

2 Vektorový počet

2.1 Euklidovský prostor $\mathbb{E}_3$

Euklidovský prostor $\mathbb{E}_3$ je prostor uspořádaných trojic (tj. bodů), v němž je definována vzdálenost dvou jeho bodů A, B (značíme ji $|AB|$).

Vzdálenost bodů $A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3] \in \mathbb{E}_3$ definujeme v euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ jako číslo

$$d = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \quad (1)$$

Dá se ukázat, že vzdálenost dvou bodů má tyto vlastnosti:
Pro libovolné tři body X, Y, Z z $\mathbb{E}_3$ platí

1. $|XY| \geq 0$ a $|XY| = 0 \Leftrightarrow X = Y$,
2. $|XY| = |YX|$,
3. $|XY| + |YZ| \geq |XZ|$, *trojúhelníková nerovnost*.

2.2 Vektor, souřadnice vektoru a algebraické operace s vektory

Vázaným vektorem rozumíme uspořádanou dvojici bodů A, B , tj. orientovanou úsečku. Pro vázaný vektor daný body A, B se používá značení $\vec{AB}$, resp. $B - A$. Bod A je počátečním bodem a bod B koncovým bodem tohoto vektoru.

Množina, která je tvořena rovnoběžnými úsečkami stejné délky a o stejné orientaci, se nazývá *volný vektor* a značíme ji $\vec{a}$, resp. $\mathbf{a}$. Vázaný vektor $\vec{AB}$ je možné chápat jako *umístění volného vektoru $\mathbf{a}$ do bodu A* .

1. Uvažujme vektor $\vec{AB}$, kde $A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$. Čísla

$$u_1 = b_1 - a_1, \quad u_2 = b_2 - a_2, \quad u_3 = b_3 - a_3$$

se nezmění, zvolíme-li jiné umístění vektoru $\mathbf{u}$. Proto uspořádanou trojici (u_1, u_2, u_3) nazýváme *souřadnicemi vektoru $\mathbf{u}$ v dané souřadnicové soustavě* a píšeme $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Nulový vektor je vektor $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$.

2. *Velikost vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$* je číslo

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \quad (2)$$

Velikost nulového vektoru je nulová. Je-li $|\mathbf{u}| = 1$, říkáme, že vektor $\mathbf{u}$ je *jednotkový vektor*.

3. Součet vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je vektor

$$\mathbf{s} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \quad (3)$$

značí se $\mathbf{s} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

4. Součinem čísla α a vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ se rozumí vektor

$$\mathbf{s} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3), \quad (4)$$

značí se $\alpha \mathbf{u}$.

Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nazveme *kolineární*, je-li jeden z nich násobkem druhého, tj. pokud existuje reálné číslo λ tak, že

$$\mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{v} \text{ nebo } \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{u}. \quad (5)$$

5. *Rozdíl vektorů* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je vektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}), \quad (6)$$

značí se $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Pro souřadnice vektoru $\mathbf{r}$ platí: $\mathbf{r} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$.

6. Důležitou operací je tzv. *normování vektoru*. Podstatou této operace je, že k danému nenulovému vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ stanovíme *jednotkový vektor* $\mathbf{e}$ tak, aby s ním byl souhlasně kolineární. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{|\mathbf{u}|} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} (u_1, u_2, u_3) = \\ &= \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

2.3 Lineární závislost a nezávislost vektorů, báze

Uvažujme vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$. Řekneme, že vektor $\mathbf{w}$ je *lineární kombinací vektorů* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$, jestliže existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ tak, že

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i. \quad (8)$$

Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ jsou *lineárně závislé*, jestliže jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů.

Vektory jsou *lineárně nezávislé*, nejsou-li lineárně závislé, tedy vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže žádný z nich nelze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů.

V prostoru $\mathbb{E}_3$ lze lineární závislost vektorů charakterizovat takto:

1. Dva vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden je násobkem druhého.
2. Tři vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je lineární kombinací ostatních, tedy např. $\mathbf{u}_3 = \lambda_1 \mathbf{u}_2 + \lambda_2 \mathbf{u}_1$. Tři lineárně závislé vektory lze vždy umístit do téže roviny (tzv. komplanární vektory), resp. na tutéž přímku (kolineární vektory). V opačném případě jsou vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ lineárně nezávislé.
3. Čtyři vektory jsou v $\mathbb{E}_3$ vždy lineárně závislé.
4. Podobně skupina více než čtyř vektorů v $\mathbb{E}_3$ je vždy lineárně závislá.

2.4 Ortonormální báze prostoru $\mathbb{E}_3$

Báze prostoru $\mathbb{E}_3$ je libovolná trojice lineárně nezávislých vektorů. Pomocí prvků báze lze všechny vektory z $\mathbb{E}_3$ jednoznačně vyjádřit ve tvaru *lineární kombinace*.

V prostoru $\mathbb{E}_3$ jsou důležité jednotkové vektory

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1). \quad (9)$$

Vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou lineárně nezávislé, tvoří tedy bázi prostoru $\mathbb{E}_3$. Každý vektor $\mathbf{u}$ z $\mathbb{E}_3$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{u} = u_1 \cdot \mathbf{i} + u_2 \cdot \mathbf{j} + u_3 \cdot \mathbf{k}. \quad (10)$$

Uspořádaná trojice čísel u_1, u_2, u_3 je souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi tvořené jednotkovými vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Počet prvků v různých bázích téhož prostoru je shodný a nazývá se *dimenze prostoru*. Prostor $\mathbb{E}_2$ (euklidovská rovina) má dimenzi dvě. Prostor $\mathbb{E}_3$ má dimenzi tři.

2.5 Skalární součin vektorů

Skalární součin dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ je číslo, které je definované jako součin velikostí obou vektorů a kosinu velikosti úhlu, který tyto vektory svírají, tj.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \varphi. \quad (11)$$

Pokud je alespoň jeden z vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ nulový, definujeme jejich skalární součin jako nulový.

Vlastnosti skalárního součinu

1. Použijeme-li (11) pro výpočet skalárních součinů vektorů báze, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

2. Vypočteme skalární součin vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. V bázi tvořené vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vyjádříme vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jako lineární kombinaci bázevých vektorů:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

Pak provedeme násobení podle distributivního zákona. Dostaneme

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}).$$

Použijeme-li (12), získáme výsledek

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \quad (13)$$

3. Ze vztahů (11) a (13) vyplývá, že skalární součin je komutativní, tj. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

4. Položíme-li v (13) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, obdržíme jiný možný způsob výpočtu velikosti vektoru $\mathbf{u}$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \quad (14)$$

5. Je-li skalární součin dvou vektorů nulový, pak buď alespoň jeden z vektorů je nulový, nebo jsou dané vektory na sebe kolmé.

2.6 Vektorový součin

Vektorový součin dvou vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ v $\mathbb{E}_3$, je

1. nulový vektor, pokud alespoň jeden z vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je nulový,
2. vektor $\mathbf{w}$, který má tyto vlastnosti:
 - (a) vektor $\mathbf{w}$ je kolmý na vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$;
 - (b) trojice vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ je stejně orientovaná (pravotočivě) jako trojice bázevých vektorů $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$;
 - (c) velikost $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \varphi$, kde $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ je velikost úhlu vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Vektorový součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ značíme $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Vlastnosti vektorového součinu

1. Geometrický význam vlastnosti (c) lze formulovat takto: velikost $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ vektoru $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku sestaveného pomocí vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.
2. Podle výše uvedených vlastností vektorového součinu lze vypočítat, že pro vektory báze $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ platí

$$\begin{aligned} 1. \quad & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ 2. \quad & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (15)$$

3. Nyní vyjádříme vektorový součin pomocí souřadnic vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Použijeme-li (15), dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} = \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).\end{aligned}\quad (16)$$

Výsledek v (16) se dá stručně zapsat symbolickým determinantem (pozor na pořadí!):

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (17)$$

Ze známé vlastnosti o záměně dvou řádků v determinantu (17) plyne, že pro vektorové násobení nenulových vektorů nebude platit komutativní zákon. Platí tu však, že

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}). \quad (18)$$

4. Z definice vektorového součinu dále vyplývá, že $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, právě když jsou vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně závislé, tj. kolineární, neboli jeden vektor je násobkem druhého vektoru.

2.7 Smíšený součin

Jsou-li dány vektory $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, definujeme pro ně *smíšený součin* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ jako *číslo*

$$\Delta = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \quad (19)$$

značíme $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Na základě definice vektorového a skalárního součinu a s uplatněním vztahů (16) lze ukázat, že

$$\Delta = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Významná je geometrická interpretace smíšeného součinu. Snadno lze zdůvodnit, že číslo

$$|\Delta| = |(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \quad (21)$$

udává *objem rovnoběžnostěnu*, který je určen vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ umístěnými do společného bodu P .

Smíšený součin vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ je roven nule jen v případě, jsou-li dané vektory *lineárně závislé*. Vektory jsou v tomto případě komplanární nebo dokonce kolineární a nelze proto mluvit o vytvoření tělesa.