ME2,SMP - Domácí cvičení č. 4

Příklad 4.1 Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Určete matice, pokud existují.

(a) $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$, $-3\mathbf{A} + 4\mathbf{B}$, $\mathbf{A} + \mathbf{D}$, $\mathbf{D} - \mathbf{C}$.

(b) $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$, $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CB}$, $\mathbf{AD}$, $\mathbf{DA}$, $\mathbf{BD}$, $\mathbf{DB}$.

□

Příklad 4.2 Určete všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & = & -1\,, \\ 3x_1 & + & 5x_2 & = & 1\,. \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 5\,, \\ -2x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 8\,, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 19\,. \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 6\,, \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 10\,, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8\,, \\ 3x_1 & + & 6x_2 & & & + & 4x_4 & = & 16\,. \end{array}$$

□

Příklad 4.3 Určete všechna řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 0\,, \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 11x_4 & + & 12x_5 & = & 0\,, \\ -4x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & - & 18x_4 & - & x_5 & = & 0\,, \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 17x_4 & + & 2x_5 & = & 0\,. \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0\,, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0\,, \\ -4x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0\,, \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0\,, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0\,. \end{array}$$

$\square$

Příklad 4.4 Určete všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1\,,\\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &= -7\,,\\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2\,,\\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 1\,,\\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4\,,\\ 9x_1 - 14x_2 + 28x_3 &= 7\,. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -12\,,\\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9\,,\\ 5x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 15\,. \end{aligned}$$

$\square$

Příklad 4.5 Určete všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 5\,,\\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -12\,,\\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 &= 13\,,\\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 10x_4 &= 9\,. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 1\,,\\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 8x_4 + 17x_5 &= -2\,,\\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 + x_5 &= -9\,,\\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= -1\,,\\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 9x_4 + 11x_5 &= 3\,,\\ 4x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= 5\,. \end{aligned}$$

$\square$

Příklad 4.6 Určete všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 2\,,\\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 10x_4 + 10x_5 &= 6\,,\\ 2x_1 + 8x_3 + 6x_4 + 7x_5 &= 6\,,\\ -4x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 17x_4 - 10x_5 &= 8\,. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 3\,,\\
4x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 5x_4 & - & x_5 & = & 7\,,\\
2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 6x_5 & = & 6\,,\\
3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & = & 7\,,\\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 10\,.
\end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 3\,,\\
2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2\,,\\
3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5\,.
\end{array}$$

□

Příklad 4.7 Určete všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & = & 6\,,\\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0\,,\\
5x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 6\,,\\
24x_1 & + & 30x_2 & - & 6x_3 & + & 12x_4 & = & 36\,.
\end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & = & 6\,,\\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0\,,\\
5x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 6\,,\\
24x_1 & + & 30x_2 & - & 6x_3 & + & 12x_4 & = & 35\,.
\end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 2\,,\\
2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -4\,,\\
3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0\,.
\end{array}$$

□

Příklad 4.8 Určete všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
-x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4\,,\\
2x_1 & & & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 8\,,\\
4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 0\,,\\
3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 4\,.
\end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 6x_4 & + & 2x_5 & = & 2\,,\\
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 1\,,\\
2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 9\,.
\end{array}$$

□

Příklad 4.9 Určete všechna řešení nehomogenní soustavy lineárních rovnic.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & - & x_5 & = & 2\,, \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 1\,, \\ 6x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 8x_4 & + & x_5 & = & 3\,, \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = & 0\,. \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & & & = & 11\,, \\ -3x_1 & + & 9x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 11x_5 & = & -10\,, \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 13x_5 & = & 13\,, \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 4x_5 & = & 8\,, \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1\,. \end{array}$$

□

Příklad 4.10 Určete všechna řešení soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametru a.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3\,, \\ 2x_1 & - & 8x_2 & + & 7x_3 & = & 18\,, \\ -x_1 & + & (8-3a)x_2 & + & (8-3a)x_3 & = & 10-3a\,. \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 5\,, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 7\,, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & 13x_4 & + & 3x_5 & = & 20\,, \\ (2a-3)x_1 & & & + & 5x_3 & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 2a-3\,. \end{array}$$

□