetův porostor. Prostor $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ je pak induktivní limitou posloupnosti Fréchetových prostorů $\{\mathbf{C}^\infty(K_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice: Označme $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ lineární prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem. Je-li $K \subset \Omega$ libovolná kompaktní podmnožina, potom $\mathcal{D}_K(\Omega)$ označíme množinu všech funkcí $f \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ takových, že supp $f \subset K$. Topologie v $\mathcal{D}_K(\Omega)$ je definována pomocí systému pseudonorem

$$p_{K,m}(f) = \sup_{|\alpha| \le m \, , x \in K} |D^\alpha f(x)| \, , \ \text{ kde } \ m = 0,1,2,\dots \, .$$

Poznámky: 1. Každý prostor $\mathcal{D}_K(\Omega)$ je Fréchetův prostor.

2.Je-li $K_1 \subset K_2$, potom je topologie na $\mathcal{D}_{K_1}(\Omega)$ indukována topologií na $\mathcal{D}_{K_2}(\Omega)$ jako na podmnožině.

Definice: Buď $\{K_n\}$, $K_n \subset K_{n+1}$ posloupnost kompaktních podmnožin Ω takových, že $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$. Potom $\mathcal{D}(\Omega)$ označíme induktivní limitu posloupnosti $\{\mathcal{D}_{K_n}(\Omega)\}$ a nazveme <u>prostorem testovacích funkcí.</u>

Poznámky: 1. $\mathcal{D}(\Omega)$ je množinově rovno $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, je však vybaveno příslušnou topologií induktivní limity.

2. Z definice induktivní limity plyne, že konvergence v prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ má následující podobu: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ znamená

a) Existuje kompaktní množina $K \subset \Omega$ tak, že

$$\operatorname{supp} f_n \subset K \quad \forall n \in \mathbf{N}\,,$$

b) $D^\alpha f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ stejnoměrně na K pro $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$. Tuto skutečnost budeme značit stručně $D^\alpha f_n(x) \rightrightarrows 0$ na K.

3. Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ není metrizovatelný. Je to však t.zv. Montelův prostor. Ten je charakterizován vlastností, že každá emezená uzavřená množina je kompaktní. To je do jisté míry překvapivé, musíme si však uvědomit, že i když má $\mathcal{D}(\Omega)$ nekonečnou dimensi, topologie v $\mathcal{D}(\Omega)$ je tak "exotická", že tuto vlastnost dovoluje.

4. V další části výkladu si položíme otázku, zda vůbec existuje nenulová funkce $f \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$. Odpověď je kladná a jak dále ukážeme, existuje jich dostatečně mnoho, abychom pomocí nich rozlišili různé funkce.

Příklad: Označme

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{pro } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{pro } \|x\| \geq 1 \end{cases} \qquad \psi(x,a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}} & \text{pro } \|x\| < a \quad (a > 0) \\ 0 & \text{pro } \|x\| \geq a\,, \end{cases}$$

kde $x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Potom všechny tyto funkce patří do $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Je samozřejmě $\varphi(x) = \psi(x,1)$.

Důkaz: Buď $n = 1$. Potom je

$$\varphi'(x) = -\frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2} = \lim_{t\to\infty} t^2 e^{-t} = 0\,.$$

Analogicky se důkaz provede pro všechny derivace i pro případ $n > 1$.

Poznámky: 1. Posloupnost

$$\left\{ \frac{1}{n} \cdot \psi(x,a) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

konverguje k 0 v $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Posloupnost

$$\psi_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \psi\left(\frac{x}{n}, a\right)$$

konverguje stejnoměrně k 0 spolu se všemi derivacemi, ale nekonverguje v $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Nesplňuje totiž podmínku, že

$$\operatorname{supp} \psi_n \subset K \;\; \forall n \in \mathbf{N}$$

pro nějakou pevnou kompaktní podmnožinu Ω.

2. Uvážíme-li funkci $\varphi(\frac{x-x_0}{\delta})$ dostaneme, že $\varphi(x_0) > 0$ a nosič φ leží v kouli se středem x_0 a poloměrem δ.

Věta: Buď $f \in \mathbf{C}(\Omega)$ a

$$\int_\Omega f \cdot \varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \, .$$

Potom je $f \equiv 0$ v Ω.

Důkaz: Předpokládejme, že $f(x_0) \neq 0$. Potom lze zvolit $\delta > 0$ tak, že $f(x)\varphi(\frac{x-x_0}{\delta})$ má stejné znaménko. To je však ve sporu s předpokladem, že $\int_\Omega f \cdot \varphi \, dx = 0$.

Definice: Řekneme, že f je lokálně integrovatelná na množině $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, jestliže je integrovatelná na každém kompaktu $K \subset \Omega$.

Věta: Je-li f lokálně integrovatelná na množině Ω a

$$\int_\Omega f \cdot \varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \, ,$$

potom je $f = 0$ s.v. v Ω.

Důkaz: Nebudeme provádět.

Definice: Každý spojitý lineární funkcionál T na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ nazveme distribucí nebo zobecněnou funkcí. Množinu všech distribucí budeme značit $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Poznámka: První otázka, kterou si položíme, je tvar distribuce, pokud ji dokážeme vůbec popsat. Jsme sice daleko od toho, abychom popsali všechny distribuce, ale umíme popsat velmi široké třídy distribucí. Odpověď je dána v následujících dvou větách.

Věta: Buď f lokálně integrovatelná na množině $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Potom je funkcionál T_f tvaru

$$<T_f, \varphi> = \int_\Omega f(x) \cdot \varphi(x) \, dx$$

distribuce. Tyto distribuce budeme nazývat regulární.

Důkaz: Pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí

$$|\int_\Omega f(x) \cdot \varphi(x) \, dx| \leq \max_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)| dx \, , \ \text{kde supp } \varphi \subset K \quad [K \text{ je kompakt}].$$

Odtud je zřejmé, že pokud $\varphi_n \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, potom $<T_f, \varphi_n> \to 0$.

Poznámka: Všechny ostatní distribuce, které nejsou regulární, nazýváme singulární. Jak některé z nich vypadají, říká následující věta.

Věta: Buď μ $\sigma-$konečná komplexní míra na Ω. Potom je funkcionál T_μ tvaru

$$<T_\mu, \varphi> = \int_\Omega \varphi(x) \, d\mu(x)$$

distribuce.

Důkaz: Platí
$$\left|\int_\Omega \varphi(x)\,d\mu(x)\right| \le \max_{x\in K}|\varphi(x)| \int_K d|\mu|(x)\,,$$
kde $|\mu|$ je t. zv. totální variace míry μ a platí $\int_K d|\mu|(x) < \infty$.

Poznámka: Ukazuje se, že existuje mnoho dalších distribucí, které nelze vyjádřit ani jedním z předchozích integrálů.

Příklad: Buď f funkce jedné proměnné na $\mathbf{R}$, která má derivaci $(n+1)-$vého řádu na $\mathbf{R}$ a zkoumejme distribuce tvaru $T_{f'}, T_{f''}, \dots, T_{f^{(n)}}$. Platí
$$<T_{f'},\varphi> = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -<T_f,\varphi'>\,.$$
Analogicky
$$<T_{f''},\varphi> = -<T_{f'},\varphi'> = <T_f,\varphi''>$$
a odtud dostaneme, že
$$<T_{f^{(n)}},\varphi> = (-1)^n<T_f,\varphi^{(n)}>\,.$$
Tento výsledek nás motivuje k následující definici.

Definice: Buď T distribuce na $\mathcal{D}(\Omega)$. [t. j. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$]. Potom distribuci $D^\alpha T$ definovanou předpisem
$$<D^\alpha T,\varphi> = (-1)^{|\alpha|}<T,D^\alpha\varphi>$$
nazýváme distributivní derivací T.

Příklad: Uvažme Heavisidovu funkci
$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0\,, \\ 1 & \text{pro } x \ge 0\,. \end{cases}$$
θ je lokálně integrovatelná na $\mathbf{R}$ a platí
$$<T_\theta,\varphi> = \int_0^\infty \varphi(x)dx\,.$$
Jestliže vypočteme distributivní derivaci T'_θ, dostaneme
$$<T'_\theta,\varphi> = -<T_\theta,\varphi'> = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0)\,.$$
Tedy formálně můžeme říci, že $\theta'(x) = \delta(x)$, což je Diracova $\delta-$funkce. To však již není funkce, ale míra. Jestliže příslušnou distribuci označíme T_δ, potom platí
$$<T'_\delta,\varphi> = -<T_\delta,\varphi'> = -\varphi'(0) \text{ a odtud } <T_\delta^{(n)},\varphi> = (-1)^n\varphi^{(n)}(0)\,.$$

Poznámky: 1. Ukazuje se, že distributivní derivace Diracovy $\delta-$funkce není ani funkce ani míra.

2. Při počítání s distributivními derivacemi musíme být velmi obezřetní. Kromě řady záludností neplatí na příklad rovnost $T'_f = T_{f'}$, i když je T_f regulární distribuce a f' existuje. Stačí si uvědomit, že v předchozím příkladu je $T'_\theta = \delta$, zatímco $T_{\theta'} = 0$, tedy je to nulová distribuce.

3. Jestliže budeme definovat $T_{\delta_s} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$< T_{\delta_s}, \varphi >= \varphi(s) \quad \forall s \in \Omega \text{ a } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,,$$

dostáváme Diracovu $\delta-$funkci koncentrovanou v bodě $s \in \Omega$.

3. Z předchozího je zřejmé, že každá distribuce má derivace všech řádů (samozřejmě ve smyslu distribucí).

4.Vyšetřování distribucí vedlo kromě nejdůležitější aplikace v diferenciálních rovnicích též k vypracování metod regularizace divergentních integrálů. To však přesahuje svojí obšírností rozsah této stručné exkurze do teorie zobecněných funkcí a nebudeme se jím zabývat.

2.6 Věta o uzavřeném grafu.

Poznámka: V tomto paragrafu se budeme zabývat vlastnostmi prostoru $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Ukážeme, že pro lineární zobrazení informace o bodové konvergenci zaručuje i informace o normách daných zobrazení, tedy o stejnoměrné konvergenci.

! Věta: (Banach-Steinhaus)
Buď Λ indexová množina a předpokládejme, že $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ je systém prvků z $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, kde $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jsou B-prostory. Jestliže

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| < \infty$$

pro všechna $x \in \mathbf{X}$, pak

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| < \infty\,.$$

Důkaz: Nebudeme provádět. Ukazuje se, že tvrzení stačí dokázat jen pro spočetnou množinu Λ. Kdyby pro libovolnou množinu platilo

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| = \infty\,,$$

pak existuje posloupnost $\{T_n\}$ tak, že

$$\|T_1\| > 1\,,\ \ \|T_2\| > 2\,, \dots\,, \|T_n\| > n\,, \dots\,,$$

což dává spor s tím, že

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \|T_n\| < \infty\,.$$

Věta: Buď $\{T_n\}\,,\ T_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ taková posloupnost, že

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$$

existuje pro každé $x \in \mathbf{X}$. Potom existuje konstanta M tak, že

$$\|T_n\| \le M \ \ \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Důkaz: Poněvadž existuje

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx \ \ \forall x \in \mathbf{X}\,, \ \text{ je } \ \sup_n \|T_n x\| < \infty \ \ \forall x \in \mathbf{X}\,.$$

Podle Banach-Steihausovy věty odtud plyne, že

$$\sup_n \|T_n\| < \infty\,.$$

Poznámka: Banach-Steinhausova věta má též důležité důsledky pro t. zv. slabou konvergenci.

Definice: Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ bodů lineárního normovaného prostoru $\mathbf{X}$ konverguje slabě k prvku $x \in \mathbf{X}$, jestliže

$$<x_n, x^*> \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} <x, x^*> \text{ pro každé } x^* \in \mathbf{X}^* .$$

Označujeme $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} x$ nebo $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$.

Věta: Každá konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ je také slabě konvergentní.

Důkaz: Nechť $x_n \to x$, t. j. $\|x_n - x\| \to 0$. Potom

$$|<x_n, x^*> - <x, x^*>| = |<x_n - x, x^*>| \le \|x_n - x\| \cdot \|x^*\| \to 0 .$$

Věta: Slabě konvergentní posloupnost bodů B-prostoru X je omezená.

Důkaz: Nechť $x_n \overset{w}{\longrightarrow} x$, t. j.

$$<x_n, x^*> \to <x, x^*> \ \forall x^* \in \mathbf{X}^* .$$

Potom platí

$$<x_n, x^*> = <x^*, \widehat{x_n}> \to <x^*, \hat{x}> = <x, x^*> \ \forall x^* \in \mathbf{X}^* .$$

Podle Banach-Steihausovy věty existuje M tak, že $\sup_n \|\widehat{x_n}\| \le M$.
Je však

$$\sup_n \|\widehat{x_n}\| = \sup_n \|x_n\| \le M .$$

Poznámky: 1. Později ukážeme na příkladech, že ze slabé konvergence neplyne konvergence v normě.

2. V dalším se budeme zabývat větou o uzavřeném grafu. Uzavřená zobrazení zahrnují většinu diferenciálních operátorů a je tedy vhodné se jimi zabývat.

Definice: Buďte $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ B-prostory. Řekneme, že lineární zobrazení $T : D(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ je uzavřené, jestliže platí: je-li

$$x_n \in D(T) , \ x_n \to x , \ Tx_n \to y , \text{ potom } x \in D(T) \text{ a } Tx = y .$$

Grafem lineárního operátoru T nazveme množinu

$$\mathbf{G}_T = \{[x, Tx]; x \in D(T)\} .$$

Příklady: 1. Každý omezený operátor je uzavřený. Toto tvrzení plyne okamžitě ze spojitosti.

2. Buď

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} = C(0,1) ; \ T = \frac{d}{dt} , \ D(T) = \{x; x' \in C(0,1)\} .$$

Potom T není omezený. Na příklad pro $x_n = t^n$ je

$$\|x_n\| = 1 , \text{ ale } \|Tx_n\| = n .$$

T je však uzavřený. Jestliže

$$x_n \to x \ , \ Tx_n \to y \, ,$$

potom je podle klasické věty posloupnost $\{x_n'\}$ stejnoměrně konvergentní, tedy existuje x' a $x' = y$, neboli $Tx = y$.

Poznámka: Mezi uzavřeností operátoru T a jeho grafem $\mathbf{G}_T$ existuje úzká souvislost.

Věta: Buď $T : D(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ lineární operátor. Potom je T uzavřený právě když je jeho graf $\mathbf{G}_T$ uzavřený podprostor $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Poznámka: Normu v $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ můžeme zavést na příklad předpisem $\| \, [x, y] \, \| = \|x\| + \|y\|$ nebo $\| \, [x, y] \, \| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ a podobně.

Důkaz: 1. Buď $T : D(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ uzavřený lineární operátor a nechť $[x, y] \in \overline{\mathbf{G}_T}$. Existuje tedy posloupnost

$$[x_n, Tx_n] \in \mathbf{G}_T \ \text{ tak, že } \ [x_n, Tx_n] \to [x, y] \, .$$

To však znamená, že

$$\| \, [x_n, Tx_n] - [x, y] \, \| \to 0 \ \text{ neboli } \ \|x_n - x\| \to 0 \ \text{ a } \ \|Tx_n - y\| \to 0 \, .$$

Poněvadž T je uzavřený, je $x \in D(T)$ a $Tx = y$, tedy $[x, y] \in \mathbf{G}_T$.

2. Buď $\mathbf{G}_T$ uzavřená množina v $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ a nechť

$$x_n \to x \, , \ \ Tx_n \to y \ \ (x_n \in D(T)) \, .$$

Odtud plyne, že

$$[x_n, Tx_n] \to [x, y] \in \overline{\mathbf{G}_T} = \mathbf{G}_T$$

a tedy $x \in D(T) \, , Tx = y$.

Věta: Buď T uzavřený lineární operátor. Jestliže existuje T^{-1}, je také uzavřený.

Důkaz: Buď $T : D(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ uzavřený. Potom

$$T^{-1} : T(D) \to \mathbf{X} \ \text{ a nechť } \ y_n \to y \, , \ \ T^{-1} y_n \to x \, .$$

To je však ekvivalentní s tím, že

$$Tx_n \to y \, , \ \ x_n \to x \, , \ \ \text{neboli } \ x \in D(T) \, , \ \ Tx = y \, .$$

To ale znamená, že

$$y \in D(T^{-1}) = T(D) \ \text{ a } \ x = T^{-1} y \, .$$

Poznámka: Pro uzavřené lineární operátory platí důležitá věta o uzavřeném grafu, která spolu s Hahn-Banachovou větou a Banach-Steihausovou větou tvoří tři základní principy lineární funkcionální analýzy.

! Věta: (O uzavřeném grafu)
Buď $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ uzavřený lineární operátor, kde $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jsou B-prostory. Potom je T omezený operátor.

Důkaz: Nebudeme provádět

Poznámky: 1. Podstatný je v předchozí větě předpoklad, že T je definován na celém B-prostoru, tedy na úplném normovaném prostoru. Příklad operátoru $T = \frac{d}{dt}$ na prostoru $C(0,1)$ ukazuje, že věta jinak neplatí.

2. Poslední informace tohoto paragrafu se bude týkat Hilbertova prostoru. Hlavní výsledek je Rieszova věta o reprezentaci spojitého lineárního funkcionálu na Hilbertově prostoru.

Definice: Buď H Hilbertův prostor. O prvku $x \in H$ řekneme, že je ortogonální k množině $M \subset H$ a píšeme $x \perp M$, jestliže platí $(x, y) = 0$ pro všechna $y \in M$. Množiny $M_1, M_2 \subset H$ nazýváme ortogonální a značíme $M_1 \perp M_2$, je-li $(x, y) = 0$ jakmile $x \in M_1$ $y \in M_2$.

Lemma: Je-li $x \perp M$, je i $x \perp \overline{[M]}$.

Důkaz: Buď $y_1, y_2 \in M$. Potom je zřejmě

$$(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{\lambda_1}(x, y_1) + \overline{\lambda_2}(x, y_2) = 0\,, \ \text{ tedy } \ x \perp [M]\,.$$

Nechť $y_n \in [M]$, $y_n \to y \in \overline{[M]}$. Potom

$$0 = (x, y_n) \to (x, y) \ \text{ a tedy } \ (x, y) = 0\,.$$

Poznámka: Z předchozího lemmatu plyne, že množina všech prvků H, které jsou ortogonální k dané množině M tvoří uzavřený podprostor H, který značíme $M^{\perp}$ a nazýváme ortogonálním doplňkem množiny M. Dále platí

Lemma:

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{[M]}\,.$$

Důkaz: Zřejmý.

Lemma: (Rovnoběžníkové pravidlo)
Buď H unitární prostor $a, b \in H$ dva libovolné prvky. Potom platí

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\{\, \|a\|^2 + \|b\|^2 \,\}\,.$$

Důkaz: Platí

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = (a + b, a + b) + (a - b, a - b) =$$
$$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + (a, b) + (b, a) + \|a\|^2 + \|b\|^2 - (a, b) - (b, a) = 2\{\, \|a\|^2 + \|b\|^2 \,\}\,.$$

! Věta: Buď M uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Potom lze každý prvek $x \in H$ vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$x = y + z\,, \ \text{ kde } \ y \in M\,, \ \ z \in M^{\perp}\,.$$

Důkaz: 1. Jednoznačnost

Buď

$$x = y + z\,, \ \ x = y' + z'\,, \ \text{ kde } \ y, y' \in M\,; \ \ z, z' \in M^{\perp}\,.$$

Potom

$$y + z = y' + z'\,, \ \text{ tedy } \ y - y' = z' - z$$

a odtud

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') = (y - y', z' - z) = 0\,,$$

neboli $y = y'$, $z = z'$.

2. Existence

Je-li $x \in M$, stačí položit $y = x\,, z = 0$. Nechť $x \notin M$ a označme

$$d = \inf_{y' \in M} \|x - y'\| \text{ a buď } \{y_n\}\,, y_n \in M$$

taková posloupnost, že

$$d = \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\|\,.$$

Ukážeme, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Platí

$$\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\| \geq d\,, \text{ poněvadž } \frac{y_n + y_m}{2} \in M\,.$$

Na druhé straně

$$\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\| \leq \frac{1}{2}\|x - y_n\| + \frac{1}{2}\|x - y_m\| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} d$$

a odtud

$$\limsup_{m,n\to\infty} \|x - \frac{y_n + y_m}{2}\| \leq d\,.$$

Tedy platí

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x - \frac{y_n + y_m}{2}\| = d\,.$$

Jestliže užijeme rovnoběžníkového pravidla (předchozí lemma) pro $a = x - y_n$ a $b = x - y_m$, dostaneme

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Poněvadž M je uzavřený podprostor H, je $y_n \to y \in M$, tedy $\|x - y\| = d$.

Položme nyní $z = x - y$, tedy $x = y + z$. Je nutno dokázat, že $z \in M^\perp$, neboli $(z, u) = 0 \;\; \forall u \in M$. Poněvadž je $y + \lambda u \in M$ pro libovolné λ, platí

$$\|x - y - \lambda u\|^2 \geq d^2$$

a dále

$$\|x - y - \lambda u\|^2 = (z - \lambda u, z - \lambda u) = \|z\|^2 - 2Re\,\overline{\lambda}(z, u) + |\lambda|^2\|u\|^2 \geq d^2\,.$$

Poněvadž je $\|z\|^2 = d^2$, musí být

$$|\lambda|^2\|u\|^2 - 2Re\,\overline{\lambda}(z, u) \geq 0\,.$$

Položíme-li $\lambda = \alpha(z, u)$, dostaneme pro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\alpha^2|(z, u)|^2\|u\|^2 - 2\alpha\,|(z, u)|^2 \geq 0$$

neboli

$$\alpha\,|(z, u)|^2\,\{\alpha\,\|u\|^2 - 2\} \geq 0\,.$$

To však není možné splnit pokud je $(z, u) \neq 0$.

! Věta: (Rieszova věta o reprezentaci funkcionálu na Hilbertově prostoru)
Buď H Hilbertův prostor, $f \in H^*$. Potom existuje jediný prvek $y \in H$ tak, že

$$<x, f> = (x, y) \;\; \forall x \in H \;\text{ a }\; \|f\| = \|y\|\,.$$

Poznámka: Podle předchozí věty lze ztotožnit H a H^*. Analogicky H^* a H^{**}. Tedy Hilbertův prostor je příkladem reflexivního prostoru.

Důkaz: Existence

Buď
$$M = \{x \in H; <x, f> = 0\} .$$
Pak je M uzavřený podprostor H. Je-li $M = H$, je $f = 0$ a stačí položit $y = 0$. Buď tedy $M \neq H$ a zvolme $y_0 \in M^{\perp}$. Uvažme prvky tvaru
$$<x, f> y_0 - <y_0, f> x \ \ \forall x \in H .$$
Všechny tyto prvky patří do M. Je totiž
$$< <x, f> y_0 - <y_0, f> x, f> = <x, f> <y_0, f> - <y_0, f> <x, f> = 0 .$$
Tedy
$$(<x, f> y_0 - <y_0, f> x, y_0) = 0 .$$
To ale znamená, že
$$<x, f> \|y_0\|^2 = <y_0, f> (x, y_0) , \ \text{ neboli } <x, f> = \left(x, \frac{\overline{<y_0, f>}}{\|y_0\|^2} y_0 \right) .$$
Položíme-li tedy
$$y = \frac{\overline{<y_0, f>}}{\|y_0\|^2} y_0 , \ \text{ dostaneme } <x, f> = (x, y) \ \ \forall x \in H .$$

Jednoznačnost

Buď
$$(x, y') = (x, y'') \ \ \forall x \in H .$$
Potom $(x, y' - y'') = 0$ a položíme-li $x = y' - y''$, dostaneme $\|y' - y''\|^2 = 0$.

Rovnost norem

Poněvadž je $<x, f> = (x, y)$, platí
$$|<x, f>| \leq \|x\| \cdot \|y\| , \ \text{ tedy } \ \|f\| \leq \|y\| .$$
Položíme-li $x = y$, dostaneme
$$<y, f> = \|y\|^2 \ \text{ a odtud } \ \|f\| \geq \|y\| .$$
Je totiž $\|y\|^2 = | <y, f> | \leq \|y\| \cdot \|f\|$.

2.7 Základy teorie Fourierových řad.

Poznámky: 1. V celém tomto paragrafu budeme pracovat pouze se separabilními Hilbertovými prostory.

2. V paragrafu 2.1 jsme definovali pojem ortonormální množiny a na ni budeme nyní navazovat.

Definice: Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální posloupnost prvků separabilního Hilbertova prostoru H. Řekneme, že $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je úplná, jestliže platí: je-li pro nějaké
$$x \in H \ \ (x, \varphi_n) = 0 \ \text{ pro } \ n = 1, 2, \ldots , \ \text{ potom } \ x = 0 .$$

Věta: Buď H separabilní Hilbertův prostor. Potom v H existuje úplný ortonormální systém.

Důkaz: Poněvadž H je separabilní, existuje v H hustá spočetná podmnožina $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z této množiny vybereme nezávislou podmnožinu

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ tak, že } [\{x_1, x_2, \dots, x_{k_n}\}] = [\{y_1, y_2, \dots, y_n\}] .$$

Poněvadž je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hustá, platí

$$\overline{[\{y_1, y_2, \dots\}]} = H .$$

Nyní stačí použít Gram-Schmidtovy ortogonalizace, abychom dostali požadovaný systém.

Poznámka: Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální systém v Hilbertově prostoru H, $x \in H$ libovolný vektor. Označme $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j$ a zkoumejme, pro která α_j je minimální odchylka $\delta_n = \|x - y_n\|^2$. Platí

$$\delta_n = (x - y_n, x - y_n) = \|x\|^2 - (x, y_n) - (y_n, x) + \|y_n\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}(x, \varphi_j) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\varphi_j, x) + \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} \alpha_j + \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 =$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{j=1}^{n} (c_j - \alpha_j)\overline{(c_j - \alpha_j)} - \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 , \text{ kde } c_j = (x, \varphi_j) .$$

Tedy δ_n je minimální, jestliže $\alpha_j = c_j$.

Definice: Buď $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormální systém v Hilbertově prostoru H, $x \in H$. Potom čísla $c_n = (x, \varphi_n)$ nazýváme Fourierovými koeficienty prvku x vzhledem k systému $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta: Buď H Hilbertův prostor, $x \in H$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém v H. Potom mnohočlen n-tého řádu $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$, který x nejlépe aproximuje v normě H, je Fourierův mnohočlen

$$[\alpha_k = c_k = (x, \varphi_k)] .$$

Věta: Buď H Hilbertův prostor, $x \in H$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém v H, $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ Fourierovy koeficienty x vzhledem k systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Potom platí Besselova nerovnost

$$\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 .$$

Důkaz: Pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ platí

$$0 \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

a odtud plyne tvrzení.

Důsledek: Buďte $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ Fourierovy koeficienty prvku $x \in H$ vzhledem k ortonormálnímu systému $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, potom $c_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Věta: Buď $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ortonormální systém v separabilním Hilbertově prostoru H. Potom je tento systém úplný právě když pro každé $x \in H$ platí Parsevalova rovnost

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \,.$$

Důkaz: 1. Buď $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ úplný, $x \in H$ a označme $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$. Potom platí

$$(x - y, \varphi_j) = (x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \varphi_j) = (x, \varphi_j) - c_j = 0 \ \text{ pro } \ j = 1, 2, \dots \,.$$

Z úplnosti plyne, že $x - y = 0$, tedy

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \,.$$

2. Nechť $(x, \varphi_k) = 0$ pro $k = 1, 2, \dots$. Potom je $c_k = (x, \varphi_k) = 0$, tedy

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = 0$$

a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ je úplný ortonormální systém.

Poznámka: Předchozí věta spolu s větou o existenci úplného ortonormálního systému dovolují ukázat, že všechny separabilní Hilbertovy prostory jsou izometricky izomorfní.

Věta: Každý separabilní Hilbertův prostor je izometricky izomorfní s prostorem $\mathbf{l}_2$.

Důkaz: Buď $x \in H$ a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ úplný ortonormální systém v H. Definujme zobrazení $T : H \to \mathbf{l}_2$ předpisem

$$Tx = u = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \,.$$

Potom je T zřejmě lineární zobrazení a

$$\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$$

podle Parsevalovy rovnosti, tedy T je izometrie.

Poznámka: V dalším zvolíme konkrétní Hilbertův prostor a sice $\mathbf{L}_2(a, b)$ a uvedeme některé ortogonální nebo ortonormální systémy funkcí.

Příklady úplných ortogonálních systémů funkcí.

1. Systém $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ je ortogonální na libovolném intervalu délky 2π. Systém

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

je ortonormální.

Důkaz: Platí

$$(e^{inx}, e^{ikx}) = \int\limits_a^{a+2\pi} e^{inx} e^{-ikx} dx = \begin{cases} \left. \frac{1}{i(n-k)} e^{i(n-k)x} \right|_a^{a+2\pi} = 0 & \text{je-li } n \neq k \,, \\ \int\limits_a^{a+2\pi} dx = 2\pi = \|e^{inx}\|^2 & \text{je-li } n = k \,. \end{cases}$$

Položme nyní pro formální zjednodušení $a = -\pi$ a označme $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$. Je-li

$$c_n^* = (f, \varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \, ,$$

potom

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^* \varphi_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \cdot e^{inx} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \, , \text{ kde } c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

bude značit Fourierův koeficient. Platí Parsevalova rovnost $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n^*|^2$ a poněvadž je $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_n^*$, dostaneme tvar

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \, .$$

2. Systém

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \, \ldots$$

je ortogonální na libovolném intervalu délky 2π. Systém

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \, \ldots$$

je ortonormální.

Důkaz: Je třeba ukázat, že

$$\forall n, k \in \mathbf{N} \text{ platí } (1, \cos nx) = (1, \sin nx) = (\sin nx, \cos kx) = 0$$

a dále

$$(\sin nx, \sin kx) = (\cos nx, \cos kx) = \pi \delta_{n,k} \, ,$$

kde $\delta_{n,k}$ je Kroneckerovo delta. To jsou však výpočty běžných integrálů a nebudeme je provádět. Analogickou úvahou jako v předchozím příkladu dostaneme, že Fourierova řada funkce f má tvar

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \, ,$$

kde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \, , \;\; k = 0, 1, 2, \ldots \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \, , \;\; k = 1, 2, \ldots \, .$$

Parsevalova rovnost má tvar

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right) \, .$$

Poznámky: 1. Vzájemný vztah mezi systémy z příkladů 1 a 2 dostaneme okamžitě, jestliže užijeme Eulerovy identity. Je-li

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx}\right),$$

dostaneme odtud

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \; c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \; c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Tudíž známe-li koeficienty a_k a b_k, můžeme vypočítat koeficienty c_k a obráceně. Platí totiž

$$a_0 = 2c_0, \;\; a_k = c_k + c_{-k}, \;\; b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

2. Důkaz skutečnosti, že uvedené systémy jsou úplné, patří do kategorie t. zv. "hard mathematics" a nebudeme jej provádět. Zájemci o důkaz se mohou podívat do některé z monografií, věnovaných Fourierovým řadám nebo si počkat na připravovaný text z Lebesgueova integrálu.

3. Problémy, související s bodovou, po případě stejnoměrnou konvergencí Fourierových řad patří tématicky spíše do oblasti Lebesgueova integrálu a budou uvedeny v příslušném textu.

Kapitola 3

Spektrální teorie lineárních operátorů.

3.1 Spektrum operátoru.

Označení: Buď $\mathbf{X}$ B-prostor nad tělesem komplexních čísel $\mathbf{C}$. Potom Banachův prostor $\mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{X})$ označíme $\mathscr{L}(\mathbf{X})$. Symbolem I označíme identický operátor z prostoru $\mathscr{L}(\mathbf{X})$, tedy platí

$$Ix = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,.$$

Definice: Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$. Definujme následující množiny:

$$\begin{aligned}
\rho(T) &= \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\ \lambda I - T \text{ je prostý a } R(\lambda I - T) = \mathbf{X}\}\\
\sigma_p(T) &= \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\ \lambda I - T \text{ není prostý}\}\\
\sigma_c(T) &= \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\ \lambda I - T \text{ je prostý, } R(\lambda I - T) \neq \mathbf{X}, \text{ ale } \overline{R(\lambda I - T)} = \mathbf{X}\}\\
\sigma_r(T) &= \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\ \lambda I - T \text{ je prostý, ale } \overline{R(\lambda I - T)} \neq \mathbf{X}\}\,.
\end{aligned}$$

Množinu $\rho(T)$ nazveme resolventní množinou operátoru T a její komplement $\sigma(T) = \mathbf{C} - \varrho(T)$ spektrem operátoru T. Množiny $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$ budeme po řadě nazývat bodovým, spojitým a residuálním spektrem operátoru T.

Poznámka: Z definice množin $\varrho(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ a $\sigma_r(T)$ je zřejmé, že jsou disjunktní a

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)\,.$$

Lemma: Resolventní množina $\varrho(T)$ je totožná s množinou všech komplexních λ, pro která existuje inversní operátor $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$. Bodové spektrum $\sigma_p(T)$ je množina všech komplexních čísel λ takových, že existuje vektor $x \in \mathbf{X}$, $x \neq 0$ tak, že $Tx = \lambda x$. Každý takový vektor nazýváme vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Důkaz: Poněvadž je $R(\lambda I - T) = \mathbf{X}$, je $(\lambda I - T)^{-1}$ omezený operátor podle věty o uzavřeném grafu. Vlastnost bodového spektra je zřejmá.

Poznámky: 1. V dalším ukážeme, že $\varrho(T)$ je otevřená množina a $\sigma(T)$ je kompaktní množina.

2. Jestliže pro $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ existuje operátor $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$, pak platí $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

3. $\mathscr{L}(\mathbf{X})$ tvoří Banachovu algebru, kde $\|TU\| \leq \|T\| \cdot \|U\|$.

Věta: Je-li $|\lambda| > \|T\|$, potom $\lambda \in \varrho(T)$.

Důkaz: Buď $|\lambda| > \|T\|$. Potom je řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ absolutně konvergentní. ($\mathscr{L}(\mathbf{X})$ je úplný prostor). Platí totiž

$$\|T^n x\| \leq \|T\| \cdot \|T^{n-1}x\| \leq \cdots \leq \|T\|^{n-1}\|Tx\| \leq \|T\|^n \|x\|$$

a odtud $\|T^n\| \leq \|T\|^n$. Dále dostaneme

$$(\lambda I - T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n+1}}{\lambda^{n+1}} = I\,.$$

Poznámka: Z předchozí věty plyne, že $\sigma(T)$ je omezená množina.

Věta: Je-li $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ takový operátor, že $\|I - T\| < 1$, potom existuje operátor T^{-1} a platí $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$.

Důkaz: Platí, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (I-T)^n$ konverguje absolutně (je $\|I - T\| < 1$) a dále

$$T\sum_{n=0}^{\infty}(I-T)^n = \{I - (I-T)\}\sum_{n=0}^{\infty}(I-T)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(I-T)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(I-T)^{n+1} = (I-T)^0 = I\,.$$

Lemma: Jsou-li $T, U \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ takové, že existují operátory $T^{-1}, U^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$, potom je i $(TU)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ a platí $(TU)^{-1} = U^{-1}T^{-1}$.

Důkaz: Tvrzení lemmatu je zřejmé.

Věta: $\varrho(T)$ je otevřená množina.

Důkaz: Buď $\lambda \in \varrho(T)$ a $\mu \in \mathbf{C}$ takové, že $|\lambda - \mu| < \|(\lambda I - T)^{-1}\|^{-1}$. Potom platí

$$\mu I - T = \lambda I - T + (\mu - \lambda)I = (\lambda I - T)\{I + (\mu - \lambda)(\lambda I - T)^{-1}\} = (\lambda I - T)\{I + U\}\,.$$

Je

$$\|I - (I + U)\| = \|U\| = |\mu - \lambda| \cdot \|(\lambda I - T)^{-1}\| < 1$$

a podle předchozí věty existuje $(I + U)^{-1}$. Poněvadž existuje $(\lambda I - T)^{-1}$, existuje i

$$(\mu I - T)^{-1} = (I + U)^{-1}(\lambda I - T)^{-1} \text{ a } \mu \in \varrho(T)\,.$$

Důsledek: Spektrum $\sigma(T)$ operátoru $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ je kompaktní množina.

Definice: Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ a označme

$$r(T) \ \text{[nebo } r_\sigma(T)] = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\}\,.$$

Číslo $r(T)$ nazveme spektrálním poloměrem operátoru T.

Poznámka: Platí zřejmě, že $r(T) \leq \|T\|$, ale v řadě případů platí ostrá nerovnost.

Lemma: Je-li $\lambda \in \sigma(T)$, potom $\lambda^n \in \sigma(T^n)$.

Důkaz: Je-li $\lambda \in \sigma(T)$, pak $(\lambda I - T)^{-1}$ neexistuje, tedy

$$\lambda^n I - T^n = (\lambda I - T)(\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} T + \cdots + T^{n-1})$$

také nemá inversní operátor.

Věta: Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$. Potom je

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} .$$

Důkaz: Je-li $\lambda \in \sigma(T)$, pak $|\lambda^n| = |\lambda|^n \le \|T^n\|$ a odtud $|\lambda| \le \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Důkaz skutečnosti, že $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ existuje a je rovna $r(T)$ souvisí s vyšetřováním mocninných řad v T a nebudeme jej provádět.

Poznámka: Zbývá ukázat, že $\sigma(T) \neq \emptyset$, tedy, že se nejedná o prázdnou množinu.

Lemma: Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$; $|\lambda| > \|T\|$. Potom je $\|(\lambda I - T)^{-1}\| = \|R(\lambda, T)\| \le \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$.

Důkaz: Platí $y = (\lambda I - T)x \iff x = R(\lambda, T) y$, $\|R(\lambda, T)\| = \sup\limits_{y\neq 0} \frac{\|R(\lambda,T)\, y\|}{\|y\|}$ a dále

$$\|y\| \ge |\lambda| \cdot \|x\| - \|Tx\| \ge (\, |\lambda| - \|T\|) \cdot \|x\|\,) \text{ neboli } \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \ge \frac{\|x\|}{\|y\|} = \frac{\|\, R(\lambda,T) y\|}{\|y\|} .$$

Věta: Je-li $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$, pak $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Důkaz: Jestliže předpokládáme, že $\sigma(T) = \emptyset$, pak je funkce $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$ holomorfní funkcí proměnné λ v celé komplexní rovině a podle Liouvilleovy věty je konstantní. To je však spor, poněvadž

$$\|R(\lambda; T)\| \underset{|\lambda|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ a tedy } R(\lambda; T) \equiv 0 .$$

Poznámka: Je-li T neomezený operátor, lze též definovat množiny $\varrho(T)$ a $\sigma(T)$. Může se však stát, že $\sigma(T) = \emptyset$ nebo $\sigma(T) = \mathbf{C}$. Některé případy ukážeme na příkladech.

Příklady: 1. Buď

$$T : \mathbf{C}(0,1) \to \mathbf{C}(0,1),\ \ Tx(t) = \int_0^t x(s) ds .$$

Je zřejmé, že T je lineární zobrazení a dále

$$|\, T\, x(t)\,| \le \int_0^t |\, x(s)\,|\, ds \le \max_{s\in\langle 0,1\rangle} |\, x(s)\,| \cdot \int_0^t ds \le \|x\| ,\ \text{ tedy } \|T\| \le 1 .$$

Pro $x(t) = 1$ však platí

$$Tx(t) = \int_0^t ds = t \text{ a } \|t\| = 1 ,\ \text{ neboli } \|T\| = 1 .$$

Uvažme nyní operátor $\lambda I - T$ a buď $\lambda = 0$. T je prosté zobrazení (přesvědčte se) a pro

$$y(t) = Tx(t) = \int_0^t x(s) ds \text{ platí } y(0) = 0 .$$

Je-li tedy $y \in R(T)$, musí platit $y(0) = 0$. Množina těchto funkcí není hustá v $\mathbf{C}(0,1)$, neboli

$$\overline{R(T)} \neq \mathbf{C}(0,1) \text{ a } 0 \in \sigma_r(T)\,.$$

Pro $\lambda \neq 0$ položme $(\lambda I - T)x = 0$. To znamená, že

$$\lambda y' - y = 0\,, \text{ kde } y(t) = \int_0^t x(s)ds\,, \; y(0) = 0\,.$$

Tato diferenciální rovnice má jediné řešení $y(t) \equiv 0$. Odtud plyne, že operátor $\lambda I - T$ je prostý a navíc pro libovolné $a \in \mathbf{C}(0,1)$ má úloha

$$\lambda y' - y = a\,; \; y(0) = 0 \text{ jediné řešení } y(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^t a(s)e^{\frac{t-s}{\lambda}}ds\,.$$

(Přesvědčte se, nebo ještě lépe vypočítejte). Platí tedy, že

$$R(\lambda I - T) = \mathbf{C}(0,1) \text{ a } \lambda \in \rho(T)\,.$$

Odtud plyne, že $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}\,, \; r(T) = 0\,.$

Poznámka: Dá se ukázat rovnou, že

$$T^n x(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}x(\tau)\,d\tau$$

a odtud $\|T^n\| \leq \frac{1}{(n-1)!}$ (je dokonce $\|T^n\| \leq \frac{1}{n!}$), neboli $r(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.

2. Uvažme prostor $\mathbf{B}(0,1)$, tedy množinu všech omezených komplexních funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$ takových, že

$$\|f\| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |f(t)| < \infty\,.$$

Zvolme funkci $a(t) \in \mathbf{B}(0,1)$ a definujme operátor

$$T : \mathbf{B}(0,1) \to \mathbf{B}(0,1) \text{ předpisem } Tf(t) = a(t)\cdot f(t)\,.$$

Je zřejmé, že T je lineární operátor, který je navíc omezený. Platí totiž

$$\|Tf\| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |a(t)\cdot f(t)| \leq \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |a(t)| \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |f(t)| = \|a\|\cdot\|f\|\,.$$

Odtud plyne, že $\|T\| \leq \|a\|$. (Platí dokonce, že $\|T\| = \|a\|$.) Označme

$$\Gamma = \{a(t); t \in \langle 0,1\rangle\} = R(a(t))$$

a zkoumejme rovnici $(\lambda I - T)f = 0$, neboli $(\lambda - a(t))f(t) = 0$. Je-li $\lambda \in \Gamma$, potom platí $\lambda = a(t_0)$ pro nějaké $t_0 \in \langle 0,1\rangle$ a tedy funkce $f(t)$, pro niž platí $f(t_0) = 1\,,\; f(t) = 0$ pro $t \neq t_0$ je vlastní funkcí, odpovídající vlastnímu číslu λ. Odtud plyne, že $\Gamma \subset \sigma_p(T)$. Pro $\lambda \in \mathbf{C}$ takové, že $\mathbf{d}(\lambda,\Gamma) = d > 0$ a libovolnou funkci $g \in \mathbf{B}(0,1)$ dostaneme, že rovnice

$$(\lambda I - T)f = g \text{ má jediné řešení } f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - a(t)}\,, \text{ tedy } \lambda \in \varrho(T)\,.$$

Je-li $\lambda \in \overline{\Gamma} - \Gamma$, potom má rovnice $(\lambda I - T)f = 0$ pouze triviální řešení, ale

$$\overline{(\lambda I - T)\mathbf{B}(0,1)} \neq \mathbf{B}(0,1) \text{ neboli } \lambda \in \sigma_r(T)\,.$$

Pro funkci e identicky rovnou 1 na $\langle 0,1\rangle$ a libovolné $f \in \mathbf{B}(0,1)$ totiž platí

$$\|e-(\lambda I-T)f\| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |1-(\lambda-a(t))f(t)| \geq 1 \quad [\text{je} \inf_{t\in\langle 0,1\rangle} |\lambda-a(t)| = 0] \text{ a tedy } e \notin \overline{(\lambda I - T)\mathbf{B}(0,1)}\,.$$

Závěrem dostáváme, že $\sigma(T) = \overline{\Gamma}$.

Poznámka: Předchozí příklad ukazuje, že libovolná kompaktní podmnožina $\mathbf{C}$ může být spektrem nějakého omezeného operátoru.

3. Buď

$$T = \frac{d}{dt}\,,\quad \mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{C}(0,1)\,,\quad D(T) = \{x \in \mathbf{C}(0,1); x' \in \mathbf{C}(0,1)\}\,.$$

Nechť $\lambda \in \mathbf{C}$ je libovolné. Potom má rovnice $(\lambda I - T)x = 0$ neboli $\lambda x - x' = 0$ netriviální řešení

$$x(t) = e^{\lambda t}\,,\ \text{ tedy } \lambda \in \sigma_p(T) = \mathbf{C}\,.$$

Poznámka: Je-li $T : D(T) \subset \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ neomezený lineární operátor, může být $\sigma(T)$ neomezená množina, ale též $\sigma(T) = \emptyset$. Platí však, že $\sigma(T)$ je vždy uzavřená množina. To plyne z toho, že $\varrho(T)$ je i pro případ neomezeného operátoru otevřená množina.

3.2 Adjungované operátory.

Definice: Buď $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, kde $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jsou Banachovy prostory. Potom operátor $T^* : \mathbf{Y}^* \to \mathbf{X}^*$, definovaný předpisem

$$<Tx, y^*> = <x, T^*y^*> \;\; \forall x \in \mathbf{X} \text{ a } \forall y^* \in \mathbf{Y}^*$$

nazýváme adjungovaným operátorem k operátoru T.

Věta: Platí $T^* \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}^*,\mathbf{X}^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Důkaz: Poněvadž platí $T^* \circ y^* = y^* \circ T$ (skládání spojitých zobrazení), je $T^*y^* \in \mathbf{X}^*$. Dále

$$<x, T^*(\alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^*)> = <Tx, \alpha_1 y_1^* + \alpha_2 y_2^*> =$$

$$= \alpha_1 <Tx, y_1^*> + \alpha_2 <Tx, y_2^*> = \alpha_1 <x_1, T^*y_1^*> + \alpha_2 <x, T^*y_2^*>$$

a T^* je lineární zobrazení. Dále platí

$$\|T^*\| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} \|T^*y^*\| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |<x, T^*y^*>| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |<Tx, y^*>| =$$

$$= \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\|y^*\|\leq 1} |<Tx, y^*>| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \|T\|\,.$$

tedy platí $T^* \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}^*,\mathbf{X}^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Poznámka: Jsou-li $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ prostory konečné dimense, je T reprezentováno maticí, T^* maticí k ní transponovanou. Skutečně, je-li $\dim \mathbf{X} = n \;\; \dim \mathbf{Y} = p$, $\mathbf{X}$ má bázi $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\mathbf{Y}$ má bázi $\{f_j\}_{j=1}^p$, potom platí

$$Te_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} f_j \quad i = 1,\ldots,n$$

a tedy zobrazení T je reprezentováno maticí $\mathbf{A}$ typu $n \times p$, kde

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11}\,, & a_{12}\,, & \cdots & a_{1p} \\ a_{21}\,, & a_{22}\,, & \cdots\,, & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\,, & a_{n2}\,, & \cdots\,, & a_{np} \end{array} \right\|$$

Jestliže opatříme prostory $\mathbf{X}^*$ a $\mathbf{Y}^*$ t. zv. duálními bázemi, tedy

$$\mathbf{X}^* \;:\; \{e_i^*\}_{i=1}^n\,; \;\; \mathbf{Y}^* \;:\; \{f_j^*\}_{j=1}^p\,, \;\; \text{kde } <e_i, e_j^*> = \delta_{ij}\,; \;\; <f_i, f_j^*> = \delta_{ij}\,,$$

potom platí

$$<Te_i, f_j^*> = <\sum_{k=1}^{p} a_{ik} f_k, f_j^*> = a_{ij} \;\text{ a zároveň }\; <e_i, T^* f_j^*> = <e_i, \sum_{k=1}^{n} b_{jk} e_k^*> = b_{ji}\,,$$

neboli $a_{ij} = b_{ji}$ pro $i = 1, \ldots, n\,;\; j = 1, \ldots, p\,.$

Definice: Buď H Hilbertův prostor, $T \in \mathscr{L}(H)$. Potom adjungovaný operátor T^* definujeme vztahem

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \quad \forall x, y \in H\,.$$

Poznámka: Definice adjungovaného operátoru v Hilbertově prostoru se od obecné definice poněkud liší, jestliže H je Hilbertův prostor nad tělesem komplexních čísel $\mathbf{C}$. Buď $\dim H = n < \infty$ a nechť $\{e_i\}_{i=1}^n$ je ortonormální báze H. Označíme-li

$$Te_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j\,, \;\; T^* e_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} e_j\,; \;\; i, k = 1, \ldots, n\,,$$

potom platí

$$(Te_i, e_k) = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, e_k) = a_{ik} \;\text{ a zároveň }\; a_{ik} = (Te_i, e_k) = (e_i, T^* e_k) = (e_i, \sum_{j=1}^{n} b_{kj} e_j) = \overline{b_{ki}}\,.$$

Tedy je-li T reprezentováno maticí $A = \|a_{ij}\|$ a T^* maticí $B = \|b_{ij}\|$, potom $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$, neboli matice T^* je hermitovsky transponovaná k matici T.

Lemma: Jsou-li $T, U \in \mathscr{L}(H)$, potom $(TU)^* = U^* T^*$.

Důkaz: Platí

$$(TUx, y) = (Ux, T^* y) = (x, U^* T^* y)$$

a odtud plyne tvrzení.

Poznámky: 1. Tato skutečnost odpovídá pravidlu pro násobení transponovaných matic. Platí $(AB)^T = B^T A^T$, v případě komplexního H musíme brát opět hermitovsky transponované matice.

2. Je-li $T \in \mathscr{L}(H)$, potom je zřejmě $T^{**} = (T^*)^* = T$.

Definice: Buď $T \in \mathscr{L}(H)$, kde H je Hilbertův prostor. Potom jádrem operátoru T, které označíme $\operatorname{Ker} T$ nazveme množinu

$$\operatorname{Ker} T = \{x \in H; Tx = 0\}\,.$$

Poznámky: 1. Jádro můžeme definovat pro libovolný operátor $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, kde $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jsou B-prostory (dokonce i pro případ, že T není omezený operátor). V dalším však budeme tento pojem používat pouze pro $T \in \mathscr{L}(H)$.

2. $\operatorname{Ker} T$ je uzavřený podprostor H.

Důkaz: Je zřejmé, že $\operatorname{Ker} T$ tvoří podprostor H. Je-li $x \in \overline{\operatorname{Ker} T}$, potom existuje posloupnost bodů

$$x_n \in \operatorname{Ker} T \ \text{ tak, že } \ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\,.$$

Vzhledem k tomu, že T je spojité zobrazení, platí

$$0 = Tx_n \longrightarrow Tx = 0\,, \ \text{ tedy } \ x \in \operatorname{Ker} T\,.$$

Definice: Řekneme, že operátor $T \in \mathscr{L}(H)$ je samoadjungovaný, je-li $T = T^*$. Jestliže platí $T^*T = TT^*$, řekneme, že T je normální operátor.

Věta: Buď $T \in \mathscr{L}(H)$. Potom platí

$$\operatorname{Ker}(T^*) = R(T)^\perp \ \text{ a } \ \operatorname{Ker}(T) = R(T^*)^\perp\,.$$

Specielně, je-li $T(H) = H$, tedy T je zobrazení na, pak T^* je prosté zobrazení.

Důkaz: Nechť $T^*y = 0$. Potom platí

$$(x, T^*y) = 0 \ \ \forall x \in H\,, \ \text{ tedy } \ (Tx, y) = 0 \ \ \forall x \in H \ \text{ a } \ y \in R(T)^\perp\,.$$

druhé tvrzení plyne okamžitě z prvého, jestliže si uvědomíme, že $T^{**} = T$. Stačí zaměnit roli T a T^*.

Lemma: Buď $T \in \mathscr{L}(H)$, kde H je Hilbertův prostor. Potom platí

$$\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2\,.$$

Důkaz: Platí

$$\|T^*T\| \le \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2\,.$$

Obráceně

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) \le \|T^*T\| \cdot \|x\|^2$$

a odtud dostaneme, že $\|T\|^2 \le \|T^*T\|$.

Jestliže aplikujeme prvou část důkazu na T^* (je $\|T^*\| = \|T\|$), dostaneme, že

$$\|TT^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2\,.$$

Lemma: Buďte $U\,, V \in \mathscr{L}(H)$ a nechť

$$(Ux, x) = (Vx, x) \ \ \forall x \in H\,.$$

Potom je $U = V$.

Důkaz: Předpokládejme, že

$$(Ux, x) = (Vx, x) \ \ \forall x \in H\,, \ \text{ neboli } \ ((U - V)x, x) = 0 \ \ \forall x \in H\,.$$

Vzhledem k Rieszově reprezentaci funkcionálu na Hilbertově prostoru odtud plyne, že

$$(U - V)x = 0 \ \ \forall x \in H\,, \ \text{ neboli } \ U - V = 0\,.$$

Věta: Buď $T \in \mathscr{L}(H)$, kde H je Hilbertův prostor. Potom je T normální právě když pro všechna $x \in H$ platí $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

Důkaz: 1. Buď T normální. Potom platí

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (TT^*x, x) = (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2 .$$

2. Obráceně nechť $\|Tx\| = \|T^*x\| \ \ \forall x \in H$. Potom je

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x)$$

a odtud $T^*T = TT^*$ podle předchozího lemmatu.

Věta: Buď $T \in \mathscr{L}(H)$ normální, kde H je Hilbertův prostor. Potom je $r_\sigma(T) = \|T\|$.

Důkaz: Poněvadž $\forall y \in H$ platí $\|Ty\| = \|T^*y\|$ (T je normální), je pro

$$y = Tx \quad \|T^2x\| = \|T^*Tx\| \ \text{ a odtud } \ \|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$$

podle uvedeného lemmatu. Indukcí dostaneme, že $\|T^p\| = \|T\|^p$ pro čísla tvaru $p = 2^m$ a tedy

$$r_\sigma(T) = \lim_{p \to \infty} \|T^p\|^{\frac{1}{p}} = \|T\| .$$

Věta: Je-li $T \in \mathscr{L}(H)$ samoadjungovaný operátor, je $\sigma(T)$ reálné.

Důkaz: Buď $\lambda = \alpha + i\beta$, kde $\beta \neq 0$. Potom platí

$$\|(\lambda I - T)x\|^2 = ((\lambda I - T)x, (\lambda I - T)x) = ([(\alpha + i\beta)I - T]\,x, [(\alpha + i\beta)I - T]\,x) =$$

$$= \|(\alpha I - T)x\|^2 + (i\beta x, (\alpha I - T)x) + ((\alpha I - T)x, i\beta x) + |\beta|^2\,\|x\|^2 = \|(\alpha I - T)x\|^2 +$$

$$+ i\beta(x, (\alpha I - T)x) - i\beta((\alpha I - T)x, x) + |\beta|^2\,\|x\|^2 = \|(\alpha I - T)x\|^2 + i\beta((\alpha I - T)x, x) -$$

$$- i\beta((\alpha I - T)x, x) + |\beta|^2\,\|x\|^2 \geq |\beta|^2\|x\|^2$$

a tedy $\lambda \in \varrho(T)$.

Poznámka: Poněvadž se v dalším budeme zabývat kompaktními samoadjungovanými operátory, kde spektrum bude převážně bodové, stojí za to si uvézt vlastnosti charakteristických vektorů těchto operátorů.

Věta: Buď $T \in \mathscr{L}(H)$ samoadjungovaný operátor a nechť $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_p(T)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Potom jsou vlastní vektory odpovídající vlastním číslům λ_1 a λ_2 ortogonální.

Důkaz: Nechť $Tx_1 = \lambda_1 x_1\, , Tx_2 = \lambda_2 x_2\, ,\ \ x_1 \neq 0 \neq x_2$. Potom platí

$$\lambda_1(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = (Tx_1, x_2) = (x_1, Tx_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2) .$$

Poněvadž je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, musí být $(x_1, x_2) = 0$.

Poznámky: 1. Je-li $T \in \mathscr{L}(H)$ samoadjungovaný operátor, potom je t. zv. kvadratická forma (Tx, x) reálná pro všechna $x \in H$. Skutečně platí $(Tx, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)}$.

2.Je-li A symetrická matice, pak v prostoru konečné dimense n platí

$$x^T A = \left(\sum_{i=1}^n x_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n x_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n x_i a_{in} \right) \text{ a tedy } (Ax, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{x_j} \,,$$

což je kvadratická forma známá z lineární algebry.

3. Je-li $T \in \mathscr{L}(H)$ samoadjungovaný operátor, je kvadratická forma (Tx, x) reálná a můžeme definovat čísla

$$A = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) \ , \qquad a = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x) \,.$$

Dá se ukázat, že pro obě čísla a i A platí

$$a, A \in \sigma(T) \text{ a } \|T\| = \max\{|a|, |A|\} = r_\sigma(T) \,.$$

Příklady: 1. Operátor posunu (shift).

a) Buď $T : \mathbf{l}_2 \to \mathbf{l}_2$ dán předpisem.

$$\text{Je-li } x = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\} \,, \text{ pak } Tx = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots\}$$

(posun doleva). T je zřejmě lineární operátor a platí

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = \sum_{k=2}^\infty |\alpha_k|^2 \le \|x\|^2 \,.$$

Odtud plyne, že $\|T\| \le 1$. Jestliže zvolíme

$$x = e_2 = \{0, 1, 0, 0, \dots\} \,, \text{ je } Te_2 = e_1 = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \text{ a tedy } \|Te_2\| = \|e_1\| = 1 = \|e_2\|$$

a odtud plyne, že $\|T\| = 1$.

b) Zkoumejme dále, jak vypadá adjungovaný operátor T^*. Musí platit

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x, y \in \mathbf{l}_2 \,.$$

Je-li $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$, $y = \{\beta_k\}_{k=1}^\infty$, $T^*y = \{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$, potom pro $e_k = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$ (jednička je na k-té pozici) platí

$$\begin{array}{lll} (Te_1, y) = 0 \ , & (e_1, T^*y) = \gamma_1 & \text{a tedy } \gamma_1 = 0 \\ (Te_2, y) = \beta_1 \ , & (e_2, T^*y) = \gamma_2 & \text{a tedy } \gamma_2 = \beta_1 \\ (Te_3, y) = \beta_2 \ , & (e_3, T^*y) = \gamma_3 & \text{a tedy } \gamma_3 = \beta_2 \,. \end{array}$$

Odtud plyne, že $T^*x = \{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ a T^* je opět operátor posunu, ale doprava. Kromě toho

$$TT^*x = T\{0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} = x \ ; \ T^*Tx = T^*\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots\} = \{0, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$$

neboli $TT^* = I$, ale $T^*T \ne I$. Operátor T má pravý inversní, ale nemá levý inversní. Dále platí $\operatorname{Ker} T = [\{e_1\}] = R(T^*)^\perp$. Je-li $T^*x = 0$, potom $x = 0$, tedy $\operatorname{Ker} T^* = R(T)^\perp = \{0\}$ a T je zobrazení $\mathbf{l}_2$ na celé $\mathbf{l}_2$.

c) Nechť nyní $(\lambda I - T)x = 0$, neboli $\lambda\alpha_k - \alpha_{k+1} = 0$ pro $k = 1, 2, \dots$. Rozepsáním dostaneme

$$\begin{array}{lcl} \lambda\alpha_1 - \alpha_2 = 0 & \Longrightarrow & \alpha_2 = \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 - \alpha_3 = 0 & \Longrightarrow & \alpha_3 = \lambda\alpha_2 = \lambda^2\alpha_1 \\ \lambda\alpha_3 - \alpha_4 = 0 & \Longrightarrow & \alpha_4 = \lambda\alpha_3 = \lambda^3\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda\alpha_{n-1} - \alpha_n = 0 & \Longrightarrow & \alpha_n = \lambda\alpha_{n-1} = \lambda^{n-1}\alpha_1 \end{array}$$

Aby prvek $\{1, \lambda, \lambda^2, \dots\}$ patřil do $\mathbf{l}_2$, je nutné a stačí, aby $|\lambda| < 1$. Tedy

$$\{\lambda \in \mathbf{C}; |\lambda| < 1\} = \sigma_p(T) \,.$$

Odtud plyne, že
$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbf{C}; |\lambda| \le 1\} \quad [\,\text{Je } \|T\| = 1\,]\,.$$
Nechť $|\lambda| = 1$. Potom je $\lambda \in \sigma_c(T)$. Předpokládejme, že platí $\lambda \in \sigma_r(T)$. Potom existuje $y \in \mathbf{l}_2$, $y = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že
$$(\,(\lambda I - T)x, y) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{l}_2\,.$$
Zvolme $x = e_1$; potom $(\lambda I - T)e_1 = \{\lambda, 0, 0, \dots\}$ a dostaneme, že $\beta_1 = 0$. Je-li $x = e_2$, platí $(\lambda I - T)e_2 = \{-1, \lambda, 0, 0, \dots\}$ a odtud $\beta_2 = 0$. Jestliže budeme pokračovat dále, dostaneme, že jediný vektor, který je kolmý na $R(\lambda I - T)$, je vektor nulový, neboli $\overline{R(\lambda I - T)} = \mathbf{l}_2$.

d) Dále popíšeme $\sigma(T^*)$. Je-li $|\lambda| > 1$, potom je $\lambda \in \varrho(T^*)$. Nechť je nyní $|\lambda| \le 1$ a řešme rovnici
$$(\lambda I - T^*)x = 0 \qquad [\ x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}\ ]\,.$$
Potom platí
$$\lambda\alpha_1 = 0\ ; \qquad \lambda\alpha_2 - \alpha_1 = 0\ ; \qquad \dots\ ; \qquad \lambda\alpha_{n+1} - \alpha_n = 0\ ; \qquad \dots\,.$$
Tato soustava má pouze triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$, tedy $\lambda I - T^*$ je prostý operátor. Je-li nyní $|\lambda| < 1$, potom je
$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = 1\,, \ \text{ neboli } \ \dim R\{(\lambda I - T)^*\}^{\perp} = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = 1 \ \text{ a } \ \lambda \in \sigma_r(T^*)\,.$$
Nechť $|\lambda| = 1$. Potom platí
$$\{0\} = \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = R\{(\lambda I - T)^*\}^{\perp}\,, \ \text{ neboli } \ \lambda \in \sigma_c(T^*)\,.$$

Poznámky: 1. Je-li $T \in \mathscr{L}(H)$, potom $(\lambda I - T)^* = \overline{\lambda} I - T^*$.

Důkaz: Platí
$$(\,(\lambda I - T)x, y) = \lambda(x, y) - (Tx, y) = (x, \overline{\lambda} y) - (x, T^* y) = (x, (\overline{\lambda} I - T^*)y)$$
o odtud plyne tvrzení.

2. Platí dokonce následující tvrzení. Je-li $\lambda \in \sigma(T)$, potom $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

Důkaz: Nechť $\lambda \in \varrho(T)$, tedy existuje $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(H)$ a platí
$$(\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} = (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T) = I\,.$$
Přechodem k adjungovaným operátorům dostaneme
$$[\,(\lambda I - T)^{-1}\,]^*(\overline{\lambda} I - T^*) = (\overline{\lambda} I - T^*)[\,(\lambda I - T)^{-1}\,]^* = I^* = I$$
a musí tedy platit, že
$$[\,(\lambda I - T)^{-1}\,]^* = (\overline{\lambda} I - T^*)^{-1}\,.$$

<u>Příklad 2.</u> Buď $T : \mathbf{l}_1 \to \mathbf{l}_1$ dán předpisem: Je-li
$$x \in \mathbf{l}_1 \ \ x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}\,, \ \ z \in \mathbf{l}_\infty \ \ z = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}\,, \ \text{ potom } \ y = Tx = \{\alpha_k \xi_k\}_{k=1}^{\infty}\,.$$
a) T je zřejmě lineární zobrazení a platí
$$\|Tx\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k| \le \sup_{k=1,2,\dots} |\xi_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| = \|z\| \cdot \|x\|\,.$$
Odtud plyne, že T je omezený operátor a $\|T\| \le \|z\|$. Jestliže zvolíme
$$x_n = \{0, \dots, 0, \operatorname{sgn} \xi_n, 0, \dots\}\,, \ \text{ je } \ x_n \in \mathbf{l}_1 \ \text{ a } \ \|x_n\| = 1 \ \text{ jakmile } \ \xi_n \ne 0\,.$$

Dále platí, že $\|Tx_n\| = |\xi_n| \;\; \forall n \in \mathbf{N}$ a odtud plyne, že $\|T\| = \|z\|$.

b) Adjungovaný operátor. Poněvadž $T : \mathbf{l}_1 \to \mathbf{l}_1$, platí, že $T^* : \mathbf{l}_\infty \to \mathbf{l}_\infty$ a

$$<Tx, y> = <x, T^*y> \;\; \forall x \in \mathbf{l}_1\,, \;\; x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}\,; \;\; \forall y \in \mathbf{l}_\infty\,, \;\; y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}\,.$$

Označme $T^*y = u = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$; potom je

$$<Tx, y> = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k \eta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k = <x, T^*y>\,.$$

Jestliže položíme $x_n = e_n$ pro $n = 1, 2, \dots$, dostaneme $\xi_n \eta_n = \mu_n \;\; \forall n \in \mathbf{N}$ a odtud $T^*y = \{\xi_k \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dále

$$\|T^*y\| = \sup_{k=1,2,\dots} |\xi_k \eta_k| \le \sup_{k=1,2,\dots} |\xi_k| \sup_{k=1,2,\dots} |\eta_k| = \|z\| \cdot \|y\|\,.$$

To znamená, že $\|T^*\| \le \|z\|$ a poněvadž je obecně $\|T^*\| = \|T\|$, dostaneme $\|T^*\| = \|z\|$.

c) Spektrum T. Nechť $Tx = \lambda x$, neboli $\alpha_k \xi_k = \lambda \alpha_k$ pro $k = 1, 2, \dots$. Je-li $\lambda = \xi_k$, potom $x_k = e_k$ je vlastní vektor, příslušný vlastnímu číslu $\lambda_k = \xi_k$. Jiná vlastní čísla neexistují, tedy $\sigma_p(T) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$. Označme $B = \overline{\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}}$ a buď $\lambda \in \mathbf{C}$ takové, že $\mathbf{d}(B, \lambda) = d > 0$. Tvrdíme, že $\lambda \in \varrho(T)$, neboli ke každému $y \in \mathbf{l}_1$ existuje jediné řešení rovnice $(\lambda I - T)x = y$. Buď $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Potom

$$\lambda \alpha_k - \xi_k \alpha_k = \beta_k \;\text{ pro }\; k = 1, 2, \dots\,, \;\text{ neboli }\; \alpha_k = \frac{\beta_k}{\lambda - \xi_k}\,.$$

Odtud plyne, že

$$(\lambda I - T)^{-1} x = \left\{ \frac{\alpha_k}{\lambda - \xi_k} \right\}_{k=1}^{\infty}\,.$$

Abychom to ověřili, musíme dokázat, že pro všechna $x \in \mathbf{l}_1$ platí

$$(\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1} x = (\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)x = x\,.$$

To je však rutinní záležitost. Platí

$$(\lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1}\{\alpha_k\} = (\lambda I - T)\left\{ \frac{\alpha_k}{\lambda - \xi_k} \right\} = \left\{ \frac{\lambda \alpha_k}{\lambda - \xi_k} - \frac{\xi_k \alpha_k}{\lambda - \xi_k} \right\} = \{\alpha_k\} = x\,,$$

$$(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T)\{\alpha_k\} = (\lambda I - T)^{-1}\{(\lambda - \xi_k)\alpha_k\} = \left\{ \frac{(\lambda - \xi_k)\alpha_k}{\lambda - \xi_k} \right\} = \{\alpha_k\} = x\,.$$

Je tedy $\sigma(T) = B$. [$\sigma(T)$ musí být kompaktní množina.]

Nechť λ je hromadný bod posloupnosti $\{\xi_k\}$ takový, že $\lambda \ne \xi_k \;\; \forall k \in \mathbf{N}$ (pokud takový bod existuje). Potom je $\lambda \in \sigma_c(T)$.

Důkaz: Předpokládejme, že $\lambda \in \sigma_r(T)$. Potom je $\overline{(\lambda I - T)\mathbf{l}_1} \ne \mathbf{l}_1$ a podle Hahn-Banachovy věty existuje funkcionál

$$v \in \mathbf{l}_\infty\,, \;\; v = \{\nu_k\}_{k=1}^{\infty} \;\text{ tak, že }\; \|v\| = 1 \;\text{ a }\; <(\lambda I - T)x, v> = 0 \;\; \forall x \in \mathbf{l}_1\,.$$

To znamená, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda - \xi_k)\alpha_k \nu_k = 0$. Jestliže položíme $x_k = e_k$, dostaneme opět $(\lambda - \xi_k)\nu_k = 0$ pro $k = 1, 2, \dots$. Poněvadž je $\lambda - \xi_k \ne 0$, plyne odtud, že $\nu_k = 0$ pro $k = 1, 2, \dots$. To je však spor s předpokladem, že $\|v\| = 1$.

Poznámky: 1. Předchozí příklad opět ukazuje, že každá kompaktní podmnožina komplexní roviny $\mathbf{C}$ může být spektrem omezeného operátoru. Je-li $K \subset \mathbf{C}$, pak v ní stačí zvolit hustou spočetnou podmnožinu $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ a využít výsledků předchozího příkladu.

2. Stejný operátor můžeme definovat též jako $T : \mathbf{l}_2 \to \mathbf{l}_2$. Musíme však býti opatrní, poněvadž hilbertovský adjungovaný operátor T^* bude definován pomocí prvku $\overline{z} = \{\overline{\xi_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Příklad 3. Buď $T : \mathbf{L}_2(a,b) \to \mathbf{L}_2(a,b)$ definován předpisem

$$Tf(s) = \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt\,,$$

kde $K(s,t)$ je zatím blíže neurčená funkce dvou proměnných. Vzhledem k vlastnostem integrálu je zřejmé, že T je lineární zobrazení. Nyní budeme hledat podmínku, za níž je T omezený operátor. Užitím Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$|Tf(s)| \le \int_a^b |K(s,t)\, f(t)|\, dt \le \left\{ \int_a^b |K(s,t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b |f(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}\,,$$

neboli $|\,Tf(s)\,|^2 \le \int_a^b |K(s,t)|^2 dt \cdot \|f\|^2$ a odtud

$$\|Tf\|^2 \le \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dt\, ds \cdot \|f\|^2\,.$$

Výsledek můžeme nyní shrnout do věty.

Věta: Nechť $K \in \mathbf{L}_2(D)$, kde $D = \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle$. Potom je operátor T, definovaný předpisem

$$Tf(s) = \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt\,,$$

omezený lineární operátor na $\mathbf{L}_2(a,b)$ a platí

$$\|T\| \le \|K\| = \left\{ \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds\, dt \right\}^{\frac{1}{2}}\,.$$

Poznámky: 1. Jestliže vyjdeme rovnou z vyjádření $\|Tf\|^2 = (Tf, Tf)$, dostaneme stejný výsledek. Navíc se dá ukázat, že platí dokonce $\|T\| = \|K\|$.

2. V další části tohoto příkladu najdeme tvar adjungovaného operátoru.

Buďte $f\,, g \in \mathbf{L}_2(a,b)$ a označme $h = T^*g$. Potom platí

$$(Tf,g) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s,t)\, f(t)\, dt \right\} \overline{g(s)}\, ds = \int_a^b f(t) \left\{ \int_a^b K(s,t)\, \overline{g(s)}\, ds \right\} dt =$$

$$= \int_a^b \left\{ f(t) \int_a^b \overline{\overline{K(s,t)} g(s)}\, ds \right\} dt\,.$$

Na druhé straně platí

$$(Tf,g) = (f, T^*g) = \int_a^b f(t)\, \overline{h(t)}\, dt \ \text{ a odtud } \ h(t) = T^*g(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}\, g(s)\, ds\,.$$

Navíc operátor T je samoadjungovaný, jestliže platí $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$.

3.3 Kompaktní operátory.

Definice: Buďte $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ B-prostory $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ lineární zobrazení, $\mathbf{U}$ uzavřená jednotková koule v $\mathbf{X}$, t. j. $\mathbf{U} = \{x \in \mathbf{X}; \|x\| \leq 1\}$. Řekneme, že T je kompaktní operátor, je-li $\overline{T\mathbf{U}}$ kompaktní podmnožina $\mathbf{Y}$.

Lemma: Kompaktní zobrazení je spojité, tedy $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Důkaz: Poněvadž $\overline{T(\mathbf{U})}$ je kompaktní množina, je omezená a T je omezené zobrazení na jednotkové kouli, tedy spojité.

Lemma: Je-li $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ kompaktní operátor, potom pro libovolnou omezenou množinu $F \subset \mathbf{X}$ je $\overline{T(F)}$ kompaktní v $\mathbf{Y}$.

Důkaz: Poněvadž F je omezená množina, existuje číslo $\alpha > 0$ tak, že $\alpha F \subset \mathbf{U}$, tedy $\overline{T(\alpha F)} \subset \overline{T(\mathbf{U})}$. $\overline{T(\mathbf{U})}$ je ale kompaktní množina, takže i $\overline{T(F)}$ je kompaktní.

Věta: Je-li $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ kompaktní operátor, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$ v $\mathbf{X}$, potom posloupnost $\{Tx_n\}$ konverguje silně v $\mathbf{Y}$.

Důkaz: Nechť $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$. Potom je $\{x_n\}$ omezená posloupnost a tedy posloupnost $\{Tx_n\}$ obsahuje konvergentní podposloupnost. Nechť $Tx_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} y \in \mathbf{Y}$. Ukážeme, že i posloupnost $\{Tx_n\}$ konverguje k y. Kdyby to tak nebylo, pak existuje podposloupnost $\{Tx_{m_k}\}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $\|Tx_{m_k} - y\| \geq \varepsilon$. Poněvadž je $\{Tx_{m_k}\}$ totálně omezená, lze z ní vybrat posloupnost konvergentní. Předpokládejme, že $\{Tx_{m_k}\}$ je již konvergentní a nechť $Tx_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} z \in \mathbf{Y}$. Potom je $\|y - z\| \geq \varepsilon$ a podle Hahn-Banachovy věty existuje $y^* \in \mathbf{Y}^*$ tak, že $<y, y^*> \neq <z, y^*>$. Označme $x^* = T^*y^*$. Potom platí

$$<x_{n_k}, x^*> = <x_{n_k}, T^*y^*> = <Tx_{n_k}, y^*> \to <y, y^*> \text{ a stejně}$$

$$<x_{m_k}, x^*> = <x_{m_k}, T^*y^*> = <Tx_{m_k}, y^*> \to <z, y^*>.$$

To je však spor s tím, že $x_n \xrightarrow{w} x$.

Poznámka: Je možno ukázat, že v reflexivních prostorech $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ je předchozí charakterizace ekvivalentní s definicí kompaktnosti. Tedy kompaktní operátor lze definovat tak, že každou slabě konvergentní posloupnost převádí na silně konvergentní.

Věta: Buďte $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ dva Banachovy prostory a označme $\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ množinu všech kompaktních operátorů z $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Potom platí

1. $\mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tvoří uzavřený podprostor $\mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.
2. Je-li $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, $T \in \mathcal{C}(\mathbf{X})$ kompaktní operátor, $A \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$, potom AT i TA patří do $\mathcal{C}(\mathbf{X})$.

Důkaz: 1. Je zřejmé, že pro $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$ a $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ je $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Nechť $T_n \in \mathcal{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), T_n \to T$, tedy $\|T_n - T\| \to 0$. Potom

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbf{N} \text{ tak, že } \|T_k x - Tx\| < \varepsilon \ \forall x \in \mathbf{U}.$$

Poněvadž je $T_k(\mathbf{U})$ totálně omezená množina, existuje konečná množina $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ tak, že

$$\min_j \|T_k x - T_k x_j\| < \varepsilon \ \forall x \in \mathbf{U}.$$

Nyní pro $x \in \mathbf{U}$ platí

$$\|Tx - Tx_j\| \leq \|Tx - T_k x\| + \|T_k x - T_k x_j\| + \|T_k x_j - Tx_j\| \leq 2\varepsilon + \|T_k x - T_k x_j\|$$

neboli $\min_j \|Tx - Tx_j\| \leq 3\varepsilon$ a množina $T(\mathbf{U})$ je totálně omezená.

2. Je-li $\mathbf{U}$ uzavřená jednotková koule v $\mathbf{X}$, pak $A(\mathbf{U})$ je omezená množina, tedy $TA(\mathbf{U})$ je totálně omezená. Obráceně poněvadž $T(\mathbf{U})$ je totálně omezená množina, je i $AT(\mathbf{U})$ totálně omezená.

Poznámky: 1. $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ tvoří v $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ t.zv. oboustranný ideál. Ideál v algebře je podprostor, který je uzavřený vzhledem k násobení libovolným prvkem dané algebry.

2. Je možné ukázat, že $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ je kompaktní právě když je T^* kompaktní. Toto tvrzení nebudeme dokazovat, ale ukážeme silnější tvrzení v Hilbertově prostoru.

Věta: Buď H Hilbertův prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní

1. T je kompaktní	2. T^*T je kompaktní
3. T^* je kompaktní	4. TT^* je kompaktní.

Důkaz: Ukážeme, že platí

$$1 \implies 4 \implies 3 \implies 2 \implies 1 .$$

Implikace $1 \Rightarrow 4$ plyne z předchozí věty a stejně tak implikace $3 \Rightarrow 2$. Jestliže ukážeme, že platí implikace $2 \Rightarrow 1$, dostaneme přechodem k adjungovaným operátorům i implikaci $4 \Rightarrow 3$.

Nechť je tedy operátor T^*T kompaktní a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom existují vektory $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbf{U}$ tak, že pro všechna $x \in \mathbf{U}$ platí $\min_j \|T^*T(x - x_j)\| < \frac{1}{2}\varepsilon^2$. Nyní je

$$\| T(x - x_j) \|^2 = (T(x - x_j), T(x - x_j)) = (T^*T(x - x_j), x - x_j) \leq \| T^*T(x - x_j)\| \cdot \|x - x_j\| \leq$$
$$\leq 2\| T^*T(x - x_j)\| \text{ a tedy } \min_j \| T(x - x_j)\|^2 \leq 2 \min_j \| T^*T(x - x_j) \| < \varepsilon^2 .$$

Věta: Buď $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ kompaktní operátor, kde $\mathbf{X}$ je B-prostor a nechť $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Potom je $\lambda \in \sigma_p(T)$ a prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ má konečnou dimensi.

Důkaz: Nebudeme provádět.

Důsledek: Množina vlastních čísel kompaktního operátoru $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ je buď konečná nebo spočetná. Potom je $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Poznámka: Je-li $T \in \mathcal{L}(H)$ kompaktní samoadjungovaný operátor, potom pro každé vlastní číslo $\lambda \neq 0$ má $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ konečnou dimensi. Můžeme zde tedy zvolit ortonormální bázi. Dále jsou-li $\lambda \neq \mu$ dvě vlastní čísla, pak jejich odpovídající vlastní vektory jsou ortogonální. Jestliže vlastní čísla operátoru T jsou $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, pak je můžeme seřadit tak, že $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$. Dále každé vlastní číslo λ_n budeme počítat tolikrát, kolik je $\dim(\lambda_n I - T)H$. Při této úmluvě platí.

Věta: (Kanonický tvar kompaktního samoadjungovaného operátoru)

Buď H Hilbertův prostor, $T \in \mathcal{L}(H)$ kompaktní a samoadjungovaný operátor. Potom platí pro všechna $x \in H$

$$Tx = \sum_n \lambda_n (x, \varphi_n) \varphi_n ,$$

kde $\{\varphi_n\}$ je ortonormální systém vlastních vektorů odpovídající vlastním číslům λ_n.

Poznámka: Podle věty z paragrafu 2.6 lze libovolný vektor $x \in H$ vyjádřit jednoznačně ve tvaru $x = y + z$, kde $y \in \operatorname{Ker} T$ (uzavřený podprostor) a $z \in [\operatorname{Ker} T]^{\perp}$. Lze ukázat, že v $[\operatorname{Ker} T]^{\perp}$ existuje úplný ortonormální systém, složený z vlastních vektorů T. Označme jej $\{\varphi_n\}$. Tedy

$$x = y + \sum \alpha_n \varphi_n \quad \text{kde} \quad \alpha_n = (z, \varphi_n) = (y + z, \varphi_n) = (x, \varphi_n)\,.$$

Tudíž platí

$$T\,x = T(y+z) = T\,z = T\left\{\sum_n (x,\varphi_n)\,\varphi_n\right\} = \sum_n (x,\varphi_n)\,T\,\varphi_n = \sum_n \lambda_n (x,\varphi_n)\,\varphi_n\,.$$

Příklady: 1. Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{l}_2)$ dán předpisem

$$Tx = \{\,\xi_j\,\alpha_j\,\}_{j=1}^{\infty}\,, \quad \text{kde} \quad x = \{\alpha_j\} \quad \text{a} \quad u = \{\xi_j\} \in \mathbf{c}_0\,.$$

Najděte operátor T^*, $\sigma(T)$ a $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$ pro $\lambda \in \varrho(T)$. Ukažte dále, že T je kompaktní.

Řešení: a) Adjungovaný operátor: označne $y = \{\beta_j\}$, $T^* y = z = \{\gamma_j\}$. Potom platí $(Tx, y) = (x, T^* y)$ a pro $x = e_k$ dostaneme $\xi_k \overline{\beta_k} = \overline{\gamma_k}$. Odtud plyne, že $T^* x = \{\overline{\xi_k}\alpha_k\}$. Z vyjádření T^* dále plyne, že T je samoadjungovaný právě když jsou ξ_k reálná.

b) Spektrum T: buď $Tx = \lambda\,x$. Potom je zřejmé, že pro $\lambda = \xi_k$ platí $Te_k = \lambda\,e_k$, neboli $\xi_k \in \sigma_p(T)$. Ukážeme, že pro všechna $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq \xi_k$, $\lambda \neq 0$ platí $\lambda \in \varrho(T)$.

c) Resolventa $R(\lambda, T)$: poněvadž pro $\|T\|$ platí $\|Tx\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 |\alpha_k|^2 \leq \|u\|^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$, tedy $\|Tx\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$ a odtud $\|T\| \leq \|u\|$. Pro $|\lambda| > \|u\|$ nyní platí $T^2 x = T(Tx) = T\{\xi_k \alpha_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\xi_k^2 \alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, neboli

$$R(\lambda,T)\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n\,x}{\lambda^{n+1}} = \left\{\alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_1^n}{\lambda^{n+1}}, \alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_2^n}{\lambda^{n+1}}, \dots, \alpha_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_k^n}{\lambda^{n+1}}, \dots\right\} =$$

$$= \left\{\frac{\alpha_1}{\lambda}\,\frac{1}{1-\frac{\xi_1}{\lambda}}, \frac{\alpha_2}{\lambda}\,\frac{1}{1-\frac{\xi_2}{\lambda}}, \dots, \frac{\alpha_k}{\lambda}\,\frac{1}{1-\frac{\xi_k}{\lambda}}, \dots\right\} = \left\{\frac{\alpha_1}{\lambda-\xi_1}, \frac{\alpha_2}{\lambda-\xi_2}, \dots, \frac{\alpha_k}{\lambda-\xi_k}, \dots\right\}.$$

Tento prvek patří do $\mathbf{l}_2$ pro všechna $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq \xi_k$, $\lambda \neq 0$. Skutečně nechť $\lambda \notin \overline{\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}}$, potom $\inf\limits_k \mathbf{d}(\lambda, \xi_k) = \varepsilon > 0$ a tedy $\frac{1}{|\lambda-\xi_k|^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$, $\frac{|\alpha_k|^2}{|\lambda-\xi_k|^2} \leq \frac{|\alpha_k|^2}{\varepsilon^2}$ neboli $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{|\lambda-\xi_k|^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\,\|x\|^2 < \infty$. Odtud plyne, že $\sigma(T) = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{0\}$.
Jestliže pro nějaké k platí $\xi_k = 0$, potom $0 \in \sigma_p(T)$. Nechť tedy $\xi_k \neq 0$ $\forall k \in \mathbf{N}$; potom pro $R(T) = \{\xi_k \alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $x = \{\alpha_k\}$ je libovolný prvek $\mathbf{l}_2$ zřejmě platí $\overline{R(T)} = \mathbf{l}_2$ a $0 \in \sigma_c(T)$.
d) Kompaktnost T. Definujme posloupnost $\{T_n\}$ následujícím způsobem

$$T_n x = \{\xi_1 \alpha_1, \xi_2 \alpha_2, \dots, \xi_n \alpha_n, 0, 0, \dots\}\,.$$

Potom je T_n konečnědimensionální a tedy kompaktní. Dále pro všechna $x \in \mathbf{l}_2$ platí

$$\|Tx - T_n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^2 |\alpha_k|^2 \leq \sup_{k>n} |\xi_k|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leq \sup_{k>n} |\xi_k|^2\,\|x\|^2 = c_n\,\|x\|^2\,,$$

kde $c_n = \sup\limits_{k>n} |\xi_k|^2$. Platí tedy, že $\|T - T_n\|^2 \leq c_n$ a vzhledem k tomu, že $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = 0$, musí být $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ a T je kompaktní. T je možno vyjádřit v kanonickém tvaru

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, \varphi_k)\,\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\,\alpha_k\,e_k\,.$$

2.Buď $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{j=1}^{\infty}$ nekonečná matice a definujme oprátor $T : \mathbf{l}_2 \to \mathbf{l}_2$ předpisem

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\alpha_j \ \text{ pro } \ i = 1, 2, \dots ; \ \ x = \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}.$$

Aby $T \in \mathscr{L}(\mathbf{l}_2)$, musí platit $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\,(Tx)_i\,|^2 < \infty$. Pro β_i platí

$$|\,\beta_i\,| = |\,(Tx)_i\,| \le \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|\,|\alpha_j| \le \left\{\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \|x\| \ \left\{\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Odtud $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2 \le \|x\|^2 \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2$ a hledaná podmínka je

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty. \ \text{Zároveň platí } \ \|T\| \le \left\{\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ukážeme, že T je kompaktní. Definujme posloupnost projekcí $\{P_n\}$ předpisem

$$P_n x = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots\}.$$

Každá projekce P_n je konečnědimensionální a tedy kompaktní. Označme dále $Tx = y = \{\beta_i\}$, $z_n = P_n y - y$. Potom je

$$z_n = \{0, 0, \dots, 0, \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+1,j}\,\alpha_j, \sum_{j=1}^{\infty} a_{n+2,j}\,\alpha_j, \dots\},$$

kde z_n začíná n nulami. Pro $(z_n)_i$, $\ i \ge n+1$ platí

$$|\,(z_n)_i| \le \left\{\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \|x\|.$$

Odtud plyne, že

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\,(z_n)_i|^2 \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \,\|x\|^2$$

a tedy $\|P_n T - T\|^2 \le \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Kapitola 4

Cvičení.

4.1 Metrické prostory.

1. Rozhodněte, které z daných předpisů definují metriku na $\mathbf{R}$.

   (a) $\mathbf{d}(x,y) = (x-y)^2$
   (b) $\mathbf{d}(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

2. Buď $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ metrický prostor. Ukažte, že platí

   (a) $|\mathbf{d}(x,z) - \mathbf{d}(y,z)| \leq \mathbf{d}(x,y) \ \ \forall\, x,y,z \in \mathbf{X}$.
   (b) $|\mathbf{d}(x,y) - \mathbf{d}(u,v)| \leq \mathbf{d}(x,u) + \mathbf{d}(y,v) \ \ \forall\, x,y,u,v \in \mathbf{X}$.

3. Diskrétní metrický prostor.

   Buď $\mathbf{X}$ libovolná množina. Definujme $\mathbf{d}$ předpisem

   $$\mathbf{d}(x,y) = 1 \ \ \forall\, x,y \in \mathbf{X} \ \ x \neq y \quad \mathbf{d}(x,x) = 0\,.$$

   Ukažte, že $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ je metrický prostor.

4. Ukažte, že předpisy $\mathbf{d}_p(x,y)$ a $\mathbf{d}_\infty(x,y)$, definující vzdálenost v $\mathbf{l}_p^n$ a $\mathbf{l}_\infty^n$, jsou skutečně metriky.

5. Ověřte axiomy metriky v prostoru $\mathbf{C}(a,b)$.

6. Buď $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ metrický prostor. Ukažte, že $\widetilde{\mathbf{d}}(x,y) = \frac{\mathbf{d}(x,y)}{1+\mathbf{d}(x,y)}$ $\forall x,y \in \mathbf{X}$ je metrika, při níž je $\mathbf{X}$ omezený prostor.

7. Ukažte, že funkce $\mathbf{d}$ na prostoru $\mathbf{s}$ je metrika.

8. Popište konvergenci v prostorech $\mathbf{l}_p^n$, $\mathbf{l}_\infty^n$, $\mathbf{C}(a,b)$, $\mathbf{s}$.

9. Nechť pro dvě metriky $\mathbf{d}$ a $\mathbf{d}'$ na prostoru $\mathbf{X}$ platí: Existují konstanty $\alpha\,, \beta > 0$ tak, že

   $$\alpha\, \mathbf{d}(x,y) \leq \mathbf{d}'(x,y) \leq \beta\, \mathbf{d}(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbf{X}\,.$$

   Ukažte, že potom existují konstanty $a, b > 0$ tak, že

   $$a\, \mathbf{d}'(x,y) \leq \mathbf{d}(x,y) \leq b\, \mathbf{d}'(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbf{X}\,.$$

10. Ukažte, že metriky $\mathbf{d}_p$ a $\mathbf{d}_\infty$ jsou ekvivalentní pro libovolné $p \geq 1$.

11. Ukažte, že $\lim\limits_{p\to\infty} \mathbf{d}_p(x,y) = \mathbf{d}_\infty(x,y)$.

12. Načrtněte, jak vypadají koule v prostorech $\mathbf{l}_p^2$ pro $p = 1, 2$ a $\mathbf{l}_\infty^2$.

13. Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor. Ukažte, že $\mathbf{X}$ a prázdná množina $\emptyset$ jsou zároveň otevřené i uzavřené množiny.

14. Dokažte de Morganova pravidla

$$X - \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X - A_\alpha) \ ; \ X - \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X - A_\alpha) \,,$$

kde α probíhá libovolnou t.zv. indexovou množinu, X a A_α jsou libovolné množiny.

15. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{R}$, $G = (0,1)$, $F = \langle 0, 1\rangle$. Ukažte, že existují posloupnosti $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených intervalů a $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ uzavřených intervalů tak, že

$$G = \bigcup_{n=1}^\infty F_n \ ; \ F = \bigcap_{n=1}^\infty G_n \,.$$

16. Buď $\mathbf{X}$ metrický prostor, $G \subset \mathbf{X}$ otevřená množina a $F \subset \mathbf{X}$ uzavřená množina. Ukažte, že existuje posloupnost $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ otevřených množin a $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ uzavřených množin tak, že

$$G = \bigcup_{n=1}^\infty F_n \ ; \ F = \bigcap_{n=1}^\infty G_n \,.$$

17. Buď $\mathbf{X} = \langle 0, 1\rangle$, A množina všech racionálních čísel intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Najděte $\operatorname{Int} A$, $\overline{A}$, $\partial(A)$.

18. Ukažte, že každá konvergentní posloupnost bodů metrického prostoru je cauchyovská.

19. Buď $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská posloupnost bodů metrického prostoru a nechť existuje vybraná posloupnost $\{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ tak, že $x_{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Ukažte, že $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

20. Ukažte, že prostory $\mathbf{l}_p^n$, $\mathbf{l}_\infty^n$ a $\mathbf{C}(a,b)$ jsou úplné.

21. Buď $\mathbf{X} = (0,1) \cup \langle 2, 3\rangle$ a označme $A = (0,1)$, $B = \langle 2, 3\rangle$. Ukažte, že A je uzavřená, ale není úplná. B je úplná a tedy uzavřená. Ukažte dále, že A i B jsou zároveň otevřené množiny.

22. Buďte $(\mathbf{X}_j, \mathbf{d}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ metrické prostory, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \cdots \times \mathbf{X}_n$. Ukažte, že $\mathbf{X}$ je metrický prostor, jestliže definujeme metriku $\mathbf{d}$ na $\mathbf{X}$ jedním z předpisů

$$\mathbf{d}(x,y) = \left\{ \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_j^p(x_j, y_j) \right\}^{\frac{1}{p}} , \ p \geq 1 \ \text{nebo} \ \mathbf{d}(x,y) = \max_{1\leq j\leq n} \mathbf{d}_j(x_j, y_j) \,.$$

23. Ukažte, že prostor $\mathbf{X}$ z předchozího cvičení je úplný právě když jsou úplné prostory $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$.

24. Ukažte, že prostory $\mathbf{l}_p^n$, $\mathbf{l}_\infty^n$ a $\mathbf{C}(a,b)$ jsou separabilní.

25. Ukažte, že množina $\mathbf{Q}$ všech racionálních čísel je spočetná.

26. Dokažte, že spočetné sjednocení spočetných množin je množina spočetná.

27. Dokažte, že interval $\mathcal{I} = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$, kde $a_j \leq b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ je kompaktní množina.

28. Ukažte, že každá podmnožina totálně omezené množiny je totálně omezená.

29. Ukažte, že každá uzavřená podmnožina kompaktního metrického prostoru $\mathbf{X}$ je kompaktní.

30. Buď $\mathbf{X}$ diskrétní metrický prostor (cvičení 3). Popište otevřené a uzavřené podmnožiny $\mathbf{X}$. Je $\mathbf{X}$ úplný ? Za jakých podmínek je $\mathbf{X}$ separabilní nebo kompaktní ?

31. Buďte $X\,,Y$ dvě množiny $f: X \to Y$ zobrazení. Ukažte, že platí

    (a) Jsou-li $A, B \in X$, potom $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Je-li f prosté zobrazení, potom je dokonce $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, kde
$$f(A) = \{f(x) \in Y; x \in A\}$$
    je <u>obraz</u> množiny A.

    (b) Jsou-li $A\,, B \subset X$, potom $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$. f je prosté právě když
$$f(A) - f(B) = f(A - B)$$
    pro všechny podmnožiny $B \subset A \subset X$.

    (c) Jsou-li $A\,, B \subset X$, potom $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

    (d) Jsou-li $A\,, B \subset Y$, potom
$$f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)\,, \text{ kde } f^{-1}(A) = \{x \in X; f(x) \in A\}$$
    je <u>vzor</u> množiny A.

    (e) Jsou-li $A\,, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

    (f) Jsou-li $A\,, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

32. Buďte $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ izometrické metrické prostory, $\mathbf{X}_1$ úplný. Ukažte, že $\mathbf{X}_2$ je také úplný.

33. Buď $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ úplný metrický prostor. Ukažte, že $(\mathbf{X}, \widetilde{\mathbf{d}})$, kde $\widetilde{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{d}}{1+\mathbf{d}}$ je také úplný prostor. Platí obrácené tvrzení ? Jsou metriky $\mathbf{d}$ a $\widetilde{\mathbf{d}}$ ekvivalentní ?

34. Buď $f: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ spojité zobrazení, kde $\mathbf{X}$ je kompaktní metrický prostor. Ukažte, že f je stejnoměrně spojité.

35. Najděte příklad spojitého prostého zobrazení takového, že inversní zobrazení není spojité.

36. Buď $f: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ homeomorfní zobrazení $\mathbf{X}$ na $\mathbf{Y}$. Ukažte, že množina $G \subset \mathbf{X}$ je otevřená právě když je $f(G)$ otevřená v $\mathbf{Y}$.

37. Ukažte, že
$$\mathbf{d}(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$$
    je metrika na prostoru $\mathbf{C}(a, b)$ $[\,x, y \in \mathbf{C}(a, b)\,]$.

38. Ukažte, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde
$$x_n(t) = \begin{cases} n & \text{pro} \quad 0 \le t \le n^{-2}\,, \\ t^{-\frac{1}{2}} & \text{pro} \quad n^{-2} < t \le 1\,. \end{cases}$$
    je cauchyovská v metrice z předchozího příkladu, ale není konvergentní v $\mathbf{C}(0, 1)$.

39. Ukažte, že $\mathbf{d}(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y\,|$ je metrika na $\mathbf{R}$, při níž však $\mathbf{R}$ není úplný metrický prostor.

40. Ukažte, že prostory $\mathbf{C}(0, 1)$ a $\mathbf{C}(a, b)$ jsou izometrické v metrice $\mathbf{d}(x, y) = \max\,|\,x(t) - y(t)\,|$.

41. Označme $\mathbf{B}(x; r) = \{y \in \mathbf{X};\, \mathbf{d}(x, y) \le r\}$. Množinu $\mathbf{B}$ nazveme uzavřenou koulí v metrickém prostoru $\mathbf{X}$. Ukažte, že $\mathbf{X}$ je úplný právě když každá do sebe vložená posloupnost uzavřených koulí, jejichž poloměry konvergují k nule, má neprázdný průnik.

    $[\,\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2 \supset \cdots \supset \mathbf{B}_n = \mathbf{B}(x_n, r_n)\,; \quad \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0\,.]$

42. Buď $\mathbf{X} = \{x \in \mathbf{R};\ x \geq 1\}$; $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ je dáno předpisem $Tx = \frac{x}{2} + x^{-1}$. Ukažte, že T je kontrakce a najděte její pevný bod.

43. Buď $\mathbf{X} = \{x \in \mathbf{R};\ x \geq 1\}$; $Tx = \lambda x + x^{-1}$. Určete λ tak aby T byla kontrakce na $\mathbf{X}$ a najděte její pevný bod.

44. Buď $\mathbf{X} = \{x \in \mathbf{R};\ x \geq 1\}$; $Tx = x + x^{-1}$. Ukažte, že $|Tx - Ty| < |x - y|$ pro $x \neq y$, ale T nemá pevný bod.

45. Buď $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ zobrazení takové, že

$$\mathbf{d}(Tx, Ty) < \mathbf{d}(x, y) \ \ \forall x, y \in \mathbf{X}\,, \ \ x \neq y\,.$$

Ukažte, že má-li T pevný bod, je tento bod určen jednoznačně.

46. Buď $a \in (0, 1\rangle$. Potom je zobrazení $f(x) = x + \frac{1}{2}(a - x^2)$ kontrakce na intervalu $\langle q, 1\rangle$, kde $0 < q \leq \frac{a}{2}$ s pevným bodem $\sqrt{a}$. Dokažte. Platí tedy, že posloupnost $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)$, kde $x_0 = 0$, konverguje a je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

47. Je-li T kontrakce, pak T^n $(n \in \mathbf{N})$ je také kontrakce. Obráceně je-li T^n pro nějaké $n > 1$ kontrakce, pak T kontrakce být nemusí. Ukažte.

48. Buď $\mathbf{X}$ úplný metrický prostor, $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ spojité zobrazení a předpokládejme, že T^n je kontrakce pro nějaké $n > 1$ přirozené. Ukažte, že T má jediný pevný bod.

49. Ukažte, že každou čtvercovou soustavu lineárních algebraických rovnic tvaru

$$\mathbf{C}x = b\,, \ \ \text{neboli} \ \ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = b_i \ \ (i = 1, 2, \dots, n)$$

lze vyjádřit ve tvaru

$$x = \mathbf{A}x + b\,, \ \ \text{neboli} \ \ x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \ \ (i = 1, 2, \dots, n)\,.$$

Najděte vztah mezi maticí $\mathbf{C}$ a $\mathbf{A}$.

50. Ukažte, že každá z podmínek

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1 \ \ ; \quad \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1 \ \ ; \quad \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 < 1$$

je postačující pro existenci a jednoznačnost řešení soustavy $x = \mathbf{A}x + b$. [Vyšetřete zobrazení T tvaru $y = Tx = \mathbf{A}x + b$ na prostorech $\mathbf{l}_\infty^n, \mathbf{l}_1^n$ a $\mathbf{l}_2^n = \mathbf{R}^n$. Toto řešení je limita iterací $x^{(m+1)} = \mathbf{A}x^{(m)} + b$.]

51. Pišme matici $\mathbf{C}$ z cvičení 49 ve tvaru $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{G}$, kde $\mathbf{B}$ je vhodná regulární matice. Potom je $\mathbf{B}x = \mathbf{G}x + b$, tedy $x = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{G}x + b) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}x + c$. Pro matici $\mathbf{A}$ ze cvičení 50 tedy platí $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{G}$. Je-li $a_{jj} \neq 0$ pro $j = 1, 2, \dots, n$, dostaneme pro

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}\,(a_{jj}) \quad \mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{C})\,.$$

<u>Jacobiho iterační metoda.</u>

52. Ukažte, že každá z podmínek

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{|c_{jk}|}{|c_{jj}|} \leq 1\,; \ \ j = 1, 2, \dots, n \qquad \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} \frac{|c_{jk}|}{|c_{jj}|} \leq 1\,; \ \ k = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{\substack{j,k=1\\j\neq k}}^{n} \left(\frac{c_{jk}}{c_{jj}}\right)^2 < 1$$

je postačující pro konvergenci Jacobiho iterační metody. [Užijte návod z cvičení 50.]

53. Pišme matici $\mathbf{C}$ ze cvičení 49 va tvaru $\mathbf{C} = -\mathbf{L} + \mathbf{D} - \mathbf{U}$, kde $\mathbf{L}$ je dolní a $\mathbf{U}$ horní trojúhelníková matice. Potom $\mathbf{A} = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$.

    Gauss-Seidelova iterační metoda.

    Ukažte, že podmínky ze cvičení 52 jsou postačující pro konvergenci Gauss-Seidelových iterací.

54. Rovnici tvaru
$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, f(s)\, ds + g(t)\,,$$
    kde K, g jsou dané funkce, $\lambda \in \mathbf{R}$, f neznámá funkce, nazýváme

    Fredholmovou integrální rovnicí 2. druhu.

    Rovnici tvaru
$$f(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\, f(s)\, ds + g(t)\,,$$
    nazýváme Volterrovou integrální rovnicí.

55. Buď $g \in \mathbf{C}(a,b)$, $K \in \mathbf{C}(S)$, kde $S = \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle$. Definujme zobrazení $T : \mathbf{C}(a,b) \to \mathbf{C}(a,b)$ předpisem
$$Tf(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\, f(s)\, ds\,.$$
    Ukažte, že T je kontrakce pro $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, kde $|K(t,s)| \le M$ pro $(t,s) \in S$ a existuje tedy jediné řešení f rovnice
$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, f(s)\, ds + g(t)\,,$$
    které dostaneme jako limitu posloupnosti
$$f_{n+1}(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\, f_n(s)\, ds\,.$$

56. Ukažte, že za předlokladů z předchozího cvičení o funkcích g a K má Volterrova integrální rovnice jediné řešení na intervalu $\langle a,b\rangle$ pro libovolné $\lambda \in \mathbf{R}$ (dokonce $\lambda \in \mathbf{C}$).

    [Ukažte, že T^m je pro nějaké $m \in \mathbf{N}$ kontrakce a využijte cvičení 48. Ukažte, že platí
$$\mathbf{d}(T^m f, T^m h) \le \alpha_m \mathbf{d}(f,h)\,, \text{ kde } \alpha_m = |\lambda|^m M^m \frac{(b-a)^m}{m!}\,.]$$

4.2 Normované prostory.

1. Buď H unitární prostor a nechť pro $x, y \in H$ platí $x \perp y$. Potom platí Pythagorova věta $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Dokažte.

2. Obráceně, je-li H reálný prostor se skalárním součinem a pro prvky $x, y \in H$ platí $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, potom $x \perp y$. Dokažte.

3. Buď H libovolný unitární prostor, $x, y \in H$. Potom $x \perp y$ právě když $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}$ platí $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|\beta y\|^2$. Dokažte. (Stačí dokonce položit $\beta = 1$.)

4. Ekvivalentní podmínky kolmosti v unitárním prostoru je možno formulovat následovně. Ukažte, že platí

(a) $x \perp y$ právě když $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| \quad \forall \alpha \in \mathbf{\Phi}$.

(b) $x \perp y$ právě když $\|x + \alpha y\| \geq \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbf{\Phi}$.

5. V libovolném unitárním prostoru H platí rovnoběžníkové pravidlo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\{\|x\|^2 + \|y\|^2\} \quad \forall x, y \in H .$$

Tato vlastnost charakterizuje Hilbertovy prostory. Platí obráceně:

Buď H reálný normovaný prostor, v němž pro libovolnou dvojici $x, y \in H$ platí rovnoběžníkové pravidlo. Potom předpis

$$(x, y) = \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\}$$

definuje v H skalární součin, který indukuje danou normu.

Pro případ komplexního H je třeba definovat

$$Re\,(x, y) = \frac{1}{4}\{\,\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\,\}\,, \quad Im\,(x, y) = \frac{1}{4}\{\,\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\,\}\,.$$

Dokažte.

6. Ukažte, že v prostorech $\mathbf{C}(a, b)$ a $\mathbf{l}_1$ nelze zavést skalární součin, který by indukoval danou normu.

7. Buď $x \in \mathbf{l}_p$, $p \geq 1$. Ukažte, že $x \in \mathbf{l}_q \ \forall q \geq p$.

8. Buď $p > 1$. Ukažte, že existuje $x \in \mathbf{l}_p$ tak, že $x \notin \mathbf{l}_q \ \forall q < p$.

9. Ukažte, že existuje $x \in \mathbf{c}_0$ takové, že $x \notin \mathbf{l}_p$ pro žádné $1 \leq p < \infty$.

10. Buď M měřitelná množina, taková, že $\mu(M) < \infty$. Dokažte, že platí: Je-li

$$f \in \mathbf{L}_p(M) \quad (1 \leq p \leq \infty)\,, \ \text{ potom } \ f \in \mathbf{L}_q(M) \ \forall q \leq p\,.$$

Dále existuje konstanta K tak, že $\|f\|_q \leq K\,\|f\|_p$. Najděte hodnotu K.

11. Ukažte, že v případu $\mu(M) = \infty$ žádný takový vztah neexistuje.

12. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{C}(a, b)$ a označme $\mathbf{Y} = \{x \in \mathbf{C}(a, b);\, x(a) = x(b)\}$. Ukažte, $\mathbf{Y}$ je uzavřený podprostor $\mathbf{X}$. V aplikacích se velmi často vyskytuje prostor

$$\mathbf{C}_0(a, b) = \{x \in \mathbf{C}(a, b)\,;\, x(a) = x(b) = 0\}\,.$$

13. Najděte normu funkce $x(t) = t^\alpha$ v těch prostorech $\mathbf{L}_p(0, 1)$ $(p \geq 1)$, kam tato funkce patří. $[\,(\alpha p + 1)^{-\frac{1}{p}}$ pro $\alpha p > -1$.]

14. Buď $x_n(t) = n^2 t e^{-nt}$. Ukažte, že $x_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall t \geq 0$, ale $\{x_n\}$ nekonverguje v žádném prostoru $\mathbf{C}(0, a)$ pro libovolné $a > 0$.

15. Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Ukažte, že platí

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{\,M; \|Tx\| \leq M\,\|x\|\,\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\|\,.$$

16. Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $T \neq 0$. Ukažte, že existuje x takové, že $x \neq 0$, $\|x\| < 1$ a $\|Tx\| < \|T\|$.

17. Ukažte, že následující předpisy definují spojité lineární funkcionály na prostoru $\mathbf{C}(a, b)$ a odhadněte jejich normu.

(a) $<x,f> = \int\limits_a^b x(t)\,dt.$

(b) $<x,f> = \int\limits_a^b x(t)\,y_0(t)\,dt$, kde $y_0 \in \mathbf{C}(a,b)$ je pevná funkce. (Specielně $y_0(t) = t$.)

(c) $<x,f> = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, x(t_k)$, kde $\alpha_k \in \mathbf{\Phi}$, $t_1, \dots, t_n \in \langle a, b\rangle$.

(d) $<x,f> = \int\limits_a^b x(t)\,dt + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, x(t_k)$, kde $\alpha_k \in \mathbf{\Phi}$, $t_1, \dots, t_n \in \langle a, b\rangle$.

(e) $<x,f> = \int\limits_0^1 x(t)\,dt$ na $\mathbf{C}(-1,1)$.

(f) $<x,f> = \int\limits_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int\limits_0^1 x(t)\,dt$ na $\mathbf{C}(-1,1)$.

18. Ukažte, že uvedené funkcionály jsou spojité na daném prostoru a najděte jejich normy.

(a) $<x,f> = \alpha_1 + \alpha_2 \quad x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ na $\mathbf{l}_2$. $[\sqrt{2}]$

(b) $<x,f> = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$ na $\mathbf{l}_2$. $[\frac{\pi}{\sqrt{6}}]$

(c) $<x,f> = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$ na $\mathbf{l}_1$. [1]

(d) $<x,f> = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{k})\alpha_k$ na $\mathbf{l}_1$. [1]

(e) $<x,f> = \alpha_1 + \alpha_2 \quad x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ na $\mathbf{l}_\infty$. [2]

(f) $<x,f> = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^{k-1}}$ na $\mathbf{c}_0$. [2]

(g) $<x,f> = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \quad x = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ na $\mathbf{c}$. [1]

19. Ukažte, že uvedené funkcionály jsou spojité na daném prostoru a najděte jejich normu.

(a) $<x,f> = \int\limits_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt$ na $\mathbf{L}_1(-1,1)$. [1]

(b) $<x,f> = \int\limits_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt$ na $\mathbf{L}_2(-1,1)$. $[\sqrt{\frac{2}{3}}]$

(c) $<x,f> = \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}}\,x(t)\,dt$ na $\mathbf{L}_2(0,1)$. $[\sqrt{3}]$

(d) Pro jaká p je $<x,f> = \int\limits_0^1 x(\sqrt{t})\,dt$ spojitý funkcionál na $\mathbf{L}_p(0,1)$ $x \in \mathbf{L}_p(0,1)$.

$[\, 1 \le p \le \infty\, ; \ \|f\| = \frac{2}{(q+1)^{\frac{1}{q}}} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,.]$

(e) Pro jaká p je $<x,f> = \int\limits_0^1 x(t^2)\,dt$ spojitý funkcionál na $\mathbf{L}_p(0,1)$ $x \in \mathbf{L}_p(0,1)$.

$[\, 2 < p \le \infty\, ; \ \|f\| = \frac{1}{2}\{\frac{2}{2-q}\}^{\frac{1}{q}} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \,.]$

20. Operátory na prostorech posloupností.

Buďte $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ prostory posloupností $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ $a_{ij} \in \mathbf{\Phi}$ nekonečná matice. Definujme operátor $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ předpisem $(Tx)_i = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}\,\alpha_j$, kde $x = \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$. Udejte možné podmínky na matici $\mathbf{A}$, aby T byl omezený operátor.

(a) $T \in \mathscr{L}(\mathbf{l}_2)$. $\quad [\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty\,.]$

(b) $T : \mathbf{l}_p \to \mathbf{l}_q$, kde $p > 1$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\quad [\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty\,.]$

(c) $T \in \mathscr{L}(\mathbf{l}_1)$. $\quad [\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sup\limits_j |a_{ij}| < \infty\,.]$

(d) $T : \mathbf{l}_1 \to \mathbf{l}_\infty$, $\quad [\sup\limits_i \sup\limits_j |a_{ij}| < \infty\,.]$

(e) $T \in \mathscr{L}(\mathbf{l}_\infty)$. $\quad [\sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty\,.]$

(f) $T : \mathbf{l}_\infty \to \mathbf{l}_1$, $\quad [\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty\,.]$

21. Buď $T : \mathbf{l}_2 \to \mathbf{l}_2$, $u = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbf{l}_\infty$, $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbf{l}_2$ $Tx = \{\lambda_k \alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$. Najděte $\|T\|$ a podmínky, za nichž existuje omezený operátor T^{-1}.

22. <u>Integrální operátory na prostorech funkcí.</u>

Buď $Tx(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds$, kde $K \in \mathbf{C}(S)$; $S = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$. Ukažte, že v každém z následujících případů je T omezený lineární operátor a odhadněte jeho normu.

(a) $T : \mathbf{C}(0,1) \to \mathbf{C}(0,1)$ $\quad [\,\|T\| \le \max\limits_{t\in\langle 0,1\rangle} \int\limits_0^1 |K(t,s)|\,ds\,.]$

(b) $T : \mathbf{C}(0,1) \to \mathbf{L}_1(0,1)$ $\quad [\,\|T\| \le \iint\limits_S |K(t,s)|\,dt\,ds\,.]$

(c) $T : \mathbf{L}_1(0,1) \to \mathbf{C}(0,1)$ $\quad [\,\|T\| \le \max\limits_{t,s\in\langle 0,1\rangle} |K(t,s)|\,.]$

(d) $T : \mathbf{L}_1(0,1) \to \mathbf{L}_1(0,1)$ $\quad [\,\|T\| \le \max\limits_{s\in\langle 0,1\rangle} \int\limits_0^1 |K(t,s)|\,dt\,.]$

(e) $T : \mathbf{L}_2(0,1) \to \mathbf{L}_2(0,1)$ $\quad [\,\|T\| \le \left\{ \int\limits_0^1\int\limits_0^1 |K(t,s)|^2\,dt\,ds \right\}^{\frac{1}{2}}\,.]$

23. Analogicky je možno vyšetřovat operátory typu

$$Tx(t) = \int\limits_M K(t,s)\,x(s)\,ds\,,$$

kde $M \subset \mathbf{R}^n$ je měřitelná množina, K měřitelná funkce dvou proměnných, $K \in \mathbf{C}(M \times M)$ nebo $K \in \mathbf{L}_p(M \times M)$, $\quad 1 \le p \le \infty$.

24. Najděte normu následujících operátorů $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

(a) $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{C}(0,1)$; $\quad Tx(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$. $\quad [\,1\,]$

(b) $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{C}(0,1)$; $\quad Tx(t) = \varphi(t)\,x(t)$ kde $\varphi \in \mathbf{C}(0,1)$ je daná. $\quad [\,\|\varphi\|\,]$

<u>Poznámka:</u> Specielní případ $Tx(t) = t\,x(t)$ hraje důležitou roli v kvantové mechanice. Je však definován na prostoru $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$, kde je neomezený. Nazývá se operátorem polohy.

(c) $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{C}(0,1)$; $\quad Tx(t) = t \int\limits_0^1 x(s)\,ds$. $\quad [\,1\,]$

(d) $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{L}_2(0,1)$; $\quad Tx(t) = t \int\limits_0^1 x(s)\,ds$. $\quad [\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,]$

(e) $\mathbf{X} = \mathbf{L}_p(0,1)\,;\mathbf{Y} = \mathbf{L}_q(0,1)\,;\quad Tx(t) = a(t)\,x(t)$. Určete podmínky, které musí funkce a splňovat. $[\, a \in \mathbf{L}_\infty(0,1)\,,\ \|T\| \le \|a\|$ pro $q \le p$. Je-li $q > p$, potom $a = 0\,.]$

(f) $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{B}(\mathbf{R})\,;\quad Tx(t) = x(t-s)\,; s > 0$. (Operátor zpoždění.) [1]

25. Buď

$$T : D(T) \subset \mathbf{C}(0,1) \to \mathbf{C}(0,1)\,;\ T = \frac{d}{dt}\,,\ \ D(T) = \{\, x \in \mathbf{C}(0,1);\, x' \in \mathbf{C}(0,1)\,\}\,.$$

Potom je T neomezený, ale uzavřený. Definujme na $D(T)$ novou normu

$$\|x\|_1 = \max_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)| + \max_{t\in\langle 0,1\rangle} |x'(t)|\,.$$

Ukažte, že $T : D(T) = \mathbf{C}^1(0,1) \to \mathbf{C}(0,1)$ je omezený operátor s normou 1.

26. Buď H Hilbertův prostor, $x_n\,, x \in H$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$, $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$. Potom $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Dokažte.

27. Uvažme prostor $\mathbf{l}_2$ a posloupnost $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, kde $e_k = \{0,\ldots,0,1,0,\ldots\}$. (1 je na k-té pozici.) Ukažte, že $e_k \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$, přestože $\|e_k - e_n\| = \sqrt{2}$ pro $k \ne n$.

28. Dokažte, že platí

(a) Je-li $x_n \xrightarrow{w} x$, $y_n \xrightarrow{w} y$, potom $x_n + y_n \xrightarrow{w} x + y$ a $\alpha\, x_n \xrightarrow{w} \alpha\, x\ \forall \alpha \in \mathbf{\Phi}$.

(b) Je-li $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $x_n \xrightarrow{w} x$ v $\mathbf{X}$, potom $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$ v $\mathbf{Y}$.

29. Buď $x_n \in \mathbf{l}_p$ $(p > 1)$. Potom $x_n \xrightarrow{w} x \in \mathbf{l}_p$ právě když a) $\{\, \|x_n\|\,\}_{n=1}^\infty$ je omezená b) $\forall j \in \mathbf{N}$ je $\alpha_j^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_j$, kde $x_n = \{\alpha_j^{(n)}\}_{j=1}^\infty$; $x = \{\alpha_j\}_{j=1}^\infty$. Dokažte.

30. Buďte $x_n, x \in \mathbf{l}_1$ a nechť $x_n \xrightarrow{w} x$. Potom $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Dokažte.

31. Ukažte, že $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathbf{C}(a,b)$ právě když je $\{x_n\}$ omezená a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)\ \ \forall t \in \langle a,b\rangle$.

32. Buďte $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ B-prostory, $T_n \in \mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ $n = 1,2,\ldots$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní: a) $\{\, \|T_n\|\,\}_{n=1}^\infty$ je omezená. b) $\{\, \|T_n x\|\,\}_{n=1}^\infty$ je omezená $\forall x \in \mathbf{X}$. c) $\{\, |<T_n x, y^*>|\,\}_{n=1}^\infty$ je omezená $\forall x \in \mathbf{X}$ a $\forall y^* \in \mathbf{Y}^*$. Dokažte.

33. <u>Definice:</u> Buďte $\mathbf{X}\,,\mathbf{Y}$ B-prostory, $T_n \in \mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $n = 1,2,\ldots$. Řekneme, že posloupnost $\{\, T_n\,\}_{n=1}^\infty$ konverguje silně k operátoru T, jestliže $T_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx\ \ \forall x \in \mathbf{X}$ a značíme $T_n \xrightarrow{s} T$. Řekneme, že posloupnost $\{\, T_n\,\}_{n=1}^\infty$ konverguje slabě k operátoru T, jestliže $<T_n x, y^*> \xrightarrow[n\to\infty]{} <Tx, y^*>\ \ \forall x \in \mathbf{X}$ a $\forall y^* \in \mathbf{Y}^*$ a značíme $T_n \xrightarrow{w} T$.

<u>Poznámky.</u> 1) V prostoru $\mathscr{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ rozeznáváme tři druhy konvergence; stejnoměrnou $\|T_n - T\| \to 0$; silnou $\|T_n x - Tx\| \to 0\ \ \ \forall x \in \mathbf{X}$ a slabou $|<T_n x, y^*> - <Tx, y^*>| \to 0$ $\forall x \in \mathbf{X}$ a $\forall y^* \in \mathbf{Y}^*$.

2) Je-li $\mathbf{X}$ B-prostor, potom v prostoru $\mathbf{X}^*$ lze též definovat tři druhy konvergence; v normě $\|x_n^* - x^*\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; slabou $|<x_n^*, x^{**}> - <x^*, x^{**}>| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall x^{**} \in \mathbf{X}^{**}$ a tak zvanou *–slabou $|<x, x_n^*> - <x, x^*>| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\forall x \in \mathbf{X}$.

Značíme $x_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$; $\quad x_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{w} x^*$; $\quad x_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} x^*$.

34. Buďte $T_n\, S_n \in \mathscr{L}(\mathbf{l}_2)$ $n = 1, 2, \dots$ definované předpisy

   (a) $T_n x = \{0, \dots, 0, \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}, \dots\}$, kde $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ukažte, že $T_n \underset{n\to\infty}{\overset{s}{\longrightarrow}} 0$, i když $\|T_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbf{N}$.

   (b) $S_n x = \{0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, kde předchozí vektor začíná n nulami. Ukažte, že $S_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} 0$, i když $\|\, S_n x - S_m x\| = \sqrt{2}$ pro $n \neq m$ a $x = e_k$.

35. Buďte $T_n\,, S_n \in \mathscr{L}(\mathbf{l}_2)$ definovány předpisy
   $T_n x = \{\frac{\alpha_j}{n}\}_{j=1}^{\infty}$; $\quad S_n x = \{\alpha_1, 2\,\alpha_2, \dots, n\,\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots\}$, kde $x = \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$.
   Ukažte, že $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ale $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nekonverguje ani slabě, i když všechny operátory S_n jsou omezené.

4.3 Spektrální teorie.

1. Operátor $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ nazveme <u>idempotentní</u>, jestliže $T^2 = T$. Je-li T idempotentní, $0 \neq T \neq I$, potom $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0, 1\}$. Dokažte.

2. Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ takový, že $T^2 = I$ $T \neq I$. Ukažte, že $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{-1, 1\}$. Ukažte, že pokud je $\dim \mathbf{X} > 1$, pak operátorů s touto vlastností existuje nekonečně mnoho.
   $$\left[\text{ Vyšetřete matice tvaru } \begin{pmatrix} 0 & t \\ \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}\right]$$

3. Buď M uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H, $M \neq H$, P projektor na M. Najděte $\sigma(P)$ a $R(\lambda, P) = (\lambda I - P)^{-1}$. $\quad$ [Užijte cvičení 1.]

4. Nechť $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ a $T^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$. Ukažte, že T a T^{-1} mají stejné vlastní vektory (pokud existují) a že $\quad \lambda \in \sigma(T) \Longleftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(T^{-1})$.

5. Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ a nechť T^2 má vlastní vektor. Potom má T vlastní vektor. Dokažte.

6. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{C}(-1, 1)$, $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$, $T\,x(t) = x(-t)$. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory T.
   [Ukažte, že $T^2 = I$ a užijte cvičení 2.]

7. Buďte $T\,, S \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$. Ukažte, že
   $$\lambda \in \sigma(TS) \Longleftrightarrow \lambda \in \sigma(ST).$$
   Užitím operátoru posunu ukažte, že toto tvrzení neplatí pro $\lambda = 0$.

8. Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$, $\lambda \in \mathbf{C}$ a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \mathbf{X}$ taková posloupnost, že
   $$\|x_n\| = 1 \text{ a } Tx_n - \lambda x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Potom je $\lambda \in \sigma(T)$. Dokažte.

9. Nechť $T\,, W \in \mathscr{L}(H)$, kde H je Hilbertův prostor. Ukažte, že platí

   (a) $\sigma(T) = \overline{\sigma(T^*)}$.

   (b) Je-li $T^* = T$, potom je $S = W^* T W$ také samoadjungovaný operátor.

   (c) Je-li $T^* = T$, potom $\sigma(T) \subset \langle a, A\rangle$, kde
   $$a = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x)\,, \quad A = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x)\,.$$

10. Buďte $T, S \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$. Ukažte, že platí

(a) $T\,R(\lambda,T) = R(\lambda,T)\,T \quad (\lambda \in \varrho(T)\,.)$

(b) Jsou-li $\lambda\,, \mu \in \sigma(T)$, potom

$$R(\lambda,T) - R(\mu,T) = -(\lambda-\mu)R(\lambda,T)\,R(\mu,T) = -(\lambda-\mu)R(\mu,T)\,R(\lambda,T)\,.$$

(První resolventní rovnice.)

(c) $TS = ST \iff R(\lambda,T)\,S = S\,R(\lambda,T) \quad \forall\, \lambda \in \varrho(T)\,.$

(d) Je-li $\lambda \in \varrho(T) \cap \varrho(S)$, potom

$$R(\lambda,T) - R(\lambda,S) = R(\lambda,T)\,(T-S)\,R(\lambda,S)\,.$$

(Druhá resolventní rovnice.)

(e) Je-li $\lambda \in \varrho(T)\,,\ \|S-T\| \le \|R(\lambda,T)\|^{-1}$, potom $\lambda \in \varrho(S)$ a platí

$$R(\lambda,S) = R(\lambda,T)\,\sum_{n=0}^{\infty}[\,(S-T)\,R(\lambda,T)\,]^n\,.$$

(f) $R(\lambda,T)$ je kompaktní právě když je $\dim \mathbf{X} < \infty$.

11. Buď $T \in \mathscr{L}(\mathbf{l}_2)$. Najděte T^*, $\sigma(T)$ a $R(\lambda,T)$. Rozhodněte, které z operátorů jsou kompaktní a pro kompaktní samoadjungované operátory najděte jejich spektrální rozklad.

(a) $Tx = \{\xi_1\alpha_1, \xi_2\alpha_2, \dots, \xi_n\alpha_n, 0, 0, \dots\}$, kde $n \in \mathbf{N}$ je pevné, $x = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}\,, \xi_j \in \mathbf{C}$.

(b) $Tx = \left\{\frac{\alpha_j}{j}\right\}_{j=1}^{\infty}\,, \quad x = \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}\,.$

(c) $Tx = \{\xi_j\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, kde $\{\xi_j\} \in \mathbf{c}$.

(d) $Tx = \left\{\frac{\alpha_2}{1}, \frac{\alpha_3}{2}, \frac{\alpha_4}{3}, \dots\right\}\,; \qquad Sx = \{0, \alpha_1, \frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_3}{3}, \dots\}\,.$

12. Řešte předchozí úlohu pro případ $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, kde $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ je jeden z prostorů $\mathbf{c}_0\,, \mathbf{c}\,, \mathbf{l}_p\,, (p \ge 1)$.

13. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{C}(0,1)\,;\ T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})\,,\ Tx(t) = v(t)\,x(t)$, kde $v \in \mathbf{X}$ je pevný prvek. Najděte $\sigma(T)$.
$[\,\sigma(T) = \sigma_r(T) = R(v).\,]$

14. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{C}(0,1)\,,\ T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})\,,\ Tx(t) = x(0) + t\,x(1)$. Najděte $\sigma(T)\,,\ r_\sigma(T)$ a $R(\lambda,T)$.
$\Big[\,\|T\| = 2\,,\ \sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0,1\}\,,\ R(\lambda,T)\,x(t) = \frac{x(t)}{\lambda} + \frac{x(0)+t\,x(1)}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{t\,x(0)}{\lambda(\lambda-1)^2}\,.\Big]$

15. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{L}_2(0,1)\,,\ T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})$ daný předpisem $T\,x(t) = t\,x(t)$. Ukažte, že T je samoadjungovaný a najděte $\sigma(T)$ a $R(\lambda,T)$.
$\Big[\,\|T\| = 1\,;\ \sigma(T) = \sigma_c(T) = \langle 0,1\rangle\,;\ R(\lambda,T)\,x(t) = \frac{x(t)}{\lambda - t}\,.\Big]$

16. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{C}(-\pi,\pi)\,;\ T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})\,;\ T\,x(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} cos(s+t)\,x(s)\,ds$. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory T.
$\Big[\,\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0,-\pi,\pi\}\,; R(\lambda,T) = \frac{I}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2-\pi^2} + \frac{T^2}{\lambda(\lambda^2-\pi^2)}\,.\Big]$

17. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{L}_2(a,b)\,;\ T \in \mathscr{L}(\mathbf{X})\,;\ T\,x(t) = \int\limits_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds$, kde K je spojitá funkce na trojúheníku $a \le s \le t\,, a \le t \le b$. Najděte $\sigma(T)$ a $r_\sigma(T)$.
$[\,\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}\,; r_\sigma(T) = 0.\,]$

18. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{C}(0,1)$; $T : D(T) \to \mathbf{X}$; $T = \frac{d}{dt}$. Najděte $\sigma(T)$ a $R(\lambda, T)$, jestliže platí

(a) $D(T) = \{\, x \in \mathbf{X};\, x' \in \mathbf{X}\,,\, x(0) = 0 \,\}$

$[\, \sigma(T) = \emptyset ;\ R(\mu, T)\, x(t) = \frac{x(t)}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \int\limits_0^t e^{\frac{1}{\mu}(t-s)}\, x(s)\, ds$, kde $\mu = \frac{1}{\lambda}$.]

(b) $D(T) = \{\, x \in \mathbf{X};\, x' \in \mathbf{X} \,\}$

$[\, \sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbf{C} \,]$

(c) $D(T) = \{\, x \in \mathbf{X};\, x' \in \mathbf{X}\,,\, x(0) = x(1) \,\}$

$[\, \sigma(T) = \sigma_p(T) = \{2n\pi i\}_{n=-\infty}^{\infty} ;\ R(\lambda, T) = \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1} \int\limits_0^1 e^{\lambda(t-s)}\, x(s)\, ds - \int\limits_0^t e^{\lambda(t-s)}\, x(s)\, ds \,.]$

19. Buď $\mathbf{X} = \mathbf{C}(0,\pi)$; $T : D(T) \to \mathbf{X}$; $T = \frac{d^2}{dt^2}$. Najděte $\sigma(T)$ a $R(\lambda, T)$ jestliže platí

(a) $D(T) = \{\, x \in \mathbf{X};\, x'' \in \mathbf{X}\,,\, x(0) = x(\pi) = 0 \,\}$

(b) $D(T) = \{\, x \in \mathbf{X};\, x'' \in \mathbf{X}\,,\, x'(0) = x'(\pi) = 0 \,\}$

(c) $D(T) = \{\, x \in \mathbf{X};\, x'' \in \mathbf{X}\,,\, x(0) = x(\pi)\,,\ x'(0) = x'(\pi) \,\}$

Literatura

[1] Bachman, G. and Narici, L.: *Functional Analysis*, Academic Press New York and London.

[2] Dieudonné, J.: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press New York and London.

[3] Dunford, N. and Schwartz, J.T.: *Linear Operators I, II*, Interscience Publishers New York, London.

[4] Drábek, P. a Kufner, A.: *Úvod do funkcionální analýzy*, skriptum FAV ZČU Plzeň.

[5] Jarník, V.: *Diferenciální počet II*, nakladatelství ČSAV Praha.

[6] Kirillov, A.A. and Gvišiani, A.D.: *Teoremy i zadači funkcionalnovo analiza*, Nauka Moskva.

[7] Kolmogorov, A.N. and Fomin, C.V.: *Elementy teorii funkcij i funkcionalnovo analiza*, Nauka Moskva.

[8] Kreyczig, E.: *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons Inc.

[9] Lukeš, J.: *Zápisky z funkcionální analýzy*, učební text MFF UK Praha.

[10] Pták, V.: *Moderní analysa I.*, skriptum MFF UK Praha.

[11] Rudin, W.: *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company.

[12] Trenogin, V.A. and Pisarevskij, B.M. and Sokoleva, T.S.: *Zadači i upražnenija po funkcionalnomu analizu*, Nauka Moskva.