ME2,SMP - Domácí cvičení č. 1

Příklad 1.1 Jsou dány vektory $\vec{a}$, $\vec{c}$. Určete jejich skalární součin $\vec{a}\cdot\vec{c}$, velikost vektorů $|\vec{a}|$, $|\vec{c}|$, jejich vektorový součin $\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{a}$ a obsah P trojúhelníku ABC, kde $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{c}$.

1. $\vec{a} = (3, 0, 2)$, $\vec{c} = (1, -2, 1)$;
2. $\vec{a} = (4, 1, 1)$, $\vec{c} = (-2, 3, 5)$;
3. $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{c} = (4, 6, 2)$.

$\square$

Příklad 1.2 Pro trojúhelník ABC určete velikosti jednotlivých stran, obsah a výšku v_b spuštěnou z vrcholu B. Vrcholy trojúhelníka se nacházejí v bodech

1. $A[1, 2, -4], B[-4, -2, -1], C[-2, 0, -2]$;
2. $A[3, 3, 2], B[1, 2, 1], C[4, 2, 7]$.

$\square$

Příklad 1.3 Napište rovnici roviny σ a rovnici roviny ρ, je-li dáno:

1. $A[-8, 1, 3] \in \sigma$, $B[0, 1, -1] \in \sigma$, $C[2, 5, 1] \in \sigma$,
   $\rho || \sigma$, $D[-1, 7, 5] \in \rho$;
2. $K[1, 1, 1] \in \sigma$, $\sigma \perp \rho$, $\sigma \perp \tau$,
   $A[2, 1, 0] \in \rho$, $B[-3, 2, 4] \in \rho$, ρ je rovnoběžná s osou y,
   τ má rovnici $x + 2y - 3z + 17 = 0$.

$\square$

Příklad 1.4 Napište rovnici roviny σ, pro niž platí:

1. $\sigma \perp \tau$ a v rovině σ leží přímka p o parametrických rovnicích $x = 4 + 3t$, $y = 7 - 2t$, $z = -1 + 5t$,
   $A[1, 2, -1] \in \tau$, $B[2, 1, -1] \in \tau$, $C[0, 3, 4] \in \tau$;
2. $\sigma || \tau$, $A[-5, 1, 2] \in \sigma$,
   přímky $p, q \subset \tau$, přímky mají parametrické vyjádření
   $p:\ x = 1 + 2t,\ y = -1 + 3t,\ z = -4t;\quad q:\ x = 2 - 2t,\ y = 3 - 3t,\ z = -5 + 4t.$

$\square$

Příklad 1.5

1. Určete průsečík P přímky p s rovinou $\sigma:\ 4x-5y+3z-2=0$, přímka p je průsečnice rovin $\rho:\ x-2y+3z-5=0$ a $\tau:\ 2x+y-2z+6=0$;

2. Určete kolmý průmět M' bodu $M[8,15,2]$ do roviny σ, která je určena bodem $A[1,2,-1]$ a přímkou $p:\ x=2+3t,\ y=1-t,\ z=-3+2t$.

□

Příklad 1.6

1. Ukažte, že roviny σ a ρ jsou rovnoběžné a určete jejich vzdálenost v.
   V rovině σ leží bod $A[1,2,-4]\in\sigma$ a přímka p o parametrických rovnicích $p:\ x=1+2t,\ y=3-2t,\ z=-1+t$.
   V rovině ρ leží přímky q,r o parametrických rovnicích $q:\ x=2t,\ y=-t,\ z=4t$, $r:\ x=2-2t,\ y=-1+2t,\ z=4-t$;

2. Určete vzdálenost v bodu $A[6,11,5]$ od přímky $p:\ x=1-3t,\ y=2+t,\ z=-1+2t$.

□

Příklad 1.7 Určete vzájemnou polohu přímek p, q. Jsou-li přímky různoběžné, určete jejich průsečík P, jsou-li rovnoběžné či mimoběžné, určete jejich vzdálenost v

1. $p:\ x=5+t,\ y=6-t,\ z=2+3t,\ \ q:\ x=2+2t,\ y=4+3t,\ z=-t$;

2. $p:\ x=2+3t,\ y=1-6t,\ z=3+9t,\ \ q:\ x=4+t,\ y=5-2t,\ z=-7+3t$;

3. $p:\ x=1-t,\ y=2+t,\ z=-1+3t,\ \ q:\ x=2+3t,\ y=-1+t,\ z=3-t$.

□

Příklad 1.8 Ukažte, že přímky p a q jsou různoběžky, nalezněte jejich průsečík a určete jejich odchylku. Přímka p prochází body $P_1[2,3,1], P_2[5,6,-2]$. Přímka q je průsečnicí rovin ρ a σ s obecnými rovnicemi

$$\rho: 2x-y-z+3=0, \quad \sigma: x+2y-3z+4=0\,.$$

□

Příklad 1.9 Určete vzájemnou polohu rovin ρ, σ. Jsou-li roviny různoběžné, určete jejich odchylku φ, jsou-li rovnoběžné, určete jejich vzdálenost v.

1. Rovina ρ je určena body $A[3,-4,-1], B[-1,1,1], C[6,-7,-4]$; rovina σ prochází bodem $D[2,5,4]$ kolmo na přímku $q:\ x=2+2t,\ y=4-t,\ z=3t$.

2. Rovina ρ má obecnou rovnici $\rho: 2x+3y+z-6=0$; v rovině σ leží přímka p s parametrickými rovnicemi $p: x=2-t, y=-4+t, z=-t$ a dále je rovina σ rovnoběžná s přímkou $q: x=3u, y=2-u, z=-5-3u$.

□

Příklad 1.10 Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ. Jsou-li tyto geometrické útvary různoběžné, určete jejich průsečík a jejich odchylku φ, jsou-li rovnoběžné, určete jejich vzdálenost v.

1. Přímka p prochází bodem $P[5,1,-4]$ rovnoběžně s přímkou $q: x=3-t, y=-2-4t, z=-1-t$. Rovina ρ je popsána obecnou rovnicí $\rho: 2x-y+2z+8=0$.

2. Přímka p je určena body $P_1[0,1,-1], P_2[3,4,5]$. Rovina ρ má obecnou rovnici $\rho: y+z-5=0$.

3. Přímka p je průsečnicí rovin α a β, kde $\alpha: 2x+3y+2z-1=0,\quad \beta: 8x-6y-z+14=0$. Rovina ρ je určena body $A[3,3,2], B[1,2,1], C[4,2,7]$.

□

Příklad 1.11 Určete, jaká kvadratická plocha je popsána příslušnou rovnicí. Dále stanovte souřadnice význačného bodu, příp. rovnice význačných os a rozhodněte, zda se jedná o rotační plochu, své rozhodnutí zdůvodněte. Plochu načrtněte.

1. $9x^2+4y^2+9z^2-54x-40y+36z+181=0$;

2. $9x^2-4y^2-4z^2+36x+8y-8z+64=0$;

3. $4x^2-9y^2+4z^2-24x-36y+24z+36=0$;

4. $6x^2+4z^2-36x-24y+8z+10=0$;

5. $9x^2-9y^2-4z^2+54x+18y-16z+20=0$.

□