Příklad:
Jsou dány vektory **a** = (5, 0, -2) a **b** = (4, 1, 3). Určete skalární součin c = **a**.**b** a vektorový součin **d** = **a** x **b**.

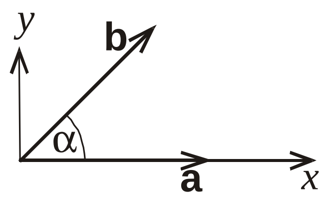
Řešení:

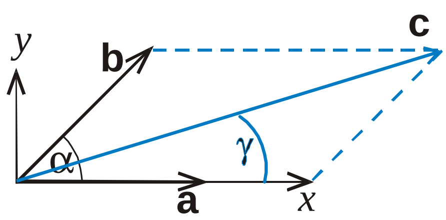
$$c = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 5 \cdot 4 + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = \underline{\underline{14}}$$

$$\mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \left(0 \cdot 3 - (-2) \cdot 1\right) + \mathbf{j}((-2) \cdot 4 - 5 \cdot 3) + \mathbf{k}(5 \cdot 1 - 0 \cdot 4) = 2\mathbf{i} - 23\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{d} = \underline{\underline{(2, -23, 5)}}$$

Příklad:
Určete směr a velikost vektoru **c** = **a** + **b** a velikost skalárního součinu d = **a**.**b**, je-li dáno, |**a**| = |**b**| = 2, úhel $\alpha = \pi/4$.





Řešení:

Vektor **a** vyjádříme pomocí pravoúhlých souřadnic x, y.

$$a_x = a \cos 0° = a = 2$$
$$a_y = a \sin 0° = 0$$

Vektor **b** vyjádříme pomocí pravoúhlých souřadnic x, y.

$$b_x = b \cos \alpha = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$
$$b_y = b \sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

Vypočteme složky vektoru **c**

$$c_x = a_x + b_x = a + b \cos \alpha = 2 + 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 3{,}414$$

$$c_y = a_x + b_y = 0 + b \sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 1{,}414$$

Velikost vektoru **c** je

$$c = \sqrt{c_x{}^2 + c_y{}^2} = \sqrt{3{,}414^2 + 1{,}414^2} = \underline{\underline{3{,}696}}$$

Směr vektoru **c** určíme pomocí

$$\gamma = arctg \frac{c_y}{c_x} = arctg \frac{1{,}414}{3{,}414} = \underline{\underline{22{,}5°}}$$

Velikost skalárního součinu d určíme ze vztahu

$$d = \mathbf{a}.\mathbf{b} = a\, b \cos \alpha = 2 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{2{,}828}}$$

Příklad:

Vektorové pole **A**= (3*x*, 4*y*, 0) je:

a) zřídlové, b) nezřídlové, c) potenciální,

d) vírové, e) nevírové, f) solenoidální.

Vyznačte správnou odpověď a zdůvodněte.

Řešení:

A = (3*x*, 4*y*, 0)

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial(3x)}{\partial x} + \frac{\partial(4y)}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 3 + 4 + 0 = 7 \neq 0 \Rightarrow \text{zřídlové}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x & 4y & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial(4y)}{\partial z} \ , \ \frac{\partial(3x)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}, \ \frac{\partial(4y)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial y} \right) = (0,\ 0,\ 0)$$

=> nevírové, tj. potenciální

Příklad:

Vektorové pole **A** = **i***y* – **j***x*^{2} je:

a) zřídlové, b) nezřídlové, c) potenciální,

d) vírové, e) nevírové, f) solenoidální.

Vyznačte správnou odpověď a zdůvodněte.

Řešení:

A = **i***y* – **j***x*^{2} = (*y*, -*x*^{2}, 0)

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 0 \Rightarrow \text{nezřídlové, tj. solenoidální}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x^2 & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial(-x^2)}{\partial z} \ , \ \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}, \ \frac{\partial(-x^2)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) = (0,\ 0,\ -2x-1) \neq 0$$

=> vírové