ME2,SMP
Domácí cvičení č. 1-10 - Výsledky

Domácí cvičení č. 1

Příklad 1.1

1. $\vec{a}\cdot\vec{c}=5$, $|\vec{a}|=\sqrt{13}$, $|\vec{c}|=\sqrt{6}$, $\vec{a}\times\vec{c}=(4,-1,-6)$, $P=\frac{1}{2}\sqrt{53}$.
2. $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, $|\vec{a}|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $|\vec{c}|=\sqrt{38}$, $\vec{a}\times\vec{c}=(2,-22,14)$, $P=3\sqrt{19}$.
3. $\vec{a}\cdot\vec{c}=28$, $|\vec{a}|=\sqrt{14}$, $|\vec{c}|=2\sqrt{14}$, $\vec{a}\times\vec{c}=(0,0,0)$, $P=0$.

Příklad 1.2

1. $|\vec{AB}|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $|\vec{AC}|=\sqrt{17}$, $|\vec{BC}|=3$, $P=\frac{3}{2}$, $v_b=\frac{3\sqrt{17}}{17}$;
2. $|\vec{AB}|=\sqrt{6}$, $|\vec{AC}|=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$, $|\vec{BC}|=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, $P=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{14}$, $v_b=\frac{\sqrt{42}}{3}$.

Příklad 1.3

1. $\sigma: 2x-3y+4z+7=0$, $\rho: 2x-3y+4z+3=0$;
2. $\sigma: -10x+17y+8z-15=0$, $\rho: 4x+5z-8=0$.

Příklad 1.4

1. $\sigma: x-y-z+2=0$;
2. $\sigma: x+6y+5z-11=0$.

Příklad 1.5

1. $P[-1,0,2]$, $p: x=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}t,\ y=-\frac{16}{5}+\frac{8}{5}t,\ z=t$.
2. $M'[2,3,5]$, $\sigma: 2x+4y-z-11=0$.

Příklad 1.6

1. $\sigma: 7x+6y-2z-27=0,\ \rho: 7x+6y-2z=0$, $v=\frac{27}{\sqrt{89}}$;
2. $A'[-\frac{2}{7},\frac{17}{7},-\frac{1}{7}]$, $\sigma: -3x+y+2z-3=0$, $v=\frac{4\sqrt{61}}{\sqrt{7}}$.

Příklad 1.7

1. různoběžky, $P[4,7,-1]$;
2. rovnoběžky, $A[2,1,3]$, $A'[\frac{46}{7},-\frac{1}{7},\frac{5}{7}]$, $v=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$;
3. mimoběžky, $A[1,2,-1]$, $x-2y+z+4=0$, $v=\frac{11}{\sqrt{6}}$.

Příklad 1.8

$p:\ x=2+t,\ y=3+t,\ z=1-t,\ q:\ x=-2+t,\ y=-1+t,\ z=t$; $P[\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}]$, $\varphi=\arccos\frac{1}{3}$.

Příklad 1.9

1. $\rho: 3x+2y+z=0$; $\sigma: 2x-y+3z-11=0$; různoběžné roviny, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.
2. $\sigma: 2x+3y+z+8=0$; roviny rovnoběžné různé, $v=\sqrt{14}$.

Příklad 1.10
1. $p:\ x=5-t,\ y=1-4t,\ z=-4-t$, přímka rovnoběžná s rovinou, $v=3$.
2. $p:\ x=t,\ y=1+t,\ z=-1+2t$, přímka různoběžná s rovinou, průsečík $P[\frac{5}{3},\frac{8}{3},\frac{7}{3}]$, odchylka $\varphi=\frac{\pi}{3}$.
3. $p:\ x=-1+t,\ y=1+2t,\ z=-4t$, $\rho: 2x-3y-z+5=0$; přímka rovnoběžná s rovinou, ležící v rovině, proto $v=0$.

Příklad 1.11
1. elipsoid, střed $S[3,5,-2]$, rotační s osou rotace rovnoběžnou s osou y;
2. jednodílný hyperboloid, střed $S[-2,1,-1]$, rotační s osou rotace rovnoběžnou s osou x;
3. kuželová plocha, vrchol $V[3,-2,-3]$, rotační s osou rotace rovnoběžnou s osou y;
4. eliptický paraboloid, vrchol $V[3,-2,-1]$, není rotační;
5. dvojdílný hyperboloid, střed $S[-3,1,-2]$, rotační s osou rotace rovnoběžnou s osou x.

Domácí cvičení č. 2
Příklad 2.1
(a) $s(x)=2x^5+3x^4-7x^2+5x-2,\ \ r(x)=0$;
(b) $s(x)=x^2+4x+2,\ \ r(x)=-15x+5$.

Příklad 2.2
(a) $p(3)=12500,\ \ p(-3)=80$;
(b) -2 je kořen násobnosti 5;
(c) 1 (2–nás.), 2 (1–nás.); $p(x)=(x+2)^5(x-1)^2(x-2)$.

Příklad 2.3
(a) $p(x)=(x-3)^4$;
(b) $p(x)=(x+1)(x-2)(x+3)$;
(c) $p(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x+2)$.

Příklad 2.4
(a) $p(x)=(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$;
(b) $p(x)=(x+1)(x-3)(x+3-2\sqrt{3})(x+3+2\sqrt{3})$.

Příklad 2.5
(a) $p(x)=(x+2)^2\cdot(x^2-x+1)=(x+2)^2\cdot(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$;
(b) $p(x)=3\cdot(x+1)\cdot(x^2+\frac{1}{3}x+1)=3\cdot(x+1)\cdot(x+\frac{1}{6}-i\frac{\sqrt{35}}{6})\cdot(x+\frac{1}{6}+i\frac{\sqrt{35}}{6})$.

Příklad 2.6
(a) $p(x)=(x-2)(x-1)^2(x^2+3)=(x-2)(x-1)^2(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)$;
(b) $p(x)=x^2(x-1)(x+2)(x^2-2x+2)=x^2(x-1)(x+2)(x-1-i)(x-1+i)$.

Příklad 2.7

(a) $p(x) = (x+1)(x+3)(x^2+4) = (x+1)(x+3)(x-2i)(x+2i)$;
(b) $p(x) = (x-3)^2(x^2+1)^2 = (x-3)^2(x-i)^2(x+i)^2$.

Příklad 2.8
$p(x) = (x-2)^3(x+3)^2(x^2+4x+13) = (x-2)^3(x+3)^2(x+2-3i)(x+2+3i)$.

Příklad 2.9
(a) $p(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$;
(b) $p(x) = (x^2+4)(x^2-2\sqrt{3}x+4)(x^2+2\sqrt{3}x+4) = (x-2i)(x+2i)(x-\sqrt{3}-i)(x-\sqrt{3}+i)$ $(x+\sqrt{3}-i)(x+\sqrt{3}+i)$;
(c) $p(x) = (x^2+3)(x^2+2) = (x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$.

Příklad 2.10
(a) $p(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x+3)(x+4)$, $q(x) = (x-1)(x-2)^3(x+4)(x^2+1)$, $d(x) = (x-1)(x-2)^2(x+4)$, $n(x) = (x-1)^2(x-2)^3(x+3)(x+4)(x^2+1)$;
(b) $p(x) = (x+2)^2(x-3)(x^2+1)$, $q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x^2+1)^2$, $d(x) = (x-3)(x^2+1)$, $n(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x+2)^2(x^2+1)^2$.

Domácí cvičení č. 3
Příklad 3.1
(a) lineárně závislé, $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$;
(b) lineárně závislé;
(c) lineárně nezávislé.

Příklad 3.2
(a) lineárně závislé, např. $-V_1 + V_2 - V_4 + V_5 = \mathbf{0}$;
(b) lineárně nezávislé;
(c) lineárně závislé, $\sin^4 x + \cos 2x - \cos^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x = 0$.

Příklad 3.3
(a) $\dim V = 3$, báze např. v_1, v_2, v_3;
(b) $\dim V = 3$, báze např. v_1, v_2, v_3, $V = R_3$;
(c) $\dim V = 3$, báze v_1, v_2, v_3.

Příklad 3.4
(a) $\dim V = 4$, báze např. V_1, V_2, V_3, V_4;
(b) $\dim V = 4$, báze např. $v_1(x), v_2(x), v_3(x), v_4(x)$, $V = \mathcal{P}_3$;
(c) $\dim V = 3$, báze např. $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$.

Příklad 3.5
(a) je podprostor, báze je např. $[1,0,0,0,0]^T$, $[0,1,0,0,0]^T$, $[0,0,0,0,1]^T$, $\dim V = 3$;
(b) není podprostor;
(c) je podprostor, báze je např. $[1,0,1,3]^T$, $[0,2,1,-1]^T$, $[1,0,1,0]^T$, $\dim V = 3$.

Příklad 3.6
(a) je podprostor, báze je např. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\dim V = 2$;

(b) je podprostor, báze je např. x^3, x^2, x, $\dim V = 3$;
(c) není podprostor.

Příklad 3.7
(a) prvky jsou lineárně nezávislé, $\widehat{z} = [1,1,1,2]^T$;
(b) prvky jsou lineárně nezávislé, $\widehat{Z} = [1,1,1,1]^T$;
(c) prvky jsou lineárně nezávislé, $\widehat{z} = [2,1,1,1]^T$.

Příklad 3.8
(a) $\dim V = 3$, báze je např. v_1, v_2, v_3, potom souřadnice prvku z v této bázi jsou $\widehat{z} = [3,8,3]^T$;
(b) $\dim V = 3$, báze je $v_1(x), v_2(x), v_3(x)$, potom souřadnice prvku $z(x)$ v této bázi jsou $\widehat{z(x)} = [1,2,3]^T$;
(c) $\dim V = 4$, báze je v_1, v_2, v_3, v_4, potom souřadnice prvku z v této bázi jsou $\widehat{z} = [4,3,2,1]^T$.

Příklad 3.9
(a) $\dim V = 2$, báze je např. v_1, v_2, potom ortogonální báze je $u_1 = [1,1,-1,-2]^T$,
$u_2 = [2,5,1,3]^T$ a ortonormální báze je $e_1 = \frac{\sqrt{7}}{7}[1,1,-1,-2]^T$, $e_2 = \frac{\sqrt{39}}{39}[2,5,1,3]^T$;
(b) $\dim V = 3$, báze je např. v_1, v_2, v_4, potom ortogonální báze je $u_1 = [1,0,0,1]^T$,
$u_2 = [0,1,1,0]^T$, $u_3 = [-2,-1,1,2]^T$ a ortonormální báze je $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}[1,0,0,1]^T$,
$e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}[0,1,1,0]^T$, $e_3 = \frac{\sqrt{10}}{10}[-2,-1,1,2]^T$;
(c) $\dim V = 2$, báze je např. v_1, v_2, potom ortogonální báze je $u_1 = [2,0,1,3,-1]^T$,
$u_2 = [19,15,2,-9,13]^T$ a ortonormální báze je $e_1 = \frac{1}{\sqrt{15}}[2,0,1,3,-1]^T$,
$e_2 = \frac{1}{2\sqrt{210}}[19,15,2,-9,13]^T$.

Příklad 3.10
(a) $\dim V = 3$, báze je v_1, v_2, v_3, potom ortogonální báze je $u_1(x) = x^2+2$, $u_2(x) = 35x^2-13$,
$u_3(x) = x^3 + x$ a ortonormální báze je $e_1(x) = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{166}}(x^2+2)$,
$e_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{166}}(35x^2-13)$, $e_3(x) = \frac{\sqrt{105}}{2\sqrt{46}}(x^3+x)$;
(b) $\dim V = 3$, báze je např. $v_1(x) = x^3, v_2(x) = x^2, v_3(x) = x$, potom ortogonální báze je
$u_1(x) = x^3$, $u_2(x) = x^2 - \frac{7}{6}x^3$, $u_3(x) = x - 3x^2 + \frac{21}{10}x^3$ a ortonormální báze je
$e_1(x) = \sqrt{7}x^3$, $e_2(x) = 6\sqrt{5}x^2 - 7\sqrt{5}x^3$, $e_3(x) = 10\sqrt{3}x - 30\sqrt{3}x^2 + 21\sqrt{3}x^3$.

Domácí cvičení č. 4
Příklad 4.1
(a) $\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & -8 \\ -6 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $-3\mathbf{A} + 4\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & 11 & -13 & -6 \\ -12 & -2 & -2 & 20 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{A} + \mathbf{D}$ ... nelze, $\mathbf{D} - \mathbf{C}$ ... nelze.

(b) $\mathbf{AB}$ ... nelze, $\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -24 & 16 \end{bmatrix}$, $\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 0 & 8 \\ 3 & 7 & 11 & -18 \\ -9 & 7 & -5 & -2 \\ 15 & -7 & 13 & -6 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}$, $\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -5 & -12 \\ -12 & 6 & 3 & 5 \\ -6 & -4 & 5 & 13 \\ 3 & 9 & -6 & -17 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AD}$ ... nelze,
$\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} 9 & -7 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 14 & -20 \end{bmatrix}$, $\mathbf{BD}$ ... nelze, $\mathbf{DB} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -5 & -13 \\ -12 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Příklad 4.2
(a) $x = [-3, 2]^T$;
(b) $x = [23, -12, 3]^T$;
(c) $x = [0, 4, -6, -2]^T$.

Příklad 4.3
(a) $x = k[1, 1, 0, 0, 0]^T$, $k \in \mathbb{R}$;
(b) $x = [0, 0, 0, 0]^T$.

Příklad 4.4
(a) nemá řešení;
(b) $x = \left[\frac{7}{11}, -\frac{1}{11}, 0\right]^T + t \cdot \left[-\frac{14}{11}, \frac{13}{11}, 1\right]^T$, $t \in \mathbb{R}$;
(c) $x = [-1, 0, 10]^T$.

Příklad 4.5
(a) $x = [10, -4, -3, 0]^T + k[4, -3, 1, 1]^T$, $k \in \mathbb{R}$;
(b) $x = [14, 0, 7, -2, 0]^T + k_1[-2, 1, 0, 0, 0]^T + k_2[17, 0, 9, -4, 1]^T$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.6
(a) nemá řešení;
(b) $x = [1, 1, 1, 1, 1]^T$;
(c) $x = \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0\right]^T + t \cdot [-1, 0, 1, 0]^T + s \cdot \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1\right]^T$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.7
(a) $x = [-6, 6, 0, 0]^T + t \cdot [4, -3, 1, 0]^T + s \cdot [-3, 2, 0, 1]^T$, $t, s \in \mathbb{R}$;
(b) nemá řešení;
(c) $x = \left[-\frac{13}{8}, 0, -1, -\frac{1}{8}\right]^T + t \cdot [-2, 1, 0, 0]^T$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.8
(a) $x = [4, 8, 0, 0]^T + t \cdot [-2, -5, 1, 0]^T$, $t \in \mathbb{R}$;
(b) $x = [-25, 11, 2, 0, 0]^T + t \cdot [21, -7, -2, 1, 0]^T + s \cdot [-20, 7, 1, 0, 1]^T$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.9

(a) $x = \left[\frac{4}{3}, -1, 0, 0, 0\right]^T + t \cdot \left[-\frac{1}{3}, 0, 1, 0, 0\right]^T + s \cdot [-3, 2, 0, 1, 0]^T + +u \cdot \left[\frac{7}{3}, -3, 0, 0, 1\right]^T$, $t, s, u \in \mathbb{R}$;
(b) $x = [0, 0, 3, -2, 0]^T + t \cdot [5, 0, -4, -2, 1]^T + s \cdot [3, 1, 0, 0, 0]^T$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.10
(a) Pro $a \neq 3$ má soustava jedno řešení $x = [-2, -1, 2]^T$,
pro $a = 3$ má soustava nekonečně mnoho řešení $x = [-5, 0, 4]^T + k[-3, 1, 2]^T$, $k \in \mathbb{R}$.
(b) Pro $a = 1$ soustava nemá řešení,
pro $a \neq 1$ má soustava nekonečně mnoho řešení
$x = \frac{1}{10(a-1)}[5 + 10a, 74a - 80, 15 - 12a, 0, 30 - 30a]^T + k[0, -5, 1, 1, 2]^T$, $k \in \mathbb{R}$.

Domácí cvičení č. 5
Příklad 5.1
(a) $\det \mathbf{A} = 22$;
(b) $\det \mathbf{A} = -89$;
(c) $\det \mathbf{A} = -151$.

Příklad 5.2
(a) $\det \mathbf{A} = -9a - 9b + 54c - 9d$;
(b) $\det \mathbf{A} = 48$.

Příklad 5.3
(a) $\det \mathbf{A} = 66$;
(b) $\det \mathbf{A} = -90$;
(c) $\det \mathbf{A} = 21$.

Příklad 5.4
(a) $\det \mathbf{A} = 394$;
(b) $\det \mathbf{A} = 120$.

Příklad 5.5
(a) $\det \mathbf{A} = -12$;
(b) $\det \mathbf{A} = 228$.

Příklad 5.6
(a) $\det \mathbf{A} = -5$, $\det \mathbf{B} = -1$, $\det(\mathbf{AB}) = 5$, $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = 5$, $\det(\mathbf{AB}^T) = 5$;
(b) $\det \mathbf{A} = 44$, $\det \mathbf{B} = 112$, $\det(\mathbf{AB}) = 4928$, $\det(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = 4928$, $\det(\mathbf{AB}^T) = 4928$.

Příklad 5.7
Singulární je pouze matice $\mathbf{A}_3$, ostatní matice jsou regulární, protože: $\det \mathbf{A}_1 = -72$, $\det \mathbf{A}_2 = 12$, $\det \mathbf{A}_3 = 0$, $\det \mathbf{A}_4 = 20$.

Příklad 5.8
Rovnost je splněna pro $x = \pm 1$ a pro $x = \pm 2$, protože $\det \mathbf{A} = 3(1 - x^2)(x^2 - 4)$.

Příklad 5.9
(a) $x = [2, 1, -1]^T$;
(b) $x = [-1, 0, 10]^T$.

Příklad 5.10
(a) $x = \frac{1}{6}[113, 28, -59]^T$;
(b) $x = [1, 1, 1]^T$.

Domácí cvičení č. 6
Příklad 6.1
(a) $\mathrm{hod}(\mathbf{A}) = 3$;
(b) $\mathrm{hod}(\mathbf{A}) = 2$;
(c) $\mathrm{hod}(\mathbf{A}) = 4$.

Příklad 6.2
(a) $\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$;
(b) $\mathbf{A^{-1}} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1+2i & -2-3i \\ -2+3i & 1-2i \end{bmatrix}$;
(c) $\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -27 & -2 & 12 \\ 14 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;
(d) $\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -15 & 2 & 7 \\ -5 & -2 & 5 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

Příklad 6.3
(a) $\mathbf{A^{-1}}$ neexistuje, matice $\mathbf{A}$ je singulární;
(b) $\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$;
(c) $\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 15 & 20 & -5 \\ -17 & 4 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix}$;
(d) $\mathbf{A^{-1}}$ neexistuje, matice $\mathbf{A}$ je singulární.

Příklad 6.4

(a) $\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 12 & 25 & 17 & -26 \\ -2 & -11 & -6 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Příklad 6.5

$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -21 & 0 & 9 & 2 & -1 \\ 7 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 8 & -3 & -2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Příklad 6.6

(a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 7 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -16 & -1 & -29 \\ 9 & -6 & 8 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Příklad 6.7

(a) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 6 & -6 & -12 & 15 \\ -6 & -5 & 12 & -4 \\ -12 & 1 & -9 & 14 \\ 3 & 8 & -6 & 13 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 15 & 29 & -129 & 175 \\ 12 & -1 & 108 & -80 \\ -15 & -29 & -36 & -10 \\ 36 & -3 & -39 & 57 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 & -9 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ -4 & -2 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -5 & 13 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & -5 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Příklad 6.8

$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & 3 & 5 & -5 \\ -3 & -3 & 0 & 5 \\ -5 & -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & -3 & 4 \\ -5 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Příklad 6.9

(a) $\mathbf{x} = [2, 1]^T$;
(b) $\mathbf{x} = [2, 1, -1]^T$;
(c) $\mathbf{x} = [0, 4, -6, -2]^T$.

Příklad 6.10

(a) $\mathcal{L}(v_1(x)) = [2, 1, 5]^T = \widehat{\mathcal{L}(v_1)}$, $\mathcal{L}(v_2(x)) = [3, 2, 8]^T = \widehat{\mathcal{L}(v_2)}$,
$\mathcal{L}(v_3(x)) = [-1, 1, 2]^T = \widehat{\mathcal{L}(v_3)}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$;
(c) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -14 & 5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;
(d) $\mathcal{L}^{-1}([a,b,c]) = \frac{1}{3}(-4a - 14b + 5c)x^2 + (a + 3b - c)x + \frac{1}{3}(-2a - b + c)$.

Domácí cvičení č. 7
Příklad 7.1
(a) $v_0 = \frac{1}{13}[16, 77, 87]^T$,
(b) $v_0 = [-7, 6, 5, -3, -1, 6]^T$.

Příklad 7.2
(a) $v_0 = [11, 0, -10, 15]^T$.
(b) $v_0 = [8, -11, 1, 12, 11]^T$.

Příklad 7.3
(a) $v_0 = (3\pi - 12 + 6\ln 2)x + (3 - \frac{\pi}{2} - 2\ln 2)$.
(b) $v_0 = \frac{3\pi}{2} - \frac{12}{\pi}\cos x$.

Příklad 7.4
(a) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$;
(b) $f(x) = -1,014x^2 + 2,001x - 2,923$.

Příklad 7.5
(a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$.
(b) $f(x) = 5x^2 - 2x$.

Domácí cvičení č. 8
Příklad 8.1
$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.
Příklad 8.2
$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.
Příklad 8.3
$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Příklad 8.4

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Příklad 8.5

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Příklad 8.6

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Domácí cvičení č. 9

Příklad 9.1

1. $y_1 = C_1 e^{2x}$, $y_2 = C_2 e^{-3x}$;
2. $y_1 = 2e^{2x}$, $y_2 = -5e^{-3x}$.

Příklad 9.2

1. $y_1 = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{3x}$, $y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$;
2. $y_1 = -7e^{2x} + 8e^{3x}$, $y_2 = -7e^{2x} + 4e^{3x}$.

Příklad 9.3

1. $y_1 = -C_1 e^{2x} + C_2(3\cos x + \sin x) + C_3(-\cos x + 3\sin x)$, $y_2 = C_1 e^{2x}$, $y_3 = 2C_2 \cos x + 2C_3 \sin x$;
2. $y_1 = 2e^{2x} - \cos x + 13\sin x$, $y_2 = -2e^{2x}$, $y_3 = 2\cos x + 8\sin x$.

Příklad 9.4

1. $y_1 = C_1 e^{x} - C_2 e^{2x} + 2C_3 e^{-x}$, $y_2 = C_1 e^{x} - C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}$, $y_3 = C_2 e^{2x}$;
2. $y_1 = e^{x} - 3e^{2x} + 2e^{-x}$, $y_2 = e^{x} - 3e^{2x} + e^{-x}$, $y_3 = 3e^{2x}$.

Příklad 9.5

1. $y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x}(x+1)$, $y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} x$;
2. $y_1 = -2e^{2x}(x+1)$, $y_2 = -2e^{2x} x$.

Příklad 9.6

1. $y_1 = C_1 e^{2x} - e^{x}$, $y_2 = C_2 e^{-3x} + \frac{3}{5} e^{2x}$;
2. $y_1 = -e^{2x} - e^{x}$, $y_2 = \frac{22}{5} e^{-3x} + \frac{3}{5} e^{2x}$.

Příklad 9.7

1. $y_1 = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{3x} + (2-2x)e^{3x} + \frac{1}{2}e^{x}$, $y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + (2-x)e^{3x} + (\frac{x}{2} + \frac{3}{4})e^{x}$;
2. $y_1 = -2e^{2x} - \frac{3}{2}e^{3x} + (2-2x)e^{3x} + \frac{1}{2}e^{x}$, $y_2 = -2e^{2x} - \frac{3}{4}e^{3x} + (2-x)e^{3x} + (\frac{x}{2} + \frac{3}{4})e^{x}$.

Příklad 9.8
1. $y_1 = -C_1e^{2x} + C_2(3\cos x + \sin x) + C_3(-\cos x + 3\sin x) - \frac{15}{2} - 10x + \frac{3}{2}x\cos x + \frac{1}{2}x\sin x - \frac{3}{4}\sin 3x - \frac{1}{4}\cos x$, $y_2 = C_1e^{2x} - \frac{3}{2}$, $y_3 = 2C_2\cos x + 2C_3\sin x - 8 - 6x + x\cos x + \frac{1}{2}\sin 3x$;
2. $y_1 = \frac{5}{2}e^{2x} + \frac{13}{4}\cos x + \frac{59}{2}\sin x - \frac{15}{2} - 10x + \frac{3}{2}x\cos x + \frac{1}{2}x\sin x - \frac{3}{4}\sin 3x$, $y_2 = -\frac{5}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$, $y_3 = 8\cos x + 17\sin x - 8 - 6x + x\cos x + \frac{1}{2}\sin 3x$.

Příklad 9.9
1. $y_1 = C_1e^x - C_2e^{2x} + 2C_3e^{-x} + 8x^2 + 9x + 11$, $y_2 = C_1e^x - C_2e^{2x} + C_3e^{-x} + 6x^2 + 10x + 10$, $y_3 = C_2e^{2x} - 2$;
2. $y_1 = -10e^x + 8x^2 + 9x + 11$, $y_2 = -10e^x + 6x^2 + 10x + 10$, $y_3 = -2$.

Příklad 9.10
1. $y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{2x}(x+1) + e^{2x}\frac{1}{6}(-x^3 + 3x^2 + 6x)$, $y_2 = C_1e^{2x} + C_2e^{2x}x + e^{2x}\frac{1}{6}(-x^3 + 6x^2)$;
2. $y_1 = e^{2x} - 2e^{2x}(x+1) + e^{2x}\frac{1}{6}(-x^3 + 3x^2 + 6x)$, $y_2 = e^{2x} - 2e^{2x}x + e^{2x}\frac{1}{6}(-x^3 + 6x^2)$.

Domácí cvičení č. 10
Příklad 10.1
1. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$;
2. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} + \frac{1}{9}(-3x + 10)$;
3. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} + \frac{1}{2\cdot 195^2}(-7\cdot 195\cdot 2x + 879)\cos 3x + \frac{1}{195^2}(-4\cdot 195x + 1514)\sin 3x$;
4. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} - \frac{1}{9}(3x^3 - 6x^2 + 20x)e^{-2x}$.

Příklad 10.2
1. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{3x} + C_4e^{-2x}$;
2. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{3x} + C_4e^{-2x} - \frac{1}{32}(4x + 3)e^{-x}$;
3. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{3x} + C_4e^{-2x} + \frac{1}{50}(3\cos x + 4\sin x)$;
4. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{3x} + C_4e^{-2x} + \frac{1}{36}(-3x^2 + 5x)e^x$.

Příklad 10.3
1. $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$;
2. $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{1}{27}(3x^2 - 4x + 8)$;
3. $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{1}{7}e^{4x}$;
4. $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{1}{6}x^3e^{-3x}$;
5. $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{1}{25}(-3\cos x + 4\sin x)$.

Příklad 10.4
1. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + C_3xe^{-3x}$;
2. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + C_3xe^{-3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{13}{27}$;
3. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + C_3xe^{-3x} + \frac{7}{500}(-5x + 1)\cos x + \frac{1}{500}(5x + 24)\sin x$;
4. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + C_3xe^{-3x} - \frac{1}{8}x^2e^{-3x}$.

Příklad 10.5
1. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x$;
2. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + \frac{1}{4}e^{2x}$;
3. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x - \frac{1}{2}\cos x + \sin x$;
4. $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + \frac{1}{12}(x^4 + 8x^3 + 42x^2)$.

Příklad 10.6
1. $y = C_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$;
2. $y = C_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2e^x$;
3. $y = C_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sin x$;
4. $y = C_1e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{3}xe^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Příklad 10.7
1. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x}$;
2. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} - \frac{1}{8}(8x^3 + 36x^2 + 74x + 63)$;
3. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} - \frac{1}{25}(11\cos x + 2\sin x)$;
4. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x} + \frac{1}{12}x^4e^{2x}$.

Příklad 10.8
1. $y = C_1e^{-5x} + C_2\cos x + C_3\sin x$;
2. $y = C_1e^{-5x} + C_2\cos x + C_3\sin x + x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{27}{25}$;
3. $y = C_1e^{-5x} + C_2\cos x + C_3\sin x + \frac{1}{2}xe^{-5x}$;
4. $y = C_1e^{-5x} + C_2\cos x + C_3\sin x + \frac{1}{5}e^{2x}$;
5. $y = C_1e^{-5x} + C_2\cos x + C_3\sin x + \frac{1}{26}(-3x\cos x - 11x\sin x)$.

Příklad 10.9
1. $y = C_1\cos x + C_2\sin x$;
2. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)e^x$;
3. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$;
4. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln|\frac{\cos x}{1+\sin x}|$.

Příklad 10.10
1. $y = e^{-3x} + 3xe^{-3x}$;
2. $y = \frac{1}{64}(53e^x + 75e^{-3x} + 108xe^{-3x} - 8x^2e^{-3x})$;
3. $y = \frac{1}{2}(10 - 7e^x + 3xe^x - \cos x + 2\sin x)$;
4. $y = \frac{1}{2}(5\cos x + 9\sin x + (x^2 - 2x + 1)e^x)$.