

Analýza populačních modelů

semestrální práce KMA/MM

Radim Hošek

Fakulta aplikovaných věd, ZČU v Plzni

21. 1. 2010

Populační modely, odvození modelu

- Populační modely jsou modely dynamických procesů.
- Počátky v 18.století (Malthus).
- Modely vystavěny na zjednodušujících předpokladech.
- $N(x, t)$ počet jedinců populace v jednotce objemu v čase t .
- Počet jedinců v bilanční oblasti Ω_B :

$$N(t) = N(\Omega_B, t) = \int_{\Omega_B} N(x, t) dx$$

Odvození modelu

- Předpoklad změny velikosti populace

$$N(t_2) - N(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [M(t) + rN(t)] dt. \quad (1)$$

M ...migrace, r ...relativní vitalita

- Pro $M + rN$ spojitou:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(N(t))N(t) + M(t), \quad t \in (0, T). \quad (2)$$

(lokální tvar populačního zákona)

Malthusův model

Principy

- Vynechané zpožd'ovací efekty.
- Relativní vitalita populace je konstantní (α).

Model

Lokální tvar Malthusova populačního zákona:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t), \quad t \in (0, T).$$

Analytické řešení: $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$.

Zkoumání modelu pomocí analýzy stacionárních bodů

- Diferenciální rovnice tvaru

$$\dot{x} = f(x)$$

- Stacionární bod $\bar{x}$: $f(\bar{x}) = 0$.
- Charakter stacionárního bodu:

$$\frac{df}{dx}(\bar{x}) = f'(\bar{x})$$

$f'(\bar{x}) > 0$..nestabilní, $f'(\bar{x}) < 0$..stabilní.

Verhulstův model

- Pierre François Verhulst (1825).
- Zavedení regulačního mechanismu.
- Relativní vitalita populace — lineární funkce.

Model

Lokální tvar Verhulstova populačního zákona:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

Analytické řešení:

$$N(t) = \frac{KN_0 e^{\alpha t}}{K - N_0 + N_0 e^{\alpha t}}.$$

Analýza Verhulstova modelu

Verhulstův model

$$\dot{N} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

- Stacionární body: $N = 0$ a $N = K$.
- $f'(N) = \alpha \left(1 - \frac{2N}{K}\right)$.
- Tedy $N = 0$ je nestabilní, $N = K$ je stabilní.
- Tvzení: *Je-li f spojitá a má-li pouze jednoduché kořeny, pak se jejich stabilita pravidelně střídá.*

Analýza modelu sklizně

Obecný model sklizně (harvesting): $\dot{N}(t) = rN(t) - h(t)$.

Model progresivní sklizně

$$\dot{N} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K}\right) - eN.$$

Kvalitativní odlišnost dvou případů:

- $e < \alpha$: stacionární body 0 (nestabilní), $K(1 - \frac{e}{\alpha})$ (stabilní)
- $e > \alpha$: stacionární bod 0 (stabilní)
- bifurkace

$$\left(f'(N) = \alpha \left(1 - 2\frac{N}{K}\right) - e\right)$$

Model predace pomocí harvestingu

Vhodná podoba funkce $h(t)$:

$$h(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2}, \quad (3)$$

Model predace

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{BN(t)^2}{A^2 + N(t)^2} \quad (4)$$

substituce — snazší analýza

Analýza modelu predace (1)

tvár rovnice modelu predace po substituci

$$\frac{du(\tau)}{d\tau} = \varrho u(\tau) \left(1 - \frac{u(\tau)}{\kappa}\right) - \frac{u(\tau)^2}{1 + u(\tau)^2}$$

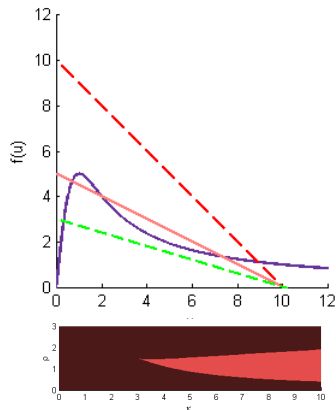
Jedním stacionárním bodem je $u = 0$ (nestabilní).

$$f'(u) = \varrho \left(1 - 2\frac{u}{\kappa}\right) - \frac{2u}{(1 + u^2)^2}$$

Existence dalších stac. bodů

$$0 = \varrho \left(1 - \frac{u}{\kappa}\right) - \frac{u}{1 + u^2}.$$

Analýza modelu predace (2)



bifurkace, hystereze

Závěr

V semestrální práci dále najdete

- Další modely jednoho druhu populace a jejich rozbory.
- Modely interakce více populací.
- Analýzu modelů určených soustavou diferenciálních rovnic.

Závěrem..

DĚKUJI ZA POZORNOST.