ME2,SMP - Domácí cvičení č. 3

Příklad 3.1 Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů v daných prostorech.

(a) V prostoru $\mathbb{R}_4$ o vektorech $v_1 = [2, -1, 3, 5]^T$, $v_2 = [-1, 2, -3, -5]^T$, $v_3 = [4, 0, -2, -1]^T$, $v_4 = [5, 1, -2, -1]^T$.

(b) V prostoru $\mathbb{R}_3$ o vektorech $v_1 = [1, 2, 5]^T$, $v_2 = [6, 1, -2]^T$, $v_3 = [2, -4, 3]^T$, $v_4 = [3, -2, 1]^T$.

(c) V prostoru $\mathbb{R}_4$ o vektorech $v_1 = [3, 2, 8, 7]^T$, $v_2 = [1, 2, 2, -1]^T$, $v_3 = [5, 5, 5, 9]^T$.

$\square$

Příklad 3.2 Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů v daných prostorech.

(a) V prostoru $\mathcal{M}_{2,3}$ o prvcích

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, V_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, V_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) V prostoru $\mathcal{P}_3$ o prvcích $v_1(x) = x^2 + 2$, $v_2(x) = x^2 - 2$, $v_3(x) = x$, $v_4(x) = x^3 + x + 1$.

(c) V prostoru $\mathcal{C}(0, 1)$ o prvcích $v_1(x) = \sin^4 x$, $v_2(x) = \cos 2x$, $v_3(x) = \cos^2 x$, $v_4(x) = \sin^2 2x$.

$\square$

Příklad 3.3 Podprostor V je generován vektory $v_1, v_2, \ldots$. Určete dimenzi a bázi podprostoru V.

(a) V prostoru $\mathbb{R}_4$ generují podprostor V vektory $v_1 = [2, -1, 3, 5]^T$, $v_2 = [-1, 2, -3, -5]^T$, $v_3 = [4, 0, -2, -1]^T$, $v_4 = [5, 1, -2, -1]^T$.

(b) V prostoru $\mathbb{R}_3$ generují podprostor V vektory $v_1 = [1, 2, 5]^T$, $v_2 = [6, 1, -2]^T$, $v_3 = [2, -4, 3]^T$, $v_4 = [3, -2, 1]^T$.

(c) V prostoru $\mathbb{R}_4$ generují podprostor V vektory $v_1 = [3, 2, 8, 7]^T$, $v_2 = [1, 2, 2, -1]^T$, $v_3 = [5, 5, 5, 9]^T$.

$\square$

Příklad 3.4 Podprostor V je generován vektory $v_1, v_2, \ldots$. Určete dimenzi a bázi podprostoru V.

(a) V prostoru $\mathcal{M}_{2,3}$ generují podprostor V prvky

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ V_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$V_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, V_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) V prostoru $\mathcal{P}_3$ generují podprostor V prvky $v_1(x) = x^2 + 2$, $v_2(x) = x^2 - 2$, $v_3(x) = x$, $v_4(x) = x^3 + x + 1$.

(c) V prostoru $\mathcal{C}(0,1)$ generují podprostor V prvky $v_1(x) = \sin^4 x$, $v_2(x) = \cos 2x$, $v_3(x) = \cos^2 x$, $v_4(x) = \sin^2 2x$.

□

Příklad 3.5 Určete, zda množina V je podprostorem daného lineárního vektorového prostoru. Pokud ano, určete dimenzi tohoto podprostoru V.

(a) V prostoru $\mathbb{R}_5$ je $V = \{ \ [x_1, x_2, 0, 0, x_5]^T \ \mid x_1, x_2, x_5 \in \mathbb{R} \ \}$.

(b) V prostoru $\mathbb{R}_5$ je $V = \{ \ [x_1, x_2, 2, x_4, x_5]^T \ \mid x_1, x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \ \}$.

(c) V prostoru $\mathbb{R}_4$ je $V = \{ \ [a + c, 2b, a + b + c, 3a - b]^T \ \mid a, b, c \in \mathbb{R} \ \}$.

□

Příklad 3.6 Určete, zda množina V je podprostorem daného lineárního vektorového prostoru. Pokud ano, určete dimenzi tohoto podprostoru V.

(a) V prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$ je pevně zadaná matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$. Potom $V = \{ \ B \in \mathcal{M}_{2,2} \ \mid AB = BA \ \}$.

(b) V prostoru $\mathcal{P}_3$ je $V = \{ \ p(x) \in \mathcal{P}_3 \ \mid$ graf polynomu $p(x)$ prochází počátkem soustavy souřadnic $\}$.

(c) V prostoru $\mathcal{P}_2$ je $V = \{ \ p(x) \in \mathcal{P}_2 \ \mid$ graf polynomu $p(x)$ prochází bodem $[1, 2]$ $\}$.

□

Příklad 3.7 Ukažte, že dané prvky tvoří bázi prostoru V, a určete souřadnice prvku z, příp. Z, v této bázi.

(a) $V = \mathbb{R}_4$, $r_1 = [2, 0, -1, 1]^T$, $r_2 = [1, -3, 1, 0]^T$, $r_3 = [-3, 2, 0, 5]^T$, $r_4 = [0, -2, 1, 1]^T$; $z = [0, -5, 2, 8]^T$.

(b) $V = \mathcal{M}_{2,2}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$; $Z = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(c) $V=\mathcal{P}_3, r_1(x)=x^3-9x^2-2x+1,\ r_2(x)=x^3+5x^2-x,\ r_3(x)=2x^3-17x^2-2x+5,$
$r_4(x)=-x^3+5x^2-11x;$
$z(x)=4x^3-25x^2-18x+7.$

$\square$

Příklad 3.8 Podprostor V prostoru W je generován prvky $v_1, v_2, ...$ Určete dimenzi podprostoru V. Rozhodněte, zda prvek $z \in V$. Pokud ano, určete bázi podprostoru V a $\hat{z}$ souřadnice prvku z v této bázi podprostoru V.

(a) $W=\mathbb{R}_5,\ v_1=[1,0,-3,0,2]^T,\ v_2=[-2,0,5,0,-2]^T,\ v_3=[1,0,-6,0,1]^T,$
$v_4=[-2,0,1,0,3]^T;$
$z=[-10,0,13,0,-7]^T.$

(b) $W=\mathcal{P}_4, v_1(x)=x^4-2x^3+4,\ v_2(x)=-x^4+2x^3+5x,\ v_3(x)=2x^4-x^3+4x-5;$
$z(x)=5x^4-x^3+22x-11.$

(c) $W=\mathcal{M}_{2,2}, v_1=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ v_3=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$
$v_4=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$
$z=\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}.$

$\square$

Příklad 3.9 Podprostor V prostoru R_n je generován prvky $v_1, v_2, ...$ Určete dimenzi podprostoru V a určete ortogonální a ortonormální bázi podprostoru V. V prostoru R_n uvažujeme skalární násobení $(u,z)=u^Tz$ pro každé $u,z \in R_n$.

(a) $n=4,\ v_1=[1,1,-1,-2]^T,\ v_2=[5,8,-2,-3]^T,\ v_3=[3,9,3,8]^T.$

(b) $n=4,\ v_1=[1,0,0,1]^T,\ v_2=[1,1,1,1]^T,\ v_3=[2,1,1,2]^T,\ v_4=[1,1,2,3]^T.$

(c) $n=5,\ v_1=[2,0,1,3,-1]^T,\ v_2=[1,1,0,-1,1]^T,\ v_3=[0,-2,1,5,-3]^T,$
$v_4=[1,-3,2,9,-5]^T.$

$\square$

Příklad 3.10 Určete dimenzi podprostoru V prostoru $\mathcal{P}_3$ a určete ortogonální a ortonormální bázi podprostoru V.

(a) Podprostor V je generován prvky $v_1(x)=x^2+2,\ v_2(x)=x^2-2,\ v_3(x)=x^3+x.$ V prostoru $\mathcal{P}_3$ uvažujeme skalární násobení $(u,z)=\int_{-1}^{1} u(x)z(x)\mathrm{d}x.$

(b) Podprostor V je $V=\{\ p(x)\in\mathcal{P}_3\ \mid p(0)=0\ \}$. V prostoru $\mathcal{P}_3$ uvažujeme skalární násobení $(u,v)=\int_0^1 u(x)v(x)\mathrm{d}x.$

$\square$