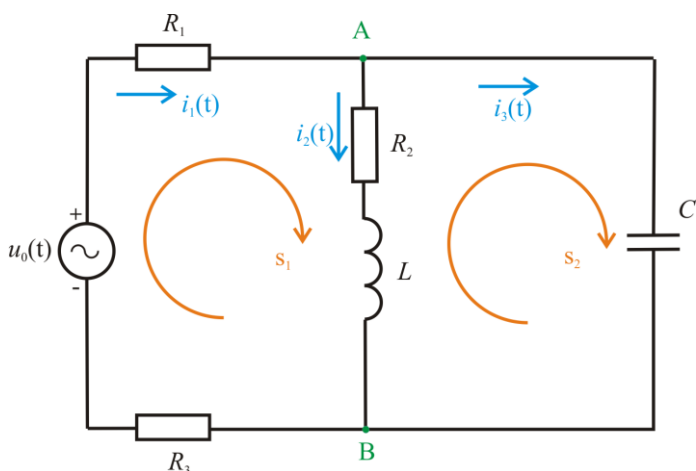


Příklad:

Stanovte časové průběhy větvových proudů v elektrickém obvodu s harmonickým zdrojem napětí v ustáleném stavu, který je na obr., s využitím symbolicko-komplexního zobrazení harmonických veličin.

Je dáno: $R_1 = 40 \Omega$; $R_2 = 30 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$; $L = 0,1 \text{ mH}$; $C = 200 \mu\text{F}$; $f = 50 \text{ Hz}$; $\omega = 2\pi f$; $u_0(t) = 10 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$.



Řešení:

- stanovení větvových proudů i_1, i_2, i_3 pomocí transfigurace na elementární obvod:

Fázory jsou v následujícím textu označeny podtrženou kurzívou.

Časovému průběhu $u_0(t) = 10 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ odpovídá fázor maximální hodnoty napětí $\underline{U}_{0m} = 10 e^{j30^\circ} \text{ V}$ neboli zjednodušeně zapsáno $\underline{U}_{0m} = 10 \underline{30^\circ} \text{ V}$.

Pozn:

Maximální hodnota napětí: $U_m = 10 \text{ V}$, efektivní hodnota napětí: $U_{ef} = 10 / \sqrt{2} \text{ V} = 7,071 \text{ V}$, fázor efektivní hodnoty napětí: $\underline{U}_0 = 10 / \sqrt{2} \underline{30^\circ} = 7,071 \underline{30^\circ} \text{ V}$.

Charakteristická veličina pasivního prvku	Komplexní impedance	Reaktance	Vztah mezi fázorem napětí a fázorem proudu, který protéká prvkem
R	$\underline{Z} = R$	0	$\underline{U} = R \underline{I}$ $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R}$
L	$\underline{Z} = jX = j\omega L$	$X = \omega L$	$\underline{U} = jX \underline{I} = j\omega L \underline{I}$ $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{jX} = \frac{\underline{U}}{j\omega L}$
C	$\underline{Z} = jX = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$	$X = -\frac{1}{\omega C}$	$\underline{U} = jX \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}$ $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{jX} = j\omega C \underline{U}$

Pro výpočet napětí na jednotlivých prvcích použijeme tzv. zobecněného Ohmova zákona v symbolicko-komplexním vyjádření: $\underline{U} = \underline{Z}I$, kde \underline{Z} je komplexní impedance. Komplexní impedanci lze vyjádřit v goniometrickém nebo algebraickém tvaru:

$$\underline{Z} = Z e^{j\psi} = R + jX,$$

kde reálná část impedance je rezistance $R[\Omega]$ a imaginární složka reaktance $X[\Omega]$. Pro ideální pasivní prvky jsou vztahy mezi harmonickým napětím a proudem v tabulce.

Výpočet je proveden v maximálních hodnotách, počítáme s fázorem maximální hodnoty napětí $\underline{U}_{0m} = 10 \angle 30^\circ$ V.

Transfigurace daného obvodu směrem ke svorkám zdroje:

Stanovení celkové impedance:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R_1 + \frac{(-j\frac{1}{\omega C})(R_2 + j\omega L)}{-j\frac{1}{\omega C} + R_2 + j\omega L} + R_3 = 40 + \frac{(-j\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 200 \cdot 10^{-6}})(30 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3})}{-j\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} + 30 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} + 10 = \\ &= 56,5947 - 12,4238j \Omega = 57,9423 \angle -12,38^\circ \Omega \end{aligned}$$

Platí:

$$R = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} = 56,5947 \Omega$$

$$X = \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = -12,4238 \Omega, \text{ záporné znaménko značí, že obvod má kapacitní charakter.}$$

Stanovení fázoru maximální hodnoty proudu vytékajícího ze zdroje, proudu \underline{I}_{1m} :

$$\underline{I}_{1m} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}} = \frac{10 \angle 30^\circ}{57,9423 \angle -12,38^\circ} = 0,1726 \angle 42,38^\circ \text{ A} = 0,1275 + 0,1163j \text{ A}$$

Postupné určování fázorů maximálních hodnot větvových proudů \underline{I}_{2m} a \underline{I}_{3m} pomocí vztahu pro proudový dělič:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{2m} &= \underline{I}_{1m} \frac{-j\frac{1}{\omega C}}{-j\frac{1}{\omega C} + R_2 + j\omega L} = 0,1726 \angle 42,38^\circ \frac{-j\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}}{-j\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} + 30 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 0,0809 \angle -19,72^\circ \text{ A} = 0,0762 - 0,0273j \text{ A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{3m} &= \underline{I}_{1m} \frac{(R_2 + j\omega L)}{-j\frac{1}{\omega C} + R_2 + j\omega L} = 0,1726 \angle 42,38^\circ \frac{(30 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3})}{-j\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} + 30 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 0,1525 \angle 70,34^\circ \text{ A} = 0,0513 + 0,1436j \text{ A} \end{aligned}$$

nebo 2.způsob stanovení \underline{I}_{3m} – z 1. Kirchhoffova zákona pro **uzel A**:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{3m} &= \underline{I}_{1m} - \underline{I}_{2m} = 0,1275 + 0,1163j - (0,0762 - 0,0273j) = \\ &= 0,0513 + 0,1436j = 0,1525 \underline{|70,34^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

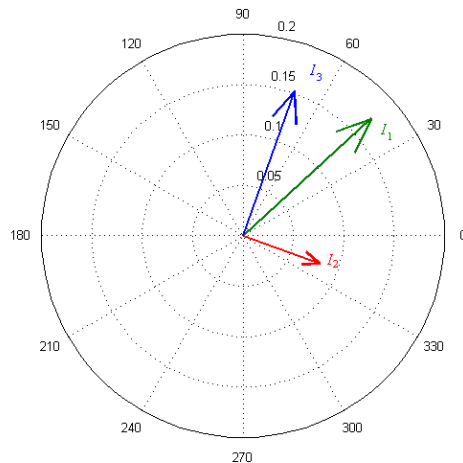
Inverzním symbolicko-komplexním zobrazením nalezneme časové průběhy větvových proudů:

$$i_1 = 0,1726 \sin(\omega t + 42,38^\circ) \text{ A}$$

$$i_2 = 0,0809 \sin(\omega t - 19,72^\circ) \text{ A}$$

$$i_3 = 0,1525 \sin(\omega t + 70,34^\circ) \text{ A}$$

Použití funkce sin je dáno typem zadané harmonické veličiny u zadaného časového průběhu napětí.



Fázorový diagram proudů:

- stanovení napětí u_{AB} :

$$\underline{U}_{ABm} = (R_2 + j\omega L)I_{2m} =$$

$$= (30 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,0809 \underline{|-19,72^\circ} = 2,2860 - 0,8167j \text{ V} = 2,4275 \underline{|-19,66^\circ} \text{ V}$$

nebo 2.způsob stanovení napětí u_{AB}

$$\underline{U}_{ABm} = (-j \frac{1}{\omega C})I_{2m} =$$

$$= -j \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,1525 \underline{|70,34^\circ} = 2,2860 - 0,8167j \text{ V} = 2,4275 \underline{|-19,66^\circ} \text{ V}$$

Časový průběh napětí u_{AB} :

$$u_{AB} = 2,4275 \sin(\omega t - 19,66^\circ) \text{ V}$$

- stanovení činného výkonu zdroje:

Činný výkon je výkon, který je přenášen od zdroje ke spotřebiči, kde se nenávratně přeměňuje z elektrické energie na požadovaný druh energie.

$$\text{Známe: } u_0(t) = 10 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V a } i_1 = 0,1726 \sin(\omega t + 42,38^\circ) \text{ A}$$

Činný výkon je určen vztahem:

$$P = U_0 I_1 \cos \varphi = \frac{10}{\sqrt{2}} \frac{0,1726}{\sqrt{2}} \cos(30^\circ - 42,38^\circ) = 0,8429 \text{ W},$$

Do vztahu dosazujeme efektivní hodnoty napětí zdroje a proudu vytékajícího ze zdroje, úhel $\varphi = \varphi_U - \varphi_I = 30^\circ - 42,38^\circ = -12,38^\circ$ odpovídá úhlu celkové impedance \underline{Z} .

nebo 2.způsob stanovení činného výkonu:

$$P = RI_1^2 = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} \cdot I_1^2 = 56,5947 \cdot \left(\frac{0,1726}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0,8429 \text{ W}$$

- stanovení jalového výkonu:

Jalový výkon je způsoben tím, že elektrická energie v jedné části periody v kondenzátoru vytváří elektrické pole, resp. v cívice magnetické pole, v druhé části periody pak tato pole zanikají a energie je vracena do obvodu.

Jalový výkon je určen vztahem:

$$Q = U_0 I_1 \sin \varphi = \frac{10}{\sqrt{2}} \frac{0,1726}{\sqrt{2}} \sin(30^\circ - 42,38^\circ) = -0,1850 \text{ VAR}$$

Do vztahu dosazujeme efektivní hodnoty napětí zdroje a proudu vytékajícího ze zdroje, úhel $\varphi = \varphi_U - \varphi_I = 30^\circ - 42,38^\circ = -12,38^\circ$ odpovídá úhlu celkové impedance \underline{Z} .

nebo 2.způsob stanovení jalového výkonu:

$$Q = XI_1^2 = \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} \cdot I_1^2 = (-12,4238) \cdot \left(\frac{0,1726}{\sqrt{2}}\right)^2 = -0,1850 \text{ W}$$

- stanovení zdánlivého výkonu:

Zdánlivý výkon, který je amplitudou okamžitého výkonu a je definován vztahem:

$$S = U_0 I_1 = \frac{10}{\sqrt{2}} \frac{0,1726}{\sqrt{2}} = 0,8629 \text{ VA}$$

Mezi uvedenými výkony platí vztah:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{0,8429^2 + (-0,1850)^2} = 0,8629 \text{ VA}$$

Zdánlivý výkon nemá přímý fyzikální význam, zdánlivý výkon lze vysvětlit jako největší možný výkon, dosažitelný při nulovém fázovém posuvu mezi napětím a proudem $\varphi = 0$ (tzn. Při jednotkovém účinníku $\cos \varphi = 1$).

- stanovení účinníku:

Výraz $\cos \varphi$ ve vztahu pro činný výkon se nazývá účinník a vyjadřuje závislost činného výkonu na fázovém posuvu proudu oproti napětí. Při nulovém fázovém posuvu (kdy zátěž je tvořena odpory) je tento účinník roven jedné a činný výkon je roven součinu napětí a proudu, stejně jako u stejnosměrných obvodů.

Účinník lze vypočítat i podle vztahu

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{0,8429}{0,8629} = 0,9767$$

- stanovení komplexního výkonu:

Při použití komplexního zobrazení zavádíme veličinu komplexní výkon:

$\underline{S} = \underline{U}_0 \underline{I}_1^*$, kde \underline{I}_1^* je komplexně sdružené číslo k fázoru efektivní hodnoty proudu (má opačné znaménko imaginární části v algebraickém tvaru neboli opačné znaménko u úhlu v goniometrickém tvaru).

$$\underline{S} = \underline{U}_0 \underline{I}_1^* = \frac{10}{\sqrt{2}} \underline{|30^\circ} \cdot \frac{0,1726}{\sqrt{2}} \underline{|-42,38^\circ} = 0,8629 \underline{|-12,38^\circ} = 0,8429 - 0,1850j = P + jQ$$

Platí tedy $P = \operatorname{Re}\{\underline{S}\}$, $Q = \operatorname{Im}\{\underline{S}\}$, $S = |\underline{S}|$.

nebo 2.způsob stanovení komplexního výkonu:

z již dříve známých výkonů $P = 0,8429$ W a $Q = -0,1850$ VAr určíme:

$$\underline{S} = P + jQ = 0,8429 - 0,1850j = 0,8629 \underline{|-12,38^\circ},$$

kde $|\underline{S}| = S = 0,8629$ VA a úhel $-12,38^\circ$ odpovídá úhlu celkové impedance \underline{Z} .

- stanovení admitance:

Komplexní admitance je převrácená hodnota impedance, lze ji vyjádřit v goniometrickém nebo algebraickém tvaru:

$$\underline{Y} = Y e^{j\psi} = G + jB,$$

kde reálná část admitance je konduktance G [S] a imaginární složka susceptance B [S].

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{57,9423 \underline{|-12,38^\circ}} = 0,0173 \underline{|12,38^\circ} \text{ S} = 0,0169 + 0,0037j \text{ S}$$

Platí:

$$G = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} = 0,0169 \text{ S}$$

$$B = \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = 0,0037 \text{ S}$$

nebo 2.způsob stanovení admitance, využijeme-li znalost:

$$u_0(t) = 10 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V a } i_1 = 0,1726 \sin(\omega t + 42,38^\circ) \text{ A:}$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}_{1m}}{\underline{U}_0} = \frac{0,1726 \underline{|42,38^\circ}}{10 \underline{|30^\circ}} = 0,0173 \underline{|12,38^\circ} \text{ S} = 0,0169 + 0,0037j \text{ S}$$