ME2,SMP - Domácí cvičení č. 6

Příklad 6.1 Určete hodnost matice $\mathbf{A}$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -6 \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & 14 & -8 \\ 13 & 0 & -18 \\ -10 & 11 & 13 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & -6 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

□

Příklad 6.2 K matici $\mathbf{A}$ určete matici inverzní $\mathbf{A^{-1}}$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & 2+3i \\ 2-3i & 1+2i \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & -9 & 5 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

□

Příklad 6.3 K matici $\mathbf{A}$ určete matici inverzní $\mathbf{A^{-1}}$, pokud existuje.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -2 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

□

Příklad 6.4 K matici $\mathbf{A}$ určete matici inverzní $\mathbf{A^{-1}}$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 10 & 6 \\ 3 & 9 & 8 & 13 \end{bmatrix}$.

□

Příklad 6.5 K matici $\mathbf{A}$ určete matici inverzní $\mathbf{A^{-1}}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -5 \\ 3 & 5 & -3 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

□

Příklad 6.6 Určete matici $\mathbf{X}$ tak, aby platila daná rovnost.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 8 \\ 3 & 4 & -12 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 2 \\ -3 & 4 & -6 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

□

Příklad 6.7 Určete matici $\mathbf{X}$ tak, aby platila daná rovnost.

(a) $\mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix};$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$

□

Příklad 6.8 Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Určete matici $\mathbf{X}$, pro kterou je splněna maticová rovnice :

$$\mathbf{X}.\mathbf{A} - 3.\mathbf{I} = \mathbf{B},$$

kde $\mathbf{I}$ značí jednotkovou matici řádu čtyři. □

Příklad 6.9 S využitím inverzní matice k matici soustavy určete řešení soustavy lineárních algebraických rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 6\,, \\ 2x_1 + 7x_2 &= 11\,; \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 14\,, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5\,, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8\,; \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 8\,, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_4 &= 16\,, \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 6\,, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10\,. \end{aligned}$$

□

Příklad 6.10 Lineární zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ dané předpisem
$\mathcal{L}(ax^2+bx+c) = [2a+3b-c, a+2b+c, 5a+8b+2c]^T$
je izomorfismus prostoru $\mathcal{P}_2$ na prostor $\mathbb{R}_3$.
Na prostoru $\mathcal{P}_2$ uvažujme standardní bázi tvořenou prvky $v_1(x) = x^2$, $v_2(x) = x$, $v_3(x) = 1$, na prostoru $\mathbb{R}_2$ je standardní báze: $u_1 = [1,0,0]^T$, $u_2 = [0,1,0]^T$, $u_3 = [0,0,1]^T$.

(a) Nalezněte obrazy $\mathcal{L}(v_i(x))$ všech prvků báze prostoru $\mathcal{P}_2$ a určete jejich souřadnice $\widehat{\mathcal{L}(v_i)}$ vzhledem k bázi prostoru $\mathbb{R}_2$.

(b) Napište matici $\mathbf{A}$ lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v daných bázích, pro kterou platí $\mathbf{A} \cdot \widehat{p(x)} = \widehat{y}$ pro každé $y = \mathcal{L}(p(x))$.
Návod: matice $\mathbf{A}$ má za i-tý sloupec souřadnice $\widehat{\mathcal{L}(v_i)}$ obrazu $\mathcal{L}(v_i(x))$.

(c) Určete inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$.

(d) Pomocí inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ nalezněte předpis pro inverzní zobrazení $\mathcal{L}^{-1}$ k zobrazení $\mathcal{L}$.

□