

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra kybernetiky



# Kinematika robotických architektur

Práce ke státní doktorské zkoušce

2011

Martin Švejda  
msvejda@kky.zcu.cz

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>3</b>
1.1 Robotika jako významný obor mechatroniky . . . . .	3
1.2 Robotické manipulátory . . . . .	4
1.3 Cíle práce . . . . .	8
1.4 Použité architektury manipulátorů . . . . .	9
1.4.1 Antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím (AM+SZ) . . . . .	10
1.4.2 Paralelní planární manipulátor (PPM) . . . . .	11
1.4.3 Paralelní sférické zápěstí (PSZ) . . . . .	11
<b>2 Kinematika manipulátorů: Modelování, polohové závislosti</b>	<b>14</b>
2.1 Reprezentace obecného pohybu v robotice . . . . .	14
2.1.1 Reprezentace polohy . . . . .	14
2.1.2 Reprezentace rychlosti a zrychlení . . . . .	20
2.2 Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů . . . . .	21
2.2.1 Denavit-Hartenbergova úmluva (D-H) . . . . .	21
2.2.2 Khalil-Kleinfingerova úmluva (K-K) . . . . .	24
2.3 Polohové závislosti manipulátorů . . . . .	31
2.3.1 Přímý kinematický problém pro sériové manipulátory . . . . .	31
2.3.2 Inverzní kinematický problém pro sériové manipulátory . . . . .	33
2.3.2.1 Přímé analytické řešení jednoduchých architektur manipulátorů . . . . .	34
2.3.2.2 Specializované metody pro řešení konkrétních variant architektur manipulátorů . . . . .	39
2.3.2.3 Metody pro řešení obecných architektur manipulátorů . . . . .	43
2.4 Paralelní manipulátory . . . . .	45
2.4.1 Dekompozice paralelního mechanismu na nezávislé uzavřené kinematické řetězce . . . . .	45
2.4.1.1 Přímý kinematický problém . . . . .	48
2.4.1.2 Inverzní kinematický problém . . . . .	49
2.4.2 Dekompozice paralelního mechanismu na sériové manipulátory . . . . .	49
2.4.2.1 Inverzní kinematický problém . . . . .	50
2.4.2.2 Přímý kinematický problém . . . . .	53
<b>3 Kinematika manipulátorů: Závislosti rychlostí a zrychlení</b>	<b>74</b>
3.1 Závislosti rychlosti pro sériové manipulátory . . . . .	75
3.2 Závislosti zrychlení pro sériové manipulátory . . . . .	80
3.3 Závislosti rychlosti a zrychlení pro paralelní manipulátory . . . . .	85
3.4 Singulární polohy manipulátoru . . . . .	87
<b>4 Numerický přístup řešení kinematiky manipulátorů</b>	<b>90</b>
4.1 IKÚ pro neredundantní manipulátory . . . . .	92
4.2 IKÚ pro redundantní manipulátory . . . . .	93
4.3 IKÚ pro polohy manipulátoru v blízkosti singularit . . . . .	95
<b>5 Závěr</b>	<b>97</b>

# Kapitola 1

## Úvod

### 1.1 Robotika jako významný obor mechatroniky

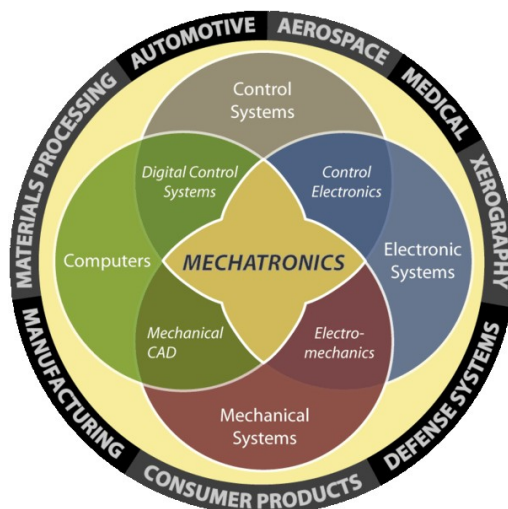
Název "mechatronika" byl poprvé použit v roce 1969 japonským inženýrem firmy Yaskawa, která vyrábí elektrické servopohony a další automatizační techniku. Mechatronika sjednocuje principy mechaniky, elektroniky, optiky, informatiky a automatického řízení za účelem konstruování jednodušších, účinnějších a spolehlivějších systémů. Náznorný diagram oborů mechatroniky, jejich vzájemný vztah a možné aplikace jsou znázorněny na Obrázku 1.1.

Nedílnou součástí mechatroniky je bezpochyby i obor zvaný robotika, neboli nauka o robotech. Robotika je dnes velmi rozšířenou vědní disciplínou, neboť se stoupajícími možnostmi výpočetní techniky a schopností lidí vyrábět velmi přesné a relativně dokonalé mechanické konstrukce, získává robotika své neodmyslitelné místo prakticky ve všech oborech lidské činnosti. Robotika v sobě ukrývá v podstatě celý proces "zrození" robotů od návrhu jejich konstrukce, návrhu vhodného algoritmu řízení, provádění simulací, vlastní realizace, až po finální uvedení do provozu. Roboty lze ze své podstaty dělit na dvě základní skupiny.

První z nich jsou tzv. manipulátory. Původním cílem konstrukce manipulátorů bylo zhotovit nejprve mechanická, později elektromechanická, zařízení, která budou schopná zesilovat či zpřesňovat práci člověka. Do této kategorie spadají například různé pákové a kladkové mechanismy, bagry, nakladače, atd. Z postupujícím vývojem však manipulátory získávaly své místo v celé řadě průmyslových aplikací jako

programovatelné, plně automatické, přesné a rychlé zařízení, které neúnavně a bezchybně nahrazovaly práci člověka ve skladech (zakládací, přerovnávací, třídící manipulátory), na výrobních linkách (manipulátory typu pick and place), v průmyslových procesech (přesné svařování, broušení, lakování), při práci v nebezpečných prostředích (mobilní roboty pro průzkum prostor s nebezpečím výbuchu či otravy, mobilní roboty pro průzkum vesmírných těles či roboty vyvinuté speciálně pro armádní účely), manipulátory využívané v lékařství (přesné laparoskopické chirurgické operační roboty, např. operační robotický systém Da Vinci, s jehož pomocí chirurgové provádějí dlouhotrvající složité zákroky v těle pacienta, přičemž zatížením pacienta, stejně tak jako případné chyby způsobené únavou operátorů, jsou minimalizovány. Operační systém Da Vinci vlastní od roku 2005 i pražská nemocnice Na Homolce.)

Do druhé velké skupiny patří tzv. humanoidní roboty, neboli roboty podobné člověku nejen svým vzhledem, ale i projevem určitého stupně inteligence. Vývoj takovýchto "inteligentních" a vysoce autonomních strojů je dnes vnímán jako špička a jeden z hlavních cílů v oblasti robotiky. Nicméně, i přes řadu zdařilých prototypů těchto robotů (humanoidní robot PETMAN pro



Obrázek 1.1: Mechatronika

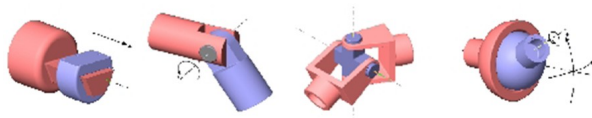
testování vojenských protichemických obleků, či plně autonomní 4-nohý robot BigDog, oba z Bostonské university [9]) je cíl zkonstruovat robota s inteligencí a pohybovou dispozicí srovnatelnou lidské stále ještě velmi daleko.

## 1.2 Robotické manipulátory

Vraťme se však k první kategorii robotů, neboť tato práce se zabývá právě základními problémy v oblasti manipulátorů. Snaží se tak předložit stručný a ucelený náhled na možnosti jejich analýzy a syntézy, které tvoří neodmyslitelný základ pro realizaci vyšších forem robotů. Ponechme tak plně autonomní humanoidní roboty stranou zejména proto, že tato část robotiky zasahuje velkou měrou především do oblasti umělé inteligence (algoritmy strojového vnímání a porozumění, autonomní rozhodování, atd.), která není náplní našeho zkoumání.

Pro usnadnění dalšího porozumění textu, vymežeme nejprve některé fundamentální pojmy z oblasti robotiky:

- Počet stupňů volnosti (DoF - Degrees of Freedom)  
Minimální počet parametrů (rotace, translace), který jednoznačně popisuje polohu bodu nebo tělesa v rovině či prostoru. Např.: Bod v rovině má 2 DoF, v prostoru 3 DoF. Tuhé těleso má v rovině 3 DoF, v prostoru 6 DoF.
- Obecná poloha tělesa v prostoru je určena jeho *translací* a *rotací*. Zatímco, translace tělesa je intuitivně zřejmá (souřadnice  $x, y, z$  libovolného bodu tělesa), nejčastější reprezentace rotace tělesa jsou realizovány pomocí matice rotace, Eulerovských úhlů, osy rotace a úhlu natočení kolem této osy atd. Podrobněji jsou možnosti popisu obecné polohy tělesa v prostoru diskutovány v Kapitole 2.1
- Základna manipulátoru  
Pevná (nepohyblivá) část manipulátoru - na které je definován pevný "světový" souřadný systém.
- Koncový efektor manipulátoru  
Poslední část resp. rameno manipulátoru, ke kterému jsou obvykle připevňovány různé pracovní nástroje a jehož poloha je řízena na požadovanou hodnotu (trajektorii). Poloha koncového efektoru bude dále reprezentována zatím nespecifikovanými zobecněnými souřadnicemi  $\mathbf{X}$ .
- Klouby manipulátoru  
Jednotlivé typy kloubů se od sebe liší počtem a typem stupňů volnosti, např. **P**-kloub (Prismatic) - posuvný kloub přidávající jeden translační stupeň volnosti, **R**-kloub (Revolute) - rotační kloub přidávající jeden rotační stupeň volnosti, **U**-kloub (Universal) - univerzální (Kardanův) kloub přidávající 2 rotační stupně volnosti, **S**-kloub (Spherical) - sférický kloub přidávající všechny 3 rotační stupně volnosti. Nejčastěji používané typy kloubů jsou znázorněny na Obrázku 1.2



Obrázek 1.2: Používané typy kloubů (zleva **P**, **R**, **U**, **S**)

- Kinematický řetězec  
Skládá se ze soustav kinematických dvojic, které jsou definovány jako spojení dvou pev-

ných těles (tzv. ramen) danou vazbou. Vazbami rozumíme klouby, které omezují (dle daného počtu stupňů volnosti) vzájemný pohyb ramen. Kinematické řetězce manipulátorů bývají často označovány jako posloupnost kloubů, např.: **RRR**, **RPR** atd., kde podtržení označuje aktivní kloub (aktuátor) manipulátoru.

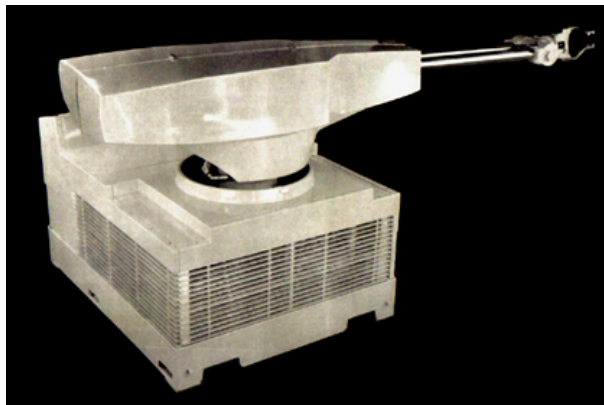
- **Aktuátory manipulátoru**  
Pohony, které zajišťují pohyb manipulátoru. Typické pohony manipulátoru představují rotační pohony (rotační elektromotory) a lineární (přímočaré) pohony (elektrohydraulické válce, lineární elektromotory). Klouby, které reprezentují aktuátory, nazýváme aktivními klouby a jejich polohu popisují tzv. vektorem aktivních kloubových souřadnic  $\Theta$ . V robotice se téměř výhradně jako aktivní klouby využívají 1 DoF klouby typu **P** a **R**.
- **Domovská poloha manipulátoru**  
Poloha koncového efektoru manipulátoru, při které jsou jeho aktivní kloubové souřadnice  $\Theta$  nastaveny takovým způsobem, že koncový efektor manipulátoru zaujímá výchozí (domovskou) polohu.
- **Pracovní prostor manipulátoru**  
Množina všech pozic koncového efektoru manipulátoru, které mohou být dosaženy pro dané omezující podmínky kladené na manipulátor (maximální/minimální vysunutí/natočení aktuátorů, omezení na pohyb pasivních kloubů, omezení zabírající překřížení či srážkám ramen manipulátoru, omezení na kvalitu pracovního prostoru - např. závislosti mezi maximální rychlostí a zátěží koncového efektoru vzhledem k daným vlastnostem aktuátorů, tuhost mechanické konstrukce atd.).
- **Přímá kinematická úloha**  
Reprezentovaná obecně nelineární transformací  $\mathbf{X} = \mathbf{G}(\Theta)$ . Jedná se tedy o problém nalezení zobecněných souřadnic  $\mathbf{X}$  pro dané hodnoty souřadnic kloubových  $\Theta$ . Vzhledem k tomu, že v praxi obvykle není možné přímo měřit polohu koncového efektoru (často komplikované či úplně nemožné umístění dostatečně přesných sensorů), přímá kinematická úloha umožňuje stanovit polohu koncového efektoru prostřednictvím údajů o poloze jednotlivých aktuátorů (relativně jednoduché měření polohy rotačních či translačních pohonů).
- **Zpětná kinematická úloha**  
Reprezentovaná obecně inverzní nelineární transformací  $\Theta = \mathbf{G}^{-1}(X)$ . Jedná se tedy o problém nalezení kloubových souřadnic  $\Theta$  pro dané hodnoty souřadnic zobecněných  $X$ . Zpětná kinematická úloha tvoří jednu z nejdůležitějších transformací v robotice, neboť problematika polohování koncového efektoru je v naprosté většině formulována v prostoru zobecněných souřadnic, jinými slovy požadované trajektorie pohybu koncového efektoru musí být nejprve transformována na požadovanou trajektorii v prostoru kloubových souřadnic (polohování jednotlivých aktuátorů).
- **Přesnost a opakovatelnost**  
Přesnost manipulátoru je dána odchylkou požadované polohy a skutečné polohy (z referenčního/kalibračního měřidla) koncového efektoru. Opakovatelnost manipulátoru pak lze chápat jako maximální rozdíl mezi skutečnými polohami koncového efektoru získanými jeho přesunem do jedné požadované polohy z různých poloh počátečních.
- **Redundantní manipulátory**  
Počet nezávislých aktivních kloubových souřadnic je větší než počet DoF koncového efektoru manipulátoru. Využití vlastností kinematické redundance je diskutováno v Kapitole 4.

Robotické manipulátory je dle kinematické konstrukce (uspořádání kinematických řetězců) možné dělit na dva základní typy:

## Sériové manipulátory

Jejich základ tvoří tzv. otevřený kinematický řetězec, který lze popsat acyklickým grafem, kde uzly grafu reprezentují ramena manipulátoru a hrany grafu reprezentují jednotlivé klouby. Jinými slovy, každé rameno manipulátoru je spojeno klouby právě se dvěma dalšími rameny s výjimkou ramen typu základna a koncový efektor. Tyto mají s ostatními rameny pouze jedinou vazbu. Sériové manipulátory patří dnes k nejrozšířenějším mechanismům robotiky, jejichž základ byl položen Georgem Devolem (zaměstnancem firmy General Motors) v roce 1961, kdy byl představen první průmyslový manipulátor s názvem Unimate, viz Obrázek 1.3. Pro své vlastnosti jsou dnes sériové manipulátory využívány v průmyslových aplikacích jako svařování, obrábění, lakování, skládání, paletizace a kompletování.

Obecně můžeme říci, že pro sériové manipulátory lze nalézt vždy jednoznačné analytické řešení přímé kinematické úlohy. Avšak vzhledem k faktu, že rovnice  $\mathbf{X} = \mathbf{G}(\Theta)$  je obecně složitou nelineární rovnicí, její řešení  $\Theta = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X})$ , a tedy řešení zpětné kinematické úlohy, nemusí být možné nalézt analyticky a může obsahovat celou řadu řešení. V některých speciálních případech, které budou diskutovány dále v Kapitole 2.3.2 je přesto možné všechna řešení zpětné kinematické úlohy analyticky najít.

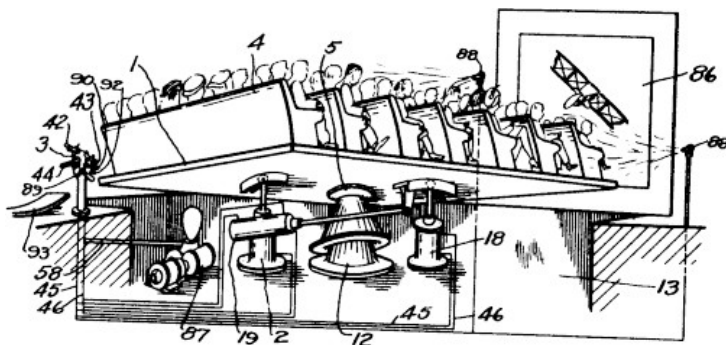


Obrázek 1.3: První sériový průmyslový manipulátor Unimate

## Paralelní manipulátory

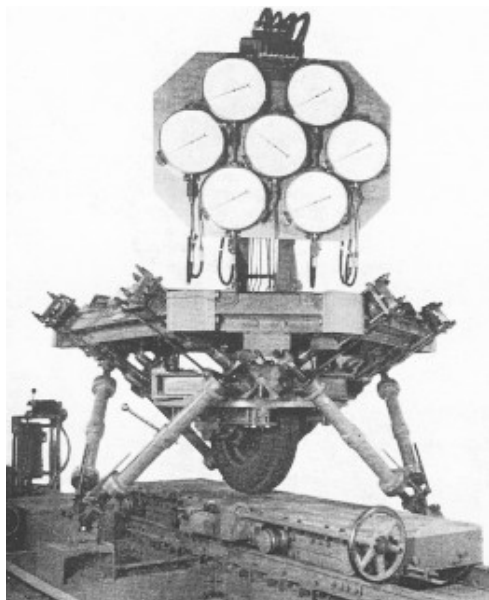
Jejich základ tvoří tzv. uzavřený kinematický řetězec, který lze popsat cyklickým grafem a vzniká uzavřením otevřeného kinematického řetězce. Mohli bychom tedy říci, že koncový efektor je spojen se základnou manipulátoru dvěma či více otevřenými kinematickými řetězci, v podstatě sériovými manipulátory. Paralelní manipulátory se dostávají do průmyslového povědomí až v několika posledních letech, neboť, díky své složitější mechanické konstrukci a potenciálně tak větším nárokům na jejich návrh a řízení, technickou veřejnost svým způsobem odrazovaly. To, co však bylo pro průmysl "zbytečně" složité, se brzy stalo výzvou pro akademiky. Právě díky nim dnes paralelní manipulátory směle konkurují svým sériovým protějškům a postupně tak smazávají hlubokou propast mezi technologicky-průmyslovým povědomím a akademickou sférou.

Prvotní zmínky o paralelních kinematických strukturách se objevují mezi technickou veřejností již v první polovině dvacátého století. Přesto, že nemůžeme s jistotou říci, že se jedná o skutečně první mechanismus s paralelní architekturou, a dokonce ani zda-li byl skutečně někdy postaven, v roce 1931 si nechal James Gwinnett patentovat mobilní platformu pro zábavní průmysl, viz Obrázek 1.4.

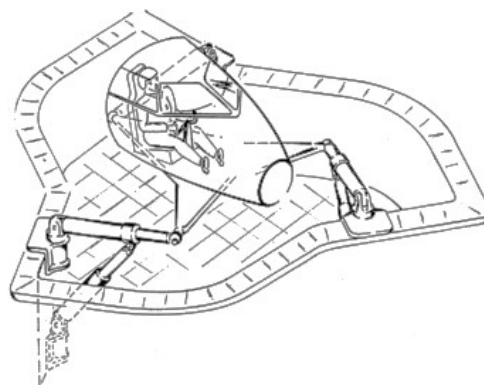


Obrázek 1.4: Pravděpodobně první paralelní manipulátor Jamese Gwinnetta

Dnes snad neznámější paralelní kinematickou architekturou je tzv. Stewartova platforma. Její objev je však bezpochyby připisován Ericu Goughovi, automobilovému inženýrovi firmy Dunlop Rubber Co., Birmingham, England. Ten v roce 1954 představil paralelní platformu pro testování pneumatik letadlových podvozků při variabilním zatížení, viz Obrázek 1.5(a). O několik let později, v roce 1965, D. Stewart na konferenci UK Institution of Mechanical Engineers prezentoval svůj vynález paralelního leteckého simulátoru, viz Obrázek 1.5(b). Přesto, že Stewartův vynález nebyl příliš podobný tomu Goughovu, je právě Goughova platforma dnes paradoxně nazývána platformou Stewartovou, někdy pak jako Gough-Stewartova platforma. Více o historii paralelních manipulátorů lze nalézt např. v [5]. Pro své vlastnosti se paralelní manipulátory používají zejména v aplikacích leteckých simulátorů, aktivně tlumených anti-vibračních plošin, při velmi přesných a rychlých aplikacích typu "pick and place", pro testovací standy v automobilovém průmyslu atd.



(a) Původní Goughova platforma pro testování pneumatik



(b) Původní Stewartova platforma pro letecký simulátor

Obrázek 1.5: Goughova-Stewartova platforma (1954) a Stewartova platforma (1965)

Pro paralelní manipulátory obecně platí, že naopak inverzní kinematická úloha je většinou řešitelná analyticky, neboť lze ukázat, viz Kapitola 2.4, že poloha bodu, kterým je každý kinematický řetězec připojen ke koncovému efektoru lze jednoznačně analyticky získat pro každou danou

polohu  $\mathbf{X}$  koncového efektoru. Z předchozího plyne, že kloubové souřadnice  $\Theta$  každého kinematického řetězce mohou být nalezeny řešením zpětné kinematické úlohy pro sériové manipulátory. Vzhledem k tomu, že jednotlivé kinematické řetězce paralelních manipulátorů bývají zpravidla velmi jednoduché, je úloha  $\Theta = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X})$  řešitelná analyticky. Naopak, kvůli nelinearitě a složitosti funkce  $\Theta = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X})$  není pro paralelní manipulátory obecně možné analyticky řešit přímou kinematickou úlohu  $\mathbf{X} = \mathbf{G}(\Theta)$  (s výjimkou velmi jednoduchých mechanických konstrukcí).

Tabulka 1.1 shrnuje základní rozdíly mezi sériovými a paralelními manipulátory.

Sériové manipulátory	Paralelní manipulátory
<p><b>+ jednoduchá mechanická architektura</b> Zpravidla jednodušší řešení přímé a inverzní kinematiky, přímá kinematika lze vždy řešit analyticky, inverzní kinematika obecně nelze řešit analyticky.</p>	<p><b>- složitější mechanická architektura</b> Řešení přímé a inverzní kinematiky může být obtížnější, inverzní kinematika lze většinou řešit analyticky (s výjimkou složitých kinematických architektur), přímá kinematika obecně nelze řešit analyticky.</p>
<p><b>- užité zatížení manipulátoru</b> Všechna ramena manipulátoru jsou zatěžována výhradně na ohyb a každé z ramen musí být dimenzováno tak, aby udrželo celou váhu břemene =&gt; manipulátor musí být dostatečně robustní (vyšší hmotnost, horší dynamické vlastnosti, poddajnost manipulátoru)</p>	<p><b>+ užité zatížení manipulátoru</b> Síla potřebná k udržení břemene je rozdělena mezi jednotlivé kinematické řetězce (koncový efektor manipulátoru je podepírán ve více bodech) =&gt; manipulátor nemusí být tak robustní (nižší hmotnost, lepší dynamické vlastnosti, vyšší tuhost manipulátoru)</p>
<p><b>- přesnost a opakovatelnost manipulátoru</b> Nasčítávání chyb vzniklých při polohování jednotlivých ramen nejčastěji v důsledku jejich průhybů, případně chyb snímačů v jednotlivých aktuátorech =&gt; ztráta přesnosti a opakovatelnosti.</p>	<p><b>+ přesnost a opakovatelnost manipulátoru</b> Vzhledem k odlišné mechanické konstrukci jsou chyby vzniklé při polohování jednotlivých ramen průměrovány =&gt; dosažení větší přesnosti a opakovatelnosti.</p>
<p><b>- umístění aktuátorů</b> Aktuátory musí být umístěny v každém kloubu manipulátoru (aktuátory se pohybují společně s manipulátorem) =&gt; horší dynamické vlastnosti, větší robustnost manipulátoru, nutnost vézt kabeláž v celé mechanické konstrukci.</p>	<p><b>+ umístění aktuátorů</b> Aktuátory mohou být umístěny na základně manipulátoru (a to v mnoha případech i napevno) =&gt; lepší dynamické vlastnosti, lehčí konstrukce manipulátoru, možnost prostorově oddělit aktuátor (v případě že manipulátor musí pracovat v agresivním, vybušném či jinak nestandardním prostředí)</p>
<p><b>+ pracovní prostor</b> Relativně velký pracovní prostor.</p>	<p><b>- pracovní prostor</b> Pracovní prostor je z důvodu složitější mechanické konstrukce více komplikovaný (neregulární tvar s řadou výdutí a prohlubní).</p>

Tabulka 1.1: Porovnání základních vlastností paralelních a sériových manipulátorů

### 1.3 Cíle práce

Vzhledem k dnešnímu širokému uplatnění robotických manipulátorů v průmyslových aplikacích, vyvstává požadavek na možnosti co nejjednodušší syntézy a analýzy navržených robotických architektur. Je přirozeně požadováno, aby navržené manipulátory co nejlépe vykonávaly požadované úlohy, a to především přesně, rychle a spolehlivě. V průmyslu se setkáváme s manipulátory,



kteře se jsou již postupem času odzkoušeny, jejich chování je dobře známo a mnohdy jsou pro svou činnost optimalizovány. Do takové skupiny patří především celá řada sériových manipulátorů typu SCARA, antropomorfního manipulátory či jednoduché portálové (pravoúhlé) manipulátory, viz Obrázek 1.6, které můžeme nalézt v nabídkových listech předních světových výrobců manipulátorů jako ABB, Fanuc, Kuka, Motoman, Epson atd.



Obrázek 1.6: Nejznámější typy průmyslových manipulátorů

Je nutné si ovšem uvědomit, že manipulátory jako takové představují mnohdy složitý mechanický systém, tzv. multibody system, jehož syntéza a analýza vyžaduje relativně obsáhlé znalosti z oboru mechaniky a matematiky. Odvození kinematických a dynamických závislostí a charakteristik manipulátorů, stejně jako jejich optimalizace za účelem vykonávání určité úlohy, tak bývá často velmi zdoluhavé.

Cílem této práce je proto upozornit na základní problémy při návrhu, analýze a řízení robotických manipulátorů, které by měly stát základem pro vývoj nového softwarového nástroje, který by tyto základní problémy robotiky uměl sám řešit a poskytnout tak svému uživateli relativně jednoduchou cestou simulovat, analyzovat stávající, či navrhovat a testovat nové architektury manipulátorů. Navržený software by měl také výrazně urychlit další možný vývoj pokročilých algoritmů řízení manipulátorů, neboť by uživatel mohl využít získaných výsledků bez nutnosti úplného detailního náhledu do řešené problematiky a věnovat se tak plně dalšímu zkoumání. Vyvinutý softwarový nástroj by byl pochopitelně také cennou pomůckou pro výuku předmětů související s robotikou.

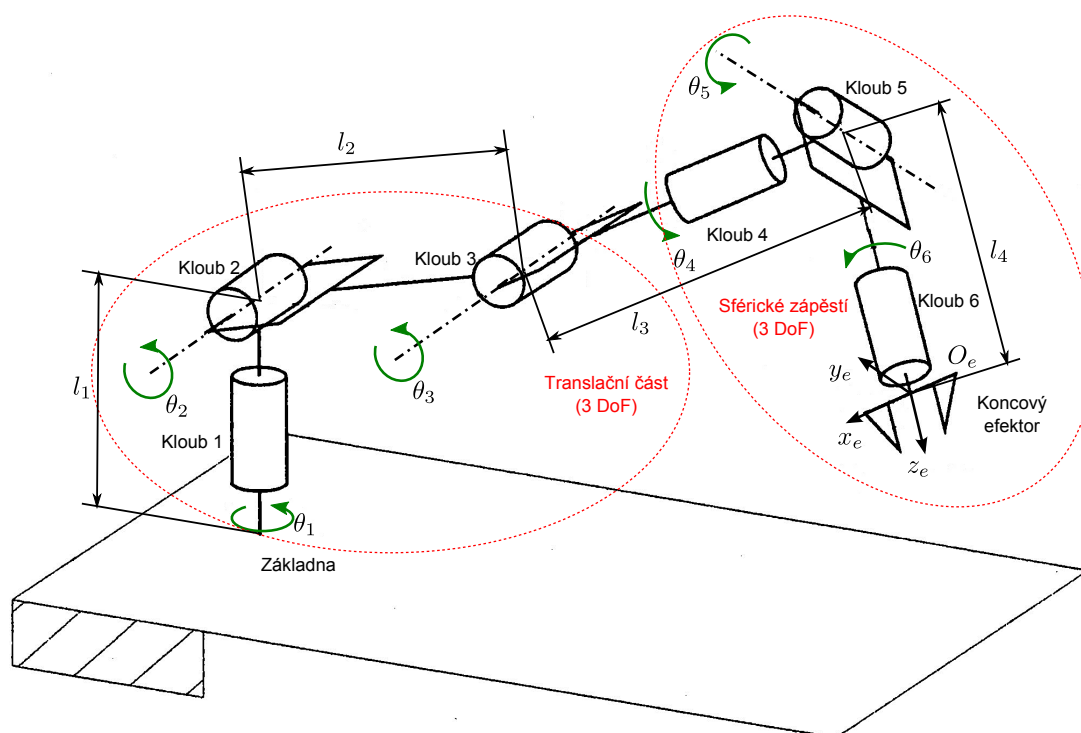
## 1.4 Použité architektury manipulátorů

Následující kapitoly zahrnují některé klíčové úlohy v robotice, které budou diskutovány nejen s ohledem na dostupnou literaturu, ale zejména pak na výsledcích autora dosavadního průzkumu v této oblasti. Pro lepší názornost budou v průběhu textu využívány především tři typy manipulátorů na kterých budou vybrané problémy demonstrovány.

### 1.4.1 Antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím (AM+SZ)

Antropomorfní<sup>1</sup> manipulátor se sférickým zápěstím patří do skupiny sériových neredundantních manipulátorů se šesti stupni volnosti (3 rotační a 3 translační) koncového efektoru. Manipulátor je proto schopen polohovat svůj koncový efektor do libovolné polohy (*pozice a orientace*) v prostoru. Jak již bylo řečeno, antropomorfní manipulátory se sférickým zápěstím dnes patří k nejrozšířenějším typům manipulátorů v průmyslu a jejich vývojem a výrobou se v různých modifikacích (velikosti, nosnost, přesnost, univerzalita atd.) zabývají všechny velké firmy specializované na robotiku.

Schématické uspořádání manipulátoru je zobrazeno na Obrázku 1.7 a jedna z jeho možných praktických realizací pak na Obrázku 1.6(b). Pohyb manipulátoru je zajišťován 6 rotačními aktuátory (motory), které jsou umístěny v kloubech typu **R** jednotlivých ramen.



Obrázek 1.7: Antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím

Kloubové souřadnice:

$$\Theta = [ \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6 ]^T \quad (1.1)$$

Zobecněné souřadnice:

$$\mathbf{X} = [ \mathbf{x}_e \quad \mathbf{y}_e \quad \mathbf{z}_e \quad \mathbf{O}_e ] \quad (1.2)$$

kde  $\mathbf{x}_e$ ,  $\mathbf{y}_e$ ,  $\mathbf{z}_e$  jsou jednotkové směrové vektory os souřadného systému koncového efektoru a  $\mathbf{O}_e$  je jeho polohový vektor (více v Kapitole 2.1)

Návrhové parametry:

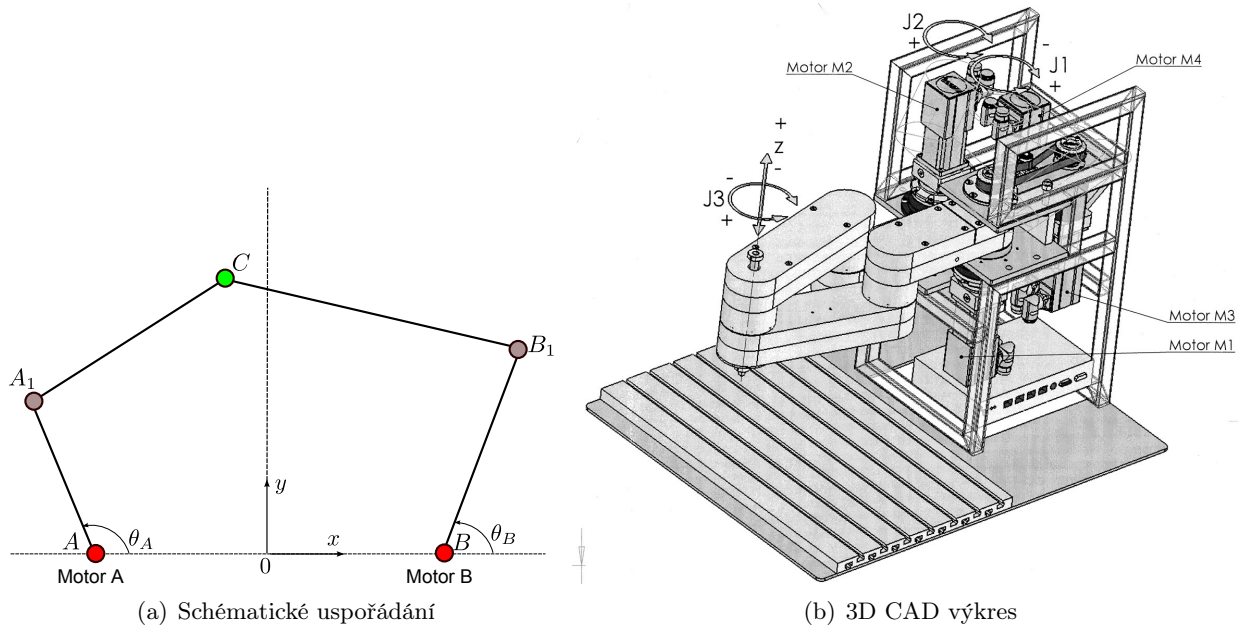
$$\xi = [ l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 ]^T \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>Svým tvarem napodobující ruku člověka.

### 1.4.2 Paralelní planární manipulátor (PPM)

Paralelní neredundantní planární manipulátor, jehož schématické uspořádání je znázorněno na Obrázku 1.8(a) je někdy nazýván jako 2x Scara manipulátor. Je tvořen dvěma kinematickými řetězci s klouby typu **R**. Rotační aktuátory manipulátoru jsou pevně umístěny v jeho základně. Koncový efektor manipulátoru vykazuje 2 translační stupně volnosti.

Prototyp manipulátoru, viz Obrázek 1.8(b), je v současnosti vyvíjen ve spolupráci s firmou Atega, s.r.o. [35] na katedře kybernetiky, FAV, ZCU v Plzni. Vyvíjený manipulátor je navíc osazen ještě dvěma přídatnými stupni volnosti pro natočení (osa  $J_3$ ) a zdvih (osa  $z$ ) koncového efektoru, které však pro analýzu nebudeme dále uvažovat.



Obrázek 1.8: Paralelní planární manipulátor

Kloubové souřadnice:

$$\Theta = [\theta_A \quad \theta_B]^T \quad (1.4)$$

Zobecněné souřadnice:

$$\mathbf{X} = \mathbf{C} = [C_x \quad C_y]^T \quad (1.5)$$

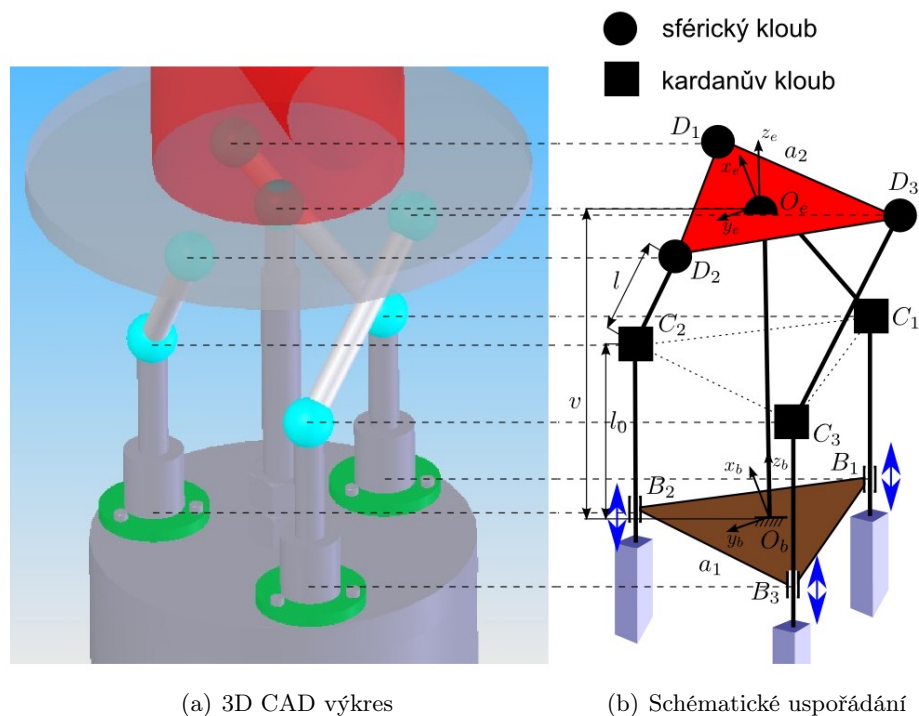
Návrhové parametry:

$$\xi = [\|AA_1\| \quad \|A_1C\| \quad \|A\|]^T = [\|BB_1\| \quad \|B_1C\| \quad \|B\|]^T = [l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T \quad (1.6)$$

### 1.4.3 Paralelní sférické zápěstí (PSZ)

Sférické zápěstí bývá velmi častá architektura, kterou můžeme v průmyslových aplikacích nalézt. Jedná se o mechanismus umožňující tři rotační stupně volnosti koncového efektoru a v sériové podobě je používán například jako poslední část antropomorfního manipulátoru, viz Kapitola 1.4.1. Zajímavou alternativu k sériovému sférickému zápěstí tvoří architektura paralelní, jejíž schématické uspořádání je znázorněno na Obrázku 1.9(b) a 3D CAD model na Obrázku 1.9(a). Manipulátor je poháněn třemi translačními aktuátory (lineární motory). Koncový efektor je k základně manipulátoru připevněn čtyřmi nezávislými kinematickými řetězci, z nichž prostřední tvoří tzv.

pasivní stabilizační element, který omezuje počet stupňů volnosti koncového efektoru (s takovým uspořádáním se u paralelních manipulátorů můžeme setkat velmi často).



Obrázek 1.9: Paralelní sférické zápěstí **Pozn.: S.s. konc. ef. je špatně zakreslen**

Kloubové souřadnice:

$$\Theta = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]^T \quad (1.7)$$

kde  $d_i = \|B_i C_i\|$  je okamžité vysunutí lineárních aktuátorů a  $l_0$  je vysunutí aktuátorů v domovské poloze manipulátoru ( $d_i = l_0$ ).

Zobecněné souřadnice:

$$X = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T \quad (1.8)$$

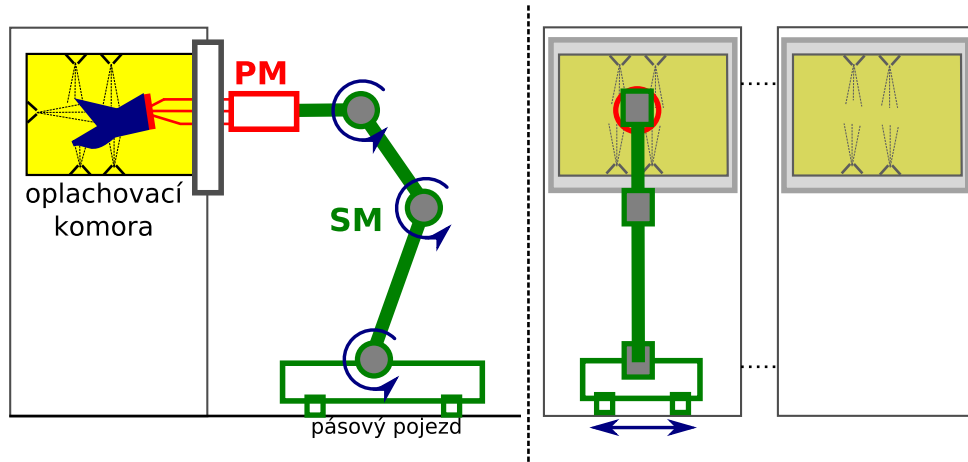
kde  $\alpha, \beta, \gamma$  Eulerovy úhly koncového efektoru podle schématu XYZ.

Návrhové parametry:

$$\xi = [a_1 \quad a_2 \quad l \quad v \quad \psi]^T \quad (1.9)$$

kde  $a_1, a_2$  jsou strany rovnostranných trojúhelníků v základně a koncovém efektoru manipulátoru a  $\psi$  je jejich vzájemné torzní natočení (ve směru osy  $z_0$ ) pro manipulátor v domovské poloze.

Prototyp manipulátoru, který využívá jako svou poslední část paralelní sférické zápěstí je vyvíjen opět na katedře kybernetiky, FAV, ZČU v Plzni, tentokrát ve spolupráci s firmou Eurotec JKR s.r.o. [36]. Celé zařízení bude sloužit jako univerzální manipulátor pro odlakovací, odmašťovací a konzervační linky, viz Obrázek 1.10. Paralelní sférické zápěstí (PM) je zde využito jako poslední součást sériového manipulátoru se čtyřmi stupni volnosti (SM) zejména kvůli možnosti oddělit elektronickou část zápěstí (motory, čidla) od agresivního prostředí uvnitř oplachovací komory, neboť přímočaře se pohybující výsuvy lineárních aktuátorů lze relativně snadno utěsnit.



Obrázek 1.10: Využití paralelního sférického zápěstí (PM) v průmyslové aplikaci.

# Kapitola 2

## Kinematika manipulátorů: Modelování, polohové závislosti

Pod pojmem kinematika manipulátorů rozumíme závislosti mezi obecnými polohami, rychlostmi, zrychleními či vyššími derivacemi polohy jednotlivých částí manipulátoru bez ohledu na síly a silové momenty tyto závislosti ovlivňující. Vyšetřování kinematických závislostí proto řadíme mezi nejvíce podstatné oblasti při analýze a syntéze manipulátorů. Lze obecně říci, že kinematika v podstatě každého manipulátoru je založena na základní myšlence využít jednoduchého pohybu lineárních či rotačních aktuátorů a prostřednictvím vhodného mechanismu jej převést na komplexní rovinný či prostorový pohyb. Takový mechanismus si je pak, společně s aktuátory, možné představit jako mechatronický počítač, kde jeho program je ukryt v jeho mechanické konstrukci. V posledních letech se začíná ve světě objevovat názor, že kinematika manipulátorů je již postupně upadajícím oborem robotiky, většina důležitých problémů je již dávno vyřešena a díky stále se zdokonalujícím a zlevňujícím komponentám (výkonné počítače, inteligentní čidla a pohony), které mohou snadno kompenzovat nedokonalosti při jejím návrhu, nehraje zvlášť významnou roli. Jean Paul Merlet, jeden z předních odborníků, zejména pak v oblasti paralelní robotiky, představil v roce 2000 na konferenci IEEE-International Conference on Robotics zajímavý příspěvek s příznačným názvem "Kinematics' not dead!", viz [24], ve kterém argumentuje právě proti zmíněnému názoru následujícími poznatky:

- náklady na mechanickou část manipulátoru nepřesahují zpravidla 20-30 % celého systému
- měření chyb v mechanické konstrukci je sice možné, nicméně vývoj řídicího systému pro jejich následnou kompenzaci je velmi obtížné a zdoluhavé
- výpočetní výkon by měl být využit především na vývoj "intelligence" manipulátoru bez nutnosti jej využívat pro zásah do chování manipulátoru dané jeho architekturou

Dále zmiňuje některé doposud otevřené problémy v robotice, které dodnes nejsou uspokojivě řešeny, zejména pak problém syntézy a optimalizace manipulátorů.

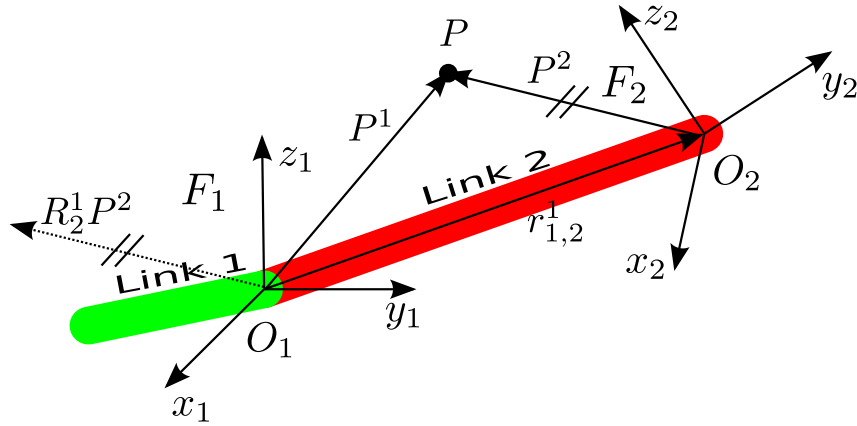
### 2.1 Reprezentace obecného pohybu v robotice

Pro popis pohybu manipulátorů, jako systému složeného s pevných hmotných ramen a nehmotných kloubů, byla zavedena celá řada metodik (jinými slovy úmluv), z nichž dvě nejpoužívanější budou detailně zmíněny v Kapitole 2.2. Všechny úmluvy však vychází z myšlenky vzájemné transformace polohy souřadných systémů, umístěných v jednotlivých ramenech manipulátoru. Zabývejme se proto nejprve reprezentací polohy, rychlosti a zrychlení obecného tělesa představující jedno rameno manipulátoru.

#### 2.1.1 Reprezentace polohy

Předpokládejme dvojici souřadných systémů (dále jen s.s.), z nichž první s.s.  $F_1 = \{\mathbf{O}_1 - \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1\}$  je pevně spojen s ramenem *Link* 1 a druhý s.s.  $F_2 = \{\mathbf{O}_2 - \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 \mathbf{z}_2\}$  s ramenem *Link* 2, viz

Obrázek 2.1.



Obrázek 2.1: Transformace souřadných systémů

Vzájemné translace s.s.  $F_1$  a  $F_2$  je zřejmě dána vektorem translace  $\mathbf{r}_{1,2}^1 = \mathbf{O}_2^1 - \mathbf{O}_1^1 = \mathbf{O}_2^1$ . Jejich vzájemná rotace může být vyjádřena maticí rotace  $\mathbf{R}_2^1$ , pro kterou platí následující<sup>1</sup>:

- $\mathbf{R}_2^1$  je reálná matice rozměru  $[3 \times 3]$ , jejíž sloupce reprezentují souřadnice jednotkových směrových vektorů s.s.  $F_2$  v s.s. (či vzhledem k s.s.)  $F_1$ .

$$\mathbf{R}_2^1 = [\mathbf{x}_2^1 \quad \mathbf{y}_2^1 \quad \mathbf{z}_2^1]$$

- $\mathbf{R}_2^1$  je ortogonální maticí (její sloupce jsou vzájemně ortogonální-kolmé). Tedy nutně platí:

$$(\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{R}_2^1 = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{R}_2^1)^{-1} = (\mathbf{R}_2^1)^T = \mathbf{R}_1^2 \quad (2.1)$$

kde  $\mathbf{R}_1^2$  je matice rotace, jejíž sloupce reprezentují souřadnice jednotkových směrových vektorů s.s.  $F_1$  v s.s.  $F_2$ .

$$\mathbf{R}_1^2 = [\mathbf{x}_1^2 \quad \mathbf{y}_1^2 \quad \mathbf{z}_1^2]$$

Poznamenejme, že prvky matice rotace jsou vzájemně závislé. Lze ukázat, že minimální počet parametrů pro popis obecné rotace je tři (viz např. Eulerovy úhly).

Nechť  $\mathbf{P}^1$  označuje souřadnice bodu  $\mathbf{P}$  v s.s.  $F_1$  a  $\mathbf{P}^2$  souřadnice stejného bodu v s.s.  $F_2$ , pak:

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \quad \text{a zároveň, viz (2.1)} \quad \mathbf{P}^2 = -\mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{P}^1 \quad (2.2)$$

- Rozlišujeme tři základní elementární rotace dvou s.s.

– Rotace kolem osy  $\mathbf{x}_1$  s.s.  $F_1$  o úhel  $\alpha$

Tedy s.s.  $F_2$  vznikne natočením souřadného systému  $F_1$  kolem osy  $\mathbf{x}_1$  o úhel  $\alpha$ .

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>Dolní index označuje konkrétní vektor (bod), zatímco horní index vyjadřuje, v souřadnicích kterého souřadného systému je tento vektor (bod) vyjádřen. Např.:  $\mathbf{r}_{1,2}^1$  a  $\mathbf{r}_{1,2}^2$  označuje ten samý vektor, ale jeho souřadnice jsou jednou uvažovány vzhledem k s.s.  $F_1$  a podruhé k s.s.  $F_2$ .

- Rotace kolem osy  $\mathbf{y}_1$  s.s.  $F_1$  o úhel  $\beta$   
Tedy s.s.  $F_2$  vznikne natočením souřadného systému  $F_1$  kolem osy  $\mathbf{y}_1$  o úhel  $\beta$ .

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

- Rotace kolem osy  $\mathbf{z}_1$  s.s.  $F_1$  o úhel  $\gamma$   
Tedy s.s.  $F_2$  vznikne natočením souřadného systému  $F_1$  kolem osy  $\mathbf{z}_1$  o úhel  $\gamma$ .

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

- Úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  se nazývají *Eulerovské úhly* a tvoří jeden ze známých možností popisů rotace těles v prostoru.
- Obecnou rotaci můžeme vyjádřit skládáním rotací elementárních, a to dvěma základními postupy:

### 1. Postupná rotace kolem os souřadných systémů

Například podle schématu XYZ<sup>2</sup>:

- Odrotuj s.s.  $F_1$  okolo osy  $\mathbf{x}_1$  o úhel  $\alpha \Rightarrow$  vzniká nový souřadný systém  $F'_1$  (matice rotace  $\mathbf{R}_x(\alpha)$ ).
- Odrotuj s.s.  $F'_1$  okolo osy  $\mathbf{y}'_1$  o úhel  $\beta \Rightarrow$  vzniká nový souřadný systém  $F''_1$  (matice rotace  $\mathbf{R}_y(\beta)$ ).
- Odrotuj s.s.  $F''_1$  okolo osy  $\mathbf{z}''_1$  o úhel  $\gamma \Rightarrow$  vzniká výsledný souřadný systém  $F_2$  (matice rotace  $\mathbf{R}_z(\gamma)$ ).

Výslednou matici rotace můžeme tak psát jako:

$$\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_x(\alpha) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_z(\gamma) \quad (2.6)$$

### 2. Rotace kolem os souřadného systému $F_1$ (fixované osy rotace)

Opět podle schématu XYZ:

- Odrotuj s.s.  $F_1$  okolo osy  $\mathbf{x}_1$  o úhel  $\alpha \Rightarrow$  vzniká nový souřadný systém  $F'_1$  (matice rotace  $\mathbf{R}_x(\alpha)$ ).
- Odrotuj s.s.  $F'_1$  okolo osy  $\mathbf{y}_1$  o úhel  $\beta \Rightarrow$  vzniká nový souřadný systém  $F''_1$  (matice rotace  $\mathbf{R}_y(\beta)$ ).
- Odrotuj s.s.  $F''_1$  okolo osy  $\mathbf{z}_1$  o úhel  $\gamma \Rightarrow$  vzniká výsledný souřadný systém  $F_2$  (matice rotace  $\mathbf{R}_z(\gamma)$ ).

Lze ukázat, že výslednou matici rotace můžeme tak psát jako:

$$\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_z(\gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha) \quad (2.7)$$

#### ■ Poznámka 2.1 (Singularity v transformaci: matice rotace - Eulerovy úhly)

Je zřejmé, že ze známých Eulerových úhlů  $\alpha, \beta, \gamma$  lze bez jakýchkoliv potíží vždy vypočítat matici rotace  $\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma)$ , viz vztah (2.6,2.7), mluvíme o tzv. *dopředné transformaci*.

<sup>2</sup>Schéma XYZ označuje posloupnost rotací kolem jednotlivých os, často používané schéma je např. ZYZ.



Zpětnou transformací pak rozumíme stanovení Eulerovských úhlů  $\alpha, \beta, \gamma$  ze známé matice rotace

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Budeme-li uvažovat schéma XYZ s postupnou rotací kolem os souřadných systémů, matice rotace je dána podle (2.6):

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cos(\gamma) & -\cos(\beta) \sin(\gamma) & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \sin(\gamma) & -\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\gamma) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma) & \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) + \sin(\alpha) \cos(\gamma) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Porovnáním rovnice (2.9) a (2.8) lze určit Eulerovy úhly následovně<sup>3</sup>:

**Pro**  $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $\cos \beta \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(-r_{23}, r_{33}) \\ \beta &= \text{atan2}(r_{13}, \sqrt{(r_{23}^2 + r_{33}^2)}) \\ \gamma &= \text{atan2}(-r_{12}, r_{11}) \end{aligned}$$

**Pro**  $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ ,  $\cos \beta < 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(r_{23}, -r_{33}) \\ \beta &= \text{atan2}(r_{13}, -\sqrt{(r_{23}^2 + r_{33}^2)}) \\ \gamma &= \text{atan2}(r_{12}, -r_{11}) \end{aligned}$$

**Pro**  $\beta = -\frac{\pi}{2}$  matice rotace degeneruje na matici:

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\alpha - \gamma) & \cos(\alpha - \gamma) & 0 \\ \cos(\alpha - \gamma) & \sin(\alpha - \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

Lze určit jen úhel  $\phi = \alpha - \gamma$ .

**Pro**  $\beta = \frac{\pi}{2}$  matice rotace degeneruje na matici:

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

Lze určit jen úhel  $\phi = \alpha + \gamma$ .

Jinými slovy, úhel  $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$  představuje singularitu v reprezentaci rotace pomocí Eulerových úhlů, neboť osa  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{z}_1''$  jsou rovnoběžné (opačné či shodné) a nelze tak jednoznačně určit úhly  $\alpha, \gamma$ . Jednoznačně lze určit jen jejich rozdíl, či součet  $\phi$ . ■

<sup>3</sup>Funkce  $\phi = \text{atan2}(x, y)$  zohledňuje znaménka argumentů  $x$  a  $y$  a vrací korektní řešení ve všech kvadrantech  $\phi \in < 0, 2\pi >$

Pro popis rotace dvou souřadných systémů se ještě využívají krom matice rotace další způsoby reprezentace. Mezi nejznámější patří zejména:

### 1. Reprezentace pomocí obecné osy rotace

Každou obecnou rotaci lze převést na rotaci okolo obecné osy  $\mathbf{r}$  o úhel  $\theta$ . Zatímco přímá transformace  $\{\mathbf{r}, \theta\} \mapsto \mathbf{R}_2^1(\mathbf{r}, \theta)$  lze opět vypočítat vždy, pro inverzní transformaci  $\mathbf{R}_2^1(\mathbf{r}, \theta) \mapsto \{\mathbf{r}, \theta\}$  dochází k singulárnímu případu pro  $\theta = 0$  a  $\theta = \pi$ , kdy nelze jednoznačně určit směr vektoru  $\mathbf{r}$ .

### 2. Reprezentace pomocí jednotkového kvaternionu

Jednotkový quaternion  $\mathcal{Q}$  lze stanovit z úhlu  $\theta$  a osy rotace  $\mathbf{r}$  jako:

$$\mathcal{Q} = \{\eta, \boldsymbol{\epsilon}\} = \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{r} \right\}$$

Výhodou jednotkového kvaternionu je, že umožňuje popsat rotaci okolo obecné osy  $\mathbf{r}$  pro úhel  $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  přičemž nevykazuje žádné singularity.

Detailní popis přímé a inverzní transformace pro výše uvedené reprezentace rotace lze nalézt např. v [19], [40].

## Homogenní transformační matice

K celkovému popisu polohy (rotace a translace) s.s. lze s výhodou využít tzv. *homogenních souřadnic*. Zavedení homogenních souřadnic úzce souvisí s problematikou geometrické projekce (jedná se v podstatě o projektivní transformaci) a podrobné vysvětlení včetně řady názorných animací lze nalézt např. v [30].

Polohu s.s.  $F_2$  vzhledem k s.s.  $F_1$  lze pomocí homogenní transformační matice  $\mathbf{T}_2^1$  psát jako, viz Obr. 2.1:

$$\mathbf{T}_2^1 = \begin{bmatrix} & & & & \\ & \mathbf{R}_2^1 & & \mathbf{r}_{1,2}^1 & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Je zřejmé, že pomocí homogenní transformační matice  $\mathbf{T}_2^1$  lze homogenní souřadnice bodu  $\mathbf{P}$  v s.s.  $F_1$  vyjádřit pomocí jeho homogenních souřadnic v s.s.  $F_2$  jako, viz (2.2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Homogenní transformační matice nám tak zahrnuje informaci o obecné poloze tělesa v prostoru, a to jeho rotaci  $\mathbf{T}_2^1[1 : 3, 1 : 3] = \mathbf{R}_2^1$  a translaci  $\mathbf{T}_2^1[1 : 3, 4] = \mathbf{r}_{1,2}^1$  najednou<sup>4</sup>.

Vyjádríme-li nyní z rovnice (2.11) souřadnice  $\mathbf{P}^2$  v závislosti na souřadnicích  $\mathbf{P}^1$ , s ohledem na platnost (2.1), dostáváme inverzní transformační vztah:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{P}^1 - (\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{(\mathbf{T}_2^1)^{-1}}_{\mathbf{T}_1^2} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

kde

$$(\mathbf{T}_2^1)^{-1} = \mathbf{T}_1^2 = \begin{bmatrix} & & & & \\ & (\mathbf{R}_2^1)^T & & -(\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{r}_{1,2}^1 & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

<sup>4</sup>Zápis  $\mathbf{X}[a : b, c : d]$  označuje submatici (subvektor), který se skládá z  $a$ . až  $b$ . řádku a  $c$ . až  $d$ . sloupce matice  $\mathbf{X}$ .

je inverze homogenní transformační matice  $\mathbf{T}_2^1$ . Poznamenejme, že pro homogenní transformační matici již neplatí, že její inverze lze nahradit její transpozicí (nesplňuje podmínky ortogonality!)  $(\mathbf{T}_2^1)^{-1} \neq (\mathbf{T}_2^1)^T$ .

### Skládání transformací s.s.

Uvažujme trojici s.s.  $F_1, F_2, F_3$  a odpovídající homogenní transformační matice mezi s.s.  $F_1, F_2$ :  $\mathbf{T}_2^1$  a  $F_2, F_3$ :  $\mathbf{T}_3^2$ . Potom výsledná homogenní transformační matice mezi s.s.  $F_1, F_3$  lze psát:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_3^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_3^1 & \mathbf{r}_{2,3}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2 = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^1 & \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_3^2 & \mathbf{r}_{2,3}^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_3^2 & \mathbf{R}_2^1 \mathbf{r}_{2,3}^2 + \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14) \end{aligned}$$

Tedy pro skládání rotací s.s. platí:

$$\mathbf{R}_3^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{R}_3^2$$

A pro skládání translací s.s.:

$$\mathbf{r}_{1,3}^1 = \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{r}_{2,3}^2$$

### Transformace souřadnice bod versus vektor mezi s.s.

Často je velmi výhodné transformovat souřadnice bodu či vektoru z jednoho s.s. do jiného. Přesto, že po formální stránce je bod a vektor velmi podobný, v případě jejich transformací mezi s.s. se tato dvojice geometrických objektů chová diametrálně odlišně. Předpokládejme opět dva s.s.  $F_1$  a  $F_2$  se vzájemnou homogenní transformační maticí  $\mathbf{T}_2^1$  a dva libovolné body  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{Q}$  jednoznačně definující vektor  $\mathbf{v} = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ .

- Transformace souřadnic bodu  $\mathbf{P}$  ze s.s.  $F_2$  do s.s.  $F_1$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \quad \text{viz (2.11)}$$

Tedy:

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2$$

- Transformace souřadnic vektoru  $\mathbf{v}$  ze s.s.  $F_2$  do s.s.  $F_1$

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{Q}^1 - \mathbf{P}^1 = \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{Q}^2 - \mathbf{r}_{1,2}^1 - \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 = \mathbf{R}_2^1 \cdot (\mathbf{Q}^2 - \mathbf{P}^2)$$

Tedy:

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{v}^2$$

### 2.1.2 Reprezentace rychlosti a zrychlení

Rychlost respektive zrychlení bodu  $\mathbf{P}$  v s.s.  $F_1$  lze, v závislosti na jeho rychlosti respektive zrychlení v s.s.  $F_2$ , snadno získat časovou derivací vztahu (2.11):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{T}}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{P}}^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \ddot{\mathbf{T}}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\dot{\mathbf{T}}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{P}}^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{P}}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

kde

$$\dot{\mathbf{T}}_2^1 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_2^1 & \dot{\mathbf{r}}_{1,2}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{T}}_2^1 = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}_2^1 & \ddot{\mathbf{r}}_{1,2}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Časová derivace translačního vektoru  $\mathbf{r}_{1,2}^1$  je zřejmá a vyjadřuje translační rychlost respektive zrychlení s.s.  $F_2$  v s.s.  $F_1$ . Je intuitivně jasné, že časová derivace matice rotace  $\mathbf{R}_2^1$  bezpochyby souvisí s vektorem úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}_2^1$ .

Z ortogonalit matice rotace (2.1) plyne

$$\mathbf{R}_2^1 \cdot (\mathbf{R}_2^1)^T = \mathbf{I} \quad \rightarrow \text{derivací podle času} \rightarrow \dot{\mathbf{R}}_2^1 \cdot (\mathbf{R}_2^1)^T + \mathbf{R}_2^1 \cdot (\dot{\mathbf{R}}_2^1)^T = 0$$

Zavedením matice  $\mathbf{S} = \dot{\mathbf{R}}_2^1 \cdot (\mathbf{R}_2^1)^T$  dostáváme  $\mathbf{S} + \mathbf{S}^T = \mathbf{0}$  (tedy  $\mathbf{S}$  je antisymetrická matice). Časovou derivací matice rotace  $\mathbf{R}_2^1$  lze tedy pomocí zatím nespécifikované antisymetrické matice  $\mathbf{S}$  vyjádřit jako:

$$\dot{\mathbf{R}}_2^1 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_2^1 \quad (2.17)$$

Uvažujme nyní *konstantní* vektor  $\mathbf{P}^2$  (bod  $\mathbf{P}$  je pevně spojen se s.s.  $F_2$ ) a předpokládejme, že se s.s.  $F_2$  vzhledem k s.s.  $F_1$  pouze otáčí úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\omega}_2^1 = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  (neposouvá se  $\mathbf{r}_{1,2}^1 = \mathbf{konst.}$ ) a jejich okamžitou orientaci popisuje matice rotace  $\mathbf{R}_2^1$ . Tedy časovou derivaci vektoru  $\mathbf{P}^1$  v s.s.  $F_1$  lze psát jako, viz (2.15):

$$\dot{\mathbf{P}}^1 = \dot{\mathbf{R}}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \quad (2.18)$$

Ze zákonitostí kinematiky plyne, že rychlost *konstantního* vektoru  $\mathbf{P}^2$  lze v s.s.  $F_1$  psát také jako:

$$\dot{\mathbf{P}}^1 = \boldsymbol{\omega}_2^1 \times \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}^1 = \boldsymbol{\omega}_2^1 \times \mathbf{P}^1 \quad (2.19)$$

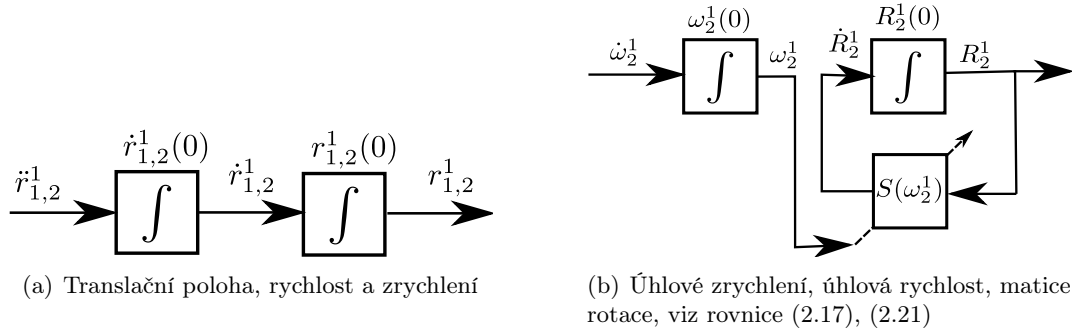
Dosadíme-li vztah (2.17) pro časovou derivaci matice rotace do rovnice (2.18) a následně porovnáme s rovnicí (2.19)

$$\dot{\mathbf{P}}^1 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}^1 \quad \longleftrightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}^1 = \boldsymbol{\omega}_2^1 \times \mathbf{P}^1 \quad (2.20)$$

je zřejmé, že násobení vektoru  $\mathbf{P}^1$  maticí  $\mathbf{S}$  je ekvivalentní vektorovému součinu vektoru úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}_2^1$  a vektoru  $\mathbf{P}^1$ . Z definice vektorového násobení tedy plyne tvar matice  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_2^1) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Závislosti mezi polohou, rychlostí a zrychlením s.s.  $F_2$  vzhledem k s.s.  $F_1$  lze pak znázornit pomocí následujících simulačních schémat:



Obrázek 2.2: Simulační schémata generování polohy s.s.  $F_2$  vzhledem k s.s.  $F_1$  (parametr (0) označuje počáteční podmínky integrátorů)

Někdy bývá vhodné úhlovou rychlost s.s.  $F_2$  v s.s.  $F_1$  vyjádřit místo vektoru úhlové rychlosti  $\omega_2^1$  časovou derivací Eulerových úhlů  $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T$  (dle daného schématu rotace, např. XYZ). Tuto transformaci řeší tzv. *Eulerovy kinematické rovnice*. Přímou časovou derivací matice  $\mathbf{R}_2^1$ , viz (2.9), z definice matice  $\mathbf{S}(\omega) = \dot{\mathbf{R}}_2^1 \cdot (\mathbf{R}_2^1)^T$  lze ukázat, že pro schéma rotace XYZ platí:

$$\omega_2^1 = \mathbf{H}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (2.22)$$

kde

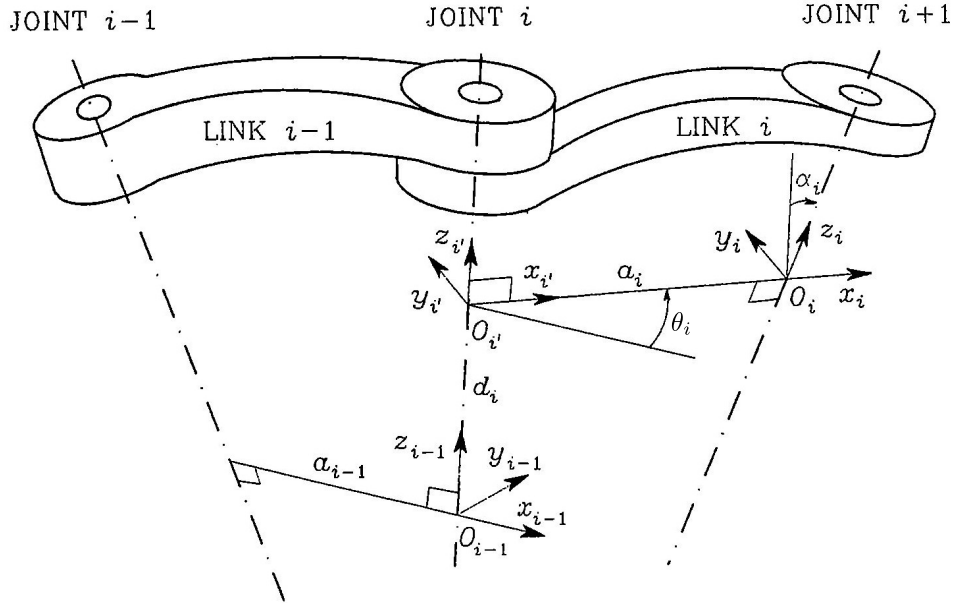
$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

## 2.2 Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

Pro popis geometrického uspořádání ramen a kloubů manipulátorů bylo zavedeno mnoho metod. Ty se pokouší jednoduchou a systematickou cestou rekurzivně definovat souřadné systémy reprezentující jednotlivá ramena manipulátoru a jejich vzájemnou polohovou transformaci. Polohová transformace dvou po sobě jdoucích s.s. závisí na daných konstantních geometrických parametrech (zahrnují geometrický tvar ramen, kloubů a jejich vzájemnou konfiguraci) a kloubových souřadnicích  $\Theta$  (zahrnují aktuální polohu kloubů manipulátoru). Mezi nejznámější takové úmluvy patří tzv. *Denavit-Hartenbergova úmluva* [8] a *Khalil-Kleinfingerova úmluva* [17]. Obě úmluvy budou demonstrovány na AM+SZ představeného v kapitole 1.4.1 ( $n = 6$ ), viz [38].

### 2.2.1 Denavit-Hartenbergova úmluva (D-H)

Dnes snad nejznámější úmluva pro elegantní popis geometrie sériových manipulátorů. Předpokládejme dvě ramena manipulátoru *Link*  $i - 1$  a *Link*  $i$ , která jsou spojena kloubem *Joint*  $i$  s jedním stupněm volnosti, viz Obr. 2.3.



Obrázek 2.3: D-H úmluva

Definice s.s.  $F_i = \{\mathbf{O}_i - \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i \mathbf{z}_i\}$  za předpokladu znalosti s.s.  $F_{i-1} = \{\mathbf{O}_{i-1} - \mathbf{x}_{i-1} \mathbf{y}_{i-1} \mathbf{z}_{i-1}\}$  dle D-H úmluvy je vyjádřena následovně:

- Zvol osu  $\mathbf{z}_i$  podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint*  $i + 1$  a osu  $\mathbf{z}'_i$  podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint*  $i$
- Umístí počátek  $\mathbf{O}_i$  s.s.  $F_i$  do průsečíku osy  $\mathbf{z}_i$  a normály<sup>5</sup> os  $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$ . Umístí počátek  $\mathbf{O}'_i$  s.s.  $F'_i = \{\mathbf{O}'_i - \mathbf{x}'_i \mathbf{y}'_i \mathbf{z}'_i\}$  do průsečíku osy  $\mathbf{z}_{i-1}$  a téže normály.
- Zvol osu  $\mathbf{x}_i$  a  $\mathbf{x}'_i$  podél normály ve směru od kloubu *Joint*  $i$  do kloubu *Joint*  $i + 1$ .
- Zvol osu  $\mathbf{y}_i$  a  $\mathbf{y}'_i$  tak, aby výsledné s.s. byly pravotočivé.

Lze snadno ukázat, že D-H úmluva nedefinuje jednoznačně umístění s.s. v následujících případech.

- Pro s.s.  $F_0 = \{\mathbf{O}_0 - \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0\}$  je určena jednoznačně pouze osa  $\mathbf{z}_0$  (podle osy rotace, resp. translace prvního kloubu manipulátoru *Joint* 1). Osu  $\mathbf{x}_0$  a počátek  $\mathbf{O}_0$  lze proto volit libovolně. Osa  $\mathbf{y}_0$  je pak určena tak, aby výsledný systém byl opět pravotočivým.
- Pro s.s.  $F_n = \{\mathbf{O}_n - \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n \mathbf{z}_n\}$ , kde  $n$  je počet kloubů s jedním stupněm volnosti uvažovaného manipulátoru není jednoznačně určena osa  $\mathbf{z}_n$ , neboť kloub *Joint*  $n + 1$  již neexistuje. Osa  $\mathbf{x}_n$  však musí zůstat kolmá k ose  $\mathbf{z}_{n-1}$ .
- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$ ) paralelní, jejich normála není jednoznačně definována (může být libovolně posunuta ve směru os kloubů).
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$ ) protínají (normála je nulové délky), osa  $\mathbf{x}_i$  bude volena tak, aby byla kolmá k rovině definované osami  $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$ . Její *kladný směr* však může být volen libovolně.

Nyní může být vzájemná poloha s.s.  $F_{i-1}$  a  $F_i$  popsána pouze pomocí čtyř D-H parametrů:

$a_i \dots$  vzdálenost mezi počátky  $\mathbf{O}_i$  a  $\mathbf{O}'_i$

$d_i \dots$  vzdálenost mezi počátky  $\mathbf{O}_{i-1}$  a  $\mathbf{O}'_i$

<sup>5</sup>normála os  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  je spojnice těchto os s minimální vzdáleností svírající s osami pravý úhel

$\alpha_i \dots$  úhel mezi osami  $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$  daný pootočením s.s.  $F'_i$  podél osy  $\mathbf{x}'_i$

$\theta_i \dots$  úhel mezi osami  $\mathbf{x}_{i-1}$  a  $\mathbf{x}_i$  daný pootočením s.s.  $F_{i-1}$  podél osy  $\mathbf{z}_{i-1}$

Je zřejmé, že pro základní typy kloubů s jedním stupněm volnosti platí:

**kloub Joint  $i$  je typu P** proměnná definující pohyb kloubu je  $d_i$ , proměnné  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$  jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link  $i$*

**kloub Joint  $i$  je typu R** proměnná definující pohyb kloubu je  $\theta_i$ , proměnné  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$  jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link  $i$*

Transformační vztah, v našem případě homogenní transformační matice v analogickém tvaru k (2.10), mezi s.s.  $F_{i-1}$  a  $F_i$  je dán následujícím způsobem.

- Vyber s.s.  $F_{i-1}$
- Posuň tento systém podél osy  $\mathbf{z}_{i-1}$  o vzdálenost  $d_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{z}_{i-1}$  o úhel  $\theta_i \Rightarrow$  dostáváme s.s.  $F'_i$ . Matice přechodu<sup>6</sup>:

$$\mathbf{T}_{i'}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

- Posuň s.s.  $F'_i$  podél osy  $\mathbf{x}'_i$  o vzdálenost  $a_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{x}'_i$  o úhel  $\alpha_i \Rightarrow$  dostáváme s.s.  $F_i$ . Matice přechodu:

$$\mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

- Výsledná matice přechodu ze s.s.  $F_{i-1}$  do s.s.  $F_i$  je dána:

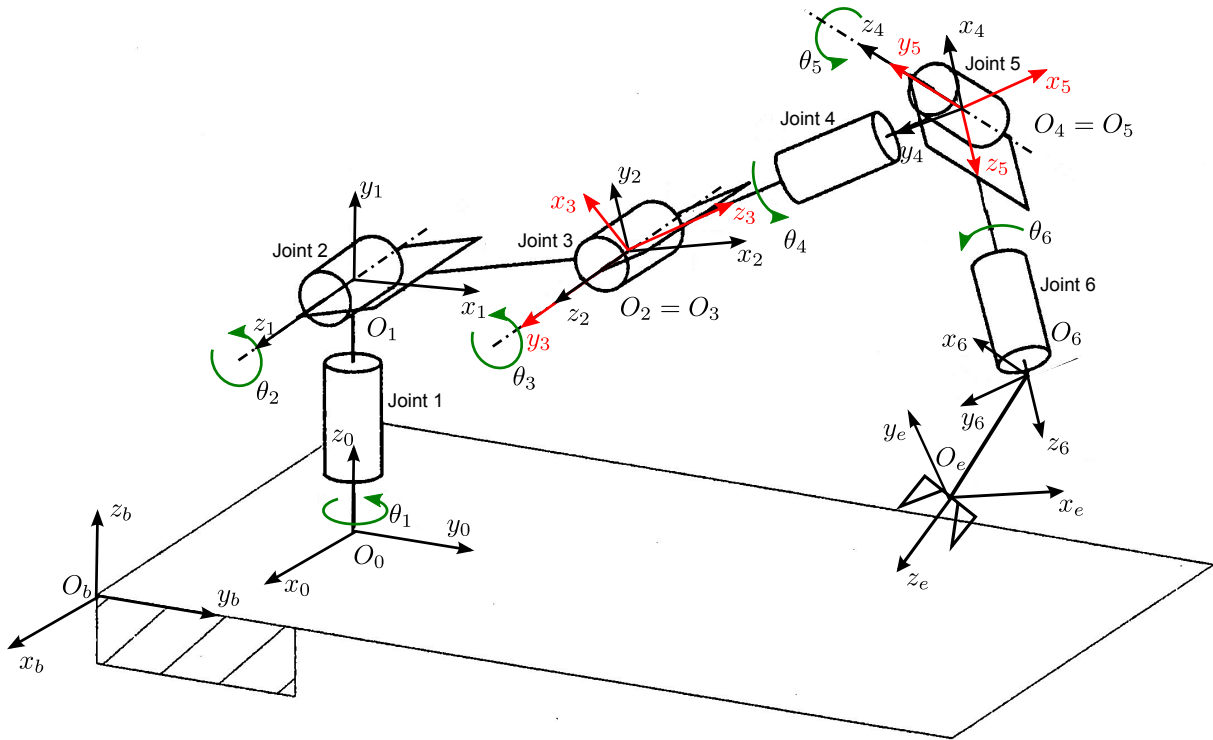
$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{i-1} &= \mathbf{T}_{i'}^{i-1} \cdot \mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_ic_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_iss_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25) \end{aligned}$$

Připomeňme, že matice přechodu matice (2.25) je funkcí pouze kloubových souřadnic  $\theta_i$  (pro rotační klouby R) a  $d_i$  (pro translační klouby P).

### ★ Příklad 2.1 (D-H úmluva pro AM+SZ)

Obrázek 2.4 znázorňuje zavedení souřadných systémů pro jednotlivá ramena AM+SZ.

<sup>6</sup>zkratka  $c_{\theta_i}$ , resp.  $s_{\theta_i}$  označuje  $\cos \theta_i$ , resp.  $\sin \theta_i$ . Podobně  $s_{(\theta_1+\theta_2)}$  označuje  $\sin(\theta_1 + \theta_2)$



Obrázek 2.4: Zavedení souřadných systémů pro AM+SZ dle D-H úmluvy

Geometrické parametry manipulátoru (tzv. D-H parametry), jsou pak dány následující tabulkou:

Joint $i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$l_1$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$l_2$	0
3	0	0	$\frac{\pi}{2}$
4	$l_3$	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	0	$\frac{\pi}{2}$
6	$l_4$	0	0

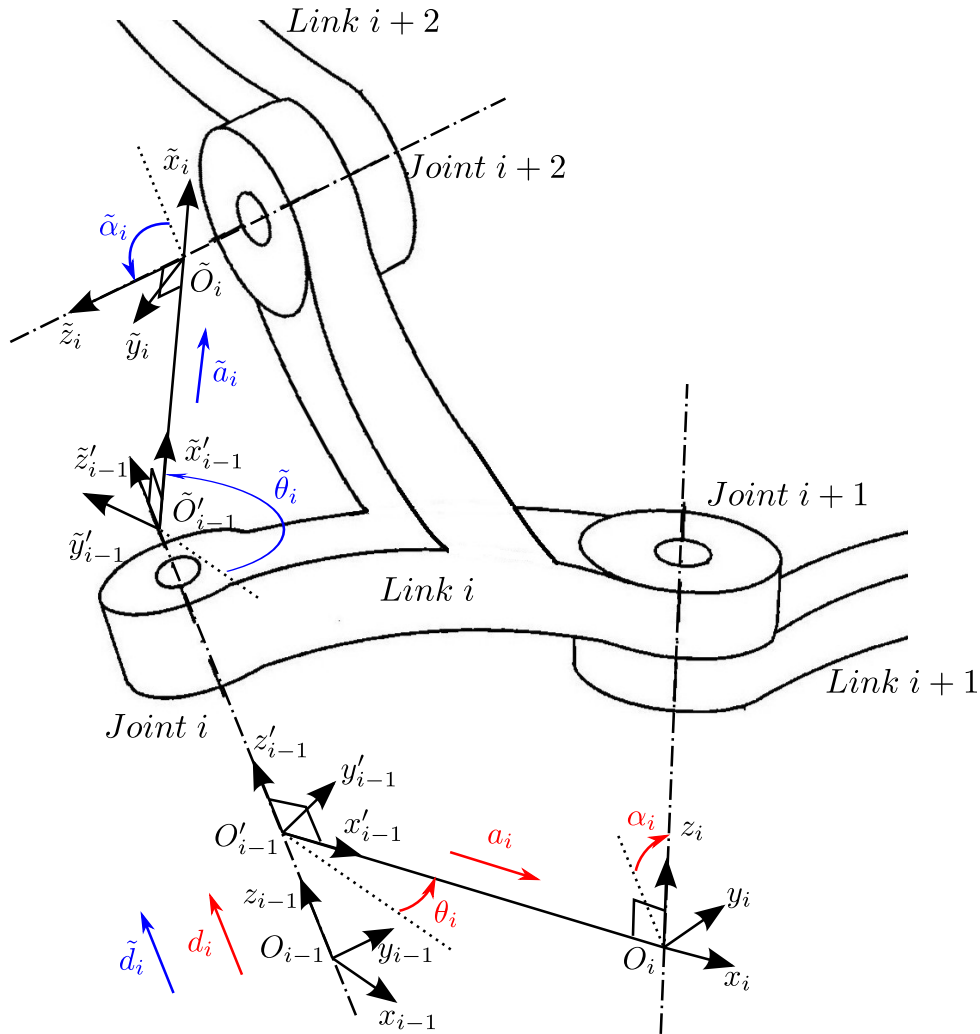
Tabulka 2.1: D-H parametry AM+SZ

★

### 2.2.2 Khalil-Kleinfingerova úmluva (K-K)

Khalil-Kleinfingerova úmluva, viz [41], představuje modifikaci D-H úmluvy pro popis souřadných systémů manipulátoru. Předpokládáme opět dvě ramena manipulátoru *Link*  $i-1$  a *Link*  $i$ , která jsou spojena kloubem *Joint*  $i$  s jedním stupněm volnosti, viz Obr. 2.6. Tentokrát jsou však souřadné systémy v jednotlivých kloubech definovány jiným způsobem. Zatímco v D-H úmluvě byl s.s.  $F_i$ , který je pevně svázan s ramenem *Link*  $i$ , umístěn na konci tohoto ramene, tedy s osou  $z_i$  shodnou s osou rotace kloubu *Joint*  $i+1$ , u K-K úmluvy je tento souřadný systém umístěn přímo na rotační ose kloubu *Joint*  $i$ . Opodstatnění takovéto změny není pouze ve zvýšení přehlednosti popisu souřadných systémů, ale především v možnosti popisu komplexních architektur manipulátorů, jako jsou *rozvětvené (tree chains)* a *uzavřené (closed chains)* kinematické řetězce, pro které popis prostřednictvím *D-H úmluvy* přináší komplikace a nejasnosti.

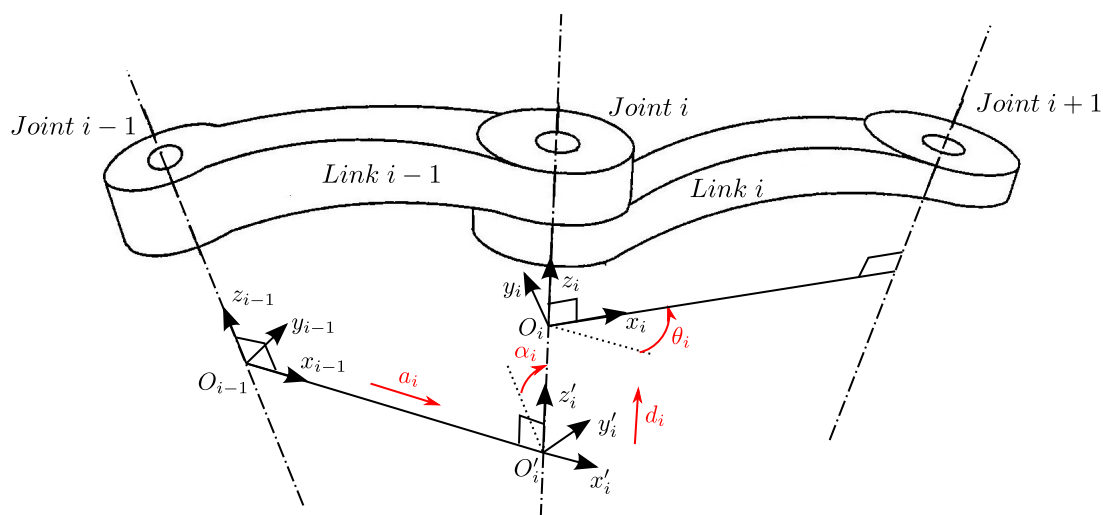




Obrázek 2.5: D-H úmluva vedoucí na nejednoznačnost v definici souřadných systémů při použití na rozvětvené kinematické řetězce

Pro ilustraci předpokládejme, že bychom chtěli popsat pomocí D-H úmluvy rozvětvený kinematický řetězec, viz Obr. 2.5. Je zřejmé, že transformace polohy z kloubu *Joint i* do kloubu *Joint i + 1* vede na definici s.s.  $F_i$ , který je pevně spřažen s ramenem *Link i*, a jeho poloha je daná rotací  $\theta_i$  respektive translací  $d_i$  (společně s parametry určující geometrii ramene  $a_i, \alpha_i$ ) vyvolanou kloubem *Joint i*. Jinými slovy s.s.  $F_i$  jednoznačně určuje vliv kloubu *Joint i* na rameno *Link i*. Toto zdánlivě jednoznačné určení však selhává v okamžiku, kdy je třeba definovat s.s. v kloubu *Joint i + 2* v rozvětvené části mechanismu. Využijeme-li znovu stejného postupu, musíme definovat s.s.  $\tilde{F}_i = \{\tilde{O}_i - \tilde{x}_i \tilde{y}_i \tilde{z}_i\}$ , který je opět pevně spřažen s ramenem *Link 1* a jeho poloha je daná rotací ( $\tilde{\theta}_i$ ) respektive translací ( $\tilde{d}_i$ ) (společně s parametry určující geometrii ramene  $\tilde{a}_i, \tilde{\alpha}_i$ ) vyvolanou kloubem *Joint i*.

Zde se však dostáváme do sporu, neboť poloha ramene *Link i* vyvolaná jediným kloubem *Joint i* je popsána dvěma různými s.s.  $F_i$  a  $\tilde{F}_i$ . Nabízí se tak otázka, jaké jsou vlastně kloubové souřadnice kloubu *Joint i*? ( $\theta_i$  respektive  $d_i$  nebo  $\tilde{\theta}_i$  respektive  $\tilde{d}_i$ )



Obrázek 2.6: K-K úmluva

Zavedeme-li nyní souřadné systémy kloubů dle K-K úmluvy, viz Obr. 2.6, definice s.s.  $F_i$  za předpokladu znalosti s.s.  $F_{i-1}$  je vyjádřena následovně:

- Zvol osu  $z_i$  a  $z'_i$  podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint i*. (Pro  $i = 1$  není s.s.  $F'_i$  definován.)
- Umístí počátek  $O_i$  s.s.  $F_i$  do průsečíku osy  $z_i$  a normály os  $z_i$  a  $z_{i+1}$ . Umístí počátek  $O'_i$  s.s.  $F'_i$  do průsečíku osy  $z_i$  a normály os  $z_{i-1}$  a  $z_i$ .
- Zvol osu  $x_i$  podél normály ve směru od kloubu *Joint i* do kloubu *Joint i + 1*.
- Zvol osu  $y_i$  tak, aby výsledné s.s. byly pravotočivé.

Lze snadno ukázat, že K-K úmluva nedefinuje jednoznačně umístění s.s. v následujících případech.

- Pro s.s.  $F_n$ , kde  $n$  je počet kloubů s jedním stupněm volnosti uvažovaného manipulátoru je jednoznačně určena pouze osa  $z_n$ , neboť kloub *Joint n + 1* již neexistuje. Osa  $x_n$  může být volena totožná s osou  $x_{n-1}$ .
- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $z_i$  a  $z_{i+1}$ ) paralelní, jejich normála není jednoznačně definována (může být libovolně posunuta ve směru os kloubů). Může být volena tak, že parametr  $d_i = 0$  nebo  $d_{i+1} = 0$ .
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $z_i$  a  $z_{i+1}$ ) protínají (normála je nulové délky), osa  $x_i$  bude volena tak, aby byla kolmá k rovině definované osami  $z_i$  a  $z_{i+1}$ . Její *kladný směr* však může být volen libovolně.
- S.s.  $F_0$  může být volen libovolně, zpravidla jako totožný se s.s.  $F_1$  pro  $\theta_1 = 0$ , respektive  $d_1 = 0$  (nulová poloha kloubu *Joint 1*).

Nyní může být vzájemná poloha s.s.  $F_{i-1}$  a  $F_i$  popsána pouze pomocí čtyř K-K parametrů:

$\alpha_i \dots$  úhel mezi osami  $z_{i-1}$  a  $z_i$  kolem normály  $x_{i-1}$

$a_i \dots$  vzdálenost mezi počátkem  $O_{i-1}$  a osou  $z_i$  (kolmá vzdálenost mezi osami)

$d_i \dots$  vzdálenost mezi počátky  $O'_i$  a  $O_i$

$\theta_i \dots$  úhel mezi osami  $x_{i-1}$  a  $x_i$  daný kolem osy  $z_i$

Je zřejmé, že pro základní typy kloubů s jedním stupněm volnosti opět platí:

**kloub Joint  $i$  je typu P** proměnná definující pohyb kloubu je  $d_i$ , proměnné  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$  jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link  $i$*

**kloub Joint  $i$  je typu R** proměnná definující pohyb kloubu je  $\theta_i$ , proměnné  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$  jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link  $i$*

Transformační vztah (homogenní transformační matice) mezi s.s.  $F_{i-1}$  a  $F_i$  je dán následujícím způsobem.

- Vyber s.s.  $F_{i-1}$
- Posuň tento systém podél osy  $\mathbf{x}_{i-1}$  o vzdálenost  $a_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{x}_{i-1}$  o úhel  $\alpha_i \Rightarrow$  dostáváme s.s.  $F'_i$ . Matice přechodu:

$$\mathbf{T}_{i'}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

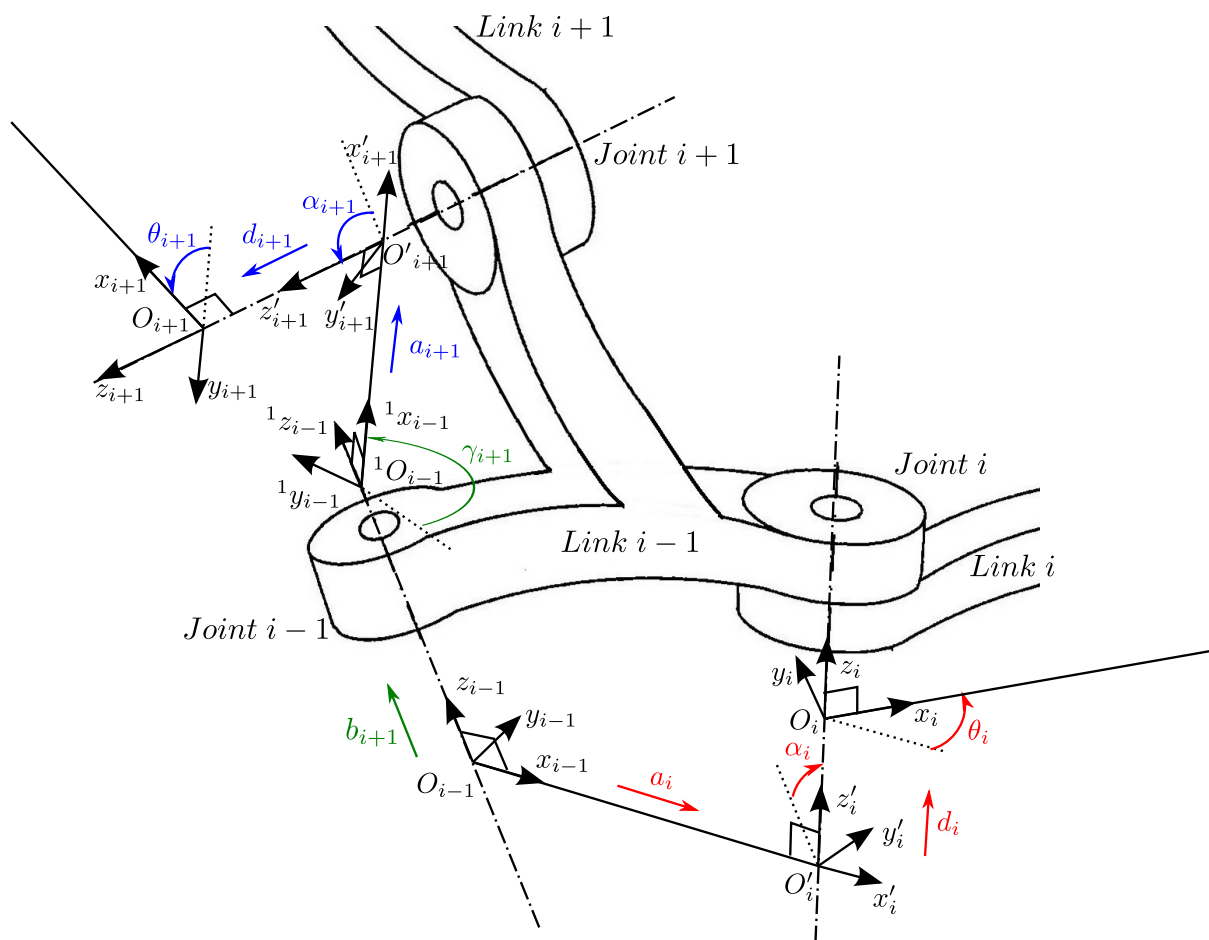
- Posuň s.s.  $F'_i$  podél osy  $\mathbf{z}'_i$  o vzdálenost  $d_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{z}'_i$  o úhel  $\theta_i \Rightarrow$  dostáváme s.s.  $F_i$ . Matice přechodu:

$$\mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

- Výsledná matice přechodu ze s.s.  $F_{i-1}$  do s.s.  $F_i$  je dána:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{i-1} &= \mathbf{T}_{i'}^{i-1} \cdot \mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_i \\ c_{\alpha_i} s_{\theta_i} & c_{\alpha_i} c_{\theta_i} & -s_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} d_i \\ s_{\alpha_i} s_{\theta_i} & s_{\alpha_i} c_{\theta_i} & c_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28) \end{aligned}$$

Porovnáním parametrů D-H úmluvy, viz Obr. 2.3 a K-K úmluvy, viz Obr. 2.6 můžeme vypočítat fakt, že D-H parametry  $[\theta_i, d_i, \alpha_i, a_i]$  odpovídají K-K parametrům  $[\theta_i, d_i, \alpha_{i+1}, a_{i+1}]$  (vyjma případu pro první a poslední čtveřici parametrů, neboť s.s.  $F_0$  může být volen libovolně a s.s.  $F_n$  má pevně určený jen směr osy  $\mathbf{z}_n$ ).



Obrázek 2.7: Khalil-Kleinfingerova úmluva pro rozvětvené kinematické řetězce

Ukažme nyní výhodu K-K úmluvy pro definování rozvětvených architektur. Pro ilustraci předpokládejme stejný případ jako na Obr. 2.5, však se zavedením souřadných systémů jako na Obr. 2.7. Transformaci s.s.  $F_{i-1}$  kloubu *Link i - 1* do s.s.  $F_i$  kloubu *Link i* již známe a je dána pouze 4 parametry  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $d_i$ ,  $\gamma_i$ , viz rovnice (2.28). Poznamenejme, že zmíněné s.s. jsou k sobě navzájem ve specifické poloze, učené normálou os  $z_{i-1}$  a  $z_i$ , a tedy postačují pouze 4 DoF k jejich vzájemnému polohování.

Definujme dále normálu os  $z_{i-1}$  a  $z_{i+1}$  a s ní související pomocný souřadný systém  ${}^1F_{i-1} = {}^1O_{i-1} - {}^1x_{i-1} {}^1y_{i-1} {}^1z_{i-1}$ , který má osu  ${}^1z_{i-1}$  totožnou s osou  $z_{i-1}$  a osu  ${}^1x_{i-1}$  ve směru definované normály.

Poloha s.s.  $F_{i-1}$  a  ${}^1F_{i-1}$  bude popsána pouze dvojicí parametrů:

$\gamma_{i+1} \dots$  úhel mezi osami  $x_{i-1}$  a  ${}^1x_{i-1}$  kolem osy  $z_{i-1}$

$b_{i+1} \dots$  vzdálenost mezi počátkem  $O_{i-1}$  a počátkem  ${}^1O_{i-1}$

Transformační vztah těchto s.s. je dán pak následujícím způsobem:

- Posuň s.s.  $F_{i-1}$  podél osy  $z_{i-1}$  o hodnotu  $b_{i+1}$  a otoč jej kolem osy  $z_{i-1}$  o úhel  $\gamma_{i+1} \Rightarrow$

dostáváme s.s.  ${}^1F_{i-1}$  Matice přechodu:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i-1}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{z}, b_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_{i+1}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\gamma_{i+1}} & -s_{\gamma_{i+1}} & 0 & 0 \\ s_{\gamma_{i+1}} & c_{\gamma_{i+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\gamma_{i+1}} & -s_{\gamma_{i+1}} & 0 & 0 \\ s_{\gamma_{i+1}} & c_{\gamma_{i+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nyní je zřejmé, že transformace mezi s.s.  ${}^1F_{i-1}$  a  $F_{i+1}$  již bude dána známou transformační maticí  $\mathbf{T}_{i+1}^{i-1}$  analogickou jako v rovnici (2.28) s parametry  $[\theta_{i+1}, d_{i+1}, \alpha_{i+1}, a_{i+1}]$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i+1}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_{i+1}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_{i+1}) &= \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_{i+1}} & -s_{\theta_{i+1}} & 0 & a_{i+1} \\ c_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & -s_{\alpha_{i+1}} & -s_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} \\ s_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & s_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

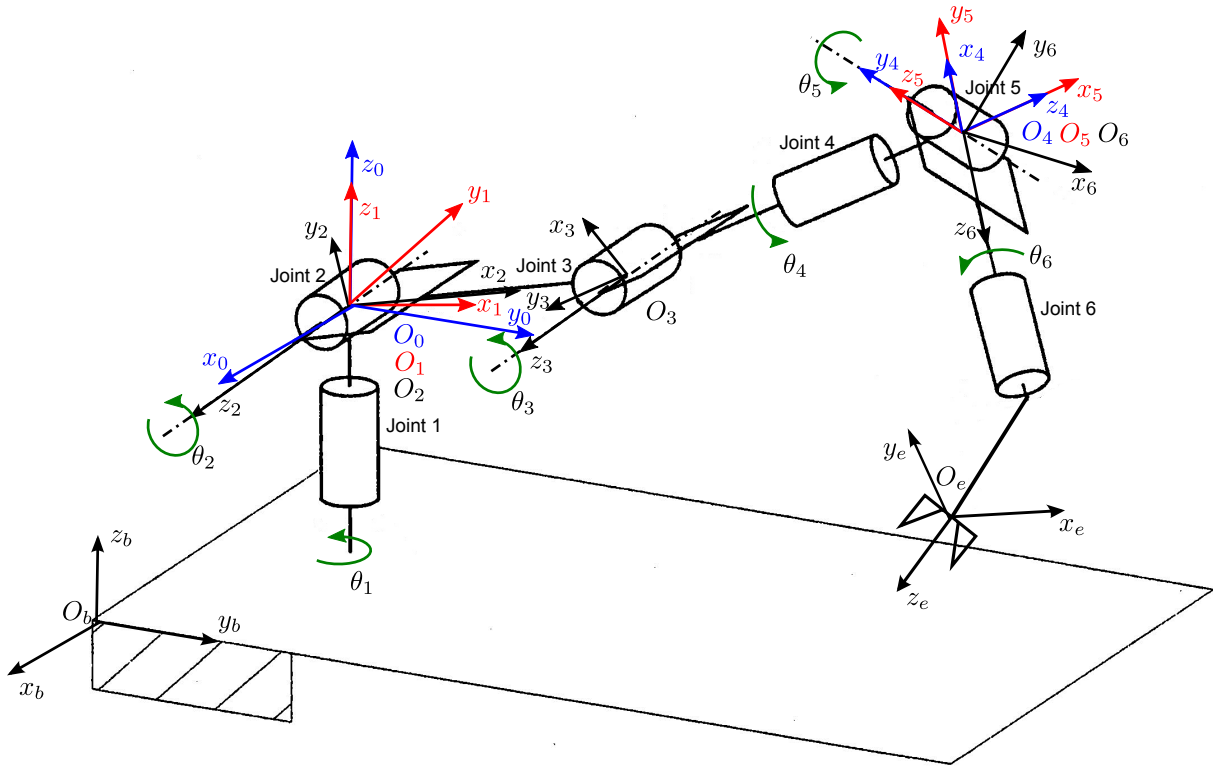
Výsledná matice přechodu ze s.s.  $F_{i-1}$  do s.s.  $F_{i+1}$  je dána:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i+1}^{i-1} &= \mathbf{T}_{i-1}^{i-1} \cdot \mathbf{T}_{i+1}^{i-1} = \\ &= \text{Trans}(\mathbf{z}, b_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_{i+1}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_{i+1}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_{i+1}) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\gamma_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} - s_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & -c_{\gamma_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} - s_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & s_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} & s_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} + c_{\gamma_{i+1}} a_{i+1} \\ s_{\gamma_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} + c_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & -s_{\gamma_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} + c_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & -c_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} & -c_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} + s_{\gamma_{i+1}} a_{i+1} \\ s_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & s_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} + b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Poznamenejme, že stejným způsobem lze odvodit transformační vztahy pro libovolný počet kloubů připojených na rameno *Link*  $i - 1$ . Je patrné, že K-K úmluvu jednoznačně definuje, narozdíl od D-H úmluvy, kloubové souřadnice každého kloubu.

### ★ Příklad 2.2 (K-K úmluva pro SM+SZ)

Obrázek 2.8 znázorňuje zavedení souřadných systémů pro jednotlivá ramena AM+SZ.



Obrázek 2.8: Zavedení souřadných systémů pro AM+SZ dle K-K úmluvy

Geometrické parametry manipulátoru (tzv. K-K parametry), jsou pak dány následující tabulkou:

Joint $i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	0	0
2	0	0	$\frac{\pi}{2}$
3	0	$l_2$	0
4	$l_3$	0	$\frac{\pi}{2}$
5	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
6	0	0	$\frac{\pi}{2}$

Tabulka 2.2: K-K parametry AM+SZ. Poznamenejme, že se nyní v popisu manipulátoru nevy-  
skytují parametry  $l_1$  respektive  $l_4$ . Bez újmy na obecnosti mohou být tyto parametry  
součástí konstantních transformačních matic  $T_0^b$  respektive  $T_e^n$ , viz Poznámka 2.2.



## 2.3 Polohové závislosti manipulátorů

Polohovými závislostmi rozumíme vztah mezi kloubovými  $\Theta$  a zobecněnými  $\mathbf{X}$  souřadnicemi manipulátoru a dělíme je na dva základní problémy:

- **přímý kinematický problém/úloha (PKÚ)**  
Tedy nalezení závislosti zobecněných souřadnic  $\mathbf{X}$  na kloubových souřadnicích  $\Theta$ . V cizojazyčné literatuře často nazývaný jako *direct/forward kinematics problem* [19], *direct geometric model* [40].
- **inverzní kinematický problém/úloha (IKÚ)**  
Tedy nalezení závislosti kloubových souřadnic  $\Theta$  na zobecněných souřadnicích  $\mathbf{X}$ . V cizojazyčné literatuře často nazývaný jako *inverse kinematic problem* [19], *inverse geometric problem* [40].

Pro lepší orientaci v textu zavedme následující značení pro kloubové souřadnice manipulátoru:

$$\Theta = [ \vartheta_1 \quad \dots \quad \vartheta_n ]^T \quad (2.32)$$

kde

$$\vartheta_i = \theta_i \text{ (Joint } i \text{ je typu } \mathbf{R}) \quad \text{a} \quad \vartheta_i = d_i \text{ (Joint } i \text{ je typu } \mathbf{P})$$

### 2.3.1 Přímý kinematický problém pro sériové manipulátory

Přímý kinematický problém pro sériové manipulátory nepředstavuje vážné komplikace a pro jeho řešení lze s výhodou využít úmluvy pro popis manipulátorů z Kapitoly 2.2, neboť každá transformační matice  $\mathbf{T}_i^{i-1}$  závisí přímo na aktivní kloubové souřadnici  $\vartheta_i$ .

Přímá kinematická úloha pro  $n$  aktivních kloubů sériového manipulátoru lze tak formulovat ve tvaru:

$$\mathbf{T}_n^0(\Theta) = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1}(\vartheta_i) \quad (2.33)$$

kde transformační matice  $\mathbf{T}_i^{i-1}(\vartheta_i)$  jsou dány dle použité úmluvy přímo rovnicemi (2.25) nebo (2.28).

Je tedy zřejmé, že přímá kinematická úloha pro sériové manipulátory má **vždy analytické řešení**.

#### ■ Poznámka 2.2 (Kompenzace polohy základny a koncového efektoru)

Z praktického hlediska je výhodné definovat ještě dva další s.s., a to s.s. základny (rámu) manipulátoru  $F_b = \{\mathbf{O}_b - \mathbf{x}_b \mathbf{y}_b \mathbf{z}_b\}$  a s.s. koncového efektoru  $F_e = \{\mathbf{O}_e - \mathbf{x}_e \mathbf{y}_e \mathbf{z}_e\}$ . Je zřejmé, že s.s. jsou nezávislé na poloze kloubů manipulátoru, a lze je tedy vyjádřit vzhledem k poloze s.s. prvního  $F_0$  a posledního  $F_n$  kloubu *konstantními* maticemi přechodu  $\mathbf{T}_0^b$  a  $\mathbf{T}_e^n$ , viz Obr. 2.9. V technické praxi tyto matice představují většinou kompenzaci umístění konkrétního manipulátoru na výrobní lince ( $\mathbf{T}_0^b$ ) či kompenzaci polohy pracovního nástroje na koncovém efektoru manipulátoru ( $\mathbf{T}_e^n$ ).

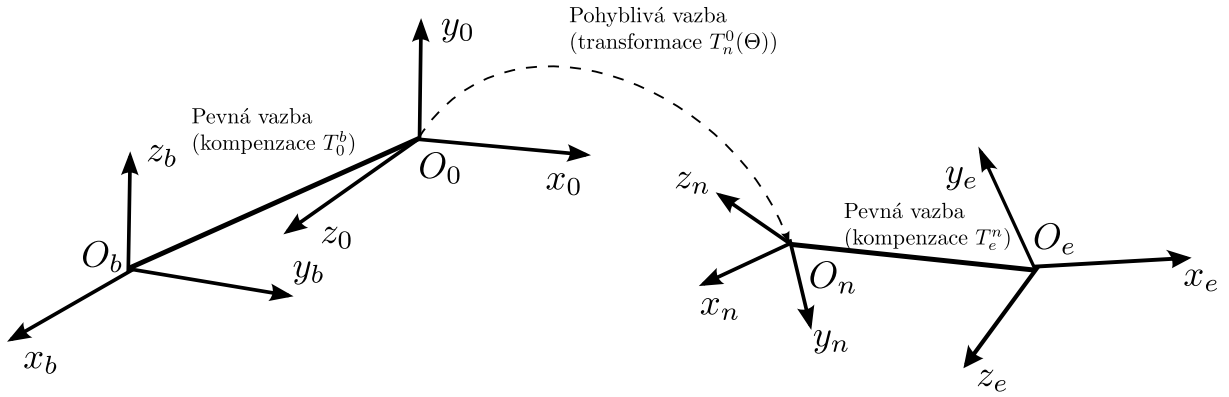
Výsledná matice přechodu  $\mathbf{T}_e^b(\Theta)$  závisející na poloze kloubových souřadnic  $\Theta$  respektující i výše uvedené kompenzace polohy bude mít tak následující tvar:

$$\mathbf{T}_e^b(\Theta) = \mathbf{T}_0^b \cdot \mathbf{T}_n^0 \cdot \mathbf{T}_e^n = \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}_e^b & & & \mathbf{r}_{b,e}^b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.34)$$

kde

$$\mathbf{R}_e^b = [ \mathbf{x}_e^b \quad \mathbf{y}_e^b \quad \mathbf{z}_e^b ] \quad (2.35)$$

je matice rotace a  $\mathbf{r}_{b,e}^b = \mathbf{O}_e^b - \mathbf{O}_b^b = \mathbf{O}_e^b$  je translační vektor s.s.  $F_e$  vzhledem k s.s.  $F_b$ .



Obrázek 2.9: Princip kompenzací manipulátoru

■

Poznamenejme, že vektor zobecněných souřadnic manipulátoru  $\mathbf{X}$  lze získat z transformační matice  $\mathbf{T}_e^b$  např., jako:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{R}_e^b \quad \mathbf{O}_e^b] \quad \text{matice rotace + translační vektor} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{X} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad (\mathbf{O}_e^b)^T]^T \quad \text{Eulerovy úhly (z } \mathbf{R}_e^b) + \text{translační vektor}$$

... atd.

Přímý kinematický problém lze tak s využitím rovnice (2.33) interpretovat jako nelineární vektorovou transformační funkci parametrizovanou návrhovými parametry manipulátoru  $\xi$  (v literatuře často označována jako *geometrická omezení manipulátoru*):

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}(\Theta), \quad \text{kde } \mathbf{G} = \mathbf{G}(\xi) \quad (2.37)$$

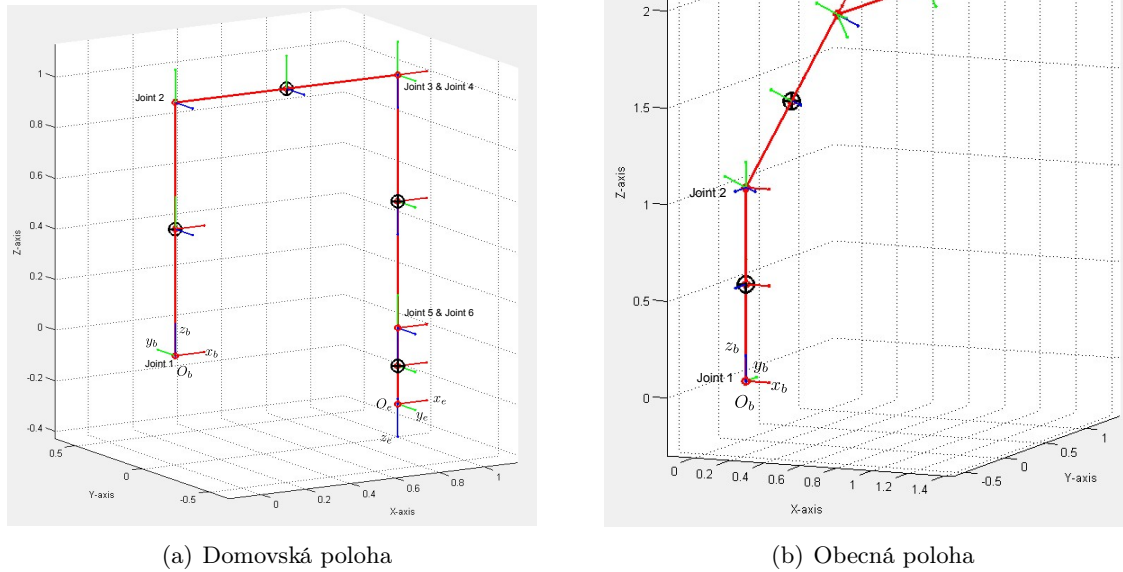
★ **Příklad 2.3 (Přímá kinematická úloha pro SM+SZ)**

Přímá kinematická úloha SM+SZ pro domovskou ( $\Theta = \mathbf{0}$ ) a obecnou polohu koncového efektoru manipulátoru (bez kompenzace  $\mathbf{T}_0^b = \mathbf{T}_e^6 = \mathbf{I}$ ):

$$\Theta = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \left[ \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2} \right]^T \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.51 & 0.33 & 0.79 & 1.28 \\ -0.20 & 0.94 & -0.27 & 0.96 \\ -0.84 & -0.02 & 0.55 & 2.29 \end{bmatrix}$$





Obrázek 2.10: Přímá kinematická úloha pro SM+SZ (model v SimMechanicsu)

★

### 2.3.2 Inverzní kinematický problém pro sériové manipulátory

Formulace inverzního kinematického problému plyne přímo z rovnice (2.37). Polohu kloubových souřadnic  $\Theta$  lze pro danou polohu koncového efektoru  $\mathbf{X}$  stanovit jako:

$$\Theta = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X}) \quad (2.38)$$

Nalezení inverze nelineární vektorové transformační funkce  $\mathbf{G}^{-1}$  je v obecném případě velmi složité, neboť ve funkci  $\mathbf{G}$  se, díky transformační matici  $\mathbf{T}_e^b$ , vyskytují součty násobků a mocnin členů  $\sin \vartheta_i$ ,  $\cos \vartheta_i$ .

Uvažujme obecný neredundantní sériový prostorový manipulátor se všemi 6 stupni volnosti koncového efektoru, a tedy právě 6 kloubovými souřadnicemi  $\Theta = [\vartheta_1 \ \dots \ \vartheta_6]^T$ . Jelikož zobecněný vektor souřadnic  $\mathbf{X}$  má v prostoru maximálně 6 nezávislých proměnných (např. 3 Eulerovy úhly a vektor translace koncového efektoru) je zřejmé, že řešení inverzní kinematické úlohy pro obecný neredundantní manipulátor vede na soustavu 6 nelineárních rovnic pro 6 neznámých.

Metody pro nalezení řešení inverzní kinematické úlohy pro sériové manipulátory lze rozdělit v podstatě do následujících skupin, které budou stručně zmíněny v následujících kapitolách:

- Přímé analytické řešení jednoduchých architektur manipulátorů
- Specializované metody pro řešení konkrétních variant architektur manipulátorů (omezené uspořádání kloubů daných typů)
- Metody pro řešení obecných architektur manipulátorů
- Numerické gradientní metody, viz Kapitola 4

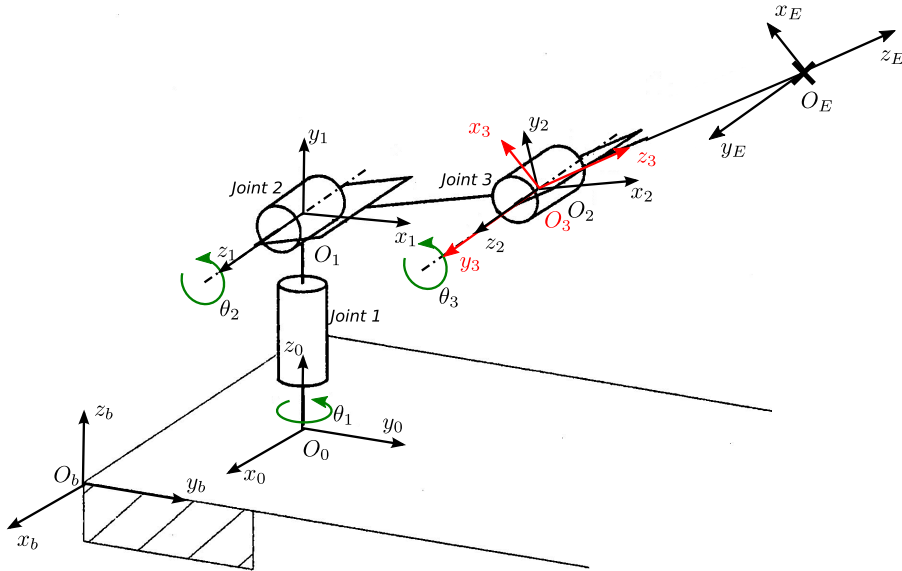
## 2.3.2.1 Přímé analytické řešení jednoduchých architektur manipulátorů

Využívá se zejména pro jednoduché konstrukce manipulátorů, kde je možné s určitou dávkou zkušeností a matematické intuice relativně snadno nalézt inverzní kinematickou transformaci  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X})$ . Metody přímého analytického řešení bývají aplikovány na jednoduché planární či prostorové manipulátory, viz Příklad 2.4, 2.5. Velmi často se můžeme s těmito metodami setkat při řešení inverzní kinematické úlohy pro paralelní manipulátory s jednoduchými kinematickými řetězci, kde každý kinematický řetězec je v podstatě samostatný sériový manipulátor, viz Příklad 2.6.

## ★ Příklad 2.4 (Translační část AM+SZ z Obrázku 1.7)

Zobecněné souřadnice translační části AM+SZ definujeme jako (předpokládejme  $\mathbf{T}_0^b = \mathbf{I} \Rightarrow F_0 = F_b$ , žádná kompenzace polohy základny manipulátoru):

$$\mathbf{X}_{tran} = \mathbf{r}_{0,E}^0 = \mathbf{O}_E^0 = \begin{bmatrix} O_{E_x}^0 & O_{E_y}^0 & O_{E_z}^0 \end{bmatrix}^T$$



Obrázek 2.11: Translační část AM+SZ (zavedení s.s. dle D-H úmluvy, viz Příklad 2.1)

Všimněme si, že řešení IKÚ pro translační část AM+SZ, lze rozdělit na dvě fáze.

Pro kloubovou souřadnici  $\theta_1$  budou díky umístění kloubů zřejmě existovat dvě řešení ve tvaru:

$$\theta_1 = \text{atan2}(O_{E_x}^0, O_{E_y}^0) \quad (2.39)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(O_{E_x}^0, O_{E_y}^0) + \pi \quad (2.40)$$

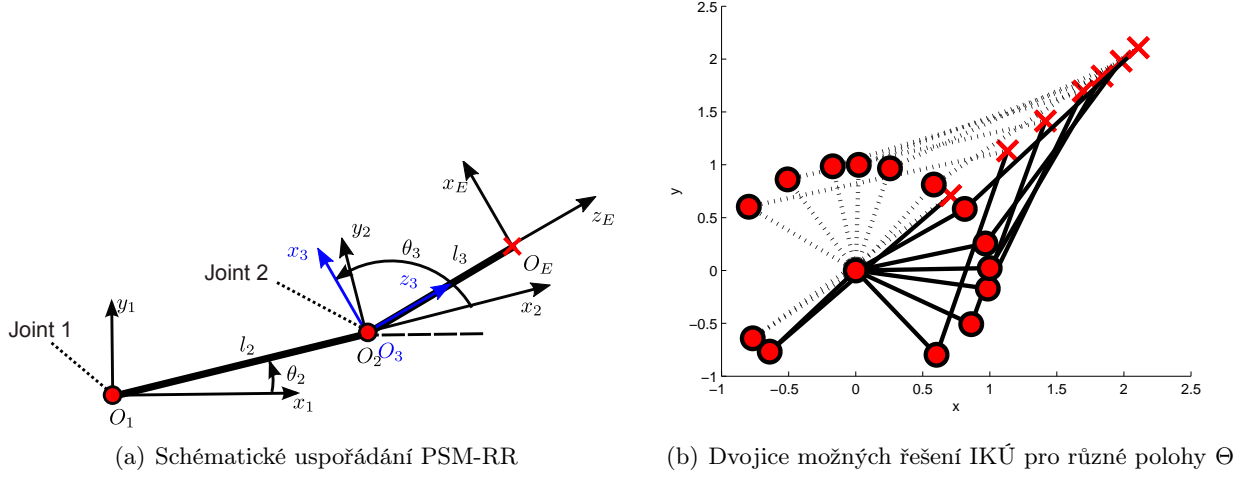
Tím jsme problém převedli na řešení IKÚ planárního sériového manipulátoru typu RR (PSM-RR) se dvěma DoF, jehož schématické uspořádání je znázorněno na Obrázku 2.12(a). Zobecněné souřadnice PSM-RR definujeme jako:

$$\mathbf{X}_{psm} = \mathbf{O}_E^1 = \begin{bmatrix} O_{E_x}^1 & O_{E_y}^1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

kde  $\mathbf{X}_{psm}$  lze díky znalosti kloubové souřadnice  $\theta_1$  získat z  $\mathbf{X}_{tran}$  jako

$$\mathbf{O}_E^1 = (\mathbf{T}_1^0(\theta_1))^{-1} \cdot \mathbf{O}_E^0$$

kde matice přechodu  $\mathbf{T}_1^0(\theta_1)$  je dána rovnicí (2.25) a hodnotami z Tabulky 2.1.



Obrázek 2.12: IKÚ pro planární sériový manipulátor typu RR

Řešení PKÚ pro PSM-RR lze psát:

$$\mathbf{T}_E^1(\Theta) = \prod_{i=2}^3 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i) \cdot \mathbf{T}_E^3 = \begin{bmatrix} * & * & * & l_3 s(\theta_2 + \theta_3) + l_2 c\theta_2 \\ * & * & * & -l_3 c(\theta_2 + \theta_3) + l_2 s\theta_2 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

kde

$$\mathbf{T}_E^3 = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \mathbf{I} & & 0 \\ & & & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je konstantní kompenzační matice polohy koncového efektoru a matice přechodu  $\mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i)$  jsou opět určeny rovnicí (2.25) a hodnotami z Tabulky 2.1.

Poloha koncového efektoru PSM-RR je tedy dána jako:

$$\mathbf{X}_{psm} = \mathbf{T}_E^1[1 : 3, 3] = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{E_x}^1 \\ \mathbf{O}_{E_y}^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 s(\theta_2 + \theta_3) + l_2 c\theta_2 \\ -l_3 c(\theta_2 + \theta_3) + l_2 s\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IKÚ pro PSM-RR lze potom řešit následovně:

Umocněním a sečtením prvků  $\mathbf{O}_{E_x}^1$  a  $\mathbf{O}_{E_y}^1$  dostáváme, s využitím součtových goniometrických vzorců, hodnotu kloubové souřadnice  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{O}_{E_x}^1)^2 + (\mathbf{O}_{E_y}^1)^2 &= l_3^2 + l_2^2 + 2l_2 l_3 s\theta_3 \\ s_{\theta_3} &= \frac{(\mathbf{O}_{E_x}^1)^2 + (\mathbf{O}_{E_y}^1)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$s_{\theta_3}^2 + c_{\theta_3}^2 = 1 \Rightarrow c_{\theta_3} = \pm \sqrt{1 - s_{\theta_3}^2} \quad (2.43)$$

$$\theta_3 = \text{atan2}\left(\frac{s_{\theta_3}}{c_{\theta_3}}\right) \quad (2.44)$$

Řešením soustavy rovnic, opět s využitím součtových goniometrických vzorců,

$$\begin{aligned} O_{E_x}^1 &= l_3 c_{(\theta_2+\theta_3)} + l_2 c_{\theta_2} \\ O_{E_y}^1 &= -l_3 s_{(\theta_2+\theta_3)} + l_2 s_{\theta_2} \end{aligned}$$

pro neznámé  $s_{\theta_2}$ ,  $c_{\theta_2}$ , dostáváme hodnotu kloubové souřadnice  $\theta_2$ :

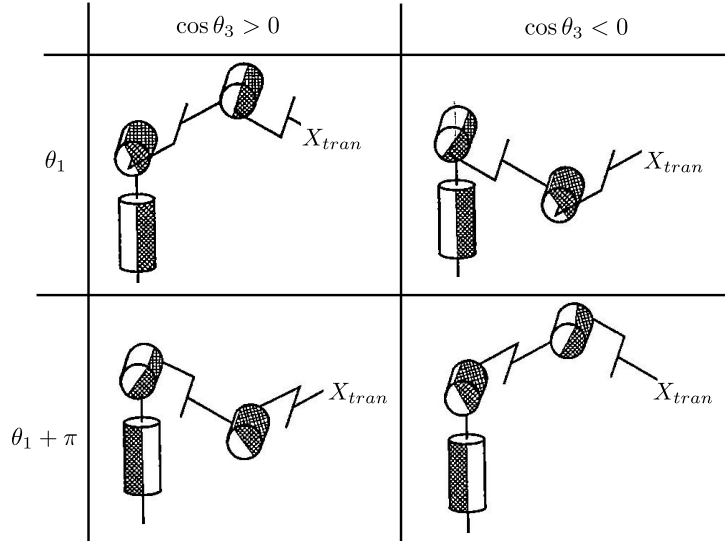
$$\begin{aligned} s_{\theta_2} &= \frac{l_3 c_{\theta_3} O_{E_x}^1 + (l_2 + l_3 s_{\theta_3}) O_{E_y}^1}{(O_{E_x}^1)^2 + (O_{E_y}^1)^2} \\ c_{\theta_2} &= \frac{(l_2 + l_3 s_{\theta_3}) O_{E_x}^1 - l_3 c_{\theta_3} O_{E_y}^1}{(O_{E_x}^1)^2 + (O_{E_y}^1)^2} \\ \theta_2 &= \text{atan2} \left( \frac{s_{\theta_2}}{c_{\theta_2}} \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ze vztahu (2.43) je zřejmé, že IKÚ pro PSM-RR má dvě řešení, viz Obrázek 2.12(b). Poznamenejme dále, že řešení IKÚ existuje pouze za předpokladu  $-1 \leq s_{\theta_3} \leq 1$ , viz rovnice (2.43). Pro možné umístění koncového efektoru tak platí (po jednoduchých úpravách) nerovnost,

$$l_2 - l_3 \leq \|X_{psm}\| \leq l_2 + l_3$$

kteřá definuje pracovní prostor manipulátoru. Lze ukázat, že se manipulátor na hranicích pracovního prostoru nalézá v tzv. singulárních polohách, více v Kapitole 3.4.

Je tedy zřejmé, že IKÚ pro translační část AM+SZ má celkem 4 různá řešení (dvojice řešení pro kloubovou souřadnici  $\theta_1$  a dvojice řešení pro PSM-RR), viz Obrázek 2.13.



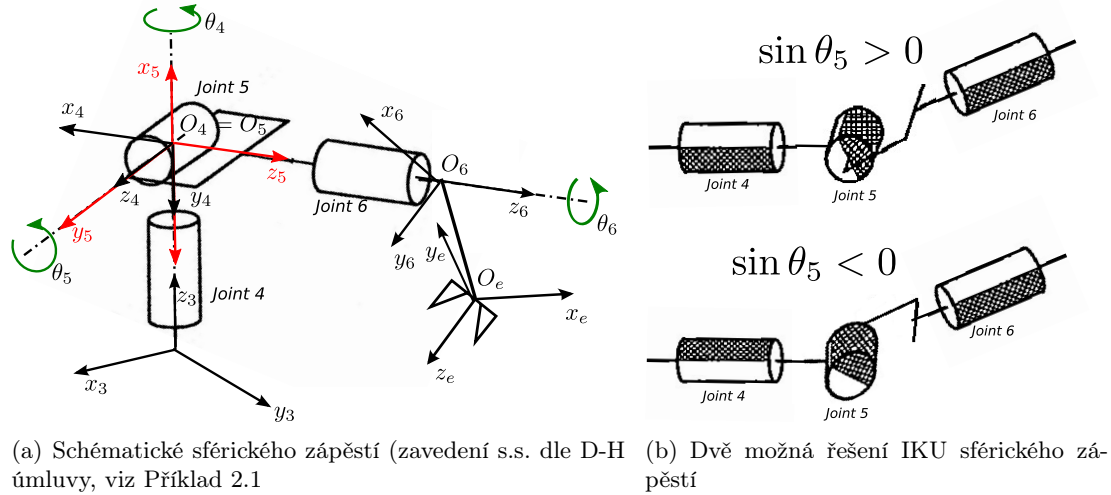
Obrázek 2.13: Možná řešení IKÚ pro translační část AM+SZ

★

★ **Příklad 2.5 (Sférické zápěstí AM+SZ z Obrázku 1.7)**

Zobecněné souřadnice sférického zápěstí AM+SZ definujeme jako (předpokládejme  $T_e^6 = I \Rightarrow F_6 = F_e$ , žádná kompenzace polohy koncového efektoru manipulátoru):

$$X_{sz} = R_6^3 = \begin{bmatrix} x_6^3 & y_6^3 & z_6^3 \end{bmatrix}$$



Obrázek 2.14: IKU sférické zápěstí

Řešení PKU pro sférické zápěstí lze psát:

$$\mathbf{T}_6^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_6^3 & \mathbf{O}_6^3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \prod_{i=4}^6 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i) \quad (2.46)$$

kde

$$\mathbf{R}_6^3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} - s_{\theta_4}s_{\theta_6} & -c_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} - s_{\theta_4}c_{\theta_6} & c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ s_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} + c_{\theta_4}s_{\theta_6} & -s_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} + c_{\theta_4}c_{\theta_6} & s_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ -s_{\theta_5}c_{\theta_6} & s_{\theta_5}s_{\theta_6} & c_{\theta_5} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

a matice přechodu  $\mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i)$  jsou opět určeny rovnicí (2.25) a hodnotami z Tabulky 2.1.

Ze soustavy rovnic (2.47) lze odvodit, že se IKU pro sférické zápěstí rozpadá na dvě řešení, viz Obrázek 2.14(b).

Umocněním a sečtením prvků  $a_x^3$  a  $a_y^3$  dostáváme:

$$(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2 = s_{\theta_5}^2 \Rightarrow s_{\theta_5} = \pm \sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}$$

$$1. \text{ Pro } s_{\theta_5} = +\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2} \geq 0 \Rightarrow \theta_5 \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(s_{\theta_4}s_{\theta_5}, c_{\theta_4}s_{\theta_5}) = \text{atan2}(s_{\theta_4}, c_{\theta_4}) = \text{atan2}(a_y^3, a_x^3) \quad (2.48)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(s_{\theta_5}, c_{\theta_5}) = \text{atan2}(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(s_{\theta_5}s_{\theta_6}, -(-s_{\theta_5}c_{\theta_6})) = \text{atan2}(s_{\theta_6}, c_{\theta_6}) = \text{atan2}(s_z^3, -n_z^3)$$

$$2. \text{ Pro } s_{\theta_5} = -\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2} \leq 0 \Rightarrow \theta_5 \in \langle -\pi, 0 \rangle$$

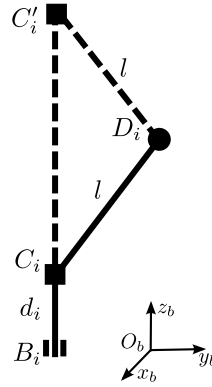
$$\theta_4 = \text{atan2}(s_{\theta_4}(-s_{\theta_5}), c_{\theta_4}(-s_{\theta_5})) = \text{atan2}(s_{\theta_4}, c_{\theta_4}) = \text{atan2}(-a_y^3, -a_x^3) \quad (2.49)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(s_{\theta_5}, c_{\theta_5}) = \text{atan2}(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(-s_{\theta_5}s_{\theta_6}, -(s_{\theta_5}c_{\theta_6})) = \text{atan2}(s_{\theta_6}, c_{\theta_6}) = \text{atan2}(-s_z^3, n_z^3)$$


**★ Příklad 2.6 (Paralelní sférické zápěstí z Obrázku 1.9)**

Jak již bylo zmíněno v kapitole 1.4.3, paralelní sférické zápěstí je vybaveno třemi aktivními kinematickými řetězci (v podstatě sériovými manipulátory), jejichž IKÚ lze snadno řešit následujícím postupem.



Obrázek 2.15: Dvě možná řešení IKÚ pro kinematický řetězec PSZ

Předpokládejme, že pro jeden kinematický řetězec, viz Obrázek 2.15 známe polohu jeho koncového efektoru:

$$\mathbf{X}_i = \overrightarrow{B_i D_i^b} = [bd_{ix} \quad bd_{iy} \quad bd_{iz}]^T \quad (2.50)$$

Jedinou hledanou kloubovou souřadnicí je pak pouze délka vysunutí lineárního aktuátoru  $d_i$ , neboť zbývající 2 kloubové souřadnice (úhly natočení pro kloub typu U) jsou pasivní a nelze je tudíž jakkoliv řídit. Vektor  $\overrightarrow{C_i D_i^b}$  konstantní délky  $l$  lze pak vyjádřit jako:

$$\overrightarrow{C_i D_i^b} = [bd_{ix} \quad bd_{iy} \quad bd_{iz} - d_i]^T \quad (2.51)$$

A tedy:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{C_i D_i^b}\|^2 &= bd_{ix}^2 + bd_{iy}^2 + (bd_{iz} - d_i)^2 = l^2 \\ (bd_{iz} - d_i)^2 &= l^2 - bd_{ix}^2 - bd_{iy}^2 \\ bd_{iz} - d_i &= \pm \sqrt{l^2 - bd_{ix}^2 - bd_{iy}^2} \\ d_i &= bd_{iz} \mp \sqrt{l^2 - bd_{ix}^2 - bd_{iy}^2} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Z rovnice (2.52) je zřejmé, že IKÚ pro každý kinematický řetězec PSZ má dvě řešení za podmínky  $l^2 > bd_{ix}^2 + bd_{iy}^2$ . ★

Systematické řešení IKÚ pro jednoduché manipulátory, pro které platí, že většina D-H respektive K-K parametrů  $a_i$ ,  $d_i$  jsou nulové a  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$  jsou nulové či rovné  $\pm \frac{\pi}{2}$ , popsal Richard P. Paul, viz [33]. Jeho metoda v podstatě zobecňuje řešení IKÚ demonstrované v Příkladech 2.4 a 2.5 a v literatuře je často nazývána jako *Paulova metoda (Paul method)*. Metoda je založena na myšlence postupného vyjadřování kloubových souřadnic  $\vartheta_i$  z celkového kinematického popisu manipulátoru daného rovnicí PKÚ, následujícím postupem:

- Výpočet matice přechodu  $\mathbf{T}_n^0$  ze zobecněných souřadnic  $\mathbf{X}$ , viz Kapitola 2.3.1. Získáváme tak soustavu 12 nelineárních rovnic pro  $n$  neznámých (2.33):

$$\mathbf{T}_n^0 = \mathbf{T}_1^0(\vartheta_1) \cdot \mathbf{T}_2^1(\vartheta_2) \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_n^{n-1} \quad (2.53)$$

- Přenásobením rovnice (2.53) zleva maticí přechodu  $(\mathbf{T}_1^0(\vartheta_1))^{-1}$  dostáváme:

$$\mathbf{T}_0^1(\vartheta_1) \cdot \mathbf{T}_n^0 = \mathbf{T}_2^1(\vartheta_2) \cdot \mathbf{T}_3^2(\vartheta_3) \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_n^{n-1}(\vartheta_n) \quad (2.54)$$

Levá strana rovnice (2.54) je pak závislá pouze na kloubové souřadnici  $\vartheta_1$ , kterou se pokusíme vypočítat.

- Přenásobením rovnice (2.54) zleva maticí přechodu  $(\mathbf{T}_2^1(\vartheta_2))^{-1}$  dostáváme:

$$\mathbf{T}_1^2(\vartheta_2) \cdot \mathbf{T}_0^1(\vartheta_1) \cdot \mathbf{T}_n^0 = \mathbf{T}_3^2(\vartheta_3) \cdot \mathbf{T}_4^3(\vartheta_3) \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_n^{n-1}(\vartheta_n) \quad (2.55)$$

Levá strana rovnice (2.55) je pak závislá pouze na kloubové souřadnici  $\vartheta_2$  ( $\vartheta_1$  již známe), kterou se pokusíme vypočítat.

- Analogickým způsobem se pokusíme postupně dopočítat všechny zbývající kloubové souřadnice  $\vartheta_i$ ,  $i = 3 \dots n$

Bylo experimentálně ukázáno, že pro celou řadu průmyslově používaných manipulátorů degeneruje IKÚ pomocí Paulovy metody na řešení 8 základních typů rovnic uvedených v Tabulce 2.3, jejichž analytické řešení je známé (zde jej však dále neuvádíme a lze nalézt společně s konkrétním příkladem (řešení IKÚ pro AM+SZ) např. v [40]).

Typ 1	$X \cdot d_i = Y$
Typ 2	$X \cdot s_{\theta_i} + Y \cdot c_{\theta_i} = Z$
Typ 3	$X_1 \cdot s_{\theta_i} + Y_1 \cdot c_{\theta_i} = Z_1$ $X_2 \cdot s_{\theta_i} + Y_2 \cdot c_{\theta_i} = Z_2$
Typ 4	$X_1 \cdot d_j \cdot s_{\theta_i} = Y_1$ $X_2 \cdot d_j \cdot c_{\theta_i} = Y_2$
Typ 5	$X_1 \cdot s_{\theta_i} = Y_1 + Z_1 \cdot d_j$ $X_2 \cdot c_{\theta_i} = Y_2 + Z_2 \cdot d_j$
Typ 6	$W \cdot s_{\theta_j} = X \cdot c_{\theta_i} + Y \cdot s_{\theta_i} + Z_1$ $W \cdot c_{\theta_j} = X \cdot c_{\theta_i} - Y \cdot s_{\theta_i} + Z_2$
Typ 7	$W_1 \cdot c_{\theta_j} + W_2 \cdot s_{\theta_j} = X \cdot c_{\theta_i} + Y \cdot s_{\theta_i} + Z_1$ $W_1 \cdot s_{\theta_j} - W_2 \cdot c_{\theta_j} = X \cdot s_{\theta_i} - Y \cdot c_{\theta_i} + Z_2$
Typ 8	$X \cdot c_{\theta_i} + Y \cdot c_{(\theta_i+\theta_j)} = Z_1$ $X \cdot s_{\theta_i} + Y \cdot s_{(\theta_i+\theta_j)} = Z_2$

Tabulka 2.3: Typické rovnice řešené při použití Paulovy metody, kde  $\theta_i$  resp.  $d_i$  jsou kloubové souřadnice kloubu typu **R** resp. **P** a  $X_i, Y_i, Z_i, W_i$  jsou reálné koeficienty závislé na D-H či K-K geometrických parametrech manipulátoru

### 2.3.2.2 Specializované metody pro řešení konkrétních variant architektur manipulátorů

V průmyslových aplikacích se velmi často vyskytují sériové manipulátory, jejichž architektura je navržena takovým způsobem, aby byl výpočet IKÚ co možná nejvíce usnadněn. Jedná se zejména o případy, kdy je možné daný manipulátor vhodně dekomponovat na více funkčních celků a IKÚ řešit pro každý celek samostatně (např. prostřednictvím přímých analytických metod, viz kapitola 2.3.2.1). Vypustíme-li jednoduché pravoúhlé (portálové) manipulátory, pro které je IKÚ triviální, drtivou většinu manipulátorů v průmyslu tvoří právě antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím, viz kapitola 1.4.1.

#### ★ Příklad 2.7 (IKÚ AM+SZ z Obrázku 1.7)

Nechť

$$\mathbf{X} = [ \mathbf{x}_e^b \quad \mathbf{y}_e^b \quad \mathbf{z}_e^b \quad \mathbf{O}_e^b ] \quad (2.56)$$

jsou zobecněné souřadnice manipulátoru se zavedenými s.s. dle D-H úmluvy, viz Příklad 2.1.

Je zřejmé, že směrové vektory os a počátek s.s.  $F_6$  vzhledem k s.s.  $F_0$  lze získat z  $\mathbf{X}$  pomocí kompenzačních matic  $\mathbf{T}_0^b$  a  $\mathbf{T}_e^6$  jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_6^0 & \mathbf{y}_6^0 & \mathbf{z}_6^0 & \mathbf{O}_6^0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{T}_0^b)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e^b & \mathbf{y}_e^b & \mathbf{z}_e^b & \mathbf{O}_e^b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{T}_e^6)^{-1} \quad (2.57)$$

Zobecněné souřadnice translační části manipulátoru z Příkladu 2.4 lze potom vypočítat jako:

$$\mathbf{X}_{tran} = \mathbf{O}_E^0 = \mathbf{O}_4^0 = \mathbf{O}_5^0 = \mathbf{O}_6^0 - l_4 \cdot \mathbf{z}_6^0 \quad (2.58)$$

Získáváme tak řešení pro kloubové souřadnice  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  a  $\theta_3$ .

Zobecněné souřadnice sférického zápěstí z Příkladu 2.5 nyní lze spočítat jako:

$$\mathbf{X}_{sz} = \mathbf{R}_6^3 = \underbrace{(\mathbf{T}_3^0(\theta_1, \theta_2, \theta_3)[1:3, 1:3])^T}_{\mathbf{R}_0^3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_6^0 & \mathbf{y}_6^0 & \mathbf{z}_6^0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_6^0} \quad (2.59)$$

kde

$$\mathbf{T}_3^0(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \prod_{i=1}^3 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i)$$

a matice přechodu  $\mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i)$  jsou určeny rovnicí (2.25) a hodnotami z Tabulky 2.1.

Získáváme tak řešení pro zbývající kloubové souřadnice  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  a  $\theta_6$ . IKÚ pro AM+SZ má tedy celkem 8 různých řešení (4 pro translační část krát 2 pro sférické zápěstí). ★

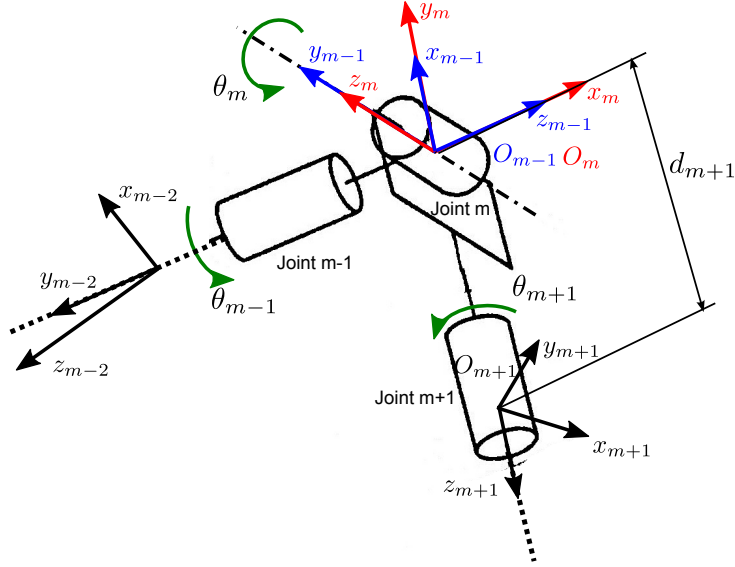
Metodu řešení IKÚ AM+SZ pomocí vhodné dekompozice na translační část (obecně řešení polohové rovnice) a sférické zápěstí (obecně řešené rotační rovnice) ukázanou v Příkladu 2.7 lze zobecnit pro dva základní typy architektury manipulátorů se 6 DoF, viz [16]. Uveďme dále jen nástin řešení, podrobnější popis lze nalézt například v [40].

### Manipulátor obsahující sférické zápěstí v libovolné části kinematického řetězce

**Možné varianty kinematického řetězce:**

**XXX(RRR)**, **X(RRR)XX**, **XX(RRR)X**, **XXX(RRR)**, kde **(RRR)** označuje sférické zápěstí a **X** označuje kloub typu **P** nebo **R**.





Obrázek 2.16: Sférické zápěstí (obecný případ)

**Nástin metody:**

Předpokládáme-li popis s.s. manipulátoru pomocí K-K úmluvy, viz Příklad 2.2, trojice po sobě jdoucích kloubů *Joint m - 1*, *Joint m* a *Joint m + 1*, kde  $2 \leq m \leq 5$ , tvoří sférické zápěstí, pokud pro K-K parametry platí následující, viz Obrázek 2.16:

$$\begin{aligned} a_m &= d_m = a_{m+1} = 0 \\ s_{\alpha_m} &\neq 0 \\ s_{\alpha_{m+1}} &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Je zřejmé, že počátky s.s.  $F_{m-1}$  a  $F_m$  jsou shodné a nezávislé na kloubových souřadnicích sférického zápěstí  $\theta_{m-1}$ ,  $\theta_m$ ,  $\theta_{m+1}$ . Polohu těchto počátků můžeme tedy vyjádřit vzhledem k s.s.  $F_{m-2}$  jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m-1}^{m-2} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, -d_{m+1}) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ -d_{m-1}s_{\alpha_{m-1}} \\ d_{m-1}c_{\alpha_{m-1}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Rovnice (2.33) lze tedy psát s využitím rovnice (2.61) jako (matice přechodu  $\mathbf{T}_6^0$  lze opět vypočítat ze zobecněných souřadnic manipulátoru):

$$\mathbf{T}_{m-2}^0 \cdot \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot \mathbf{T}_6^{m+1} = \mathbf{T}_6^0 \quad (2.62)$$

$$\mathbf{T}_{m-2}^0 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m-1}^{m-2} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_6^0 \cdot \mathbf{T}_{m+1}^6 \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, -d_{m+1}) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Rovnice (2.63) se nazývá *polohovou rovnicí*, neboť závisí pouze na kloubových souřadnicích, které nepřísluší sférickému zápěstí  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-2}$  a  $\vartheta_{m+1}, \dots, \vartheta_6$ . Zřejmě tedy platí:

$$\mathbf{T}_{m-2}^0 = \mathbf{T}_{m-2}^0(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-2}) \quad \text{a} \quad \mathbf{T}_{m+1}^6 = \mathbf{T}_{m+1}^6(\vartheta_{m+1}, \dots, \vartheta_6)$$

kde  $\vartheta_i$  je kloubová souřadnice kloubu typu **P** respektive **R**, viz (2.32).

Lze ukázat, že rovnice (2.63) vede na řešení 6 typů rovnic, jejichž analytické řešení je opět známé. První tři rovnice jsou shodné s rovnicemi typu 1, 2 a 3 z Tabulky 2.3 a zbývající tři typy rovnic jsou uvedeny v Tabulce 2.4. Počet možných řešení je roven čtyřem.

Typ 9	$a_2 d_i^2 + a_1 d_i + a_0 = 0$
Typ 10	$a_4 d_i^4 + a_3 d_i^3 + a_2 d_i^2 + a_1 d_i + a_0 = 0$
Typ 11	$a_4 s_{\theta_i}^2 + a_3 c_{\theta_i} s_{\theta_i} + a_2 c_{\theta_i} + a_1 s_{\theta_i} + a_0 = 0$

Tabulka 2.4: Další typické rovnice použité při řešení IKÚ manipulátoru se sférickým zápěstím, kde  $\theta_i$  resp.  $d_i$  jsou kloubové souřadnice kloubu typu  $\mathbf{R}$  resp.  $\mathbf{P}$  a  $a_i$  jsou reálné koeficienty závislé na K-K geometrických parametrech manipulátoru

Z rovnice (2.62) je možné vzhledem k (2.10) odvodit závislosti pro rotační matice jednotlivých souřadných systémů:

$$\mathbf{R}_{m-2}^0 \cdot \mathbf{R}_{m+1}^{m-2} \cdot \mathbf{R}_6^{m+1} = \mathbf{R}_6^0 \quad (2.64)$$

Rovnice (2.64) se nazývá *rotační rovnici*, neboť, pro nyní již známé hodnoty kloubových souřadnic nepříslušejícím sférickému zápěstí (matice  $\mathbf{R}_{m-2}^0$  a  $\mathbf{R}_6^{m+1}$  jsou konstantní matice), závisí pouze na kloubových souřadnicích sférického zápěstí:

$$\mathbf{R}_{m+1}^{m-2} = \mathbf{R}_{m+1}^{m-2}(\theta_{m-1}, \theta_m, \theta_{m+1})$$

Lze ukázat, že rovnice (2.64) vede na řešení rovnic typu 2 a 3 z Tabulky 2.3. Počet možných řešení je roven dvěma.

### Manipulátor obsahující 3 klouby typu $\mathbf{P}$ a 3 klouby typu $\mathbf{R}$ v libovolném uspořádání

#### Možné varianty kinematického řetězce:

PPRRRR, PPRPRR, ... + dalších 18 kombinací.

#### Nástin metody:

Označme klouby typu  $\mathbf{R}$  jako *Joint i*, *Joint j* a *Joint k* a klouby typu  $\mathbf{P}$  jako *Joint i'*, *Joint j'* a *Joint k'*.

Je zřejmé, že klouby typu  $\mathbf{P}$  nemohou jakkoliv ovlivnit orientaci koncového efektoru manipulátoru. *Rotační rovnici* můžeme tedy odvodit z rovnice (2.33) opět s využitím (2.10) jako:

$$\mathbf{R}_i^0(\theta_i) \cdot \mathbf{R}_j^i(\theta_j) \cdot \mathbf{R}_6^j(\theta_k) = \mathbf{R}_6^0 \quad (2.65)$$

Lze ukázat, že rovnice (2.65) vede na podobné řešení jako *rotační rovnice* (2.64). Stejně tak i počet řešení je roven dvěma.

*Polohovou rovnici* lze psát jako:

$$\mathbf{T}_i^0(d_{i'}) \cdot \mathbf{T}_j^i(d_{j'}) \cdot \mathbf{T}_6^k = \mathbf{T}_6^0 \quad (2.66)$$

Vzhledem k tomu, že matice přechodu v rovnici (2.66) jsou závislé pouze na kloubových souřadnicích kloubů typu  $\mathbf{P}$  (kloubové souřadnice  $\theta_i, \theta_j, \theta_k$  kloubů typu  $\mathbf{R}$  známe z řešení rovnice (2.65)), nevyskytují se v této polohové rovnici žádné členy typu  $\sin, \cos$  a rovnice je tak soustavou lineárních rovnic v neznámých  $d_{i'}, d_{j'}, d_{k'}$ .

### 2.3.2.3 Metody pro řešení obecných architektur manipulátorů

Pod obecnou architekturou manipulátoru se 6 Dof rozumíme manipulátor se 6 klouby typu **P** respektive **R** s libovolně orientovanými osami translace respektive rotace. D-H či K-K geometrické parametry mohou tedy nabývat libovolných reálných hodnot. Dnes nejznámější obecnou metodou pro řešení IKÚ takových manipulátorů je *Raghavan-Rothova metoda* (*Raghavan-Roth method*), viz [32].

**Nástin metody (pro sériový manipulátor se 6 klouby typu R):**

Rovnice (2.33) lze přepsat následovně:

$$\mathbf{T}_1^0(\theta_1) \cdot \mathbf{T}_2^1(\theta_2) \cdot \mathbf{T}_3^2(\theta_3) \cdot \mathbf{T}_4^3(\theta_4) = \mathbf{T}_6^0 \cdot \mathbf{T}_5^6(\theta_6) \cdot \mathbf{T}_4^5(\theta_5) \quad (2.67)$$

Prvky matice na pravé straně rovnice (2.67) jsou funkcemi pouze kloubových souřadnic  $\theta_5, \theta_6$  a prvky na levé straně kloubových souřadnic  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ , což výrazně usnadňuje další symbolické výpočty. Lze ukázat, že porovnáním vhodných příslušejících si prvků matic na levé a pravé straně, rozšířením soustavy rovnic o přídatné rovnice a následném zjednodušení, dostáváme soustavu rovnic, již nezávislou na  $\theta_4$  (formálně shodnou s lineární soustavou rovnic):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_1 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} \quad (2.68)$$

kde

$$\mathbf{X}_1 = [s_{\theta_2} s_{\theta_3} \quad s_{\theta_2} c_{\theta_3} \quad c_{\theta_2} s_{\theta_3} \quad c_{\theta_2} c_{\theta_3} \quad s_{\theta_2} \quad c_{\theta_2} \quad s_{\theta_3} \quad c_{\theta_3} \quad 1]^T$$

$$\mathbf{Y} = [s_{\theta_5} s_{\theta_6} \quad s_{\theta_5} c_{\theta_6} \quad c_{\theta_5} s_{\theta_6} \quad c_{\theta_5} c_{\theta_6} \quad s_{\theta_5} \quad c_{\theta_5} \quad s_{\theta_6} \quad c_{\theta_6}]^T$$

$\mathbf{A}$  je matice  $[14 \times 9]$  s prvky danými lineární kombinací funkcí  $s_{\theta_1}, c_{\theta_1}$

$\mathbf{B}$  je konstantní matice  $[14 \times 8]$

Za účelem eliminace  $\theta_5$  a  $\theta_6$  lze rovnice (2.68) rozdělit následovně:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Y} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{X}_1 &= \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{Y} \\ \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{X}_1 &= \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (2.69)$$

kde  $\mathbf{A}_1$  je matice  $[6 \times 9]$ ,  $\mathbf{A}_2$  je matice  $[8 \times 9]$ ,  $\mathbf{B}_1$  je matice  $[6 \times 8]$  a  $\mathbf{B}_2$  je matice  $[8 \times 8]$ .

Eliminací  $\mathbf{Y}$  dostáváme rovnici:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{X}_1 = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (2.70)$$

kde  $\mathbf{D} = [\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2^{-1} \cdot \mathbf{A}_2]$  je matice  $[6 \times 9]$  závislá pouze na lineární kombinaci  $s_{\theta_1}$  a  $c_{\theta_1}$ .

Dosažením známe substituce, viz [31]

$$x_i = \tan \frac{\theta_i}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s_{\theta_i} &= \frac{2x_i}{1+x_i^2} \\ c_{\theta_i} &= \frac{1-x_i^2}{1+x_i^2} \end{aligned}, \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \quad (2.71)$$

do rovnice (2.70) dostáváme rovnici:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (2.72)$$

kde  $\mathbf{X}_2 = [x_2^2 x_3^2 \quad x_2^2 x_3 \quad x_2^2 \quad x_2 x_3^2 \quad x_2 x_3 \quad x_2 \quad x_3^2 \quad x_3 \quad 1]^T$  a  $\mathbf{E}$  je matice  $[6 \times 9]$  jejíž prvky jsou kvadratickými funkcemi v proměnné  $x_1$ .

Z rovnice (2.72) lze eliminovat  $x_2$  a  $x_3$  tzv. *dylitickou eliminací*, která je založena na následujícím postupu. Vynásobením rovnice (2.72) proměnou  $x_2$  dostáváme rovnici:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{X}_3 = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (2.73)$$

kde  $\mathbf{X}_3 = [x_2^3 x_3^2 \quad x_2^3 x_3 \quad x_2^3 \quad x_2^2 x_3^2 \quad x_2^2 x_3 \quad x_2^2 \quad x_2 x_3^2 \quad x_2 x_3 \quad x_2]$ .

Kombinací rovnic (2.72) a (2.73) dostáváme soustavu rovnic:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}_{12 \times 1} \quad (2.74)$$

kde  $\mathbf{X} = [x_2^3 x_3^2 \quad x_2^3 x_3 \quad x_2^3 \quad x_2^2 x_3^2 \quad x_2^2 x_3 \quad x_2^2 \quad x_2 x_3^2 \quad x_2 x_3 \quad x_2 \quad x_3^2 \quad x_3 \quad 1]^T$  a  $\mathbf{S}$  je matice  $[12 \times 12]$  jejíž prvky jsou opět kvadratickými funkcemi v proměnné  $x_1$  a platí:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že  $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}_{12 \times 1}$  soustava rovnic (2.74) má netriviální řešení, a to pouze za předpokladu:

$$\det(\mathbf{S}) = 0 \quad (2.75)$$

Raghavan ukázal, že  $\det(\mathbf{S}) = 0$  je polynomem stupně 24 v proměnné  $x_1$  a má jediný společný faktor  $(x_1^2 + 1)^4$  vedoucí na komplexní kořeny. Rovnice 2.75 lze tedy psát:

$$\det(\mathbf{S}) = \mathbf{f}(x_1)(x_1^2 + 1)^4 = 0 \quad (2.76)$$

kde  $\mathbf{f}(x_1)$  je polynom stupně 16 s reálnými kořeny (někdy v literatuře nazýván jako *charakteristický polynom manipulátoru*).

Je tedy zřejmé že obecný 6R manipulátor má maximálně 16 různých řešení IKÚ. Kloubové souřadnice jsou postupně vypočítány pro všechny kořeny  $x_{1_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  polynomu  $\mathbf{f}(x_1)$  následovně:

- $x_{2_i}$  a  $x_{3_i}$  lze získat řešením soustavy lineárních rovnic (2.74), neboť  $\mathbf{S}(x_{1_i})$  je numerická matice a obecně platí  $\text{rank}(\mathbf{S}(x_{1_i})) = 11$  (řešíme tak soustavu 11 rovnic pro 11 neznámých). Zpětnou substitucí (2.71) získáváme kloubové souřadnice  $\theta_{1_i}$ ,  $\theta_{2_i}$  a  $\theta_{3_i}$ .
- Substitucí  $\theta_{1_i}$ ,  $\theta_{2_i}$ ,  $\theta_{3_i}$  do rovnice  $\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{X}_1$  z (2.69) dostáváme soustavu 8 lineárních rovnic pro 8 neznámých v  $\mathbf{Y}$ . Kloubové souřadnice  $\theta_{5_i}$  a  $\theta_{6_i}$  lze pak vypočítat prostřednictvím funkce  $\text{atan2}(\star)$ .
- Přeorganizováním rovnice (2.67) a substitucí  $\theta_{1_i}$ ,  $\theta_{2_i}$ ,  $\theta_{3_i}$ ,  $\theta_{5_i}$ ,  $\theta_{6_i}$  dostáváme

$$\mathbf{T}_4^3(\theta_4) = \mathbf{T}_2^3(\theta_3) \cdot \mathbf{T}_1^2(\theta_2) \cdot \mathbf{T}_0^1(\theta_1) \cdot \mathbf{T}_6^0 \cdot \mathbf{T}_5^6(\theta_6) \cdot \mathbf{T}_4^5(\theta_5)$$

a vzhledem k (2.28), pro popis s.s. podle K-K úmluvy, lze poslední kloubovou souřadnici vypočítat z prvků  $\mathbf{T}_4^3(\theta_4)[1, 1]$  a  $\mathbf{T}_4^3(\theta_4)[1, 2]$  opět pomocí funkce  $\text{atan2}(\star)$ .

Metodu je možné v mírně pozměněné podobě aplikovat i na manipulátory s klouby typu **P**. Poznamenejme, že pro manipulátor nacházející se v singulární poloze, viz Kapitola 3.4 se v matici  $\mathbf{S}$  objevují lineárně závislé řádky, úloha potom nemá řešení. Naopak lineárně závislé sloupce se mohou v matici  $\mathbf{S}$  vyskytovat pro specifickou kombinaci K-K či D-H geometrických parametrů manipulátoru. V takovém případě je třeba změnit prvky matice, které se porovnávají v rovnici (2.67), případně tuto "startovací" rovnici zvolit jiným způsobem, existuje celkem 6 možných variant:

$$\mathbf{T}_1^0 \cdot \mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2 \cdot \mathbf{T}_4^3 = \mathbf{T}_6^0 \cdot \mathbf{T}_5^6 \cdot \mathbf{T}_4^5$$

$$\mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2 \cdot \mathbf{T}_4^3 \cdot \mathbf{T}_5^4 = \mathbf{T}_0^1 \cdot \mathbf{T}_6^0 \cdot \mathbf{T}_5^6$$

$$\mathbf{T}_3^2 \cdot \mathbf{T}_4^3 \cdot \mathbf{T}_5^4 \cdot \mathbf{T}_6^5 = \mathbf{T}_1^2 \cdot \mathbf{T}_0^1 \cdot \mathbf{T}_6^0$$

$$\mathbf{T}_4^3 \cdot \mathbf{T}_5^4 \cdot \mathbf{T}_6^5 \cdot \mathbf{T}_0^6 = \mathbf{T}_2^3 \cdot \mathbf{T}_1^2 \cdot \mathbf{T}_0^1$$

$$\mathbf{T}_5^4 \cdot \mathbf{T}_6^5 \cdot \mathbf{T}_0^6 \cdot \mathbf{T}_1^0 = \mathbf{T}_3^4 \cdot \mathbf{T}_2^3 \cdot \mathbf{T}_1^2$$

$$\mathbf{T}_6^5 \cdot \mathbf{T}_0^6 \cdot \mathbf{T}_1^0 \cdot \mathbf{T}_2^1 = \mathbf{T}_4^5 \cdot \mathbf{T}_3^4 \cdot \mathbf{T}_2^3$$

Řešení IKÚ pro specifické hodnoty geometrických parametrů (konkrétní kombinace kloubů) založené na modifikace Raghavanovy metody je podrobně diskutováno např. v [39]. Efektivní implementaci obecné Raghavanovy metody s ohledem na výpočetní náročnost, stabilitu a potlačení numerických chyb lze nalézt v [21].

Poznamenejme, že z obecného pohledu je tedy řešení IKÚ pro sériové manipulátory převoditelné na problém řešení soustavy polynomiálních rovnic. Raghavanova metoda tento problém dále převádí na hledání kořenu polynomu  $n$ -tého stupně. Alternativním přístupem se dnes stává pomalu, ale jistě se rozšiřující metoda *Gröbnerovýchází*, založená na principu převodu soustavy polynomiálních rovnic na ekvivalentní soustavu, jejíž řešení lze vypočítat postupným dosazováním dílčích výsledků (např. jedna rovnice soustavy je polynomem v jedné proměnné, atd.). Náznorný příklad s využitím právě Gröbnerovýchází pro PSM-RR z Příkladu 2.4 lze nalézt v [4]. Řešení IKÚ pro obecný sériový manipulátor z Kapitoly 2.3.2.3 pak např. v [42].

## 2.4 Paralelní manipulátory

Jak již bylo zmíněno v Kapitole 1.2, paralelní manipulátory jsou tvořeny uzavřenými kinematickými řetězci, neboli základna manipulátoru je s koncovým efektozem spojena alespoň dvěma nezávislými otevřenými kinematickými řetězci. Existují v podstatě dva základní systematické pohledy na řešení kinematiky takových manipulátorů:

- Dekompozice paralelního mechanismu na nezávislé uzavřené kinematické řetězce
- Dekompozice paralelního mechanismu na sériové manipulátory

Poznamenejme, že pro některé (zejména jednoduché planární) paralelní manipulátory je možné nalézt řešení PKÚ a IKÚ s pomocí geometrie, jako např. kinematická analýza PPM v [37]. Nicméně takový postup je obtížně algoritimizovatelný pro odlišné architektury manipulátorů. Zabývejme se proto nadále uvedenými systematickými přístupy.

### 2.4.1 Dekompozice paralelního mechanismu na nezávislé uzavřené kinematické řetězce

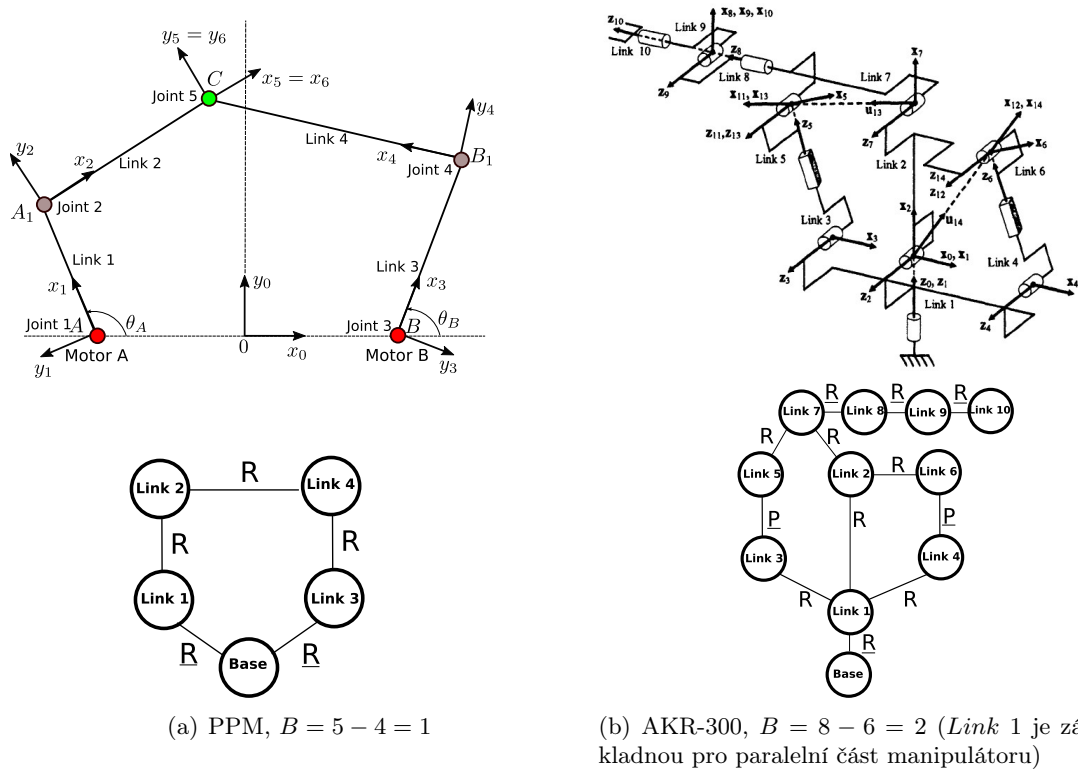
Předpokládejme manipulátor s  $L$  klouby a  $n$  pohyblivými rameny (bez započtení pevné základny). Vzhledem k možnosti popsat takový manipulátor cyklickým planárním grafem, kde ramena jsou reprezentována jeho vrcholy a klouby jeho hranami je možné z *Eulerova vzorce*<sup>7</sup> pro planární graf získat vztah:

$$\underbrace{(n + 1)}_{\text{vrcholy grafu}} - \underbrace{L}_{\text{hrany}} + \underbrace{(B + 1)}_{\text{uzavřené oblasti}} = 2 \quad \Rightarrow \quad B = L - n \quad (2.77)$$

kde  $n + 1$  označuje počet ramen manipulátoru včetně pevné základny a  $B + 1$  počet oblastí ohraničenými hranami grafu včetně vnější nekonečné oblasti, kde  $B$  v našem případě označuje počet nezávislých uzavřených kinematických řetězců (smyček).

Obrázek 2.17 ukazuje odpovídající planární grafy PPM z Kapitoly 1.4.2 a průmyslového sérioparalelního manipulátor s označením **AKR-3000**.

<sup>7</sup>Pro planární graf s  $V$  vrcholy,  $E$  hranami, které se vzájemně nekříží a  $F$  oblastmi ohraničenými hranami (včetně vnější oblasti s nekonečným obsahem) platí vztah:  $V - E + F = 2$ .



Obrázek 2.17: Paralelní manipulátory a jejich reprezentace pomocí planárního grafu s určením počtu nezávislých uzavřených kinematických řetězců (podtržení označuje aktivní klouby manipulátoru)

Pro transformaci mezi jednotlivými s.s. umístěných v kloubech paralelního manipulátoru lze s výhodou využít K-K úmluva, viz Kapitola 2.2.2 (D-H úmluva v tomto případě použít nelze).

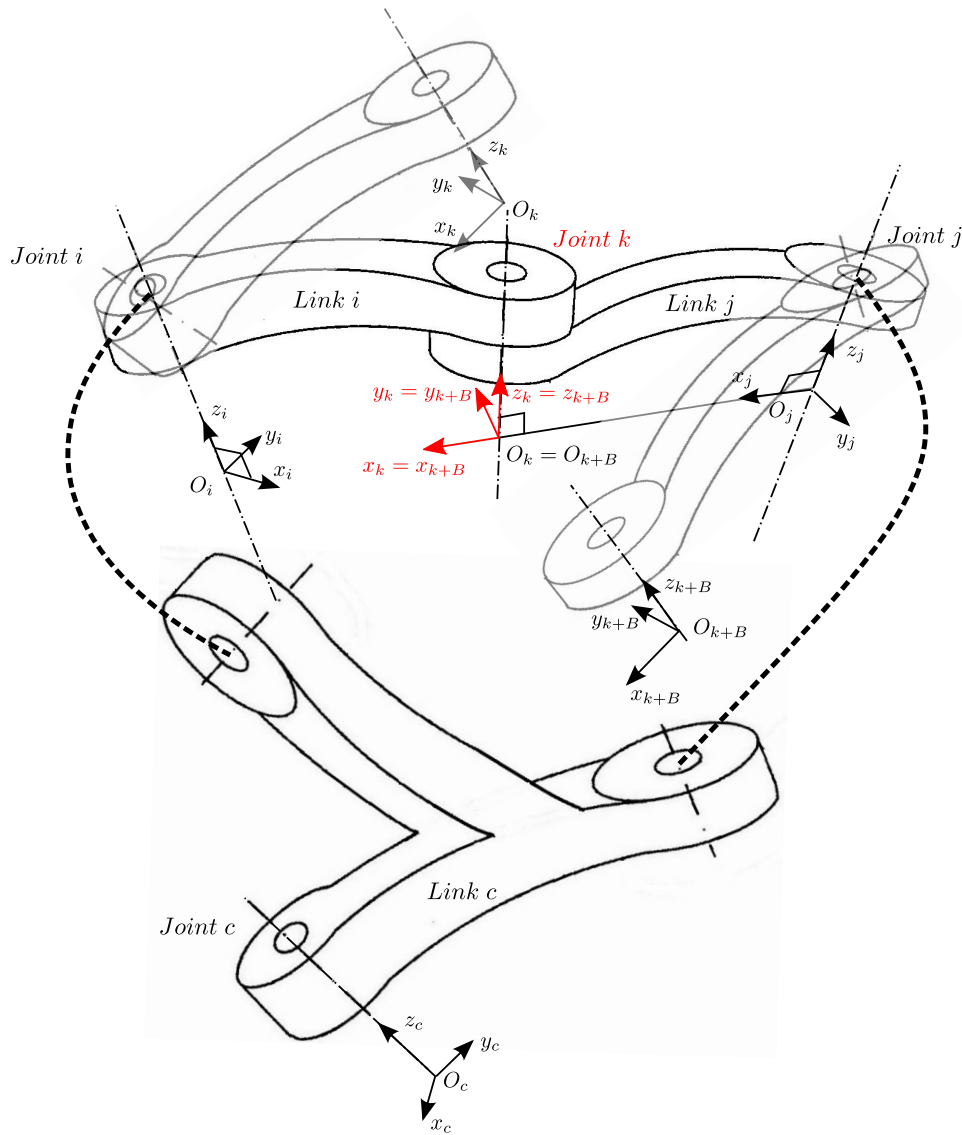
Vytvoříme nyní ekvivalentní stromovou strukturu z původního paralelního manipulátoru rozpojením všech uzavřených kinematických řetězců v jednom z jejich **pasivních** kloubů následujícím způsobem, viz Obrázek 2.18. Předpokládejme pouze klouby s 1 DoF (typ **P** a **R**):

- Definujme funkci  $i = a(j)$ , která vrací číslo s.s.  $F_i$  bezprostředně předcházejícího s.s.  $F_j$ .
- Vyberme pasivní klouby, ve kterých provedeme rozpojení a označme je *Joint*  $k$ , kde  $k = n + 1 \dots L$ . V každém rozpojeném kloubu definujme s.s.  $F_k$ , který je **pevně** spojen s jedním ramenem k tomuto kloubu připojenému, např. *Link*  $j$ . Osa  $z_k$  je totožná s osou rozpojeného kloubu a osa  $x_k$  je umístěna ve směru normály os  $z_j$  a  $z_k$ .

Ostatní klouby označme jako *Joint*  $1 \dots Joint$   $n$  a umístíme je dle K-K úmluvy.

Je zřejmé, že transformační matice  $\mathbf{T}_k^j$  mezi pevně svázanými s.s.  $F_j$  a  $F_k$  je konstantní matice, popisující pouze geometrii ramene *Link*  $j$ .

- Transformační matice  $\mathbf{T}_k^i$ , kde  $i = a(k)$  označuje číslo druhého ramene *Link*  $i$  připojeného ke kloubu *Joint*  $k$ , je definována obecně 6 parametry K-K úmluvy:  $\alpha_k$ ,  $a_k$ ,  $d_k$ ,  $\theta_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $b_k$  (kloubová souřadnice *Joint*  $k$  je opět  $\vartheta_k = \theta_k$  pro kloub typu **R** a  $\vartheta_k = d_k$  pro kloub typu **P**, ostatní parametry definují pouze geometrii ramene *Link*  $i$ ).
- Jelikož geometrické parametry konstantní transformační matice  $\mathbf{T}_k^j$  a transformační matice  $\mathbf{T}_k^i$  rozpojeného kloubu *Joint*  $k$  by měly stejný dolní index  $k$ , zavedeme ještě pro každý kloub *Joint*  $k$  přídavný s.s.  $F_{k+B}$ , který je totožný se s.s.  $F_k$  ( $F_{k+B} \equiv F_k$ ). Konstantní transformační matici  $\mathbf{T}_k^j$  pak tedy dále nahradíme konstantní transformační maticí  $\mathbf{T}_{k+B}^j$  s geometrickými parametry  $\alpha_{k+B}$ ,  $a_{k+B}$ ,  $d_{k+B} = 0$ ,  $\theta_{k+B} = 0$ ,  $\gamma_{k+B}$ ,  $b_{k+B}$ .



Obrázek 2.18: Princip rozpojení uzavřeného kinematického řetězce

Je zřejmé, že v případě paralelních manipulátorů můžeme tedy vektor kloubových souřadnic  $\Theta$  dále dělit na subvektor  $N$  **nezávislých** aktivních kloubových souřadnic (aktuátorů)  $\Theta_a$  a  $L - N$  pasivních kloubových souřadnic (nepoháněné klouby)  $\Theta_p$ :

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_a \\ \Theta_p \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Vzhledem k faktu, že v geometrickém popisu manipulátoru se vyskytuje pouze  $N$  nezávislých proměnných  $\Theta_a$ , musí zde pro staticky určený manipulátor<sup>8</sup> existovat právě  $L - N$  nezávislých rovnic definujících vztah mezi aktivními  $\Theta_a$  a pasivními  $\Theta_p$  kloubovými souřadnicemi manipulátoru. Tyto omezující rovnice lze získat z podmínky na uzavření kinematické řetězce v rozpojeném kloubu *Joint k*, neboť nutně platí:

$$\mathbf{T}_{a(a(\dots a(i)))}^c \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_i^{a(i)} \cdot \mathbf{T}_k^i = \mathbf{T}_{a(a(\dots a(j)))}^c \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_j^{a(j)} \cdot \mathbf{T}_{k+B}^j \quad (2.79)$$

kde  $F_c$  souřadný systém ramene *Link c*, které je prvním společným ramenem na cestě směrem od rozpojeného kloubu *Joint k* v obou větvích kinematického řetězce.

<sup>8</sup>Manipulátor, jehož koncový efektor nevykazuje žádný stupeň volnosti při "uzamčených" aktuátorech (aktivní kloubové souřadnice jsou konstantní).

Řešení rovnice (2.79) vede tedy na stanovení hodnoty pasivních kloubových souřadnic  $\Theta_p$  v závislosti na hodnotách souřadnic aktivních  $\Theta_a$  definované vztahem:

$$\Theta_p = \mathbf{g}(\Theta_a) \quad (2.80)$$

Je zřejmé, že rovnice (2.79) soustavou 12 nelineárních rovnic pro maximálně 6 nezávislých proměnných (obecný pohyb v prostoru je popsán celkem 6 nezávislými proměnnými 3 pro translaci + 3 pro rotaci, uvedenou soustava tak lze redukovat na nejvýše 6 nezávislých rovnic). Z uvedeného vyplývá, že pro existenci konečného počtu izolovaných řešení rovnice (2.79) musí planární uzavřený kinematický řetězec obsahovat maximálně 3 a prostorový kinematický řetězec maximálně 6 pasivních kloubů.

Poznamenejme, že rovnici (2.79) lze přepsat do tvaru:

$$\mathbf{T}_j^{k+B} \cdot \mathbf{T}_{a(j)}^j \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_{a(a(\dots a(j)))}^{a(a(\dots a(j)))} \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_i^{a(i)} \cdot \mathbf{T}_k^i = \mathbf{I} \quad (2.81)$$

kde neznámými jsou kloubové souřadnice pasivních kloubů  $\Theta_p$ .

Nalezení funkce  $\mathbf{g}$  je tedy podobné řešení IKÚ z Kapitoly 2.3.2. Z tohoto důvodu je řešení rovnice (2.79) obecně komplikované. Speciální případ tvoří paralelní manipulátory, kde každý uzavřený kinematický řetězec obsahuje právě 3 pasivní klouby, nebo lze na tuto situaci postupně převést. Takový případ nastává pro oba typy uvažovaných manipulátorů (v technické praxi tento případ bývá velmi častý):

- PPM obsahuje jeden uzavřený kinematický řetězec právě se 3 pasivní klouby *Joint 2*, *Joint 4*, *Joint 5*
- AKR-3000 obsahuje dva uzavřené kinematické řetězce, kde však první z nich obsahuje pouze 3 pasivní klouby *Joint 2*, *Joint 4*, *Joint 12*. Jejich polohy mohou být tedy stanoveny v závislosti na poloze aktivního kloubu *Joint 6*. Druhý uzavřený kinematický řetězec pak obsahuje opět pouze 3 pasivní klouby *Joint 3*, *Joint 7* *Joint 11*, neboť poloha kloubu *Joint 2* je již známá.

### Nástin metody (3 pasivní klouby):

Metodu lze nalézt v [2], [3] a příklad jejího použití pro manipulátor AKR-3000 pak v [40].

Označme 3 pasivní klouby v uzavřeném kinematickém řetězci jako *Joint i*, *Joint j*, *Joint k* a předpokládejme, že známe hodnoty všech aktivních kloubových souřadnic  $\Theta_a$ . Rovnici (2.81) lze pro obecný případ psát jako:

$$\mathbf{T}_i^{k+B}(\vartheta_i) \cdot \mathbf{T}_j^i(\vartheta_j) \cdot \mathbf{T}_k^j(\vartheta_k) = \mathbf{I} \quad (2.82)$$

kde matice přechodu jsou závislé na hledaných hodnotách pasivních kloubových souřadnic  $\Theta_p = [\vartheta_i \ \vartheta_j \ \vartheta_k]^T$ .

Lze ukázat, že rovnice (2.82) vede na podobné rovnice, jako je polohová a rotační rovnice v Kapitole 2.3.2.2 s tím rozdílem, že tyto rovnice jsou funkcemi stejných proměnných ( $\vartheta_i$ ,  $\vartheta_j$ ,  $\vartheta_k$ ) a musí být řešeny současně.

#### 2.4.1.1 Přímý kinematický problém

Vybereme nejkratší cestu (vzhledem k počtu kloubů) od základny manipulátoru do jeho koncového efektoru, kterou lze jednoznačně popsat posloupností transformačních matic, analogicky k (2.33):

$$\mathbf{T}_n^0(\Theta) = \mathbf{T}_i^0 \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_{a(n)}^{a(n)} \cdot \mathbf{T}_n^{a(n)} \quad (2.83)$$

Pokud nejkratší cesta obsahuje některou z pasivních kloubových souřadnic  $\Theta_p$ , musí být tyto souřadnice vyjádřeny jako funkce aktivních kloubových souřadnic, řešením rovnice (2.82).



### 2.4.1.2 Inverzní kinematický problém

Vybereme opět nejkratší cestu od základny manipulátoru do jeho koncového efektoru. Tím pádem jsme úlohu převedli na řešení IKÚ pro sériové manipulátory z Kapitoly 2.3.2. Metody z uvedené kapitoly využívající popis s.s. pomocí K-K metody předpokládají, že geometrické parametry  $b_j$  a  $\gamma_j$  jsou nulové, viz Obr. 2.7. Pokud toto nelze zařídit již vhodnou volbou s.s., je možné geometrické parametry  $b_j$  respektive  $\gamma_j$  sloučit s kloubovými souřadnicemi  $d_i$  respektive  $\theta_i$ , neboť pro dvě po sobě bezprostředně následující ramena *Link i* a *Link j* platí, viz (2.31):

$$\mathbf{T}_i^{a(i)} \cdot \mathbf{T}_j^i = \underbrace{\text{Trans}(\mathbf{z}, b_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i)}_{\mathbf{T}_i^{a(i)}} \cdot \underbrace{\text{Trans}(\mathbf{z}, b_j) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_j) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_j) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_j) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_j) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_j)}_{\mathbf{T}_j^i}$$

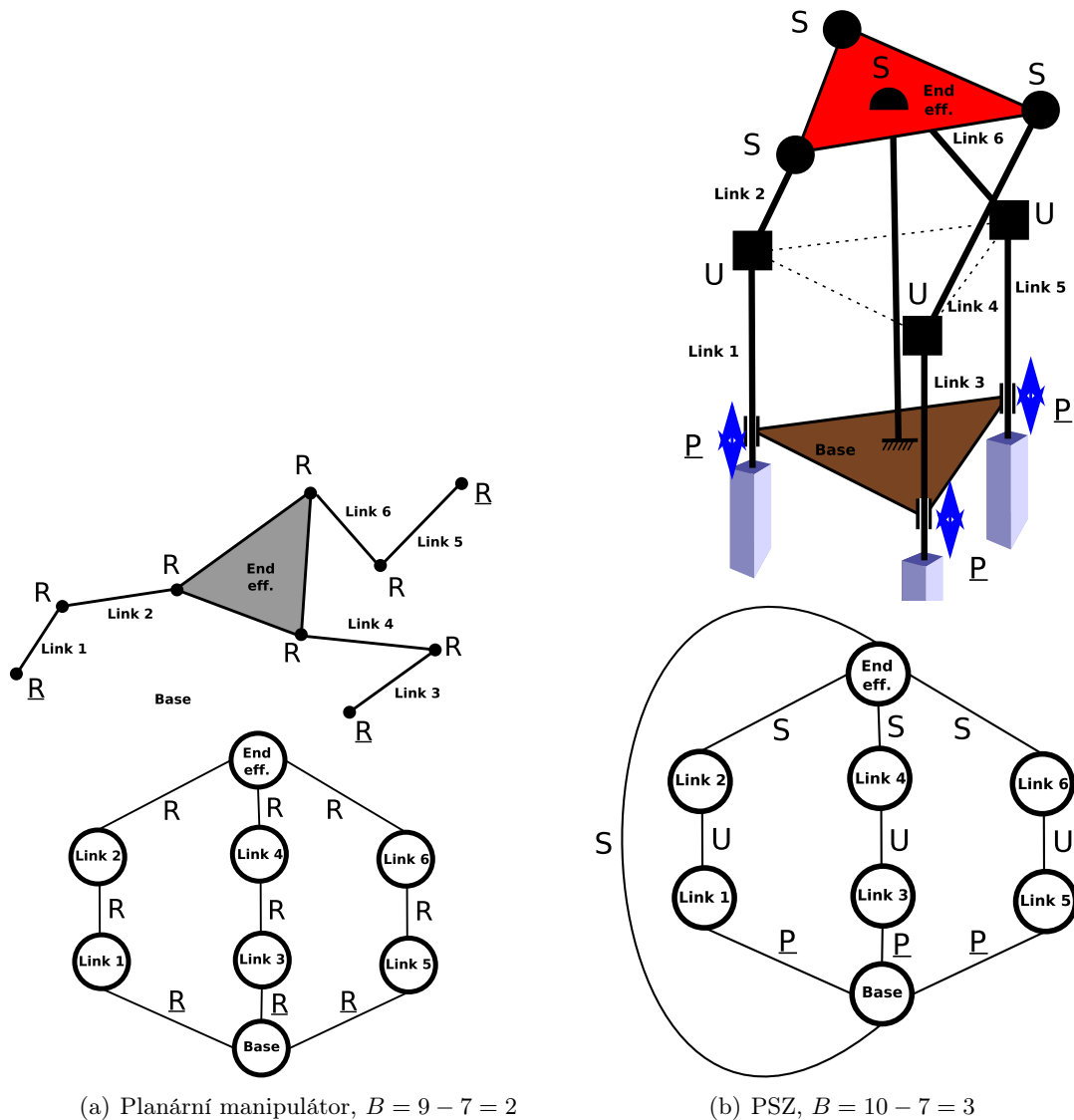
Tedy zřejmě platí:

$$\mathbf{T}_i^{a(i)} \cdot \mathbf{T}_j^i = \underbrace{\text{Trans}(\mathbf{z}, b_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i + b_j) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i + \gamma_j)}_{\mathbf{T}_i^{a(i)}} \cdot \underbrace{\text{Trans}(\mathbf{x}, a_j) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_j) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_j) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_j)}_{\mathbf{T}_j^i}$$

### 2.4.2 Dekompozice paralelního mechanismu na sériové manipulátory

Jak již bylo řečeno, postup výpočtu IKÚ a PKÚ uvedený v Kapitole 2.4.1 je možný přímo aplikovat pouze na typy paralelních manipulátorů, které obsahují alespoň jeden uzavřený kinematický řetězec s nejvýše 3 pasivními klouby (planární manipulátory) nebo 6 pasivními klouby (prostorové manipulátory) a všechny zbývající uzavřené kinematické řetězce je možné postupným výpočtem kloubových souřadnic do tohoto stavu převézt. V takové situaci může být každý uzavřený kinematický řetězec chápán jako staticky určený a nalezení závislosti mezi aktivními  $\Theta_a$  a pasivními  $\Theta_p$  souřadnicemi manipulátoru je v obecném případě dáno řešením rovnice (2.81), což je analogický problém k problému stanovení IKÚ pro sériové manipulátory (konečný počet izolovaných řešení).

Z definice pro obecný paralelní manipulátor však platí, že koncový efektor je připojen k základně manipulátoru alespoň dvěma nezávislými otevřenými kinematickými řetězci. Obecně nemusí být splněna podmínka, že uzavřené kinematické řetězce jsou staticky určené (tedy obsahují nejvýše 3 respektive 6 pasivních kloubů). Příklady takových manipulátorů, včetně jejich grafické reprezentace znázorňuje Obrázek 2.19.

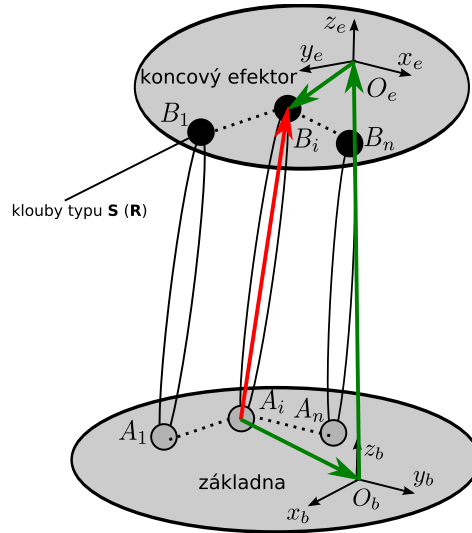


Obrázek 2.19: Paralelní manipulátory a jejich reprezentace pomocí planárního grafu (staticky neurčené uzavřené kinematické řetězce)

Všimněme si, že v případě planárního manipulátoru je koncový efektor připojen k základně 3 identickými nezávislými otevřenými kinematickými řetězci typu RRR a každý ze dvou nezávislých uzavřených kinematických řetězců tedy obsahuje celkem 4 pasivní klouby typu **R** (4 pasivní kloubové souřadnice). V případě PSZ je koncový efektor připojen k základně 3 identickými kinematickými řetězci typu PUS a jedním pasivním kinematickým řetězcem tvořeným samostatným kloubem **S**. Dva nezávislé uzavřené kinematické řetězce tak obsahují celkem 10 pasivních kloubů s 1 DoF (**S**=(**RRR**), **U**=(**RR**)) a zbývající celkem 9 pasivních kloubů s 1 DoF. V obou případech nemůžeme nalézt ani jeden staticky určený uzavřený kinematický řetězec.

#### 2.4.2.1 Inverzní kinematický problém

IKÚ pro obecný paralelní manipulátor lze obecně řešit následujícím způsobem, viz [25]. Předpokládejme paralelní manipulátor s  $n$  nezávislými kinematickými řetězci, viz Obrázek 2.20. Poloha základny manipulátoru je jednoznačně určena s.s.  $F_0$  a poloha koncového efektoru pak s.s.  $F_e$ . Poloha  $i$ -tého kinematického řetězce (v podstatě sériového manipulátoru) je dána rovnicí:



Obrázek 2.20: Řešení IKÚ obecného paralelního manipulátoru

$$\overrightarrow{A_i B_i^b} = \overrightarrow{A_i O_b^b} + \overrightarrow{O_b O_e^b} + \overrightarrow{O_e B_i^b} \quad (2.84)$$

Je zřejmé, že rovnici (2.84) lze se znalostí zobecněných souřadnic  $\mathbf{X} = [\mathbf{R}_e^b \quad \mathbf{O}_e^b]$  psát jako:

$$\mathbf{H}_1^{(i)}(\mathbf{X}) = \overrightarrow{A_i B_i^b} = \overrightarrow{A_i O_b^b} + \underbrace{\overrightarrow{O_b O_e^b}}_{\mathbf{O}_e^b} + \mathbf{R}_e^b \cdot \overrightarrow{O_e B_i^e} \quad (2.85)$$

kde  $\overrightarrow{A_i O_b^b}$  respektive  $\overrightarrow{O_e B_i^e}$  jsou **konstantní** vektory dané návrhovými parametry  $\boldsymbol{\xi}$  manipulátoru určující místo připojení uzavřených kinematických řetězců k základně respektive koncovému efektoru manipulátoru.

Přímý kinematický problém, tedy opět poloha vektoru  $\overrightarrow{A_i B_i^b}$ ,  $i$ -tého kinematického řetězce může být pro jeho kloubové souřadnice  $\boldsymbol{\Theta}_i$  (pasivní i aktivní) vyjádřen rovnicí:

$$\mathbf{H}_2^{(i)}(\boldsymbol{\Theta}_i) = \overrightarrow{A_i B_i^b} \quad (2.86)$$

Zatímco struktura rovnice (2.85) je stejná pro všechny typy paralelních manipulátorů, struktura rovnice (2.86) závisí striktně na typu použitých kinematických řetězců. Inverzní kinematický problém pro obecný paralelní manipulátor je pak dán řešením soustavy rovnic:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{(1)}(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_1^{(i)}(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_1^{(n)}(\mathbf{X}) \end{bmatrix}}_{\mathbb{H}_1(\mathbf{X})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_2^{(1)}(\boldsymbol{\Theta}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_2^{(i)}(\boldsymbol{\Theta}_i) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_2^{(n)}(\boldsymbol{\Theta}_k) \end{bmatrix}}_{\mathbb{H}_2(\boldsymbol{\Theta})} \quad (2.87)$$

Vzhledem k tomu, že vektorová funkce  $\mathbb{H}_1(\mathbf{X})$  je v případě IKÚ známá a konstantní a vektorová funkce  $\mathbb{H}_2(\boldsymbol{\Theta})$  může být stanovena analogicky jako v případě sériových manipulátorů, viz Kapitola 2.3.1, jedná se v podstatě o řešení IKÚ pro sériové manipulátory z Kapitoly 2.3.2, kde

bychom stanovili všechny kloubové souřadnice  $\Theta_i$  (pasivní + aktivní) každého  $i$ -tého kinematického řetězce. Poznamenejme, že kinematické řetězce tvořící sériové manipulátory budou mít v *neredundantním* případě právě 2 respektive 3 nezávislé kloubové souřadnice (pasivní + aktivní) pro planární respektive prostorové manipulátory, neboť koncový efektor těchto sériových manipulátorů je polohován, díky připojení kloubem typu **R** respektive **S**, nezávisle na své orientaci (bod připojení kinematického řetězce na koncový efektor paralelního manipulátoru je určen jen svou polohou, vektorem  $\overrightarrow{A_i B_i}$ ). Počet aktivních a pasivních kloubů všech kinematických řetězců (bez uvažování souřadnic kloubů připojující koncový efektor) je tedy roven  $L = 2 \cdot n$  respektive  $L = 3 \cdot n$  pro planární respektive prostorové manipulátory. Rovnice (2.87) je tak soustavou  $L$  rovnic pro stejný počet neznámých (pasivní+aktivní kloubové souřadnice všech dílčích sériových manipulátorů).

Je zřejmé, že v případě staticky určeného neredundantního paralelního manipulátoru je počet  $N$  nezávislých aktivních kloubových souřadnic  $\Theta_a$  roven počtu DoF koncového efektoru manipulátoru a při uzamčení těchto  $N$  aktivních kloubových souřadnic ( $\Theta_a = konst.$ ) musí existovat konečný počet izolovaných řešení rovnice (2.87), odpovídající nějaké konfiguraci manipulátoru. Lze tedy, podobně jako v Kapitole 2.4.1, získat  $L - N$  nezávislých rovnic definující vztah mezi aktivními  $\Theta_a$  a pasivními  $\Theta_p$  kloubovými souřadnicemi manipulátoru. V odborné literatuře se často setkáváme s tvrzením, že IKÚ pro paralelní manipulátory je obecně analyticky řešitelná. Je zřejmé, že toto tvrzení neplatí, neboť pro složité kinematické řetězce je řešení rovnice (2.87) komplikované

V mnoha případech průmyslových manipulátorů jsou však kinematické řetězce spojující základnu a koncový efektor manipulátoru jednoduché. Velmi častým případem v praxi tvoří prostorové paralelní manipulátory s kinematickými řetězci typu **UPS** (jedna aktivní kloubová souřadnice  $d_i$ ) pro které je IKÚ dána přímo řešením rovnice:

$$d_i = \|\overrightarrow{A_i B_i}\| = \|\mathbf{H}_1^{(i)}(\mathbf{X})\| \quad (2.88)$$

Často se také můžeme setkat s planárními manipulátory s kinematickými řetězci typu **RRR**, **RPR**, ... pro které je řešení rovnice (2.87) analogické s případem IKÚ pro sériový manipulátor typu PSM-RR z Příkladu (2.4).

### ★ Příklad 2.8 (IKÚ pro PSZ)

Předpokládejme, že známe zobecněné souřadnice PSZ z Kapitoly 1.4.3.

$$\mathbf{X} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T$$

Poloha  $i$ -tého kinematického řetězce s přípojnými body  $B_i$ ,  $D_i$  k základně a koncovému efektoru je tedy vyjádřena analogicky jako v rovnici (2.85),  $i = 1 \dots 3$ :

$$\mathbf{H}_1^{(i)}(X) = \overrightarrow{B_i D_i}^b = \overrightarrow{B_i D_i}^b(X) = \overrightarrow{B_i O_b}^b + \overrightarrow{O_b O_e}^b + \mathbf{R}_e^b \overrightarrow{O_e D_i}^e$$

kde

$$\overrightarrow{B_i O_b}^b = -\mathbf{B}_i^b, \quad \overrightarrow{O_e D_i}^e = \mathbf{D}_i^e, \quad \overrightarrow{O_b O_e}^b = [0 \quad 0 \quad v]^T$$

A přípojný body základny  $B_i$  a koncového efektoru  $D_i$  lze vyjádřit pomocí návrhových parametrů  $\xi$  jako:

$$\mathbf{B}_1^b = \left[ \frac{\sqrt{3}}{6} a_1 \quad -\frac{1}{2} a_1 \quad 0 \right]^T, \quad \mathbf{B}_2^b = \left[ \frac{\sqrt{3}}{6} a_1 \quad \frac{1}{2} a_1 \quad 0 \right]^T, \quad \mathbf{B}_3^b = \left[ -\frac{\sqrt{3}}{3} a_1 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

vzhledem k s.s.  $F_b$  a

$$\mathbf{D}_1^e = \left[ \frac{\sqrt{3}}{6} a_2 \quad \frac{1}{2} a_2 \quad 0 \right]^T, \quad \mathbf{D}_2^e = \left[ -\frac{\sqrt{3}}{3} a_2 \quad 0 \quad 0 \right]^T, \quad \mathbf{D}_3^e = \left[ \frac{\sqrt{3}}{6} a_2 \quad -\frac{1}{2} a_2 \quad 0 \right]^T$$

vzhledem k s.s.  $F_e$ .

Matice rotace udávající vzájemnou orientaci koncového efektoru vzhledem k základně manipulátoru lze vyjádřit jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e^b &= \mathbf{R}_e^b(\mathbf{X}) = \mathbf{R}_1(\alpha) \cdot \mathbf{R}_2(\beta) \cdot \mathbf{R}_3(\gamma) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

PKÚ  $i$ -tého kinematického řetězce lze pak vyjádřit jako v rovnici (2.86):

$$\mathbf{H}_2^{(i)}(\Theta) = \overline{\mathbf{B}_i \mathbf{D}_i^b} = \mathbf{u}_i^b \cdot d_i + \bar{\mathbf{R}}_i^b \cdot \mathbf{u}_i^0 \cdot l$$

kde  $\mathbf{u}_i = \overline{\mathbf{B}_i \mathbf{C}_i^b} / \|\overline{\mathbf{B}_i \mathbf{C}_i^b}\|$  je jednotkový vektor směru aktuátorů vzhledem k s.s.  $F_b$  ( $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}$ ),

$$\bar{\mathbf{R}}_i^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta_i^x & -\sin \vartheta_i^x \\ 0 & \sin \vartheta_i^x & \cos \vartheta_i^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \vartheta_i^y & 0 & \sin \vartheta_i^y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta_i^y & 0 & \cos \vartheta_i^y \end{bmatrix}$$

a  $\vartheta_i^x, \vartheta_i^y$  jsou Eulerovy úhly určující natočení ramene  $\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i$  podle schématu XY vzhledem k s.s.  $F_b$ .

Vektor kloubových souřadnic manipulátoru  $\Theta$  je tedy tvořen pasivními ( $\vartheta_i^x, \vartheta_i^y$ ) a aktivními ( $d_i$ ) kloubovými souřadnicemi. Rovnice (2.87) tak vede na soustavu 9 rovnic pro 9 neznámých ( $\Theta$ ). Zafixováním aktivních kloubových souřadnic  $d_i$  lze soustavu rovnic převést na 6 nezávislých rovnic pro 6 pasivních kloubových souřadnic ( $\vartheta_i^x, \vartheta_i^y$ ), jejichž řešení vede na vztah mezi pasivními a aktivními kloubovými souřadnicemi manipulátoru. Pokud však nepotřebujeme znát hodnoty pasivních kloubových souřadnic, lze s výhodou využít metodu z Příkladu 2.6, ze kterého plyne, že IKÚ pro PSZ má dvě různá řešení. ★

### ★ Příklad 2.9 (IKÚ pro PPM)

Pro případ PPM z Kapitoly 1.4.2 je řešení inverzní kinematické úlohy zřejmé, neboť:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^{(1)}(\mathbf{X}) &= - \begin{bmatrix} -l_3 & 0 \end{bmatrix}^T + \mathbf{C} \\ \mathbf{H}_1^{(2)}(\mathbf{X}) &= - \begin{bmatrix} l_3 & 0 \end{bmatrix}^T + \mathbf{C} \end{aligned}$$

a řešení soustavy rovnic (2.87) je ekvivalentní s řešením IKÚ PSM-RR z Příkladu 2.4. Alternativní přístup k řešení kinematiky je podrobně popsán v [37]. ★

#### 2.4.2.2 Přímý kinematický problém

Přímá kinematická úloha pro paralelní manipulátory dodnes zůstává otevřeným problémem, neboť její řešení není v obecném případě jednoznačné a vede na více možností, jak "složit" paralelní manipulátor pro dané hodnoty kloubových souřadnic, tzv. *assembly modes*. Nejčastěji kladené otázky při vyšetřování PKÚ paralelních manipulátorů jsou tyto následující. Poznamenejme, že stejné otázky vyvstávají i při řešení IKÚ sériových manipulátorů, však zejména pro paralelní manipulátory s komplikovanější architekturou jsou tyto otázky klíčové pro důkladnou kinematickou analýzu.

- Jaký je počet řešení PKÚ (počet *assembly modes*)?
- Existuje analytické řešení PKÚ nebo je nutno použít numerických metod?
- Nalezení efektivního algoritmu (rychlého, numericky stabilního, přesného,..) k výpočtu PKÚ?

- Jak rozhodnout o správném řešení PKÚ z množiny přípustných řešení?

Vzhledem k faktu, že architektury paralelních manipulátorů mohou být velmi rozmanité, je v podstatě nemožné nalézt jeden univerzální přístup k řešení PKÚ pro obecný případ paralelního manipulátoru (numerické metody zatím ponechme stranou). Omezíme tedy naše zkoumání pouze na vybrané architektury paralelních manipulátorů a na případ úplných paralelních manipulátorů<sup>9</sup>

## Planární manipulátory

Vyšetřování PKÚ pro paralelní planární manipulátory lze s výhodou převést na problém hledání průsečíků dvou rovinných křivek. Základní ideou je pomyslné rozpojení manipulátoru v jednom z bodů připojení nezávislého kinematického řetězce na koncový efektor. Pro dané aktivní kloubové souřadnice potom koncový bod samostatného odpojeného kinematického řetězce opisuje jednu rovinnou křivku (označme ji dále jako  $\Gamma$ ). Zbývající část koncového efektoru (tzv. *coupler*) opisuje bodem, ke kterému byl původně připojen oddělený kinematický řetězec, pak druhou rovinnou křivku (tzv. *coupler curve*, označme ji dále  $\Sigma$ ). Průsečíky rovinných křivek  $\Gamma$  a  $\Sigma$  pak přímo určují řešení PKÚ (počet řešení-assembly modes,...). Počet řešení PKÚ, tedy počet průsečíků rovinných křivek lze za daných předpokladů stanovit prostřednictvím tzv. *Bézoutova teorému*, viz [13].

### ■ Poznámka 2.3 (Bézoutův teorém)

Algebraickou rovinnou křivkou  $\Gamma$  rozumíme množinu bodů v rovině, vyhovující rovnici  $f_{\Gamma}(x, y) = 0$ , kde  $f_{\Gamma}(x, y)$  je polynom stupně  $m$  v proměnných  $x, y$  s reálnými koeficienty.

Nechť  $\Gamma$  respektive  $\Sigma$  jsou dvě algebraické rovinné křivky stupně  $m$  respektive  $n$ , které nemají společný faktor, tzn. polynomy  $f_{\Gamma}(x, y)$  a  $f_{\Sigma}(x, y)$  lze faktorizovat na odlišné ireducibilními polynomy (případ generických křivek). Potom křivky  $\Gamma$  a  $\Sigma$  mají maximálně  $m \cdot n$  průsečíků v rovině  $xy$  zahrnující body v nekonečnu a násobnost průsečíků.

Nechť  $\Pi$  je průsečík křivek  $\Gamma$  a  $\Sigma$ . Řekneme, že průsečík  $\Pi$  je násobnosti jedna, pokud tečny křivky  $\Gamma$  a  $\Sigma$  v tomto bodě jsou různé, násobnosti dva, pokud tečny splývají. Vyšetřování průsečíků vyšších násobností lze nalézt např. v [11].

### ★ Příklad 2.10 (Průsečíky rovinných křivek)

Uveďme několik jednoduchých příkladů použití Bézoutova teorému na základní typy algebraických rovinných křivek.

#### Přímka - Přímka:

Přímky popisují dvě polynomiální rovnice stupně 1, tedy dle Bézoutova teorému dostáváme maximálně 1 průsečík, což souhlasí s geometrickou představou. Pokud jsou však přímky rovnoběžné, je známo, že jejich průsečík je opět jeden, a to v nekonečnu. Toto tvrzení lze snadno dokázat. Nechť máme dvě rovnoběžné přímky  $\Gamma, \Sigma$ :

$$\begin{aligned}\Gamma : f_{\Gamma}(x, y) &= a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (m = 1) \\ \Sigma : f_{\Sigma}(x, y) &= a_1x + b_1y + c_2 = 0 \quad (n = 1)\end{aligned}$$

Zavedením homogenních souřadnic  $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \rightarrow \begin{bmatrix} x & y & w \end{bmatrix}^T$  dostáváme:

$$\begin{aligned}\Gamma : f_{\Gamma}(x, y) &= a_1x + b_1y + c_1w = 0 \\ \Sigma : f_{\Sigma}(x, y) &= a_1x + b_1y + c_2w = 0\end{aligned} \tag{2.89}$$

<sup>9</sup>Uplný paralelní manipulátor (*fully parallel manipulator*) - neredundantní paralelní manipulátor ( $N$  DoF a  $N$  nezávislých aktivních kloubových souřadnic), kde každý kinematický řetězec obsahuje právě jednu aktivní kloubovou souřadnici

Lze snadno ukázat, že soustavě (2.89) vyhovuje bod s homogenními souřadnicemi  $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_1}{b_1} & 0 \end{bmatrix}^T$ , tedy bod ležící v nekonečnu ( $w = 0$ ) ve směru vyšetřovaných přímk.

### Přímka-Kružnice

Kružnici popisuje polynomiální rovnice stupně 2, tedy dle Bezoutova teorému dostáváme maximálně dva průsečíky.

$$\begin{aligned} \Gamma : f_{\Gamma}(x, y) &= a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (m = 1) \\ \Sigma : f_{\Sigma}(x, y) &= (x + a_2)^2 + (y + b_2)^2 - c_2^2 = 0 \quad (n = 2) \end{aligned} \quad (2.90)$$

Lze ukázat, že řešení soustavy (2.90) vede na polynom 2. stupně v proměnné  $x$  či  $y$  a existují tedy buď dvě reálné řešení (přímka je sečnou kružnice) dvě imaginární řešení (přímka neprotíná kružnici) nebo jedno řešení násobnosti dva (přímka je tečnou ke kružnici, viz definice násobnosti průsečíků uvedené výše). Maximální počet průsečíků v rovině  $xy$  je tedy 2.

### Kružnice-Kružnice

Kružnice popisují dvě polynomiální rovnice stupně 2, tedy dle Bezoutova dostáváme maximálně 4 průsečíky, což však nekoresponduje s geometrickou představou, neboť je známo, že v takovém případě existují průsečíky maximálně dva.

$$\begin{aligned} \Gamma : f_{\Gamma}(x, y) &= (x + a_1)^2 + (y + b_1)^2 - c_1^2 = 0 \quad (m = 2) \\ \Sigma : f_{\Sigma}(x, y) &= (x + a_2)^2 + (y + b_2)^2 - c_2^2 = 0 \quad (n = 2) \end{aligned}$$

Zavedením homogenních souřadnic dostáváme:

$$\begin{aligned} \Gamma : f_{\Gamma}(x, y) &= (x + a_1w)^2 + (y + b_1w)^2 - c_1^2w^2 = 0 \\ \Sigma : f_{\Sigma}(x, y) &= (x + a_2w)^2 + (y + b_2w)^2 - c_2^2w^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

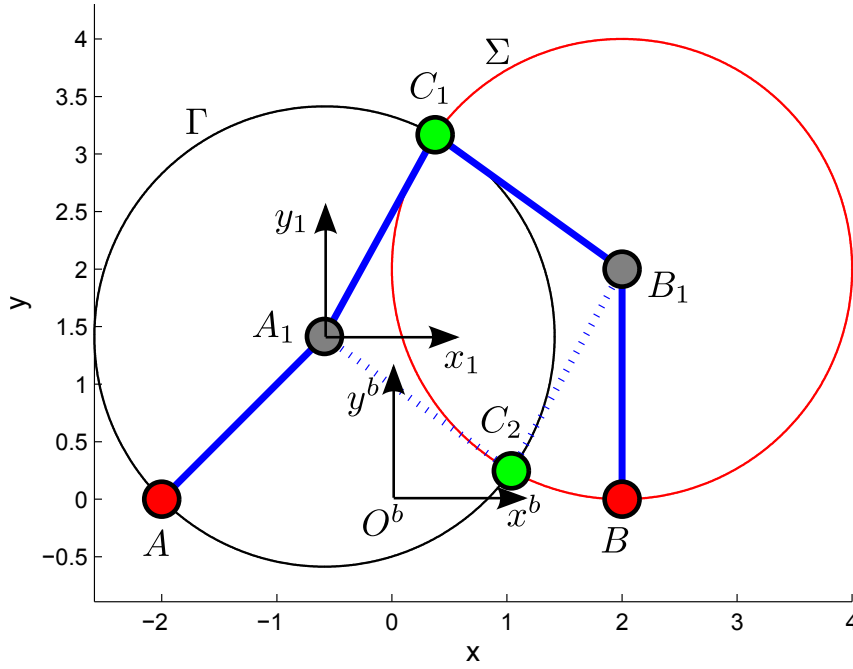
Je zřejmé, že soustavě rovnic (2.91) vyhovuje dvojice bodů  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  s homogenními souřadnicemi  $\begin{bmatrix} 1 & \pm i & 0 \end{bmatrix}^T$ , které leží na imaginární kružnici  $x^2 + y^2 = 0$ . Vzhledem k faktu, že imaginární kružnice nezávisí na parametrech vyšetřovaných kružnic ( $a_i, b_i, c_i$ ), body  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  reprezentují průsečíky kterýchkoliv dvou kružnic ležící v nekonečnu ( $w = 0$ ). Body  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  se v literatuře nazývají jako *imaginary circular points*. Obecně lze tedy říci, že dvě generické kružnice mají vždy dva průsečíky reprezentované imaginárními body  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ , tedy maximálně pouze dva průsečíky v rovině  $xy$ . Poznamenejme, že algebraické rovinné křivky mohou obsahovat body  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  jako dvojnásobné, trojnásobné, ... průsečíky. Říkáme, že takové křivky mají *circularity 2, 3, ...* ★

■

Praktické využití Bézoutova teorému k řešení PKÚ planárních paralelních manipulátorů demonstrují následující příklady.

#### ★ Příklad 2.11 (PKÚ pro PPM, viz 1.4.2)

Proveďme odpojení jednoho kinematického řetězce z koncového efektoru manipulátoru, tedy v bodě  $C$ , viz Obrázek 1.8(a). Zafixujeme-li kloubové souřadnice  $\Theta = \begin{bmatrix} \theta_A & \theta_B \end{bmatrix}^T$ , může se coupler pohybovat po kružnicích  $\Gamma$  se středem v bodě  $A_1$  a poloměrem  $l_2$  a koncový bod odpojeného kinematického řetězce po kružnici  $\Sigma$  se středem v bodě  $B_1$  a poloměrem  $l_2$ .


 Obrázek 2.21: Coupler curve  $\Sigma$  (černě) a křivka  $\Gamma$  odpojeného kinematického řetězce PPM

Dostáváme tedy dvě algebraické rovinné křivky, které, pro zjednodušení následného řešení, zapíšeme vzhledem k s.s.  $F_1 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1$ , viz Obrázek 2.21.

$$\begin{aligned} \Gamma: \quad f_\Gamma(x, y) &= x^2 + y^2 - l_2^2 = 0 \quad (m = 2) \\ \Sigma: \quad f_\Sigma(x, y) &= (x - \mathbf{B}_1^1[1])^2 + (y - \mathbf{B}_1^1[2])^2 - l_2^2 = 0 \quad (n = 2) \end{aligned} \quad (2.92)$$

kde  $\mathbf{B}_1^1 = \mathbf{B}_1^b - \mathbf{A}_1^b$  a

$$\mathbf{A}_1^b = \begin{bmatrix} -l_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_A \\ l_1 \sin \theta_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1^b = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_B \\ l_1 \sin \theta_B \end{bmatrix}$$

Z Bézoutova teorému můžeme tedy rovnou usuzovat, že maximální počet řešení PKŮ je roven 2, viz Poznámka 2.3. Soustavu rovnic (2.92) lze snadno upravit na jednu rovnici reprezentovanou polynomem stupně 2 v proměnné  $y$ :

$$y^2 - \mathbf{B}_1^1[2]y + \left( \frac{1}{4} \|\mathbf{B}_1^1\|^2 - \frac{(\mathbf{B}_1^1[1])^2 l_2^2}{\|\mathbf{B}_1^1\|^2} \right) = 0 \quad (2.93)$$

Rovnice (2.93) reprezentuje, podobně jako v Kapitole 2.3.2.3, charakteristický polynom manipulátoru. Dostáváme tedy dvě řešení PKŮ  $y_1, y_2$ . Souřadnici  $x_i$  pak dopočteme ze vztahu:

$$x_i = \frac{\|\mathbf{B}_1^1\|^2 - 2\mathbf{B}_1^1[2]y_i}{2\mathbf{B}_1^1[1]} \quad (2.94)$$

Zobecněné souřadnice manipulátoru v s.s.  $F_0$  pak získáme jako, viz Obrázek 2.21:

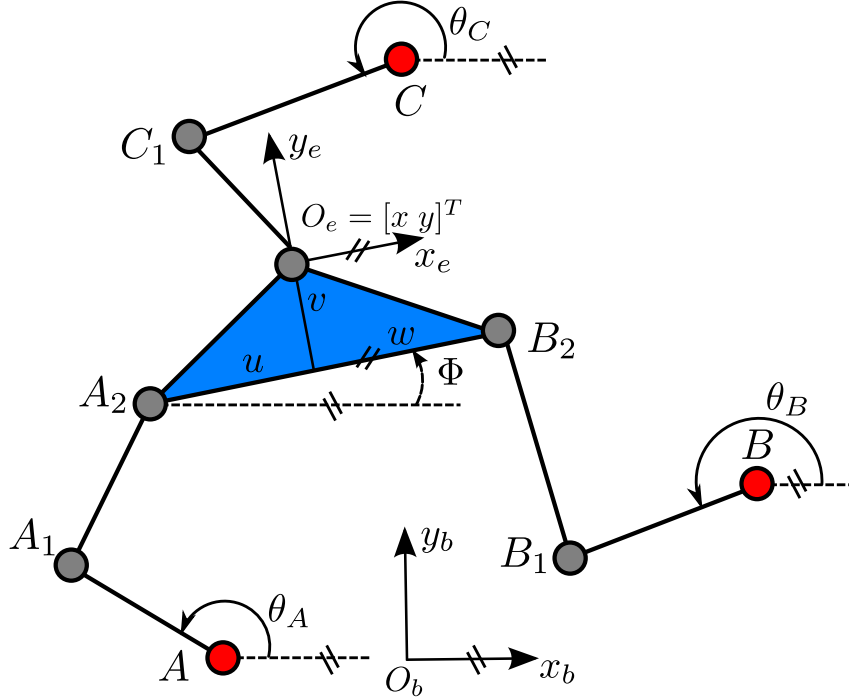
$$\mathbf{C}_i = \mathbf{A}_1^b + \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (2.95)$$

★



## ★ Příklad 2.12 (3RRR planární paralelní manipulátor)

Zajímavější případ nastává pro tzv. **3RRR** planární paralelní manipulátor, kde se každý ze tří nezávislých kinematických řetězců spojující základnu s koncovým efektem skládá z trojice kloubů typu **R** se vzájemně rovnoběžnými osami rotace, viz Obrázek 2.22. Aktuátory manipulátoru jsou umístěny v základně.



Obrázek 2.22: 3RRR planární paralelní manipulátor

Kloubové souřadnice:

$$\Theta = [ \theta_A \quad \theta_B \quad \theta_C ]^T \quad (2.96)$$

Zobecněné souřadnice:

$$\mathbf{X} = [ \Phi \quad \mathbf{O}_e ]^T \quad (2.97)$$

Návrhové parametry:

$$\xi = [ l_{A_1} \quad l_{A_2} \quad l_{B_1} \quad l_{B_2} \quad l_{C_1} \quad l_{C_2} \quad u \quad v \quad w \quad \mathbf{A}^b \quad \mathbf{B}^b \quad \mathbf{C}^b ] \quad (2.98)$$

kde  $l_{A_1} = \|\mathbf{A}\mathbf{A}_1\|$ ,  $l_{A_2} = \|\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\|$ ,  $l_{B_1} = \|\mathbf{B}\mathbf{B}_1\|$ ,  $l_{B_2} = \|\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\|$ ,  $l_{C_1} = \|\mathbf{C}\mathbf{C}_1\|$ ,  $l_{C_2} = \|\mathbf{C}_1\mathbf{O}_e\|$

Uzamčením aktivních kloubových souřadnic  $\Theta$  jsou jednoznačně definovány polohy kloubů typu **R** umístěných v bodech  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$ ,  $\mathbf{C}_1$  jako:

$$\mathbf{A}_1^b = \mathbf{A}^b + \begin{bmatrix} l_{A_1} \cos \theta_A \\ l_{A_1} \sin \theta_A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1^b = \mathbf{B}^b + \begin{bmatrix} l_{B_1} \cos \theta_B \\ l_{B_1} \sin \theta_B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1^b = \mathbf{C}^b + \begin{bmatrix} l_{C_1} \cos \theta_C \\ l_{C_1} \sin \theta_C \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Provedeme-li nyní rozpojení manipulátoru v bodě  $\mathbf{O}_e$ , dostáváme tzv. *planární 4-ramenný mechanismus* (planar four-bar mechanism), viz [25], [1], znázorněný na Obrázku 2.23, který představuje coupler manipulátoru.



kde pro  $\mathbf{O}_e^0 = [x \ y]^T$

$$A_1 = v^2 + 2vy + x^2 + y^2 + 2ux - l_{A_2}^2 + u^2$$

$$B_1 = 4vx - 4uy$$

$$C_1 = u^2 - l_{A_2}^2 + x^2 + y^2 + v^2 - 2vy - 2ux$$

$$A_2 = x^2 + 2wl_{A_1B_1} - 2wx + 2vy + w^2 + v^2 + l_{A_1B_1}^2 - 2xl_{A_1B_1} - l_{B_2}^2 + y^2$$

$$B_2 = 4wy + 4vx - 4vl_{A_1B_1}$$

$$C_2 = x^2 + y^2 - l_{B_2}^2 + l_{A_1B_1}^2 - 2xl_{A_1B_1} - 2vy + w^2 + 2wx - 2wl_{A_1B_1} + v^2$$

Rovnice (2.104) lze opět řešit dyalitickou eliminací, tzn. přenásobením každé dílčí rovnice proměnnou  $T$ , dostáváme dvě přídavné rovnice, které společně s rovnicemi původními lze psát v maticovém tvaru:

$$\mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} T^3 \\ T^2 \\ T \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.105)$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & 0 \\ 0 & A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$$

Rovnice (2.105) má řešení pouze za předpokladu:

$$\Gamma : \det(\mathbf{M}) = 0 \quad (2.106)$$

Rovnice (2.106) je polynom stupně  $m = 6$  v proměnných  $x$  a  $y$  (tzv. *sectic*), který definuje algebraickou rovinnou křivku  $\Gamma$ . Coupler manipulátoru se tedy může pohybovat (pro uzamčené aktivní kloubové souřadnice manipulátoru) takovým způsobem, že jeho koncový bod  $\mathbf{O}_e$  reprezentovaný souřadnicemi  $x, y$  opisuje křivku  $\Gamma$ .

Je zřejmé, že koncový bod odpojeného kinematického řetězce manipulátoru ( $\mathbf{C}\mathbf{C}_1\mathbf{O}_e$ ) se může pohybovat, pro uzamčené aktivní kloubové souřadnice, po algebraické rovinné křivce  $\Sigma$  typu kružnice definované polynomem stupně  $n = 2$  opět v proměnných  $x, y$ .

$$\Sigma : (x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = l_{C_2}^2 \quad (2.107)$$

kde  $[c_x \ c_y]^T = \mathbf{C}_1^0 = \mathbf{C}_1^b - \mathbf{A}_1^b$

Z Bézoutova teorému tedy vyplývá, že maximální počet průsečíků je roven  $m \cdot n = 12$ . Nicméně, zavedením homogenních souřadnic podobným způsobem jako v Poznámce 2.3  $[x \ y]^T \rightarrow [\frac{x}{\hat{w}} \ \frac{y}{\hat{w}} \ \hat{w}]^T$  dostáváme pro  $\hat{w} = 0$  algebraickou rovinnou křivku  $\Gamma$  ve tvaru:

$$\Gamma : -16(x^2 + y^2)^3(u + w)^2 = 0 \quad (2.108)$$

Tedy dvojice bodů  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  s homogenními souřadnicemi  $[1 \ \pm i \ 0]^T$  tvoří trojnásobné kořeny polynomu definující algebraickou rovinnou křivku  $\Gamma$  (body reprezentují kořeny rovnice opět nezávisí na volbě parametrů křivky). Algebraická rovinná křivka typu *sectic* má proto *circularity* rovno 3. Uvážíme-li že imaginární body  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  jsou zcela určitě i kořeny polynomu algebraické rovinné křivky  $\Sigma$ , viz Poznámka 2.3, je zřejmé, že pro algebraické rovinné křivky  $\Gamma$  a  $\Sigma$  existuje, nezávisle na volbě jejich parametrů, vždy právě  $2 \cdot 3$  imaginárních průsečíků (průsečíky v nekonečnu,  $\hat{w} = 0$ ). Algebraické rovinné křivky  $\Gamma$  a  $\Sigma$  mají tak maximálně  $12 - 6 = 6$  reálných průsečíků v rovině  $xy$ .

Přímý důsledek takového tvrzení tedy dokazuje fakt, že **3RRR** planární paralelní manipulátor má maximálně 6 řešení PKÚ.

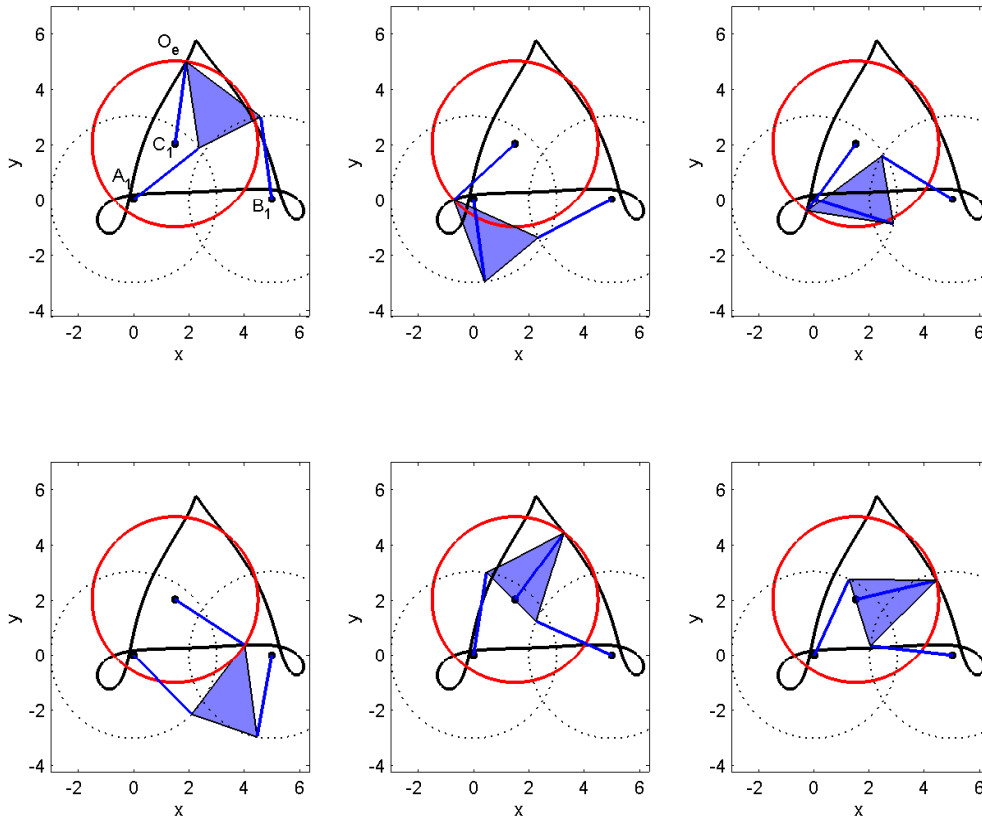
Obrázek 2.24 ukazuje možné řešení polohy coupleru **3RRR** planárního paralelního manipulátoru pro následující hodnoty parametrů (předpokládejme, že již známe polohy bodů  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , které jsou jednoznačně určeny aktivními kloubovými souřadnicemi, viz 2.99):

$$u = 1, v = 3, w = 1.5, l_{A_1B_1} = 5, l_{A_2} = 3, l_{B_2} = 3, l_{C_2} = 3, C_1^0 = [1.5 \ 2]^T \quad (2.109)$$

Pro algebraické rovinné křivky platí:

$$\Gamma: -100x^6 - 300x^4y^2 - 300x^2y^4 - 100y^6 + 1400x^5 + 1200x^4y + 2800x^3y^2 + 2400x^2y^3 + 1400xy^4 + 1200y^5 - 7200x^4 - 12000x^3y - 10400x^2y^2 - 12000xy^3 - 3200y^4 + 18500x^3 - 2100x^2y + 18500xy^2 - 2100y^3 - 19450x^2 + 168000xy - 31450y^2 - 30900x + 32700y - 4500 = 0$$

$$\Sigma: (x - 1.5)^2 + (y - 2)^2 - 9 = 0$$



Obrázek 2.24: *Coupler curve* - křivka  $\Gamma$  (červeně) a křivka  $\Sigma$  (černě) s vyznačenou polohou koncového efektoru **3RRR** planárního paralelního manipulátoru. Čárkovaně jsou vyznačeny trajektorie pohybu ramen planárního 4-ramenného mechanismu. Obrázek demonstruje 6 různých řešení PKÚ.

Uvedený postup založený na Bézoutově teorému nám umožňuje stanovit nejen počet možných řešení PKÚ, ale zejména geometrický náhled na její řešení. K výpočtu konkrétních hodnot po-

lohy koncového efektoru manipulátoru je však postup nevhodný, neboť vyžaduje nalezení řešení soustavy polynomiálních rovnic definující křivky  $\Gamma$ ,  $\Theta$ .

Rozepíšme však rovnice (2.102) a (2.107), definující délky ramen  $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{C}_1\mathbf{O}_e$ :

$$\begin{aligned} &u^2 + v^2 - 2ux \cos(\theta) - \\ &- 2uy \sin(\theta) + 2vx \sin(\theta) - 2vy \cos(\theta) + x^2 + y^2 - l_{\mathbf{A}_2}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} &v^2 + w^2 + 2vx \sin(\theta) - \\ &- 2vy \cos(\theta) - 2vl_{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1} \sin(\theta) + 2wx \cos(\theta) + 2wy \sin(\theta) - 2wl_{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1} \cos(\theta) + \\ &+ x^2 - 2xl_{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1} + y^2 + l_{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}^2 - l_{\mathbf{B}_2}^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$x^2 - 2xc_x + c_x^2 + y^2 - 2yc_y + c_y^2 - l_{\mathbf{C}_2}^2 = 0 \quad (2.112)$$

Vhodným sečtením rovnic dostáváme:

$$(2.112) : \quad x^2 - 2xc_x + c_x^2 + y^2 - 2yc_y + c_y^2 - l_{\mathbf{C}_2}^2 = 0 \quad (2.113)$$

$$(2.111)-(2.110) : \quad Z + Rx + Sy = 0 \quad (2.114)$$

$$(2.112)-(2.110) : \quad Vy + Ux + W = 0 \quad (2.115)$$

kde

$$\begin{aligned} R &= 2u \cos(\theta) + 2w \cos(\theta) - 2l_{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1} \\ S &= 2u \sin(\theta) + 2w \sin(\theta) \\ Z &= -2vl_{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1} \sin(\theta) - 2wl_{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1} \cos(\theta) - u^2 + w^2 + l_{\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1}^2 + l_{\mathbf{A}_2}^2 - l_{\mathbf{B}_2}^2 \\ U &= -2c_x - 2 \sin(\theta)v + 2u \cos(\theta) \\ V &= 2u \sin(\theta) - 2c_y + 2 \cos(\theta)v \\ W &= -l_{\mathbf{C}_2}^2 + c_x^2 - v^2 + c_y^2 - u^2 + l_{\mathbf{A}_2}^2 \end{aligned}$$

Rovnice (2.114) a (2.115) jsou lineární v proměnných  $x$ ,  $y$ . Lze tedy nalézt jejich řešení

$$x = \frac{-ZV + SW}{RV - US}, \quad y = -\frac{RW - UZ}{RV - US} \quad (2.116)$$

a dosadit zpět do rovnice (2.113). Získaná rovnice je tak závislá pouze na souřadnici  $\phi$ . Dosazením substituce (2.103) tak dostáváme polynom stupně 6 v proměnné  $T$  (charakteristický polynom manipulátoru  $f(T)$ ):

$$f(T) = k_6T^6 + k_5T^5 + k_4T^4 + k_3T^3 + k_2T^2 + k_1T + k_0 = 0 \quad (2.117)$$

kde koeficienty  $k_i$  závisí pouze na parametrech manipulátoru (2.109).

Řešením charakteristického polynomu (2.117) dostáváme opět maximálně 6 reálných kořenů  $T_i$ . Zpětnou substitucí z rovnice (2.103) dostáváme hodnoty souřadnice  $\phi$  a z řešení (2.116) pak hodnoty souřadnic  $\mathbf{O}_e^0 = [x \ y]^T$ , viz Tabulka 2.4.2.2. Hodnoty zobecněných souřadnic **3RRR** manipulátoru lze pak dopočítat z (2.100).

Charakteristický polynom manipulátoru z příkladu na Obrázku 2.24:

$$f(T) = 23850T^6 - 11430T^5 - 24899T^4 + 2732T^3 + 3932T^2 - 238T - 119 \quad (2.118)$$

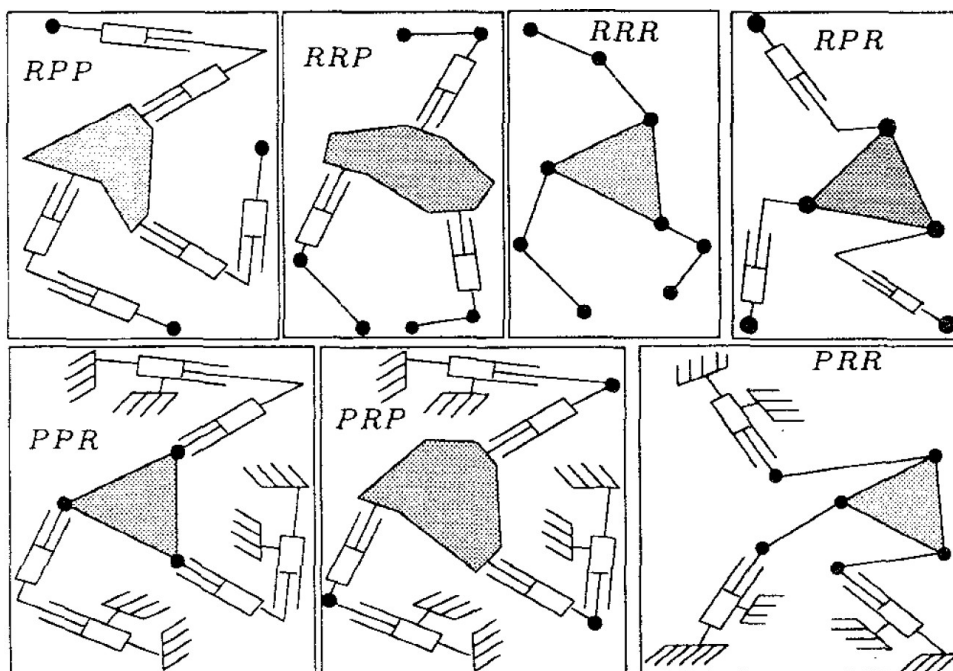
řešení $i$	$x$	$y$	$\phi$
1	1.9042e+000	4.9726e+000	4.6834e-001
2	-7.2024e-001	-1.7555e-002	6.8600e-001
3	-2.6528e-001	-4.2565e-001	1.7408e+000
4	4.0200e+000	3.7222e-001	-3.3028e-001
5	3.2735e+000	4.4197e+000	-7.7052e-001
6	4.4214e+000	2.6824e+000	-1.2619e+000

Tabulka 2.5: Řešení PKÚ 3RRR planárního paralelního manipulátoru (souřadnice polohy a orientace planárního 4-ramenného mechanismu).

★

Protože uvažujeme třídu neredundantních úplných planárních paralelních manipulátorů, je zřejmé, že počet DoF každého nezávislého planárního kinematického řetězce je roven 3 (translace ve směru osy  $x$  a  $y$  a rotace kolem osy  $z$ ), obsahuje tedy 3 nezávislé klouby s 1DoF typu **P** či **R**, z nichž je právě jeden kloub aktuátorem. V takovém případě lze ukázat, že možné kombinace kinematických řetězců jsou, viz Obrázek 2.25:

#### RRR, RPR, RRP, RPP, PRR, PPR, PRP



Obrázek 2.25: Možné kombinace kinematických řetězců úplného neredundantního planárního paralelního manipulátoru

Kombinace **PPP** se neuvažuje neboť obecně 3 klouby takového typu nejsou nezávislémi (pouze 2DoF kinematického řetězce). Jako aktivní kloub kinematického řetězce lze vybrat kloub, při jehož uzamčení nedostaneme kinematický řetězec typu **PP**. V opačném se může koncový bod takového kinematického řetězce pohybovat neomezeně v rovině  $xy$ . Koncové efektor manipulátoru získává tak neřiditelné stupně volnosti. Možné kombinace kinematických řetězců úplných planárních neredundantních manipulátorů pak vystihuje následující tabulka:

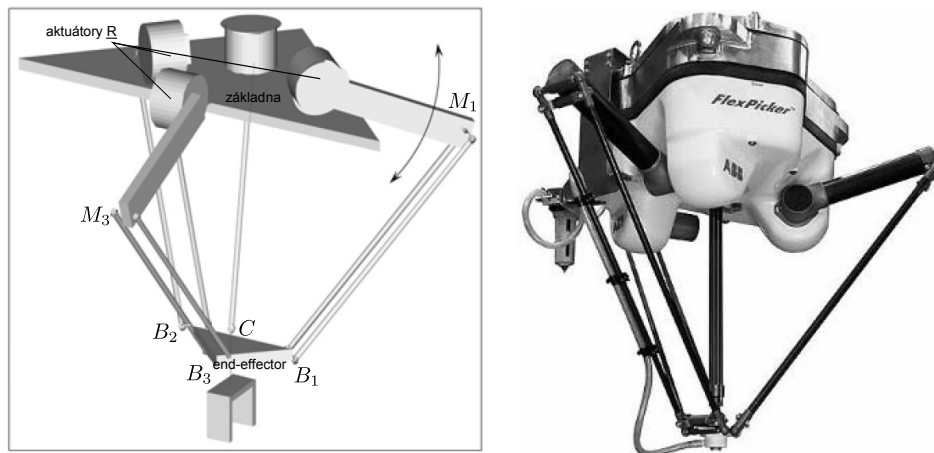
<u>RRR</u>	<u>RRR</u>	<u>RRR</u>	<u>RPR</u>	<u>RPR</u>	<u>RPR</u>
<u>RPP</u>	<u>RPP</u>	<u>PRR</u>	<u>PRR</u>	<u>PRR</u>	<u>PRP</u>
<u>PRP</u>	<u>PPR</u>	<u>PPR</u>	<u>RRP</u>	<u>RRP</u>	<u>RRP</u>

Tabulka 2.6: Možné kombinace kinematických řetězců úplných planárních neredundantních manipulátorů.

Řešení PKÚ pro manipulátor se třemi identickými kinematickými řetězci typu **RRR** byl podrobně ukázán v Příkladu 2.12. Pro ostatní kombinace kinematických řetězců z Tabulky 2.4.2.2 lze řešení PKÚ nalézt v [23].

### Prostorové manipulátory

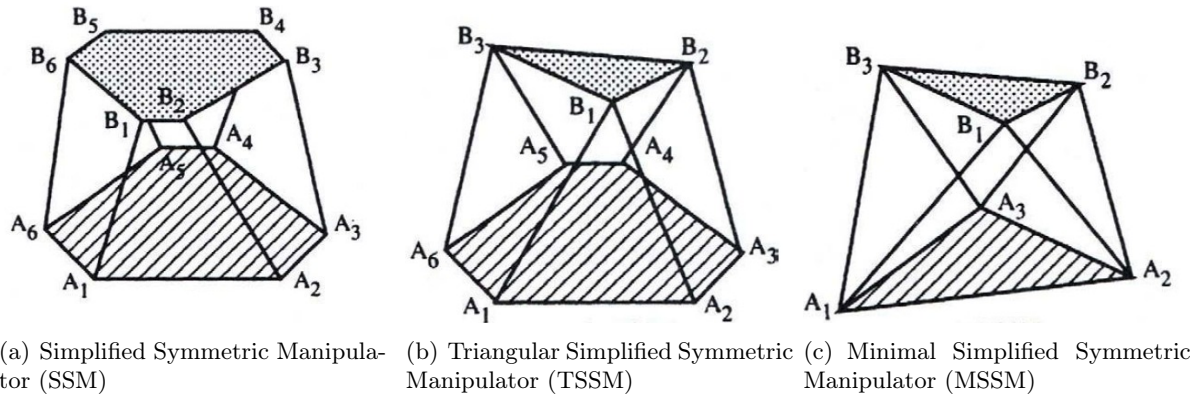
Pro prostorové manipulátory je řešení PKÚ daleko složitější a dodnes tato problematika zůstává otevřeným problémem. Omezíme se tedy v následujícím textu pouze na některé známé vybrané architektury. Obecně platí, že pro prostorové manipulátory pouze s translačními DoF lze PKÚ řešit poměrně jednoduše. Příkladem takové skupiny manipulátorů může být např. známý *Delta robot*, viz Obrázek 2.26.



Obrázek 2.26: Delta robot, CAD model (vlevo) a skutečný výrobek firmy Abb.

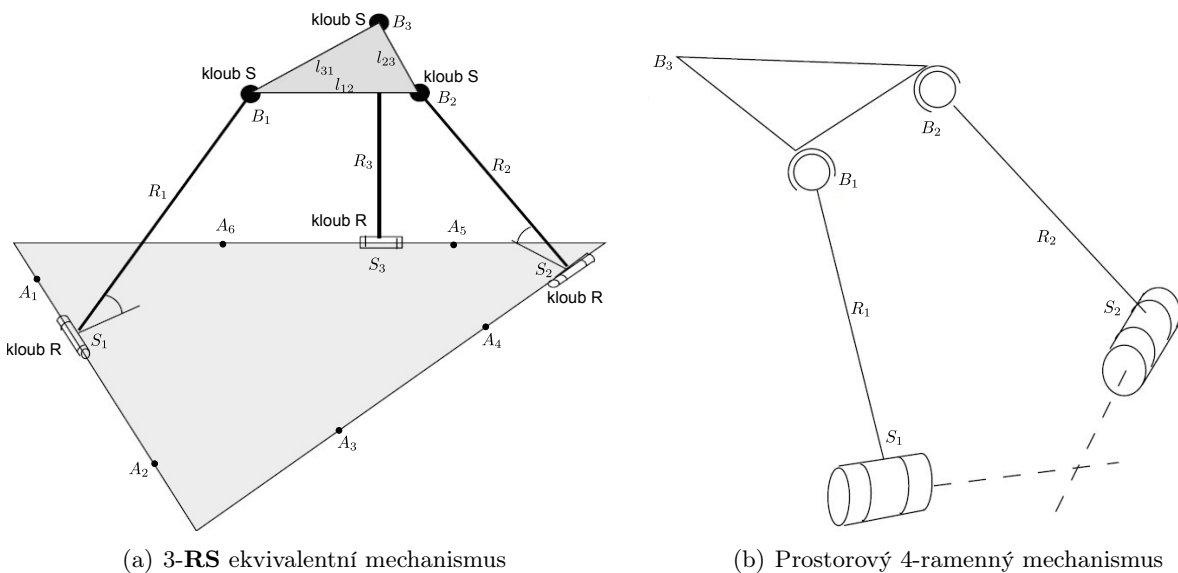
Je zřejmé, že pro uzamčené aktuatory se body  $M_i$  nacházejí v konstatní poloze. Body  $B_i$  se mohou pohybovat po kružnicích se středem v bodě  $M_i$  a poloměrem  $r_i$  definovaným délkou ramen  $M_i B_i$ . Protože ramena  $M_i B_i$  tvoří tzv. paralelogram, musí koncový efektor udržovat konstantní orientaci ( $\overrightarrow{B_i C} = konst.$ ). Je tedy zřejmé, že bod  $C$  koncového efektoru se musí nalézat na průsečíku tří kružnic s poloměrem  $r_i$  a posunutým středem  $M_i + \overrightarrow{B_i C}$ . Dostáváme tak dvojici řešení pro polohu koncového efektoru, symetrickou podle základny manipulátoru.

Podstatně složitější situace nastává v případě manipulátorů kde koncový efektoru může měnit nejen svou translační polohu, ale i orientaci (v obecném případě mluvíme o paralelních manipulátorech se všemi 6 DoF). V průběhu zkoumání mnoha různých typů paralelních manipulátorů se ukázalo, že celá řada jejich architektur lze převést na zjednodušené architektury znázorněné na Obrázku 2.27.



Obrázek 2.27: Nejznámější zjednodušené architektury (mechanismy) prostorových paralelních manipulátorů SSM, TSSM a jeho speciální případ MSSM.

Zabývejme se podrobněji pouze mechanismem typu TSSM. V Příkladu 2.13 později ukážeme, že postup řešení PKÚ pro TSSM lze použít, s mírnou modifikací, i pro řešení PKÚ PSZ z Kapitoly 1.4.3. Základní myšlenka řešení PKÚ pro TSSM spočívá v určení dovoleného pohybu bodů  $B_i$  udávajících místo připojení nezávislých kinematických řetězců ke koncovému efektoru manipulátoru. Jelikož platí, že délky kinematických řetězců jsou jednoznačně určeny hodnotami aktivních kloubových souřadnic  $d_i = \|\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i\|$ , lze vypočítat, že přípojné bod  $B_1$  trojúhelníku  $A_1 A_2 B_1$  se musí pohybovat po kružnici, se středem  $S_1$  ležícím na přímce definované stranou  $A_1 A_2$  a poloměrem  $R_1$  určeným výškou trojúhelníku na tuto stranu. Analogicky lze nalézt takové kružnice i pro všechny ostatní přípojné body koncového efektoru. Z TSSM mechanismu pak dostáváme mechanismus se třemi ekvivalentními kinematickými řetězci typu **RS**, viz Obrázek 2.28(a). Zobecněním postupu založeného na Bézoutově teorému z Poznámky 2.3, lze určit počet možných řešení pro TSSM, neboť rozpojením jednoho kinematického řetězce od koncového efektoru dostáváme tentokrát prostorový 4-ramenný mechanismus, viz Obrázek 2.28(b).



Obrázek 2.28: Dekompozice TSSM mechanismu

Hunt [14] ukázal, že bod  $B_3$  se může pohybovat po ploše, která má s kružnicí, po které se může pohybovat koncový bod odpojeného kinematického řetězce  $S_3 B_3$  maximálně 16 reálných





kde  $\bar{\varphi}_1^z = -\frac{\pi}{3}$ ,  $\bar{\varphi}_2^z = \frac{\pi}{3}$ ,  $\bar{\varphi}_3^z = \pi$  a  $\varphi_i^z = \bar{\varphi}_i^z + \pi$ . Tedy:

$i$	$\sin \varphi_i^z$	$\cos \varphi_i^z$
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
3	0	1

Rotace okolo nově vzniklé osy  $\mathbf{y}'$  o úhel  $\varphi_i^y$ :

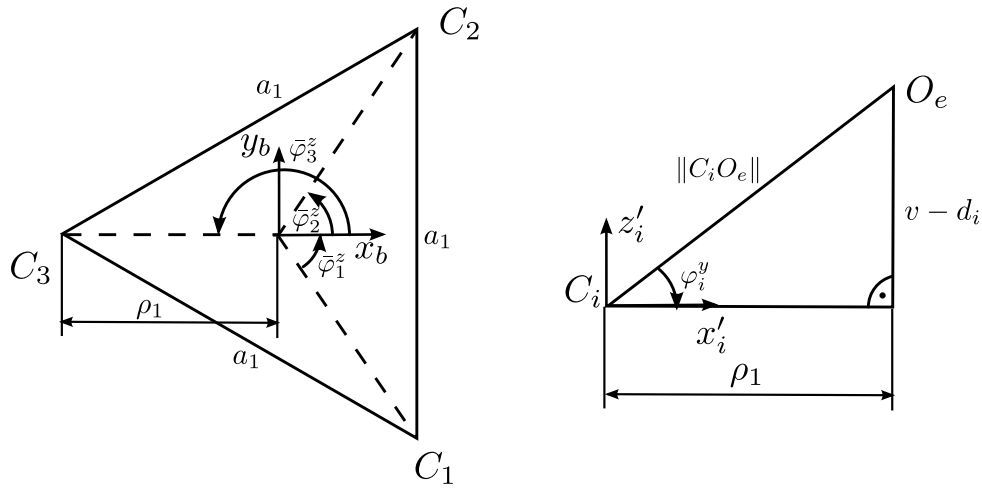
$${}^y\mathbf{R}_i^b = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i^y & 0 & \sin \varphi_i^y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_i^y & 0 & \cos \varphi_i^y \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

kde

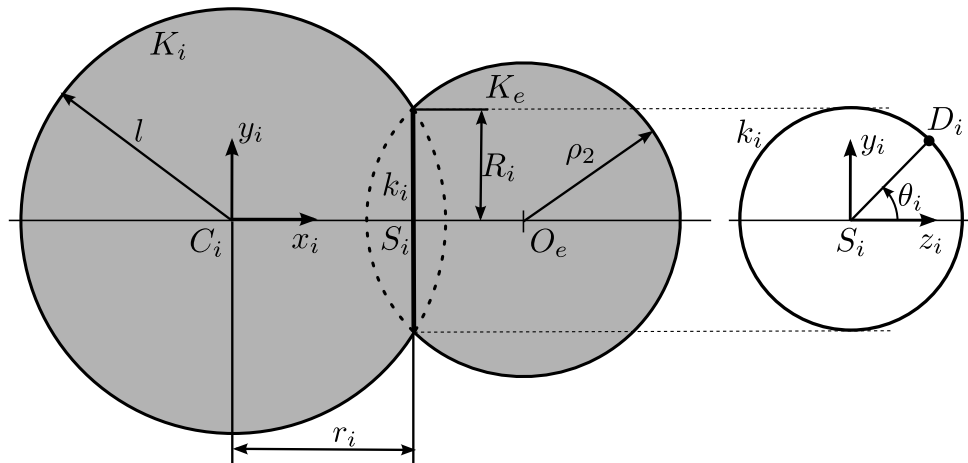
$$\cos \varphi_i^y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a_1}{\sqrt{\frac{1}{3}a_1^2 + (v-d_i)^2}}, \quad \sin \varphi_i^y = -\frac{v-d_i}{\sqrt{\frac{1}{3}a_1^2 + (v-d_i)^2}}$$

Výsledná matice rotace mezi s.s.  $F_b$  a  $F_i$ :

$$\mathbf{R}_i^b = {}^z\mathbf{R}_i^b \cdot {}^y\mathbf{R}_i^b \quad (2.122)$$



Obrázek 2.30: Odvození matice rotace  $\mathbf{R}_i^b$ ,  $\rho_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}a_1$ ,  $\|C_iO_e\| = \sqrt{\rho_1^2 + (v-d_i)^2}$



Obrázek 2.31: Průsečík koulí  $K_i$  a  $K_e$  definující kružnice  $k_i$ ,  $\rho_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a_2$

Kružnice  $k_i$  lze nalézt řešením následující soustavy rovnic, představující rovnice koulí  $K_i$  a  $K_e$  v s.s.  $F_i$ :

$$K_i : x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (2.123)$$

$$K_e : \left( x - \sqrt{\rho_1^2 + (v - d_i)^2} \right)^2 + y^2 + z^2 = \rho_2^2 \quad (2.124)$$

Dosazením rovnice (2.123) do (2.124) a vyjádřením  $x$ -ové souřadnice dostáváme vzdálenost  $r_i$  středu  $S_i$  kružnice  $k_i$  ve směru osy  $\mathbf{x}_i$  od počátku  $C_i$  s.s.  $F_i$ :

$$r_i = x = \frac{l^2 - \rho_2^2 + \rho_1^2 + (v - d_i)^2}{2\sqrt{\rho_1^2 + (v - d_i)^2}} \quad (2.125)$$

Dosazením výsledku (2.125) zpět do rovnice (2.123) dostáváme předpis pro rovnici  $k_i$ :

$$k_i : y^2 + z^2 = R_i^2 \quad (2.126)$$

kde

$$R_i^2 = l^2 - \left( \frac{l^2 - \rho_2^2 + \rho_1^2 + (v - d_i)^2}{2\sqrt{\rho_1^2 + (v - d_i)^2}} \right)^2$$

Souřadnice bodů  $D_i$ , pohybujících se po kružnicích  $k_i$  tedy psát s pomocí nově zavedené úhlové proměnné  $\theta_i$  jako ( $\theta_i$  parametrizuje trajektorii možného pohybu bodů  $D_i$ ):

$$\text{V s.s. } F_i: \mathbf{D}_i^i = [ r_i \quad R_i \cos \theta_i \quad R_i \sin \theta_i ]^T \quad (2.127)$$

$$\text{V s.s. } F_b: \mathbf{D}_i^b = \mathbf{C}_i^b + \mathbf{R}_i^b \cdot \mathbf{D}_i^i \quad (2.128)$$

Nyní lze analogicky jako v (2.119) sestavit omezující podmínky na vzájemné vzdálenosti přípojných bodů  $D_i^b$  jako:

$$\|\mathbf{D}_1^b \mathbf{D}_2^b\| - a_2^2 = 0 \quad (2.129)$$

$$\|\mathbf{D}_2^b \mathbf{D}_3^b\| - a_2^2 = 0 \quad (2.130)$$

$$\|\mathbf{D}_1^b \mathbf{D}_3^b\| - a_2^2 = 0 \quad (2.131)$$

Rovnice (2.129-2.131) lze upravit na tvar:

$$\begin{bmatrix} k_1^{(12)} & k_2^{(12)} & k_3^{(12)} & k_4^{(12)} & k_5^{(12)} & k_6^{(12)} & k_7^{(12)} & k_8^{(12)} & k_9^{(12)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.132)$$

$$\begin{bmatrix} k_1^{(23)} & k_2^{(23)} & k_3^{(23)} & k_4^{(23)} & k_5^{(23)} & k_6^{(23)} & k_7^{(23)} & k_8^{(23)} & k_9^{(23)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \\ \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.133)$$

$$\begin{bmatrix} k_1^{(13)} & k_2^{(13)} & k_3^{(13)} & k_4^{(13)} & k_5^{(13)} & k_6^{(13)} & k_7^{(13)} & k_8^{(13)} & k_9^{(13)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) \\ \cos(\theta_1) \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_1) \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_1) \\ \cos(\theta_3) \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.134)$$

kde konstanty  $k_j^{(*)}$   $j = 1 \dots 9$  závisí pouze na návrhových parametrech manipulátoru  $\xi$  a na hodnotách aktivních kloubových souřadnic  $d_i$ . Dosazením substituce (2.71)

$$T_i = \tan \frac{\theta_i}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s_{\theta_i} &= \frac{2T_i}{1+T_i^2} \\ c_{\theta_i} &= \frac{1-T_i^2}{1+T_i^2} \end{aligned}, \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \quad (2.135)$$

lze soustavu rovnic (2.132-2.134), po úpravách, přepsat na soustavu polynomiálních rovnic:

$$\begin{bmatrix} l_1^{(12)} & l_2^{(12)} & l_3^{(12)} & l_4^{(12)} & l_5^{(12)} & l_6^{(12)} & l_7^{(12)} & l_8^{(12)} & l_9^{(12)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^2 T_2^2 \\ T_1 T_2^2 \\ T_1^2 T_2 \\ T_1^2 \\ T_1 T_2 \\ T_1 \\ T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.136)$$

$$\begin{bmatrix} l_1^{(23)} & l_2^{(23)} & l_3^{(23)} & l_4^{(23)} & l_5^{(23)} & l_6^{(23)} & l_7^{(23)} & l_8^{(23)} & l_9^{(23)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_2^2 T_3^2 \\ T_2 T_3^2 \\ T_2^2 T_3 \\ T_2^2 \\ T_2 T_3 \\ T_2 \\ T_3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.137)$$

$$\begin{bmatrix} l_1^{(13)} & l_2^{(13)} & l_3^{(13)} & l_4^{(13)} & l_5^{(13)} & l_6^{(13)} & l_7^{(13)} & l_8^{(13)} & l_9^{(13)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^2 T_3^2 \\ T_1 T_3^2 \\ T_1^2 T_3 \\ T_1^2 \\ T_1 T_3 \\ T_1 \\ T_3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.138)$$

kde konstanty  $l_j^{(*)}$  závisí pouze na konstantách  $k_j^{(*)}$ .

Je zřejmé, že ze soustavy rovnic (2.136-2.138) lze vždy vybrat jednu dvojici rovnic, která bude lineární vzhledem k proměnným  $T_i^2$  a  $T_i$ . Např. pro  $i = 2$ , můžeme psát rovnici (2.136) a (2.137) jako:

$$A \cdot T_2^2 + B \cdot T_2 + C = 0 \quad (2.139)$$

$$R \cdot T_2^2 + S \cdot T_2 + Q = 0 \quad (2.140)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= A(T_1) = l_1^{(12)} T_1^2 + l_2^{(12)} T_1 + l_5^{(12)} \\ B &= B(T_1) = l_3^{(12)} T_1^2 + l_6^{(12)} T_1 + l_8^{(12)} \\ C &= C(T_1) = l_4^{(12)} T_1^2 + l_7^{(12)} T_1 + l_9^{(12)} \\ R &= R(T_3) = l_1^{(12)} T_3^2 + l_3^{(12)} T_3 + l_4^{(12)} \\ S &= S(T_3) = l_2^{(12)} T_3^2 + l_6^{(12)} T_3 + l_7^{(12)} \\ Q &= Q(T_3) = l_5^{(12)} T_3^2 + l_8^{(12)} T_3 + l_9^{(12)} \end{aligned}$$

Dyalitickou eliminací soustavy (2.139-2.140) dostáváme:

$$\det \begin{bmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ R & S & Q & 0 \\ 0 & R & S & Q \end{bmatrix} = 0 \quad (2.141)$$

Zatím nepoužitá rovnice (2.138) a nově vzniklá rovnice (2.141), které obě závisí pouze na proměnných  $T_1$  a  $T_3$ , lze zapsat ve tvaru:

$$(2.134) : D \cdot T_3^2 + E \cdot T_3 + F = 0 \quad (2.142)$$

$$(2.141) : G \cdot T_3^4 + M \cdot T_3^3 + N \cdot T_3^2 + U \cdot T_3 + V = 0 \quad (2.143)$$

kde

$$\begin{aligned} D &= D(T_1) = l_1^{(13)} T_1^2 + l_2^{(13)} T_1 + l_5^{(13)} \\ E &= E(T_1) = l_3^{(13)} T_1^2 + l_6^{(13)} T_1 + l_8^{(13)} \\ F &= F(T_1) = l_4^{(13)} T_1^2 + l_7^{(13)} T_1 + l_9^{(13)} \end{aligned}$$

a  $G, M, N, U, V$  jsou polynomy řádu 4 v proměnné  $T_1$ .

Dyalitickou eliminací soustavy (2.142-2.143) dostáváme charakteristický polynom manipulátoru:

$$f(T_1) = \det \begin{bmatrix} G & M & N & U & V & 0 \\ 0 & G & M & N & U & V \\ D & E & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & E & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & E & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & E & F \end{bmatrix} = 0 \quad (2.144)$$

Lze ukázat, že charakteristický polynom manipulátoru je řádu 16, tedy existuje maximálně 16 reálných kořenů  $T_1$ . Zpětný výpočet souřadnic  $\theta_i$  je pak dán následujícím postupem:

- Vypočti kořeny charakteristického polynomu  $f(T_1)$ , viz (2.144)
- Vypočti konstanty  $D, E, F, G, M, N, U, V$
- Vypočti kořeny (2.142) a vyber jeden z kořenů, vyhovující rovnici (2.143)  $\Rightarrow T_3$
- Vypočti konstanty  $A, B, C, R, S, Q$
- Vypočti kořeny (2.139) a vyber jeden z kořenů, vyhovující rovnici (2.140)  $\Rightarrow T_2$
- Z hodnot  $T_1, T_2, T_3$  vypočti zpětnou substitucí (2.135) úhlové proměnné  $\theta_i$ .
- Vypočti polohy přípojních bodů  $D_i^j$  v s.s.  $F_i$  a přepočítej je do s.s. základny manipulátoru  $F_b$ , viz (2.127, 2.128).

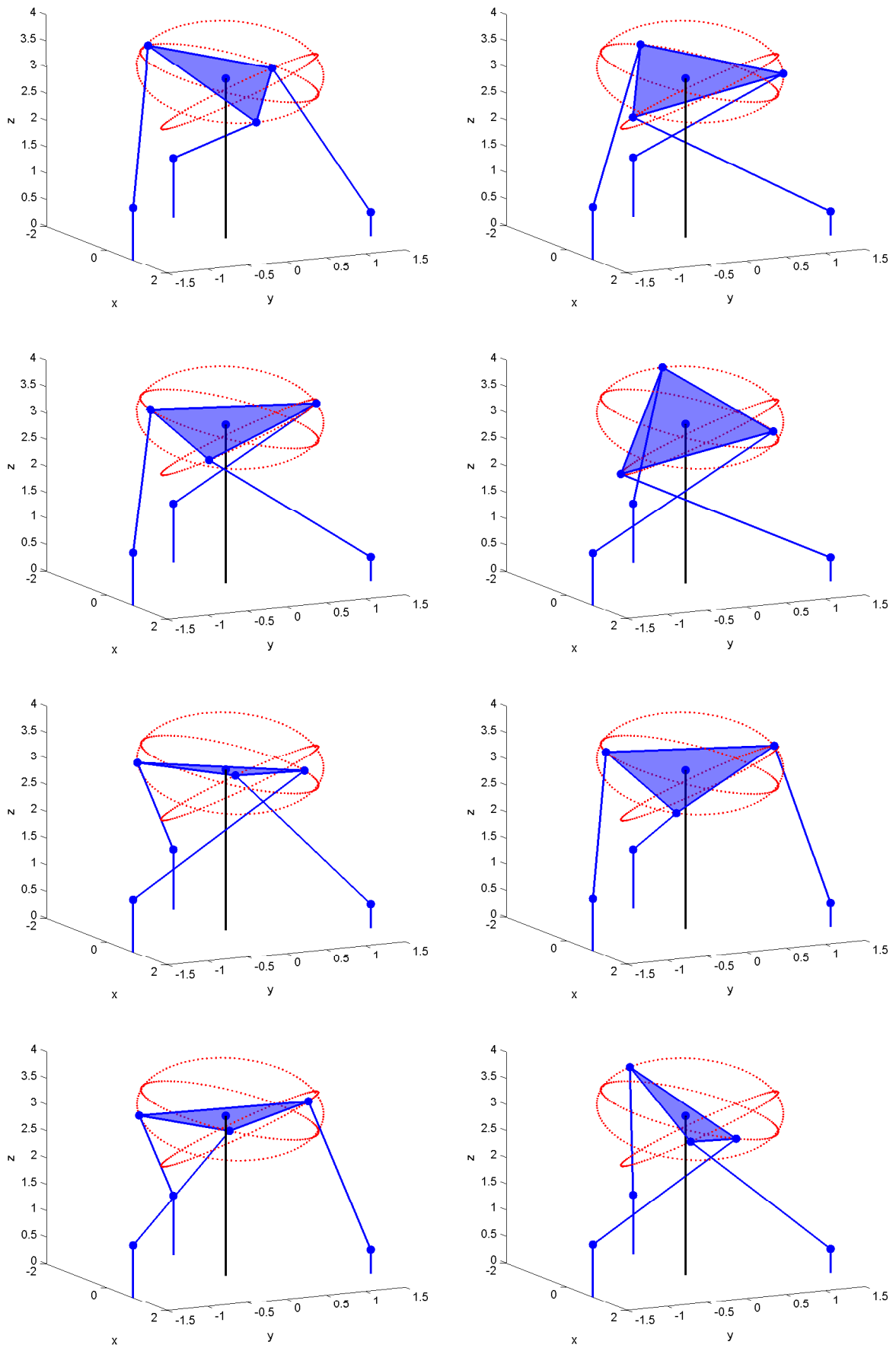
Obrázek 2.32 ukazuje možná řešení PKÚ pro PSZ pro následující hodnoty parametrů a aktivních kloubových souřadnic:

$$a_1 = 3, a_2 = 2, v = 3, l = 3, d_1 = 0.98496, d_2 = 0.44993, d_3 = 1.118$$

Charakteristický polynom manipulátoru:

$$\begin{aligned} f(T_1) &= -0.00003075 T_1^{16} + 0.005980 T_1^{15} - 0.2293 T_1^{14} - 5.981 T_1^{13} - 29.51 T_1^{12} + \\ &+ 20.01 T_1^{11} + 75.18 T_1^{10} - 27.72 T_1^9 - 64.06 T_1^8 + 18.97 T_1^7 + 20.65 T_1^6 - \\ &- 5.991 T_1^5 - 2.002 T_1^4 + 0.6826 T_1^3 - 0.06630 T_1^2 + 0.002512 T_1 - 0.00003270 \end{aligned}$$

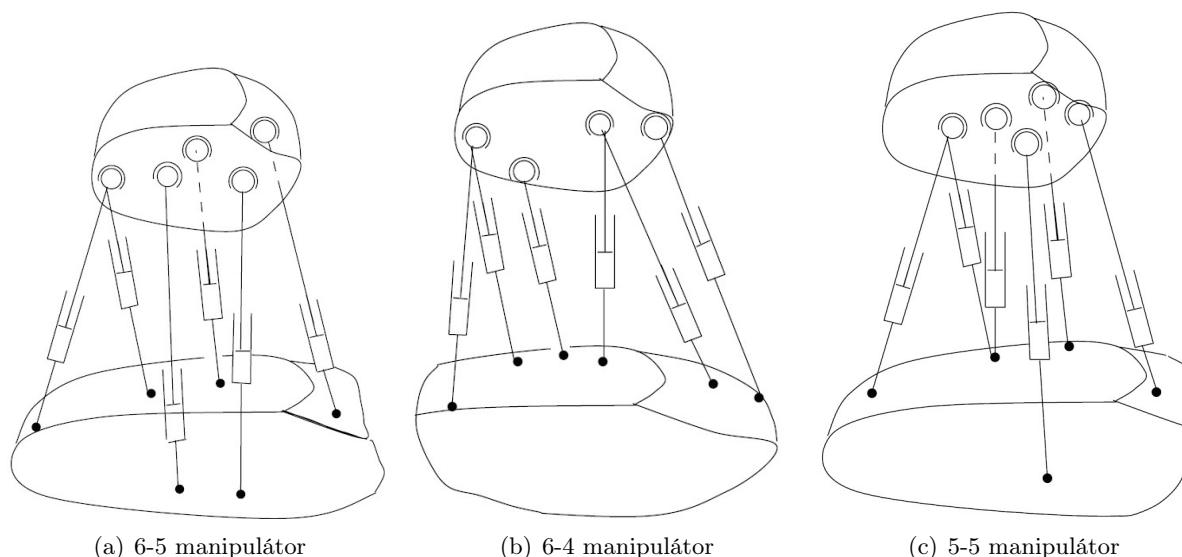
Poznamenejme, že hledání kořenů polynomů vyšších řádů, v našem případě 16, je problematické s ohledem na stabilitu a přesnost řešení. Bylo experimentálně ověřeno, že numerické chyby při řešení charakteristického polynomu manipulátoru v programovém balíku Matlab jsou silně závislé na návrhových parametrech manipulátoru  $\xi$  i na aktuálních hodnotách kloubových souřadnic  $d_i$ . Přesnost řešení je v mnoha případech velice špatná (nalezené kořeny nenulují charakteristický polynom) a úloha hledání řešení PKÚ prostřednictvím hledání kořenů charakteristického polynomu je pro praktické aplikace téměř nepoužitelná. Alternativní přístup vhodný pro reálné aplikace, který je modifikací uvedeného postupu řešení PKÚ lze nalézt v [21]. Experimentálně bylo ověřeno, že přesto, že charakteristický polynom manipulátoru je 16 stupně, mělo by tedy existovat maximálně 16 řešení PKÚ, ve skutečnosti však dostáváme maximálně pouze 8 řešení, neboť charakteristický polynom manipulátoru vykazuje maximálně 8 reálných různých pólů (každý násobnosti 2). Řešení PKÚ prostřednictvím ekvivalence k TSSM tedy *nemusí* vždy vézt na minimální charakteristický polynom manipulátoru.



Obrázek 2.32: Řešení PKÚ pro PSZ, červeně jsou vyznačeny možné trajektorie přípojných bodů  $D_i$



Bohužel, uvedený postup řešení PKÚ pro TSSM nelze využít v případě mechanismu typu SSM (v obecném případě přípojných body na základně a koncovém efektoru manipulátoru nemusí ležet ani v jedné rovině). V odborné literatuře lze nalézt metody pro výpočet PKÚ speciálních případů SSM, kde kinematické řetězce typu **UPS** spojující koncový efektor a základnu manipulátoru mají ztotožněné přípojných body (manipulátory typu  $m - n$ , kde  $m$  označuje počet přípojných bodů na základně a  $n$  počet přípojných bodů na koncovém efektoru manipulátoru, viz Obrázek 2.33).



Obrázek 2.33: Speciální případy SSM

Bylo dokázáno, že maximální počet řešení obecného 6-6 paralelního manipulátoru s 6 kinematickými řetězci typu **UPS** je 40. Efektivní metody pro výpočet PKÚ v případě takového obecného paralelního manipulátoru dodnes zůstávají předmětem intenzivního zkoumání. Poznamenejme, že nejčastěji používané metody jsou založeny na principech:

- **homotopie**: Generování systému algebraických rovnic, jehož řešení se s danými hodnotami argumentů blíží řešení IKÚ, hodnoty argumentů pak považujeme za řešení PKÚ.
- **dyalitické eliminace** Viz Kapitola 2.3.2.3, Příklad 2.12.
- **Gröbnerovy báze**: Umožňují *algoritmizovat* eliminační proces z předchozího bodu v konečném počtu kroků. Každou soustavu polynomiálních rovnic lze tedy převést na ekvivalentní soustavu polynomiálních rovnic, kde v jedné rovnici vystupuje polynom pouze v jedné proměnné (charakteristický polynom manipulátoru). Více o Gröbnerových bázích lze nalézt např. v [4], [7].
- **intervalové analýzy**: Hledání řešení PKÚ v podobě intervalů, ve kterých se může nalézat. Intervalová analýza se především dnes uplatňuje k řešení úloh v robotice za účelem zajištění spolehlivosti výpočtů (odstranění náchylnosti k numerickým chybám). Více lze nalézt např. v [26].
- **ad-hoc metody**: Převedení či aproximace řešení PKÚ na jednodušší úlohu se známým řešením.

Ucelený přehled o problematice řešení PKÚ pro paralelní manipulátory včetně přehledové tabulky shrnující dnes řešitelné architektury manipulátorů lze nalézt v [25]. Řešení PKÚ různých architektur manipulátorů pak např. v [28], [22], [27].

## Kapitola 3

# Kinematika manipulátorů: Závislosti rychlostí a zrychlení

Doposud jsme se zabývali pouze závislostmi mezi **polohami** kloubových souřadnic  $\Theta$  a zobecněných souřadnic  $\mathbf{X}$ . Z hlediska úplného kinematického popisu manipulátoru je však nutné nalézt také vztahy mezi rychlostmi a zrychleními kloubových a zobecněných souřadnic.

Předpokládejme definici přímé a inverzní kinematické úlohy, viz kapitoly 2.3.1 a 2.3.2 pomocí funkce geometrických omezení  $\mathbf{G}(\star)$ , viz (2.37), (2.38):

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}(\Theta) \quad (\text{PKÚ}), \quad \Theta = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X}) \quad (\text{IKÚ}) \quad (3.1)$$

Přímá okamžitá kinematická úloha (POKÚ) lze potom psát následujícím způsobem<sup>1</sup>:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{G}(\Theta)}{\partial \Theta} \cdot \dot{\Theta} = \mathbf{J}_A(\Theta) \cdot \dot{\Theta} \quad (3.2)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{J}}_A(\Theta) \cdot \dot{\Theta} + \mathbf{J}_A(\Theta) \cdot \ddot{\Theta} \quad (3.3)$$

Inverzní okamžitá kinematická (IOKÚ) úloha pak jako:

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (3.4)$$

$$\ddot{\Theta} = \dot{\mathbf{J}}_A^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \ddot{\mathbf{X}} \quad (3.5)$$

kde  $\mathbf{J}_A(\Theta) = \frac{\partial \mathbf{G}(\Theta)}{\partial \Theta}$  respektive  $\mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$  nazýváme *analytickým* respektive *inverzním analytickým jakobiánem*. Poznamenejme, že analytický jakobián závisí na aktuálním uspořádání (poloze) manipulátoru  $\mathbf{X}$  (a odpovídajícímu  $\Theta$ ).

Časové derivace kloubových souřadnic  $\Theta$  a zobecněných souřadnic  $\mathbf{X}$  lze pro obecný manipulátor s  $n$  klouby vyjádřit jako, viz (2.36):

$$\dot{\Theta} = [ \dot{\vartheta}_1 \quad \dot{\vartheta}_2 \quad \dots \quad \dot{\vartheta}_n ]^T \quad (3.6)$$

$$\ddot{\Theta} = [ \ddot{\vartheta}_1 \quad \ddot{\vartheta}_2 \quad \dots \quad \ddot{\vartheta}_n ]^T$$

$$\dot{\mathbf{X}} = [ \dot{\mathbf{R}}_e^b \quad \dot{\mathbf{O}}_e^b ] \quad (3.7)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = [ \ddot{\mathbf{R}}_e^b \quad \ddot{\mathbf{O}}_e^b ]$$

Na první pohled je zřejmé, že analytický jakobián  $\mathbf{J}_A$  lze stanovit přímou derivací funkce  $\mathbf{G}(\star)$  podle kloubových souřadnic  $\Theta$ . Nicméně vzhledem ke složitosti funkce (posloupnost výpočtů s řadou mezivýsledků), je její přímá derivace velice nepraktická a vede na složité a mnohačlenné vztahy. Ty je sice možné většinou nalézt pomocí nástrojů pro symbolické výpočty (Maple, Matlab,

---

<sup>1</sup>Necht'  $\dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}$ ,  $\ddot{\mathbf{X}} = \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}$

Mathematica,...), nicméně použití takových vztahů v technické praxi, zejména pak v implementaci do algoritmů řízení, je víceméně komplikované.

Možnou alternativou pro výpočet rychlostních závislostí manipulátoru lze nalézt například v [19], která předkládá systematickou geometrickou metodologii výpočtu *translační rychlosti*  $\dot{\mathbf{O}}_e$  a *úhlové rychlosti*  $\boldsymbol{\omega}_e$  koncového efektoru v závislosti na rychlosti kloubových souřadnic  $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$  manipulátoru. Vztah mezi derivací matice rotace  $\dot{\mathbf{R}}_e$  a vektorem úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}_e$  a zrychlení  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_e$  je popsán v Kapitole 2.1.2.

Uvažujme proto nadále rychlosti a zrychlení koncového efektoru místo (3.7) jako:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_e^b \\ \boldsymbol{\omega}_e^b \end{bmatrix} \\ \ddot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_e^b \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_e^b \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.8)$$

POKŮ lze potom pro obecný manipulátor s  $n$  klouby psát jako:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (3.9)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\Theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\Theta}} + \mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta}) \cdot \ddot{\boldsymbol{\Theta}} \quad (3.10)$$

A IOKŮ jako:

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (3.11)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\Theta}} = \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \ddot{\mathbf{X}} \quad (3.12)$$

kde  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta})$  respektive  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$  nazýváme *kinematickým* respektive *inverzním kinematickým jakobiánem*.

### 3.1 Závislosti rychlosti pro sériové manipulátory

Uvažujme prozatím, že  $\mathbf{T}_0^b = \mathbf{T}_e^n = \mathbf{I}$  (bez kompenzací). Translační rychlost  $\dot{\mathbf{O}}_i^0$  a úhlovou rychlost  $\boldsymbol{\omega}_i^0$   $i$ -tého s.s.  $F_i$  vzhledem k s.s.  $F_0$  lze psát jako:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_i^0 \\ \boldsymbol{\omega}_i^0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{j}_1^p & \mathbf{j}_2^p & \cdots & \mathbf{j}_j^p & \cdots & \mathbf{j}_i^p \\ \mathbf{j}_1^o & \mathbf{j}_2^o & \cdots & \mathbf{j}_j^o & \cdots & \mathbf{j}_i^o \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\Theta})} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\vartheta}_j \\ \vdots \\ \dot{\vartheta}_i \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Tedy:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{O}}_i^0 &= \mathbf{j}_1^p \cdot \dot{\vartheta}_1 + \mathbf{j}_2^p \cdot \dot{\vartheta}_2 + \cdots + \mathbf{j}_j^p \cdot \dot{\vartheta}_j + \cdots + \mathbf{j}_i^p \cdot \dot{\vartheta}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i^0 &= \mathbf{j}_1^o \cdot \dot{\vartheta}_1 + \mathbf{j}_2^o \cdot \dot{\vartheta}_2 + \cdots + \mathbf{j}_j^o \cdot \dot{\vartheta}_j + \cdots + \mathbf{j}_i^o \cdot \dot{\vartheta}_i\end{aligned}\quad (3.14)$$

kde  $j = 1 \dots i$  a sloupcové subvektory  $\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{j}_j^p \in \mathbb{R}^3$  respektive  $\mathbf{j}_j^o \in \mathbb{R}^3$  kinematického jakobiánu  $\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\Theta})$ , zprostředkovávají příspěvek  $j$ -tého kloubu  $\vartheta_j$  do celkové translační respektive úhlové rychlosti s.s.  $F_i$  vzhledem k s.s.  $F_0$ .

Z Obr. 2.3 a Obr. 2.6 je zřejmé, že příspěvek translační rychlosti  $\mathbf{v}_{j,i}^0$  a úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}_{j,i}^0$  do s.s.  $F_i$  (vyjádřenou vzhledem k s.s.  $F_0$ ) způsobenou pohybem  $j$ -tého kloubu, lze pro konkrétní typy kloubů a zavedení popisu s.s. vyjádřit jako:

- *Joint*  $j$  je typu **P** ( $\vartheta_j = d_j$ ):

Pro D-H úmluvu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{j,i}^0 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{j,i}^0 &= \dot{d}_j \cdot \mathbf{z}_{j-1}^0\end{aligned}\quad (3.15)$$

Pro K-K úmluvu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{j,i}^0 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{j,i}^0 &= \dot{d}_j \cdot \mathbf{z}_j^0\end{aligned}\quad (3.16)$$

- *Joint*  $j$  je typu **R** ( $\vartheta_j = \theta_j$ ):

Pro D-H úmluvu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{j,i}^0 &= \dot{\theta}_j \cdot \mathbf{z}_{j-1}^0 \\ \mathbf{v}_{j,i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{j,i}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0 = \dot{\theta}_j \cdot \mathbf{z}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0\end{aligned}\quad (3.17)$$

K-K úmluvu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{j,i}^0 &= \dot{\theta}_j \cdot \mathbf{z}_j^0 \\ \mathbf{v}_{j,i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{j,i}^0 \times \mathbf{r}_{j,i}^0 = \dot{\theta}_j \cdot \mathbf{z}_j^0 \times \mathbf{r}_{j,i}^0\end{aligned}\quad (3.18)$$

kde  $\mathbf{z}_j^0$  je osa  $\mathbf{z}$  s.s.  $F_j$  a  $\mathbf{r}_{j,i}^0 = \mathbf{O}_i^0 - \mathbf{O}_j^0$  je vzájemná translační poloha s.s.  $F_j$  a  $F_i$ . Při znalosti matic přechodu  $\mathbf{T}_j^0$  je zřejmé, že:

$$\mathbf{z}_j^0 = \mathbf{T}_j^0[1 : 3, 3] \quad \text{a} \quad \mathbf{r}_{j,i}^0 = \mathbf{T}_i^0[1 : 3, 4] - \mathbf{T}_j^0[1 : 3, 4] \quad (3.19)$$

Sloupcové subvektory  $\mathbf{j}_j^p$  a  $\mathbf{j}_j^o$  lze tedy s ohledem na (3.14) psát jako:

- *Joint*  $j$  je typu **P** ( $\vartheta_j = d_j$ ):

Pro D-H úmluvu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1}^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Pro K-K úmluvu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_j^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

- *Joint*  $j$  je typu **R** ( $\vartheta_j = \theta_j$ ):

Pro D-H úmluvu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0 \\ \mathbf{z}_{j-1}^0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Pro K-K úmluvu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_j^0 \times \mathbf{r}_{j,i}^0 \\ \mathbf{z}_j^0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Výsledný kinematický jakobián  $\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\Theta})$  je tedy přímo dán rovnicemi (3.20 - 3.23), (3.19) a lze určit pomocí dílčích matic přechodu  $\mathbf{T}_i^{i-1}$  s.s. manipulátoru.

Pro efektivní výpočet translační rychlosti  $\dot{\mathbf{O}}_i$  a úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}_i$  (tedy POKŮ pro libovolný s.s. v kinematickém řetězci manipulátoru) lze nastíněný postup modifikovat na následující zobecněný rekurzivní algoritmus pro libovolný typ kloubů.

Definujme pomocnou proměnnou  $\sigma_i$ , pro kterou platí:

$$\begin{aligned}\sigma_j &= 0 \quad \text{pokud} \quad \textit{Joint } j \quad \text{je typu } \mathbf{R} \quad (\vartheta_j = \theta_j) \\ \sigma_j &= 1 \quad \text{pokud} \quad \textit{Joint } j \quad \text{je typu } \mathbf{P} \quad (\vartheta_j = d_j) \\ \bar{\sigma}_j &= 1 - \sigma_j\end{aligned}$$

◆ **Algoritmus 3.1 (Rekurzivní alg. výpočtu rychlostí pro D-H úmluvu)**

Z rovnic (3.14), (3.20) a (3.22) vyplývá následující rekurzivní schéma:

Pro úhlové rychlosti platí:

$$\begin{aligned}\omega_1^0 &= z_0^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 \\ \omega_2^0 &= \underbrace{z_0^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1}_{\omega_1^0} + z_1^0 \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2 = \omega_1^0 + z_1^0 \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2 \\ \omega_3^0 &= \underbrace{z_0^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 + z_1^0 \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2}_{\omega_2^0} + z_2^0 \bar{\sigma}_3 \dot{\vartheta}_3 = \omega_2^0 + z_2^0 \bar{\sigma}_3 \dot{\vartheta}_3\end{aligned}$$

Pro translační rychlosti platí:

$$\begin{aligned}\dot{O}_1^0 &= ((z_0^0 \times r_{0,1}^0) \bar{\sigma}_1 + z_0^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 = \underbrace{(z_0^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 \times r_{0,1}^0)}_{\omega_1^0} + z_0^0 \sigma_1 \dot{\vartheta}_1 = \underline{\omega_1^0 \times r_{0,1}^0 + z_0^0 \sigma_1 \dot{\vartheta}_1} \\ \dot{O}_2^0 &= ((z_0^0 \times r_{0,2}^0) \bar{\sigma}_1 + z_0^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 + ((z_1^0 \times r_{1,2}^0) \bar{\sigma}_2 + z_1^0 \sigma_2) \dot{\vartheta}_2 = \\ &= ((z_0^0 \times (r_{0,1}^0 + r_{1,2}^0)) \bar{\sigma}_1 + z_0^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 + (z_1^0 \times r_{1,2}^0) \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2 + z_1^0 \sigma_2 \dot{\vartheta}_2 = \\ &= \underbrace{((z_0^0 \times r_{0,1}^0) \bar{\sigma}_1 + z_0^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1}_{\dot{O}_1^0} + (z_0^0 \times r_{1,2}^0) \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 + (z_1^0 \times r_{1,2}^0) \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2 + z_1^0 \sigma_2 \dot{\vartheta}_2 = \\ &= \dot{O}_1^0 + \underbrace{(z_0^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 + z_1^0 \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2)}_{\omega_2^0} \times r_{1,2}^0 + z_1^0 \sigma_2 \dot{\vartheta}_2 = \\ &= \underline{\dot{O}_1^0 + \omega_2^0 \times r_{1,2}^0 + z_1^0 \sigma_2 \dot{\vartheta}_2} \\ \dot{O}_3^0 &= ((z_0^0 \times r_{0,3}^0) \bar{\sigma}_1 + z_0^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 + ((z_1^0 \times r_{1,3}^0) \bar{\sigma}_2 + z_1^0 \sigma_2) \dot{\vartheta}_2 + ((z_2^0 \times r_{2,3}^0) \bar{\sigma}_3 + z_2^0 \sigma_3) \dot{\vartheta}_3 = \\ &= ((z_0^0 \times (r_{0,2}^0 + r_{2,3}^0)) \bar{\sigma}_1 + z_0^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 + ((z_1^0 \times (r_{1,2}^0 + r_{2,3}^0)) \bar{\sigma}_2 + z_1^0 \sigma_2) \dot{\vartheta}_2 + \\ &+ (z_2^0 \times r_{2,3}^0) \bar{\sigma}_3 \dot{\vartheta}_3 + z_2^0 \sigma_3 \dot{\vartheta}_3 = \\ &= \underbrace{((z_0^0 \times r_{0,2}^0) \bar{\sigma}_1 + z_0^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 + ((z_1^0 \times r_{1,2}^0) \bar{\sigma}_2 + z_1^0 \sigma_2) \dot{\vartheta}_2}_{\dot{O}_2^0} + (z_0^0 \times r_{2,3}^0) \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 + (z_1^0 \times r_{2,3}^0) \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2 + \\ &+ (z_2^0 \times r_{2,3}^0) \bar{\sigma}_3 \dot{\vartheta}_3 + z_2^0 \sigma_3 \dot{\vartheta}_3 = \\ &= \dot{O}_2^0 + \underbrace{(z_0^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 + z_1^0 \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2 + z_2^0 \bar{\sigma}_3 \dot{\vartheta}_3)}_{\omega_3^0} \times r_{2,3}^0 + z_2^0 \sigma_3 \dot{\vartheta}_3 = \\ &= \underline{\dot{O}_2^0 + \omega_3^0 \times r_{2,3}^0 + z_2^0 \sigma_3 \dot{\vartheta}_3}\end{aligned}$$

Tedy rekurzivní algoritmus vzhledem k s.s.  $F_0$  lze psát:

$$\omega_j^0 = \omega_{j-1}^0 + z_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j \quad (3.24)$$

$$\dot{O}_j^0 = \dot{O}_{j-1}^0 + \omega_j^0 \times r_{j-1,j}^0 + z_{j-1}^0 \sigma_j \dot{\vartheta}_j \quad (3.25)$$

Lze ukázat, že rekurzivní výpočet lze výrazně urychlit vyjádřením translačních a úhlových rychlostí koncového efektoru v algoritmu vždy vzhledem k aktuálnímu s.s.  $F_j$ .

$$\begin{aligned}\omega_j^j &= \omega_{j-1}^j + z_{j-1}^j \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j = \underline{R_{j-1}^j (\omega_{j-1}^{j-1} + z_{j-1}^{j-1} \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j)} \\ \dot{O}_j^j &= \dot{O}_{j-1}^j + \omega_j^j \times r_{j-1,j}^j + z_{j-1}^j \sigma_j \dot{\vartheta}_j = \underline{R_{j-1}^j (\dot{O}_{j-1}^{j-1} + z_{j-1}^{j-1} \sigma_j \dot{\vartheta}_j)} + \omega_j^j \times r_{j-1,j}^j\end{aligned}$$

Zároveň zřejmě platí  $z_{j-1}^{j-1} = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

Výsledný rekurzivní algoritmus pro postupný výpočet translační a úhlové rychlosti koncového efektoru pro D-H úmluvu pro popis s.s. lze tak psát jako:

$$\boldsymbol{\omega}_j^j = \mathbf{R}_{j-1}^j (\boldsymbol{\omega}_{j-1}^{j-1} + [0 \ 0 \ 1]^T \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j) \quad (3.26)$$

$$\dot{\mathbf{O}}_j^j = \mathbf{R}_{j-1}^j (\dot{\mathbf{O}}_{j-1}^{j-1} + [0 \ 0 \ 1]^T \sigma_j \dot{\vartheta}_j) + \boldsymbol{\omega}_j^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j \quad (3.27)$$

kde  $j = 1 \dots i$ ,  $\boldsymbol{\omega}_0^* = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{O}}_0^* = \mathbf{0}$  (poloha s.s.  $F_0$  je pevná)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{j-1,j}^j &= \mathbf{O}_j^j - \mathbf{O}_{j-1}^j = -\mathbf{O}_{j-1}^j = \mathbf{R}_{j-1}^j \cdot \mathbf{T}_j^{j-1} [1 : 3, 4] \\ \mathbf{R}_{j-1}^j &= (\mathbf{T}_j^{j-1})^T [1 : 3, 1 : 3] \end{aligned}$$

◆

◆ **Algoritmus 3.2 (Rekurzivní alg. výpočtu rychlostí pro K-K úmluvu)**

Z rovnic (3.14), (3.21) a (3.23) vyplývá následující rekurzivní schéma:

Pro úhlové rychlosti platí:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1^0 &= \mathbf{z}_1^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2^0 &= \underbrace{\mathbf{z}_1^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1}_{\boldsymbol{\omega}_1^0} + \mathbf{z}_2^0 \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2 = \boldsymbol{\omega}_1^0 + \mathbf{z}_2^0 \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3^0 &= \underbrace{\mathbf{z}_1^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 + \mathbf{z}_2^0 \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2}_{\boldsymbol{\omega}_2^0} + \mathbf{z}_3^0 \bar{\sigma}_3 \dot{\vartheta}_3 = \boldsymbol{\omega}_2^0 + \mathbf{z}_3^0 \bar{\sigma}_3 \dot{\vartheta}_3 \end{aligned}$$

Pro translační rychlosti platí:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{O}}_1^0 &= ((\mathbf{z}_1^0 \times \underbrace{\mathbf{r}_{1,1}^0}_{\mathbf{0}}) \bar{\sigma}_1 + \mathbf{z}_1^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 = \mathbf{z}_1^0 \sigma_1 \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\mathbf{O}}_2^0 &= ((\mathbf{z}_1^0 \times \mathbf{r}_{1,2}^0) \bar{\sigma}_1 + \mathbf{z}_1^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 + ((\mathbf{z}_2^0 \times \underbrace{\mathbf{r}_{2,2}^0}_{\mathbf{0}}) \bar{\sigma}_2 + \mathbf{z}_2^0 \sigma_2) \dot{\vartheta}_2 = \\ &= (\underbrace{\mathbf{z}_1^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1}_{\boldsymbol{\omega}_1^0} \times \mathbf{r}_{1,2}^0) + \underbrace{\mathbf{z}_1^0 \sigma_1 \dot{\vartheta}_1}_{\dot{\mathbf{O}}_1^0} + \mathbf{z}_2^0 \sigma_2 \dot{\vartheta}_2 = \\ &= \underline{\dot{\mathbf{O}}_1^0 + \boldsymbol{\omega}_1^0 \times \mathbf{r}_{1,2}^0} + \mathbf{z}_2^0 \sigma_2 \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\mathbf{O}}_3^0 &= ((\mathbf{z}_1^0 \times \mathbf{r}_{1,3}^0) \bar{\sigma}_1 + \mathbf{z}_1^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 + ((\mathbf{z}_2^0 \times \mathbf{r}_{2,3}^0) \bar{\sigma}_2 + \mathbf{z}_2^0 \sigma_2) \dot{\vartheta}_2 + ((\mathbf{z}_3^0 \times \underbrace{\mathbf{r}_{3,3}^0}_{\mathbf{0}}) \bar{\sigma}_3 + \mathbf{z}_3^0 \sigma_3) \dot{\vartheta}_3 = \\ &= ((\mathbf{z}_1^0 \times (\mathbf{r}_{1,2}^0 + \mathbf{r}_{2,3}^0)) \bar{\sigma}_1 + \mathbf{z}_1^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 + ((\mathbf{z}_2^0 \times \mathbf{r}_{2,3}^0) \bar{\sigma}_2 + \mathbf{z}_2^0 \sigma_2) \dot{\vartheta}_2 + \mathbf{z}_3^0 \sigma_3 \dot{\vartheta}_3 = \\ &= \underbrace{((\mathbf{z}_1^0 \times \mathbf{r}_{1,2}^0) \bar{\sigma}_1 + \mathbf{z}_1^0 \sigma_1) \dot{\vartheta}_1 + \mathbf{z}_2^0 \sigma_2 \dot{\vartheta}_2}_{\dot{\mathbf{O}}_2^0} + (\mathbf{z}_1^0 \times \mathbf{r}_{2,3}^0) \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 + (\mathbf{z}_2^0 \times \mathbf{r}_{2,3}^0) \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2 + \mathbf{z}_3^0 \sigma_3 \dot{\vartheta}_3 = \\ &= \underline{\dot{\mathbf{O}}_2^0} + \underbrace{(\mathbf{z}_1^0 \bar{\sigma}_1 \dot{\vartheta}_1 + \mathbf{z}_2^0 \bar{\sigma}_2 \dot{\vartheta}_2) \times \mathbf{r}_{2,3}^0}_{\boldsymbol{\omega}_2^0} + \mathbf{z}_3^0 \sigma_3 \dot{\vartheta}_3 = \\ &= \underline{\dot{\mathbf{O}}_2^0 + \boldsymbol{\omega}_2^0 \times \mathbf{r}_{2,3}^0} + \mathbf{z}_3^0 \sigma_3 \dot{\vartheta}_3 \end{aligned}$$

Tedy rekurzivní algoritmus vzhledem k s.s.  $F_0$  lze psát:

$$\boldsymbol{\omega}_j^0 = \boldsymbol{\omega}_{j-1}^0 + \mathbf{z}_j^0 \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j \quad (3.28)$$

$$\dot{\mathbf{O}}_j^0 = \dot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \boldsymbol{\omega}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \mathbf{z}_j^0 \sigma_j \dot{\vartheta}_j \quad (3.29)$$

Ze stejného důvodu jako v Algoritmu 3.1 provedeme vyjádření rekurzivního algoritmu v s.s.  $F_j$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_j^j &= \boldsymbol{\omega}_{j-1}^j + \mathbf{z}_j^j \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j = \underline{\mathbf{R}_{j-1}^j \boldsymbol{\omega}_{j-1}^{j-1} + \mathbf{z}_j^j \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j} \\ \dot{\mathbf{O}}_j^j &= \dot{\mathbf{O}}_{j-1}^j + \boldsymbol{\omega}_{j-1}^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j + \mathbf{z}_j^j \sigma_j \dot{\vartheta}_j = \underline{\mathbf{R}_{j-1}^j (\dot{\mathbf{O}}_{j-1}^{j-1} + \boldsymbol{\omega}_{j-1}^{j-1} \times \mathbf{r}_{j-1,j}^{j-1}) + \mathbf{z}_j^j \sigma_j \dot{\vartheta}_j}\end{aligned}$$

Opět platí  $\mathbf{z}_j^j = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

Výsledný rekurzivní algoritmus pro postupný výpočet translační a úhlové rychlosti koncového efektoru pro K-K úmluvu pro popis s.s. lze tak psát jako:

$$\boldsymbol{\omega}_j^j = \mathbf{R}_{j-1}^j \boldsymbol{\omega}_{j-1}^{j-1} + [0 \ 0 \ 1]^T \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j \quad (3.30)$$

$$\dot{\mathbf{O}}_j^j = \mathbf{R}_{j-1}^j (\dot{\mathbf{O}}_{j-1}^{j-1} + \boldsymbol{\omega}_{j-1}^{j-1} \times \mathbf{r}_{j-1,j}^{j-1}) + [0 \ 0 \ 1]^T \sigma_j \dot{\vartheta}_j \quad (3.31)$$

kde  $j = 1 \dots i$ ,  $\boldsymbol{\omega}_0^* = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{O}}_0^* = \mathbf{0}$  (poloha s.s.  $F_0$  je pevná)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{j-1,j}^{j-1} &= \mathbf{O}_j^{j-1} - \mathbf{O}_{j-1}^{j-1} = \mathbf{O}_j^{j-1} = \mathbf{T}_j^{j-1} [1 : 3, 4] \\ \mathbf{R}_{j-1}^j &= (\mathbf{T}_j^{j-1})^T [1 : 3, 1 : 3]\end{aligned}$$

◆

### Kompenzace rychlostí

Zabývejme se nyní výslednou rychlostí koncového efektoru  $\dot{\mathbf{X}}$  z (3.8) s uvažováním kompenzačních matic  $\mathbf{T}_0^b$  a  $\mathbf{T}_e^n$ . Vzhledem k faktu, že s.s.  $F_n$  je následován s.s.  $F_e$ , lze psát rekurzivní algoritmus pro D-H (3.26, 3.27) i K-K (3.30, 3.31) úmluvu pro  $j = \{n, e\}$  jako:

Pro D-H úmluvu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_e^e &= \mathbf{R}_n^e \boldsymbol{\omega}_n^n + \underbrace{[0 \ 0 \ 1]^T \cdot \bar{\sigma}_e \dot{\vartheta}_e}_{=0 \ (\dot{\vartheta}_e \text{ neexistuje})} \quad (3.32) \\ \dot{\mathbf{O}}_e^e &= \mathbf{R}_n^e (\dot{\mathbf{O}}_n^n + \underbrace{[0 \ 0 \ 1]^T \cdot \sigma_e \dot{\vartheta}_e}_{=0}) + \boldsymbol{\omega}_e^e \times \mathbf{r}_{n,e}^e\end{aligned}$$

Pro K-K úmluvu:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_e^e &= \mathbf{R}_n^e \boldsymbol{\omega}_n^n + \underbrace{[0 \ 0 \ 1]^T \bar{\sigma}_e \dot{\vartheta}_e}_{=0} \quad (3.33) \\ \dot{\mathbf{O}}_e^e &= \mathbf{R}_n^e (\dot{\mathbf{O}}_n^n + \boldsymbol{\omega}_n^n \times \mathbf{r}_{n,e}^n) + \underbrace{[0 \ 0 \ 1]^T \sigma_e \dot{\vartheta}_e}_{\mathbf{0}}\end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami lze ukázat, že rovnice (3.32) a (3.33) vedou na stejný vztah:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_e^n &= \boldsymbol{\omega}_n^n \\ \dot{\mathbf{O}}_e^n &= \dot{\mathbf{O}}_n^n + \boldsymbol{\omega}_n^n \times \mathbf{r}_{n,e}^n\end{aligned} \quad (3.34)$$

Rychlost zobecněných souřadnic manipulátoru  $\dot{\mathbf{X}}$ , viz (3.8), lze vypočítat jako:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_e^b \\ \boldsymbol{\omega}_e^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^b & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_n^b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_e^n \\ \boldsymbol{\omega}_e^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^b & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_n^b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{n,e}^n) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_n^n \\ \boldsymbol{\omega}_n^n \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^b & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_n^b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{n,e}^n) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_n^0)^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{R}_n^0)^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_n^0 \\ \boldsymbol{\omega}_n^0 \end{bmatrix} = \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^b & -\mathbf{R}_0^b \cdot \mathbf{R}_n^0 \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}_{n,e}^n) \cdot (\mathbf{R}_n^0)^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_0^b \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{\text{comp}}(\Theta)} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_n^0 \\ \boldsymbol{\omega}_n^0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

kde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_0^b &= \mathbf{T}_0^b[1:3, 1:3], \quad \mathbf{R}_n^0 = \mathbf{T}_n^0[1:3, 1:3] \text{ (z řešení PKÚ, viz (2.33))} \\
 \mathbf{S}(\mathbf{r}_{n,e}^n) &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{r}_{n,e}^n[3, 1] & \mathbf{r}_{n,e}^n[2, 1] \\ \mathbf{r}_{n,e}^n[3, 1] & 0 & -\mathbf{r}_{n,e}^n[1, 1] \\ -\mathbf{r}_{n,e}^n[2, 1] & \mathbf{r}_{n,e}^n[1, 1] & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{n,e}^n = \mathbf{T}_e^n[1:3, 4]
 \end{aligned}$$

Kombinací rovnice (3.13) pro  $i = n$  a rovnice (3.35) dostáváme výsledný vztah pro výpočet rychlostí koncového efektoru manipulátoru:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_{\text{comp}}(\Theta) \cdot \mathbf{J}_n(\Theta) \cdot \dot{\Theta} \tag{3.36}$$

kde  $\mathbf{J}_{\text{comp}}(\Theta)$  je kompenzační matice a  $\mathbf{J}_n(\Theta)$  je kinematický jakobián pro  $n$  kloubových souřadnic bez uvažovaných kompenzací ( $\mathbf{T}_0^b = \mathbf{T}_e^n = \mathbf{I}$ ).

Porovnáme-li výsledek (3.36) s rovnicí (3.9) je zřejmé, že kinematický jakobián (včetně kompenzací polohy základny a koncového efektoru) je dán jako:

$$\mathbf{J}(\Theta) = \mathbf{J}_{\text{comp}}(\Theta) \cdot \mathbf{J}_n(\Theta). \tag{3.37}$$

## 3.2 Závislosti zrychlení pro sériové manipulátory

Nejprve uvažujme opět, že  $\mathbf{T}_0^b = \mathbf{T}_e^n = \mathbf{I}$ . Translační zrychlení  $\ddot{\mathbf{O}}_i^0$  a úhlové zrychlení  $\ddot{\boldsymbol{\omega}}_i^0$  s.s.  $F_i$  vzhledem k s.s.  $F_0$  lze stanovit přímou časovou derivací z rovnice (3.13) jako:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_i^0 \\ \ddot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_i^p(\Theta) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\vartheta}_j \\ \vdots \\ \dot{\vartheta}_i \end{bmatrix} + \mathbf{J}_i^o(\Theta) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\vartheta}_1 \\ \ddot{\vartheta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\vartheta}_j \\ \vdots \\ \ddot{\vartheta}_i \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

Tedy:

$$\ddot{\mathbf{O}}_i^0 = \dot{\mathbf{j}}_1^p \cdot \dot{\vartheta}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^p \cdot \dot{\vartheta}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^p \cdot \dot{\vartheta}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^p \cdot \dot{\vartheta}_i + \dot{\mathbf{j}}_1^o \cdot \ddot{\vartheta}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^o \cdot \ddot{\vartheta}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^o \cdot \ddot{\vartheta}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^o \cdot \ddot{\vartheta}_i \tag{3.39}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 = \dot{\mathbf{j}}_1^o \cdot \ddot{\vartheta}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^o \cdot \ddot{\vartheta}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^o \cdot \ddot{\vartheta}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^o \cdot \ddot{\vartheta}_i + \dot{\mathbf{j}}_1^p \cdot \dot{\vartheta}_1 + \dot{\mathbf{j}}_2^p \cdot \dot{\vartheta}_2 + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_j^p \cdot \dot{\vartheta}_j + \cdots + \dot{\mathbf{j}}_i^p \cdot \dot{\vartheta}_i$$

Časová derivace kinematického jakobiánu  $\dot{\mathbf{J}}_i(\Theta)$  je dána časovými derivacemi jeho dílčích prvků, tedy jeho sloupců, viz rovnice (3.20 - 3.23):



- Joint  $j$  je typu **P** ( $\vartheta_j = d_j$ ):

Pro D-H úmluvu:

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_j^p \\ \dot{j}_j^b \\ \dot{j}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_{j-1}^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Pro K-K úmluvu:

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_j^p \\ \dot{j}_j^b \\ \dot{j}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_j^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

- Joint  $j$  je typu **R** ( $\vartheta_j = \theta_j$ ):

Pro D-H úmluvu:

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_j^p \\ \dot{j}_j^b \\ \dot{j}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{j-1,i}^0 \\ \dot{z}_{j-1}^0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Pro K-K úmluvu:

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_j^p \\ \dot{j}_j^b \\ \dot{j}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_j^0 \times \mathbf{r}_{j,i}^0 + \mathbf{z}_j^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{j,i}^0 \\ \dot{z}_j^0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

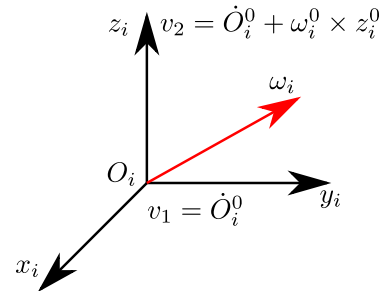
kde  $\dot{\mathbf{r}}_{j,i}^0 = \dot{\mathbf{O}}_i^0 - \dot{\mathbf{O}}_j^0$  a  $\mathbf{z}_i^0 = \mathbf{T}_i^0[1 : 3, 4]$ .

Translační rychlosti  $\dot{\mathbf{O}}_i^0$  a úhlovou rychlost  $\boldsymbol{\omega}_i^0$  lze vypočítat jako v rovnici (3.13) či pomocí rekurzivního Algoritmu 3.1 respektive Algoritmu 3.2.

Časovou derivaci osy  $\dot{z}_i^0$  lze se znalostí  $\dot{\mathbf{O}}_i^0$  a  $\boldsymbol{\omega}_i^0$  stanovit dle Obrázku 3.1 jako:

$$\dot{z}_i^0 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{O}}_i^0 + \boldsymbol{\omega}_i^0 \times \mathbf{z}_i^0 - \dot{\mathbf{O}}_i^0 = \boldsymbol{\omega}_i^0 \times \mathbf{z}_i^0 \quad (3.44)$$

Stejně jako v Kapitole 3.1 lze opět nalézt vhodný rekurzivní algoritmus k výpočtu translačního zrychlení  $\ddot{\mathbf{O}}_i$  a úhlového zrychlení  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ . Rekurzivní schéma lze odvodit přímou časovou derivací rekurzivního algoritmu pro výpočet translační a úhlové rychlosti koncového efektoru z Algoritmu 3.1 respektive z Algoritmu 3.2.



Obrázek 3.1: Odvození rychlosti  $\dot{z}_i$

### ♦ Algoritmus 3.3 (Rekurzivní alg. výpočtu zrychlení pro D-H úmluvu)

Pro úhlové zrychlení platí:

Časovou derivací rovnice (3.24) a substitucí (3.44) dostáváme:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_j^0 &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1}^0 + \dot{z}_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j + \mathbf{z}_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \ddot{\vartheta}_j = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1}^0 + (\boldsymbol{\omega}_{j-1}^0 \times \mathbf{z}_{j-1}^0) \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j + \mathbf{z}_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \ddot{\vartheta}_j = \\ &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1}^0 + \boldsymbol{\omega}_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j \times \mathbf{z}_{j-1}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \ddot{\vartheta}_j \end{aligned}$$

Pro translační zrychlení platí:

Časovou derivací rovnice (3.25), substitucí (3.44) a substitucí:

$$\dot{\mathbf{r}}_{j-1,j}^0 = \dot{\mathbf{O}}_j^0 - \dot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 = \boldsymbol{\omega}_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \dot{\vartheta}_j \quad (\text{viz rovnice (3.25)})$$

dostáváme:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{O}}_j^0 &= \ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \boldsymbol{\omega}_j^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{j-1,j}^0 + \dot{z}_{j-1}^0 \sigma_j \ddot{\vartheta}_j + \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \ddot{\vartheta}_j = \\ &= \ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \boldsymbol{\omega}_j^0 \times (\boldsymbol{\omega}_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \dot{\vartheta}_j) + (\boldsymbol{\omega}_{j-1}^0 \times \mathbf{z}_{j-1}^0) \sigma_j \dot{\vartheta}_j + \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \ddot{\vartheta}_j = \\ &= \ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \boldsymbol{\omega}_j^0 \times (\boldsymbol{\omega}_j^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0) + \boldsymbol{\omega}_j^0 \times \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \dot{\vartheta}_j + (\boldsymbol{\omega}_{j-1}^0 \times \mathbf{z}_{j-1}^0) \sigma_j \dot{\vartheta}_j + \mathbf{z}_{j-1}^0 \sigma_j \ddot{\vartheta}_j \end{aligned}$$

Tedy rekurzivní algoritmus vzhledem k s.s.  $F_j$  lze psát:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_j^j &= \dot{\omega}_{j-1}^j + \omega_{j-1}^j \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j \times z_{j-1}^j + z_{j-1}^j \bar{\sigma}_j \ddot{\vartheta}_j = \underline{\mathbf{R}_{j-1}^j}(\dot{\omega}_{j-1}^{j-1} + \omega_{j-1}^{j-1} \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j \times z_{j-1}^{j-1} + z_{j-1}^{j-1} \bar{\sigma}_j \ddot{\vartheta}_j) \\ \ddot{\mathbf{O}}_j^j &= \ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^j + \dot{\omega}_j^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j + \omega_j^j \times (\omega_j^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j) + \omega_j^j \times z_{j-1}^j \sigma_j \dot{\vartheta}_j + (\omega_{j-1}^j \times z_{j-1}^j) \sigma_j \dot{\vartheta}_j + z_{j-1}^j \sigma_j \ddot{\vartheta}_j = \\ &= \underline{\mathbf{R}_{j-1}^j}(\ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^{j-1} + \omega_{j-1}^{j-1} \times z_{j-1}^{j-1} \sigma_j \dot{\vartheta}_j + z_{j-1}^{j-1} \sigma_j \ddot{\vartheta}_j) + \dot{\omega}_j^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j + \omega_j^j \times (\omega_j^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j) + \\ &+ \underline{\omega_j^j \times \mathbf{R}_{j-1}^j z_{j-1}^{j-1} \sigma_j \dot{\vartheta}_j}\end{aligned}$$

Opět platí  $z_{j-1}^{j-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Výsledný rekurzivní algoritmus pro postupný výpočet translačního a úhlového zrychlení koncového efektoru pro D-H úmluvu pro popis s.s. lze tak psát jako:

$$\dot{\omega}_j^j = \mathbf{R}_{j-1}^j(\dot{\omega}_{j-1}^{j-1} + \bar{\sigma}_j(\omega_{j-1}^{j-1} \dot{\vartheta}_j \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\vartheta}_j)) \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{O}}_j^j &= \mathbf{R}_{j-1}^j(\ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^{j-1} + \sigma_j(\omega_{j-1}^{j-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\vartheta}_j + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\vartheta}_j)) + \dot{\omega}_j^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j + \omega_j^j \times (\omega_j^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j) + \\ &+ \omega_j^j \times \mathbf{R}_{j-1}^j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_j \dot{\vartheta}_j\end{aligned} \quad (3.46)$$

kde  $j = 1 \dots i$ ,  $\dot{\omega}_0^* = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{O}}_0^* = \mathbf{0}$  (poloha s.s.  $F_0$  je pevná)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{j-1,j}^j &= \mathbf{O}_j^j - \mathbf{O}_{j-1}^j = -\mathbf{O}_{j-1}^j = \mathbf{R}_{j-1}^j \cdot \mathbf{T}_j^{j-1}[1 : 3, 4] \\ \mathbf{R}_{j-1}^j &= (\mathbf{T}_j^{j-1})^T[1 : 3, 1 : 3]\end{aligned}$$

a  $\omega_{j-1}^{j-1}$ ,  $\omega_j^j$  známe z Algoritmu 3.1. ◆

### ◆ Algoritmus 3.4 (Rekurzivní alg. výpočtu zrychlení pro K-K úmluvu) Pro úhlové zrychlení platí:

Časovou derivací rovnice (3.28) a substitucí (3.44) dostáváme:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_j^0 &= \dot{\omega}_{j-1}^0 + \dot{z}_j^0 \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j + z_j^0 \bar{\sigma}_j \ddot{\vartheta}_j = \dot{\omega}_{j-1}^0 + (\omega_j^0 \times z_j^0) \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j + z_j^0 \bar{\sigma}_j \ddot{\vartheta}_j = \\ &= \underline{\dot{\omega}_{j-1}^0 + \omega_j^0 \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j \times z_j^0 + z_j^0 \bar{\sigma}_j \ddot{\vartheta}_j}\end{aligned}$$

### Pro translační zrychlení platí:

Časovou derivací rovnice (3.29), substitucí (3.44) a substitucí:

$$\dot{\mathbf{r}}_{j-1,j}^0 = \dot{\mathbf{O}}_j^0 - \dot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 = \omega_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + z_j^0 \sigma_j \dot{\vartheta}_j \quad (\text{viz rovnice (3.29)})$$

dostáváme:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{O}}_j^0 &= \ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \dot{\omega}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \omega_{j-1}^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{j-1,j}^0 + \dot{z}_j^0 \sigma_j \dot{\vartheta}_j + z_j^0 \sigma_j \ddot{\vartheta}_j = \\ &= \ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \dot{\omega}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \omega_{j-1}^0 \times (\omega_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + z_j^0 \sigma_j \dot{\vartheta}_j) + (\omega_j^0 \times z_j^0) \sigma_j \dot{\vartheta}_j + z_j^0 \sigma_j \ddot{\vartheta}_j = \\ &= \underline{\ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^0 + \dot{\omega}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0 + \omega_{j-1}^0 \times (\omega_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,j}^0) + \omega_{j-1}^0 \times z_j^0 \sigma_j \dot{\vartheta}_j + \omega_j^0 \times z_j^0 \sigma_j \dot{\vartheta}_j + z_j^0 \sigma_j \ddot{\vartheta}_j}\end{aligned}$$

Tedy rekurzivní algoritmus vzhledem k s.s.  $F_j$  lze psát:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_j^j &= \dot{\omega}_{j-1}^j + \omega_{j-1}^j \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j \times \mathbf{z}_j^j + \mathbf{z}_j^j \bar{\sigma}_j \ddot{\vartheta}_j = \mathbf{R}_{j-1}^j \dot{\omega}_{j-1}^{j-1} + \omega_{j-1}^j \bar{\sigma}_j \dot{\vartheta}_j \times \mathbf{z}_j^j + \mathbf{z}_j^j \bar{\sigma}_j \ddot{\vartheta}_j \\ \ddot{\mathbf{O}}_j^j &= \ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^j + \dot{\omega}_{j-1}^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j + \omega_{j-1}^j \times (\omega_{j-1}^j \times \mathbf{r}_{j-1,j}^j) + \omega_{j-1}^j \times \mathbf{z}_j^j \sigma_j \dot{\vartheta}_j + \omega_j^j \times \mathbf{z}_j^j \sigma_j \dot{\vartheta}_j + \mathbf{z}_j^j \sigma_j \ddot{\vartheta}_j = \\ &= \mathbf{R}_{j-1}^j (\ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^{j-1} + \dot{\omega}_{j-1}^{j-1} \times \mathbf{r}_{j-1,j}^{j-1} + \omega_{j-1}^{j-1} \times (\omega_{j-1}^{j-1} \times \mathbf{r}_{j-1,j}^{j-1})) + \mathbf{R}_{j-1}^j \omega_{j-1}^{j-1} \times \mathbf{z}_j^j \sigma_j \dot{\vartheta}_j + \\ &\quad + \omega_j^j \times \mathbf{z}_j^j \sigma_j \dot{\vartheta}_j + \mathbf{z}_j^j \sigma_j \ddot{\vartheta}_j\end{aligned}$$

Opět platí  $\mathbf{z}_j^j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Výsledný rekurzivní algoritmus pro postupný výpočet translačního a úhlového zrychlení koncového efektoru pro K-K úmluvu pro popis s.s. lze tak psát jako:

$$\dot{\omega}_j^j = \mathbf{R}_{j-1}^j \dot{\omega}_{j-1}^{j-1} + \bar{\sigma}_j (\omega_{j-1}^j \dot{\vartheta}_j \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\vartheta}_j) \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{O}}_j^j &= \mathbf{R}_{j-1}^j (\ddot{\mathbf{O}}_{j-1}^{j-1} + \dot{\omega}_{j-1}^{j-1} \times \mathbf{r}_{j-1,j}^{j-1} + \omega_{j-1}^{j-1} \times (\omega_{j-1}^{j-1} \times \mathbf{r}_{j-1,j}^{j-1})) + \\ &\quad + \sigma_j ((\mathbf{R}_{j-1}^j \omega_{j-1}^{j-1} + \omega_j^j) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\vartheta}_j + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\vartheta}_j) \quad (3.48)\end{aligned}$$

kde  $j = 1 \dots i$ ,  $\dot{\omega}_0^* = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{O}}_0^* = \mathbf{0}$  (poloha s.s.  $F_0$  je pevná)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{j-1,j}^{j-1} &= \mathbf{O}_j^{j-1} - \mathbf{O}_{j-1}^{j-1} = \mathbf{O}_j^{j-1} = \mathbf{T}_j^{j-1} [1 : 3, 4] \\ \mathbf{R}_{j-1}^j &= (\mathbf{T}_j^{j-1})^T [1 : 3, 1 : 3]\end{aligned}$$

a  $\omega_{j-1}^{j-1}$ ,  $\omega_j^j$  známe z Algoritmu 3.2. ◆

Poznamenejme, že rekurzivní algoritmy Algoritmus 3.1-3.4 je možné jednoduchými úpravami převést na tvary uvedené v literatuře [19] a [40].

### Kompensace zrychlení

Zabývejme se opět výsledným zrychlením koncového efektoru  $\dot{\mathbf{X}}$  z (3.8) s uvažováním kompenzačních matic  $\mathbf{T}_0^b$  a  $\mathbf{T}_e^n$ . Vzhledem k faktu, že s.s.  $F_n$  je následován s.s.  $F_e$ , lze psát rekurzivní algoritmus pro D-H (3.46, 3.45) i K-K (3.48, 3.47) úmluvu pro  $j = \{n, e\}$  jako:

Pro D-H úmluvu:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_e^e &= \mathbf{R}_n^e (\dot{\omega}_n^n + \bar{\sigma}_e (\omega_n^n \dot{\vartheta}_e \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\vartheta}_e)}_{=0 \text{ } (\theta_e \text{ neexistuje})}) \quad (3.49) \\ \ddot{\mathbf{O}}_e^e &= \mathbf{R}_n^e (\ddot{\mathbf{O}}_n^n + \sigma_e (\omega_n^n \times \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\vartheta}_e + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\vartheta}_e)}_{=0}) + \dot{\omega}_e^e \times \mathbf{r}_{n,e}^e + \omega_e^e \times (\omega_e^e \times \mathbf{r}_{n,e}^e) + \\ &\quad + \omega_e^e \times \mathbf{R}_n^e \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=0} \sigma_e \dot{\vartheta}_e\end{aligned}$$

Pro K-K úmluvu:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_e^e &= \mathbf{R}_n^e \dot{\omega}_n^n + \underbrace{\bar{\sigma}_e(\omega_e^e \dot{\vartheta}_e \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\vartheta}_e)}_{=0} \\ \ddot{\mathbf{O}}_e^e &= \mathbf{R}_n^e (\ddot{\mathbf{O}}_n^n + \dot{\omega}_n^n \times \mathbf{r}_{n,e}^n + \omega_n^n \times (\omega_n^n \times \mathbf{r}_{n,e}^n)) + \\ &+ \underbrace{\sigma_e((\mathbf{R}_n^e \omega_n^n + \omega_e^e) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\vartheta}_e + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\vartheta}_e)}_{=0}\end{aligned}\quad (3.50)$$

Jednoduchými úpravami lze ukázat, že rovnice (3.49) a (3.50) vedou na stejný vztah:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_e^n &= \dot{\omega}_n^n \\ \ddot{\mathbf{O}}_e^n &= \ddot{\mathbf{O}}_n^n + \dot{\omega}_n^n \times \mathbf{r}_{n,e}^n + \underbrace{\omega_n^n \times (\omega_n^n \times \mathbf{r}_{n,e}^n)}_{\mathbf{S}(\omega_n^n) \cdot \mathbf{S}(\omega_n^n) \cdot \mathbf{r}_{n,e}^n}\end{aligned}\quad (3.51)$$

Zrychlení zobecněných souřadnic manipulátoru  $\ddot{\mathbf{X}}$ , viz 3.8, lze vypočítat jako:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_e^b \\ \dot{\omega}_e^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^b & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_n^b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_e^n \\ \dot{\omega}_e^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^b & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_n^b \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{n,e}^n) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_n^n \\ \dot{\omega}_n^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}^2(\omega_n^n) \cdot \mathbf{r}_{n,e}^n \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^b & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_n^b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & -\mathbf{S}(\mathbf{r}_{n,e}^n) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_n^0)^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{R}_n^0)^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_n^0 \\ \dot{\omega}_n^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^b \cdot \mathbf{S}^2(\omega_n^n) \cdot \mathbf{r}_{n,e}^n \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^b & -\mathbf{R}_0^b \cdot \mathbf{R}_n^0 \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}_{n,e}^n) \cdot (\mathbf{R}_n^0)^T \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_0^b \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{\text{comp}}(\Theta)} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_n^0 \\ \dot{\omega}_n^0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^b \cdot \mathbf{R}_n^0 \cdot \mathbf{S}^2(\omega_n^n) \cdot \mathbf{r}_{n,e}^n \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{\text{add}}(\Theta, \dot{\Theta})}\end{aligned}\quad (3.52)$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_0^b &= \mathbf{T}_0^b[1:3, 1:3], \quad \mathbf{R}_n^0 = \mathbf{T}_n^0[1:3, 1:3] \text{ (z řešení PKÚ, viz (2.33))} \\ \mathbf{S}(\mathbf{r}_{n,e}^n) &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{r}_{n,e}^n[3, 1] & \mathbf{r}_{n,e}^n[2, 1] \\ \mathbf{r}_{n,e}^n[3, 1] & 0 & -\mathbf{r}_{n,e}^n[1, 1] \\ -\mathbf{r}_{n,e}^n[2, 1] & \mathbf{r}_{n,e}^n[1, 1] & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{n,e}^n = \mathbf{T}_e^n[1:3, 4]\end{aligned}$$

a  $\omega_n^n$  známe z Kapitoly 3.1.

Kombinací rovnice (3.38) pro  $i = n$  a rovnice (3.52) dostáváme výsledný vztah pro výpočet zrychlení koncového efektoru manipulátoru:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_{\text{comp}}(\Theta) \cdot (\dot{\mathbf{J}}_n(\Theta) \cdot \dot{\Theta} + \mathbf{J}_n(\Theta) \cdot \ddot{\Theta}) + \mathbf{J}_{\text{add}}(\Theta, \dot{\Theta}) \quad (3.53)$$

kde kompenzační matice  $\mathbf{J}_{\text{comp}}(\Theta)$  je shodná jako kompenzační matice z rovnice (3.36), matice  $\mathbf{J}_{\text{add}}(\Theta, \dot{\Theta})$  je aditivní složka zrychlení způsobená rotací koncového efektoru a  $\mathbf{J}_n(\Theta)$  respektive  $\dot{\mathbf{J}}_n(\Theta)$  je kinematický jakobián, respektive jeho časová derivace pro  $n$  kloubových souřadnic bez uvažovaných kompenzací ( $\mathbf{T}_0^b = \mathbf{T}_e^n = \mathbf{I}$ ).

Porovnáme-li výsledek (3.53) s rovnicí (3.10), dostáváme:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \underbrace{\mathbf{J}_{\text{comp}}(\Theta) \cdot \dot{\mathbf{J}}_n(\Theta) \cdot \dot{\Theta} + \mathbf{J}_{\text{add}}(\Theta, \dot{\Theta})}_{\dot{\mathbf{J}}(\Theta) \cdot \dot{\Theta}} + \underbrace{\mathbf{J}_{\text{comp}}(\Theta) \cdot \mathbf{J}_n(\Theta)}_{\mathbf{J}(\Theta)} \cdot \ddot{\Theta} \quad (3.54)$$

### 3.3 Závislosti rychlosti a zrychlení pro paralelní manipulátory

Na problém nalezení závislosti rychlostí a zrychlení pro paralelní manipulátory lze opět nahlížet dvěma způsoby. V případě dekompozice paralelního mechanismu na nezávislé uzavřené kinematické řetězce, viz Kapitola 2.4.1 je možné zapsat POKÚ každého rozpojeného sériového kinematického řetězce, viz Obrázek 2.18, vyjadřující stejnou rychlost v rozpojeném kloubu *Joint k* (podmínka na uzavření kinematické smyčky):

$$\mathbf{J}_k(\Theta_k) \cdot \dot{\Theta}_1 = \mathbf{J}_{k+B}(\Theta_{k+B}) \cdot \dot{\Theta}_2 \quad (3.55)$$

kde  $\Theta_1$  respektive  $\Theta_2$  vyjadřuje rychlosti aktivních i pasivních kloubových souřadnic v každém rozpojeném kinematickém řetězci a  $\mathbf{J}_k(\Theta_1)$  respektive  $\mathbf{J}_{k+B}(\Theta_2)$  jejich kinematické jakobiány.

Jelikož ze známé polohy aktivních kloubových souřadnic můžeme dopočítat hodnoty souřadnic pasivních, rovnice (3.55) vede na lineární soustavu rovnic, ze které lze pro každou polohu manipulátoru dopočítat vztah mezi pasivními a aktivními rychlostmi kloubových souřadnic. Analogický výsledek lze získat přímou časovou derivací rovnice (2.81). Rychlost koncového efektoru manipulátoru lze potom získat jako řešení POKÚ sériového řetězce vedoucího od základny manipulátoru ke koncovému efektoru, neboť všechny polohy i rychlosti pasivních i aktivních kloubových souřadnic jsou nyní známy. Postup lze analogicky rozšířit i pro výpočet zrychlení koncového efektoru.

V případě dekompozice paralelního mechanismu na sériové manipulátory, viz Kapitola 2.4.2, lze řešit POKÚ stanovením rychlosti přípojných bodů koncového efektoru k jednotlivým kinematickým řetězcům. Z Obrázku 2.20 je zřejmé, že pro danou polohu koncového efektoru, lze stanovit translační rychlosti jeho přípojných bodů  $\mathbf{B}_i$  z translační  $\mathbf{O}_e^b$  a úhlové  $\boldsymbol{\omega}_e^b$  rychlosti koncového efektoru jako:

$$\dot{\mathbf{B}}_i^b = \dot{\mathbf{O}}_e^b + \boldsymbol{\omega}_e^b \times \overrightarrow{\mathbf{O}_e \mathbf{B}_i^b} \quad (3.56)$$

kde  $\dot{\mathbf{O}}_e^b$  a  $\overrightarrow{\mathbf{O}_e \mathbf{B}_i^b}$  jsou určeny pro danou polohu koncového efektoru (řešení PKÚ, IKÚ).

Hodnoty rychlostí aktivních i pasivních kloubových souřadnic lze pak nalézt řešením závislostí rychlostí pro každý dílčí kinematický řetězec manipulátoru, viz Kapitola 3.1.

Vzhledem k tomu, že většina paralelních manipulátorů má pouze jednoduché kinematické řetězce s aktivním kloubem typu **P**, lze často IOKÚ stanovit jednoduše jako projekci rychlostí přípojných bodů  $\mathbf{B}_i$  do směru translační osy aktivní kloubové souřadnice, jak ukazuje následující příklad:

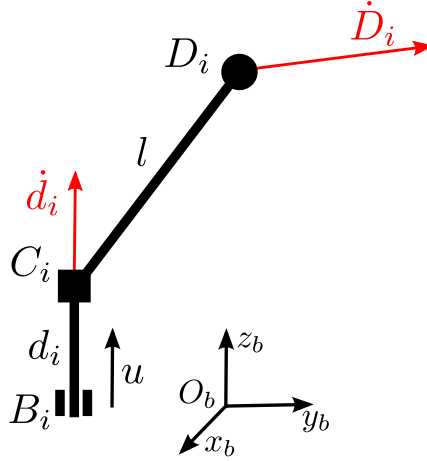
#### ★ Příklad 3.1 (IOKÚ pro PSZ)

Rychlosti přípojných bodů  $\mathbf{D}_i$  koncového efektoru PSZ jsou dány, analogicky k rovnici (3.56) jako (translační rychlost koncového efektoru je nulová  $\Rightarrow \dot{\mathbf{O}}_e^b = \mathbf{0}$ ):

$$\dot{\mathbf{D}}_i^b = \boldsymbol{\omega}_e^b \times \overrightarrow{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i^b} \quad (3.57)$$

pro  $i = 1 \dots 3$ .

Z Obrázku 3.2 je zřejmé, že projekce rychlosti aktivní kloubové souřadnice  $\dot{d}_i$  do směru ramene  $\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i$  musí být totožná, jako projekce rychlosti přípojného bodu  $\dot{\mathbf{D}}_i$  do stejného směru.



Obrázek 3.2: Projekce rychlostí v kinematickém řetězci PSZ ( $\mathbf{u}$  je jednotkový směrový vektor aktuátorů)

Využijeme-li rovnici (3.57) a vlastností vektorového a skalárního součinu, dostaneme:

$$\begin{aligned} (\overline{C_i D_i^b})^T \cdot (\dot{d}_i \vec{u}) &= (\overline{C_i D_i^b})^T \cdot \dot{D}_i^b \\ \dot{d}_i &= \frac{(\overline{C_i D_i^b})^T \cdot (\boldsymbol{\omega}_e^b \times \overline{O_e D_i^b})}{(\overline{C_i D_i^b})^T \cdot \vec{u}} \\ \dot{d}_i &= \frac{(\overline{O_e D_i^b} \times \overline{C_i D_i^b})^T \cdot \boldsymbol{\omega}_e^b}{(\overline{C_i D_i^b})^T \cdot \vec{u}} \end{aligned} \quad (3.58)$$

IOKÚ pro PSZ lze tedy psát jako:

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\Theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}_e^b \quad (3.59)$$

kde inverzní kinematický jakobián  $\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\Theta})$  je:

$$\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\Theta}) = \begin{bmatrix} \frac{(\overline{O_e D_1^b} \times \overline{C_1 D_1^b})^T}{(\overline{C_1 D_1^b})^T \cdot \vec{u}} \\ \dots \\ \frac{(\overline{O_e D_2^b} \times \overline{C_2 D_2^b})^T}{(\overline{C_2 D_2^b})^T \cdot \vec{u}} \\ \dots \\ \frac{(\overline{O_e D_3^b} \times \overline{C_3 D_3^b})^T}{(\overline{C_3 D_3^b})^T \cdot \vec{u}} \end{bmatrix}$$

a  $\boldsymbol{\Theta} = [d_1 \ d_2 \ d_3]^T$ .

Pro výpočet rychlosti koncového efektoru, definovaného derivacemi zobecněných souřadnic  $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T$ , viz Kapitola 1.4.3, z úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}_e^b$  použijeme Eulerovy kinematické rovnice, viz rovnice (2.22).

Analýza závislostí zrychlení by vedla opět na nutnost výpočtu časové derivace  $\mathbf{J}^{-1}$ , kterou je možné získat podobně jako v Kapitole 3.2. ★

### 3.4 Singulární polohy manipulátoru

Singulární polohy manipulátorů jsou specifické polohy koncového efektoru, které významně ovlivňují jeho kinematické vlastnosti. Tuto skutečnost je třeba brát vždy v úvahu při syntéze, analýze i řízení manipulátorů.

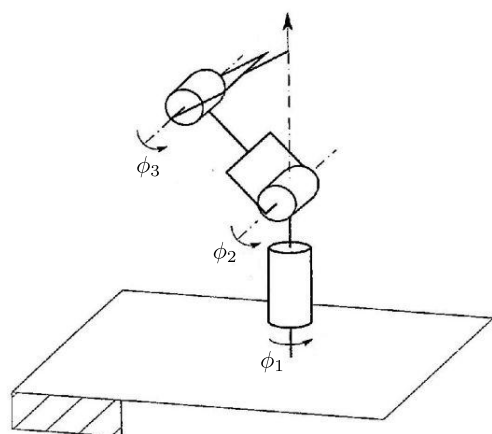
Z Kapitoly 3 vyplývá, že mezi rychlostmi kloubových a zobecněných souřadnic manipulátoru existuje, pro danou *konstantní* polohu manipulátoru, *lineární závislost* daná kinematickým či analytickým jakobiánem, dále jen jakobiánem, jako:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\Theta) \cdot \dot{\Theta} \quad (3.60)$$

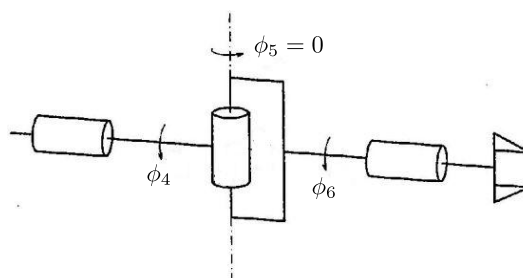
Předpokládejme dále obecný případ *redundantních* manipulátorů, tedy manipulátorů, kde počet DoF koncového efektoru  $M$  je menší než počet nezávislých aktivních kloubových souřadnic  $N$ . V případě neredundantních manipulátorů diskutovaných v předchozích kapitolách platí  $M = N$ . Jakobián  $\mathbf{J}(\Theta) = \mathbf{J}$  bude tedy reprezentovaný maticí tvaru  $[M \times N]$  s hodnotou  $\text{rank}(\mathbf{J}) = r$ .

#### Singularity pro sériové manipulátory

Singulární polohou sériového manipulátoru, tzv. *sériovou singularitou* rozumíme takovou polohu koncového efektoru, pro kterou jakobián  $\mathbf{J}$  ztrácí svou hodnotu  $r < \min(M, N)$ . Ze závislosti mezi rychlostmi (3.60) lze tedy usuzovat, že existuje nenulová rychlost kloubových souřadnic  $\dot{\Theta} \neq \mathbf{0}$  pro kterou se koncový efektor nemůže pohybovat  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ . Zároveň platí, že v blízkosti takových poloh je pro malé rychlosti koncového efektoru zapotřebí velkých rychlostí kloubových souřadnic. Příklad singulární polohy pro antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím z Kapitoly 1.4.1 ukazuje Obrázek 3.3.



(a) Singulární poloha AM - rychlost kloubových souřadnic  $\phi_1 \neq 0$ ,  $\phi_2 = \phi_3 = 0$  generuje nulovou rychlost koncového efektoru



(b) Singulární poloha SZ - rychlost kloubových souřadnic  $\phi_4 = -\phi_6$ ,  $\phi_5 = 0$  generuje nulovou rychlost koncového efektoru

Obrázek 3.3: Sériové singulární polohy AM+SZ

### Singularity pro paralelní manipulátory

Časovou derivací vztahu (2.87) řešící IKÚ pro paralelní manipulátory lze odvodit formální tvar inverzního jakobiánu jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \dot{\Theta} &= \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\Theta} &= \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}}_{\mathbf{J}^{-1}} \cdot \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{X}} &= \underbrace{\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbf{J}} \cdot \dot{\Theta} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Singulární polohy pro paralelní manipulátory lze tedy dělit na tři typy:

- Matice  $\mathbf{A}$  nemá plnou hodnost  $\Rightarrow$  *sériová singularita* (jakobián  $\mathbf{J}$  nemá plnou hodnost). Tento typ singularity koresponduje se sériovou singulární polohou sériových manipulátorů reprezentující nezávislé kinematické řetězce manipulátoru. Tedy v takovém případě opět existuje nenulová rychlost kloubových souřadnic  $\dot{\Theta} \neq \mathbf{0}$  pro kterou se koncový efektor nemůže pohybovat  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ . Tento typ singularity bývá často chybně zaměňován s hranicí pracovního prostoru manipulátoru, pro kterou platí to samé (obecně však sériová singularita na hranici pracovního prostoru nemusí nastávat).
- Matice  $\mathbf{B}$  nemá plnou hodnost  $\Rightarrow$  *paralelní singularita* (inverzní jakobián  $\mathbf{J}^{-1}$  nemá plnou hodnost). V takovém případě existuje nenulová rychlost  $\dot{\mathbf{X}} \neq \mathbf{0}$  koncového efektoru generující nulovou rychlost  $\dot{\Theta} = \mathbf{0}$  aktivních kloubových souřadnic. Koncový efektor tedy získává tzv. neřiditelné stupně volnosti. V praxi je nezbytně nutné se okolí takových poloh vyvarovat, neboť manipulátor se v nich stává v podstatě neřiditelným.
- Matice  $\mathbf{A}$  ani  $\mathbf{B}$  nemá plnou hodnost. Nastávají oba typy singularit současně.

#### ★ Příklad 3.2 (Singulární polohy PSZ)

Z rovnice pro výpočet inverzního kinematického jakobiánu (3.58) lze odvodit tvar matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ :

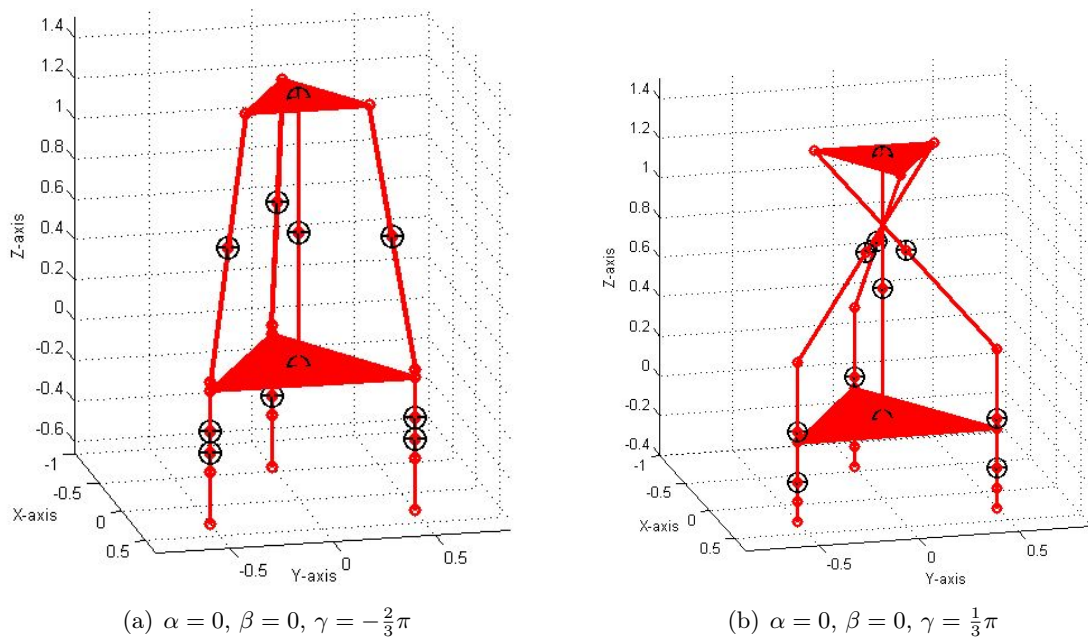
$$\mathbf{A} \cdot \dot{\Theta} = \mathbf{B} \cdot \omega_e^b \quad \Rightarrow \quad \dot{\Theta} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}}_{\mathbf{J}^{-1}} \cdot \omega_e^b \quad (3.62)$$

kde

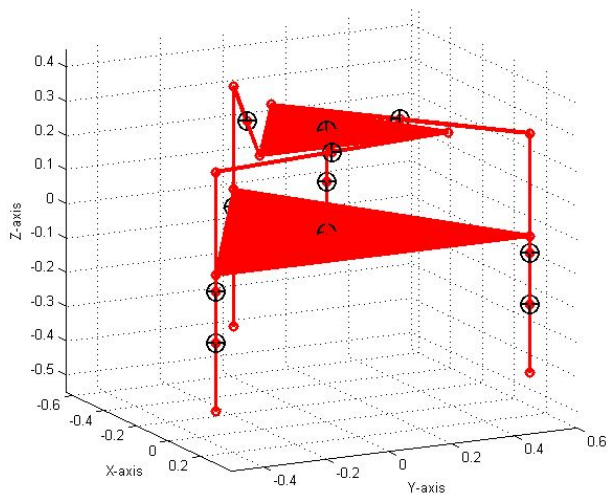
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\overline{\mathbf{C}_1 \mathbf{D}_1^b})^T \cdot \vec{u} & 0 & 0 \\ 0 & (\overline{\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_2^b})^T \cdot \vec{u} & 0 \\ 0 & 0 & (\overline{\mathbf{C}_3 \mathbf{D}_3^b})^T \cdot \vec{u} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_1^b} \times \overline{\mathbf{C}_1 \mathbf{D}_1^b})^T \\ \dots \\ (\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_2^b} \times \overline{\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_2^b})^T \\ \dots \\ (\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_3^b} \times \overline{\mathbf{C}_3 \mathbf{D}_3^b})^T \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Z matice  $\mathbf{A}$  vyplývá, že PSZ se nachází v sériové singulární poloze pokud je alespoň jedna dvojice vektorů  $\overline{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i^b}$  a  $\vec{u}$  vzájemně kolmá, viz Obrázek 3.5. Z matice  $\mathbf{B}$  vyplývá, že PSZ se nachází v paralelní singulární poloze pokud je alespoň jeden vektor  $(\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i^b} \times \overline{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i^b})$  nulovým vektorem ( $\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i^b}$  a  $\overline{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i^b}$  jsou vzájemně rovnoběžné), nebo jsou vektory  $(\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i^b} \times \overline{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i^b})$  lineárně závislé, viz Obrázek 3.4 a Obrázek 3.5.





Obrázek 3.4: Paralelní singulární polohy PSZ, vektory  $O_e D_i^b \times C_i D_i^b$  jsou lineárně závislé (leží v jedné rovině se vzájemným pootočením o  $\frac{2}{3}\pi$ )



Obrázek 3.5: PSZ současně v sériové i paralelní singulární poloze,  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , návrhové parametry  $\xi$  jsou odlišné od předchozího případu, vektory  $(O_e D_i^b \times C_i D_i^b)$  jsou lineárně závislé, vektory  $C_i D_i$  a  $u$  jsou kolmé

★

## Kapitola 4

# Numerický přístup řešení kinematiky manipulátorů

V předchozích kapitolách byl uveden obecný přístup k řešení kinematiky manipulátorů. *Přímá kinematika pro sériové manipulátory* a *inverzní kinematika pro paralelní manipulátory* (uvážujeme jednoduché kinematické řetězce) je relativně jednoduchá a řešitelná analyticky. Jejich implementace do řídicích algoritmů manipulátorů proto většinou nečiní větší potíže a výpočetní náročnost takových úloh je uspokojivá vzhledem k nasazení v současných průmyslových počítačích. Opačné kinematické úlohy (*inverzní pro sériové manipulátory* a *přímá pro paralelní manipulátory*) lze uspokojivě řešit pouze ve specifických případech a obecně s sebou přinášejí řadu problémů při jejich implementaci do řídicích algoritmů. Mezi nejvýznamnější můžeme označit tyto následující:

- v obecném případě neexistuje analytické řešení
- metody založené na nalezení charakteristického polynomu manipulátoru (dynamická eliminace, Gröbnerovy báze) přinášejí nemalé problémy vzhledem ke stabilitě a přesnosti řešení (hledání kořenů polynomů vysokých řádů)
- výpočetní náročnost metod (intervalová analýza, homotopie, dosazování do komplikovaných algebraických vztahů) je příliš velká pro implementaci do řídicích algoritmů (v reálném čase)
- nalezení více možných řešení kinematických úloh vyžaduje implementovat metody pro rozhodování o aktuálním korektním řešení

V následujícím textu se omezíme pouze na numerické metody výpočtu **IKÚ pro sériové manipulátory**. Metoda může být ekvivalentně snadno rozšířena i na manipulátory paralelní. Při řešení IKÚ máme k dispozici polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic:

$$\Theta = [ \vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \dots \quad \vartheta_N ]^T$$

Dále pak lineární vztah mezi rychlostmi aktivních kloubových a zobecněných souřadnic pro konstantní polohu koncového efektoru, viz rovnice (3.60):

$$\dot{X} = J(\Theta) \cdot \dot{\Theta} \quad (4.1)$$

Zabývejme se dále některými vlastnostmi jakobiánu  $J$ . Provedeme-li singulární dekompozici matice  $J$ , jejíž hodnota je rovna  $r$ , dostáváme:

$$J = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (4.2)$$

kde matice  $U_{M \times M}$  respektive  $V_{N \times N}$  jsou unitární matice jejichž sloupce vyjadřují levý respektive pravý singulární vektor matice  $J$ .

Matice  $\Sigma_{M \times N}$  je ve tvaru:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times (N-r)} \\ \mathbf{0}_{(M-r) \times r} & \mathbf{0}_{(M-r) \times (N-r)} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

kde  $\mathbf{S}$  je diagonální matice s diagonálními prvky  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ , pro které platí

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$$

reprezentující singulární čísla matice  $\mathbf{J}$ .

Rozepsáním rovnice (4.2) s pomocí (4.3) dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{U} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{V}^T \cdot \dot{\Theta} \\ \dot{\mathbf{X}} &= \sum_{i=1}^r \sigma_i \cdot \mathbf{U}[:, i] \cdot \mathbf{V}[:, i]^T \cdot \dot{\Theta} \\ \dot{\mathbf{X}} &= \sigma_1 \cdot \mathbf{U}[:, 1] \cdot \mathbf{V}[:, 1]^T \cdot \dot{\Theta} + \sigma_2 \cdot \mathbf{U}[:, 2] \cdot \mathbf{V}[:, 2]^T \cdot \dot{\Theta} + \dots + \sigma_r \cdot \mathbf{U}[:, r] \cdot \mathbf{V}[:, r]^T \cdot \dot{\Theta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nutně tedy platí následující tvrzení, grafické znázornění viz Obrázek 4.1:

- Označíme-li  $\mathbf{V}^T \cdot \dot{\Theta} = \mathbf{a}$ , kde  $\mathbf{a} = [a_1 \dots a_i \dots a_N]^T$  a  $a_i \in \mathbb{R}$ , platí  $\dot{\Theta} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}$ , tedy sloupce  $\mathbf{V}[:, 1]$  až  $\mathbf{V}[:, r]$  matice  $\mathbf{V}$  generují prostor kloubových rychlostí  $\dot{\Theta}$ , tzv. doplněk *null space*  $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ , označený jako  $\mathcal{N}^\perp(\mathbf{J})$ , viz následující bod.

$$\dim(\mathcal{N}^\perp(\mathbf{J})) = r$$

- Zřejmě platí, že zbývající sloupce  $\mathbf{V}[:, r+1]$  až  $\mathbf{V}[:, N]$  generují prostor takových rychlostí kloubových souřadnic  $\dot{\Theta}$ , pro který je rychlost koncového efektoru **vždy** nulová  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ , označme jej jako tzv. *null space*  $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ .

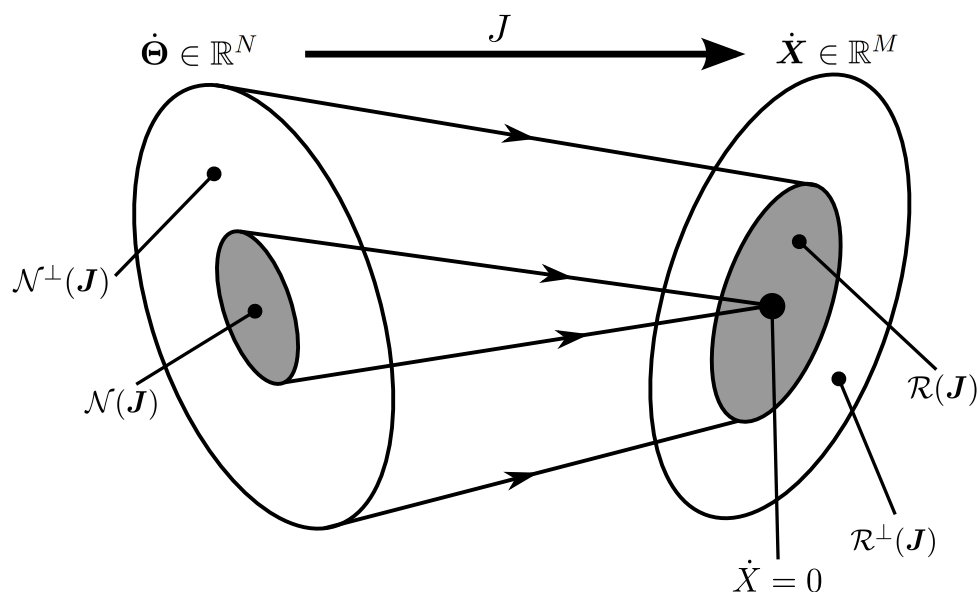
$$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = N - r$$

- Sloupce  $\mathbf{U}[:, 1]$  až  $\mathbf{U}[:, r]$  matice  $\mathbf{U}$  potom generují prostor **dosahitelných** rychlostí koncového efektoru  $\dot{\mathbf{X}}$ , označme jej jako tzv. *range space*  $\mathcal{R}(\mathbf{J})$ .

$$\dim(\mathcal{R}(\mathbf{J})) = r$$

- Zřejmě platí, že zbývající sloupce  $\mathbf{U}[:, r+1]$  až  $\mathbf{U}[:, M]$  generují prostor **nedosažitelných** rychlostí koncového efektoru  $\dot{\mathbf{X}}$ , tzv. doplněk *range space*  $\mathcal{R}(\mathbf{J})$ , označený jako  $\mathcal{R}^\perp(\mathbf{J})$ .

$$\dim(\mathcal{R}^\perp(\mathbf{J})) = M - r$$



Obrázek 4.1: Prostory generované vlastními vektory jakobiánu  $\mathbf{J}$

## 4.1 IKÚ pro neredundantní manipulátory

Diskutujeme nejprve případ numerického řešení IKÚ pro neredundantní manipulátory, tedy pro případ, kdy počet DoF koncovému efektoru přesně odpovídá počtu nezávislých aktivních kloubových souřadnic manipulátoru ( $M = N$ ). Předpokládejme, že jakobián  $\mathbf{J}$  není singulární maticí, tzn. jeho hodnota je plná,  $r = M = N$ . Z předchozí analýzy matice jakobiánu  $\mathbf{J}$  vyplývá, že neexistují žádné nenulové hodnoty rychlostí aktivních kloubových souřadnic  $\dot{\Theta}$ , které by generovaly nulový pohyb koncového efektoru,  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ , neboť  $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = N - r = N - N = 0$ .

Inverzí rovnice (4.1), zavedením diskrétních časových okamžiků  $t_k, t_{k+1} \dots$ , časového přírůstku  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  a následnou aproximací derivace  $\dot{\Theta}$  dostáváme:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \mathbf{J}^{-1}(\Theta) \cdot \dot{\mathbf{X}} \\ \frac{\Theta(t_{k+1}) - \Theta(t_k)}{\Delta t} &= \mathbf{J}^{-1}(\Theta(t_k)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t_k) \\ \Theta(t_{k+1}) &= \Theta(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\Theta(t_k)) \cdot \dot{\mathbf{X}}(t_k) \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (4.5)$$

Bohužel, výpočet IKÚ daný rovnicí (4.5), využívající přístup klasické numerické integrace rychlosti koncového efektoru, v praktických aplikacích nelze použít, neboť vlivem nepřesností dochází k nasčítávání numerických chyb v čase.

Alternativním přístupem je zavedení chyby  $\mathbf{e}$  mezi požadovanou  $\mathbf{X}_d$  a aktuální  $\mathbf{X}$  polohou zobecněných souřadnic, získanou z dostupných hodnot naměřených kloubových souřadnic  $\Theta$  prostřednictvím PKÚ. Snadno tedy vyjádříme, pomocí rovnice (4.1), i její časovou derivaci:

$$\mathbf{e} = \mathbf{X}_d - \mathbf{X} = \mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\Theta) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{X}}_d - \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{X}}_d - \mathbf{J}(\Theta) \cdot \dot{\Theta} \end{aligned} \quad (4.7)$$

kde  $\mathbf{G}(\Theta)$  označuje řešení PKÚ, viz rovnice (2.37), z Kapitoly 2.3.1.

Rovnice (4.7) reprezentuje vývoj chyby výpočtu zobecněných souřadnic  $\mathbf{X}$  v čase. Vhodnou volbou závislosti mezi  $\dot{\mathbf{e}}$  a  $\mathbf{X}$  lze zajistit konvergenci  $\mathbf{e}$  k nule v exponenciálním čase. Položme proto  $\dot{\mathbf{e}}$   $K$ -maticovému násobku záporně vzaté odchylky  $\mathbf{e}$ :

$$\dot{\mathbf{e}} \stackrel{!}{=} -\mathbf{K} \cdot \mathbf{e} \quad (4.8)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_d - \mathbf{J}(\Theta) \cdot \dot{\Theta} = -\mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\Theta)] \quad (4.9)$$

Je zřejmé, že rovnice (4.8) reprezentuje lineární systém chyby  $\mathbf{e}$ . Pokud je matice  $\mathbf{K}$  volena jako pozitivně definitní, lineární systém chyby  $\mathbf{e}$  je asymptoticky stabilní, chyba  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$ , tedy  $\mathbf{G}(\Theta) \rightarrow \mathbf{X}_d$  a tedy  $\Theta$  konverguje ke skutečným hodnotám kloubových souřadnic odpovídajícím aktuální poloze koncového efektoru.

Rovnice (4.9) lze přepsat do tvaru:

$$\dot{\Theta} = \mathbf{J}^{-1}(\Theta) \left( \dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\Theta)] \right) \quad (4.10)$$

Aproximací derivace  $\dot{\Theta}$  v (4.10) dostáváme předpis pro korektní numerické řešení IKÚ neredundantních sériových manipulátorů:

$$\Theta(t_{k+1}) = \Theta(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\Theta(t_k)) \left( \dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\Theta(t_k))] \right) \Delta t \quad (4.11)$$

Poznamenejme, že vztah (4.11) pro  $\dot{\mathbf{X}}_d = \mathbf{0}$  odpovídá Newtonovu algoritmu numerického hledání řešení  $\Theta$  rovnice  $\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\Theta) = \mathbf{0}$ .

## 4.2 IKÚ pro redundantní manipulátory

V případě numerického řešení IKÚ pro neredundantní manipulátory, kdy počet DoF koncovému efektoru je menší než počet nezávislých aktivních kloubových souřadnic manipulátoru ( $M < N$ ), existují takové rychlosti aktivních kloubových souřadnic  $\dot{\Theta}$ , které generují nulový pohyb koncového efektoru  $\dot{X}$ . Tyto rychlosti kloubových souřadnic leží v prostoru  $\mathcal{N}(\mathbf{J})$ , jehož dimenze je  $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = N - r = N - M$ . Opět předpokládáme, že jakobián  $\mathbf{J}$  má plnou hodnotu, tedy  $r = \min(M, N) = M$ . V takovém případě lze říci, že pokud rychlosti kloubových souřadnic  $\dot{\Theta}^*$  jsou řešením rovnice (4.1), potom jsou řešením i rychlosti (rovnice má nekonečně mnoho řešení):

$$\dot{\Theta} = \dot{\Theta}^* + \mathbf{P} \cdot \dot{\Theta}_0 \quad (4.12)$$

kde  $\mathbf{P}$  je matice  $[N, N]$ , jejíž sloupce generují null space jakobiánu  $\mathbf{J}$ , tedy platí  $\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{N}(\mathbf{J})$ .  $\dot{\Theta}_0 \in \mathbb{R}^N$  je libovolný vektor.

Toto tvrzení lze snadno dokázat dosazením řešení (4.12) do rovnice (4.1).

$$\mathbf{J} \cdot \dot{\Theta} = \mathbf{J} \cdot (\dot{\Theta}^* + \mathbf{P} \cdot \dot{\Theta}_0) = \mathbf{J} \cdot \dot{\Theta}^* + \underbrace{\mathbf{J} \cdot \mathbf{P} \cdot \dot{\Theta}_0}_{=0} = \dot{X}$$

Jinými slovy můžeme říci, že pro redundantní manipulátory lze nalézt takové rychlosti kloubových souřadnic  $\dot{\Theta} = \mathbf{P} \cdot \dot{\Theta}_0$ , které **negenerují** rychlost (tedy ani změnu polohy) koncového efektoru manipulátoru  $\dot{X}$  a způsobují pouze "vnitřní pohyb" mechanické konstrukce manipulátoru. Toho lze využít pro překonfigurování manipulátoru při konstantní poloze koncového efektoru za účelem splnění či optimalizování nějakého přídavného kritéria, např. udržování manipulátoru co nejdál od možných singulárních poloh, od limitních poloh aktuátorů či od překážek v pracovním prostoru.

Předpokládejme, že chceme docílit zadaného pohybu  $\dot{X}$  koncového efektoru redundantního manipulátoru, tedy splnění podmínky  $\dot{X} = \mathbf{J} \cdot \dot{\Theta}$  (primární kritérium - vazební podmínka, která musí být vždy splněna) a zároveň budeme požadovat, aby se rychlosti kloubových souřadnic  $\dot{\Theta}$  co nejvíce blížily požadované hodnotě  $\dot{\Theta}_0$  (dané sekundárním, přídavným kritériem).

Definujme tedy kriteriální funkci:

$$Q(\dot{\Theta}) = \frac{1}{2}(\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_0)^T \cdot (\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_0) \quad (4.13)$$

Prostřednictvím Lagrangeových multiplikátorů  $\lambda \in \mathbb{R}^M$  zavedeme rozšířenou kriteriální funkci zohledňující vazební podmínku:

$$Q(\dot{\Theta}, \lambda) = \frac{1}{2}(\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_0)^T \cdot (\dot{\Theta} - \dot{\Theta}_0) + \lambda^T (\dot{X} - \mathbf{J} \cdot \dot{\Theta}) \quad (4.14)$$

Z nutné podmínky existence extrému dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\dot{\Theta}, \lambda)}{\partial \dot{\Theta}} &= \dot{\Theta} - \dot{\Theta}_0 - \mathbf{J}^T \cdot \lambda = 0 \\ \dot{\Theta} &= \dot{\Theta}_0 + \mathbf{J}^T \cdot \lambda \end{aligned} \quad (4.15)$$

Vynásobením rovnice (4.15) zleva  $\mathbf{J}$  s respektováním rovnice (4.1) a vyjádřením multiplikátoru  $\lambda$  dostáváme:

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{J} \cdot \dot{\Theta}}_{\dot{X}} &= \mathbf{J} \cdot \dot{\Theta}_0 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \lambda \\ \lambda &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} (\dot{X} - \mathbf{J} \cdot \dot{\Theta}_0) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dosazením rovnice (4.16) zpět do (4.15) dostáváme výsledné rychlosti kloubových souřadnic  $\dot{\Theta}$  splňující primární a minimalizující sekundární kritérium.

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= \dot{\Theta}_0 + \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J} \cdot \dot{\Theta}_0) \\ \dot{\Theta} &= \mathbf{J}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J}) \cdot \dot{\Theta}_0\end{aligned}\quad (4.17)$$

kde  $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}$  je pravá zobecněná inverze jakobiánu  $\mathbf{J}$ .

Pro  $\dot{\Theta}_0 = \mathbf{0}$  rovnice (4.17) přejde na tvar standartní zobecněné inverze  $\dot{\Theta} = \mathbf{J}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{X}}$  a sekundární kritérium tak minimalizuje velikosti rychlostí  $\|\dot{\Theta}\|$  kloubových souřadnic  $\dot{\Theta}$ . Z porovnání výsledku (4.17) s rovnicí (4.12) je zřejmé, že člen  $\mathbf{J}^\dagger \cdot \dot{\mathbf{X}}$  představuje řešení  $\dot{\Theta}^*$  a člen  $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \cdot \mathbf{J})$  matici  $\mathbf{P}$  generující null space jakobiánu  $\mathbf{J}$  prostřednictvím souřadnic  $\dot{\Theta}_0$ .

Nechť je vektor  $\dot{\Theta}_0$  dán gradientem sekundární kritériální funkce  $\mathbf{w}(\Theta)$  jako:

$$\dot{\Theta}_0 = k_0 \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{w}(\Theta)}{\partial \Theta} \right) \quad (4.18)$$

kde  $k_0 \in \mathbb{R}$  je konstanta zesílení.

Minimalizováním vzdálenosti  $\dot{\Theta}$  a  $\dot{\Theta}_0$  z kritéria (4.13) se tedy optimálně blížíme ke gradientu sekundární kritériální funkce  $\mathbf{w}(\Theta)$ , tedy manipulátor se pohybuje takovým způsobem, že kritériální funkce  $\mathbf{w}(\Theta)$  je maximalizována při současném dodržení požadované trajektorie pohybu koncového efektoru (primární kritérium).

Mezi nejčastější volby kritériální funkce  $\mathbf{w}(\Theta)$  patří následující:

- Vzdálenost od singulárních poloh:

$$\mathbf{w}(\Theta) = \sqrt{\det(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)} \quad (4.19)$$

kde kritériální funkce představuje odmocninu ze součinu singulárních čísel  $\sigma_i$  jakobiánu  $\mathbf{J}$ . Maximalizováním kritériální funkce tedy rekonfigurujeme mechaniku manipulátoru takovým způsobem, aby se nacházel co nejdále od svých singulárních poloh ( $\sigma_i = 0$ ).

- Vzdálenost od limitních poloh  $n$  aktuátorů:

$$\mathbf{w}(\Theta) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\vartheta_i - \bar{\vartheta}_i}{\vartheta_i^{max} - \vartheta_i^{min}} \right) \quad (4.20)$$

kde  $\bar{\vartheta}_i = \frac{\vartheta_i^{max} - \vartheta_i^{min}}{2}$  a  $\vartheta_i^{max}$  respektive  $\vartheta_i^{min}$  označuje maximální respektive minimální polohu aktuátoru. Maximalizací kritériální funkce rekonfigurujeme mechaniku manipulátoru takovým způsobem, aby se aktuátory manipulátoru udržovaly co nejdále od svých limitních poloh.

Nahradíme-li nyní inverzi  $\mathbf{J}^{-1}$  v algoritmu výpočtu IKÚ (4.9) zobecněnou inverzí se zahrnutým sekundárním kritériem (4.17) dostáváme:

$$\dot{\Theta} = \mathbf{J}^\dagger(\Theta) \left( \dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\Theta)] \right) + \left( \mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger(\Theta) \cdot \mathbf{J}(\Theta) \right) \cdot \dot{\Theta}_0 \quad (4.21)$$

Opět aproximací derivace  $\dot{\Theta}$  v (4.21) dostáváme předpis pro korektní numerické řešení IKÚ redundantních sériových manipulátorů se sekundárním kritériem definovaným funkcí  $\mathbf{w}(\Theta)$ :

$$\begin{aligned}\Theta(t_{k+1}) &= \Theta(t_k) + \left[ \mathbf{J}^\dagger(\Theta(t_k)) \left( \dot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}[\mathbf{X}_d - \mathbf{G}(\Theta(t_k))] \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger(\Theta(t_k)) \cdot \mathbf{J}(\Theta(t_k)) \right) \cdot \dot{\Theta}_0(t_k) \right] \Delta t\end{aligned}\quad (4.22)$$

### 4.3 IKÚ pro polohy manipulátoru v blízkosti singularit

Dosud jsme se zabývali pouze problémem nalezení numerického algoritmu výpočtu IKÚ v případě, kdy se sériový manipulátor nenalézá v sériové singulární poloze. Tzn. jakobián  $\mathbf{J}$  má plnou hodnotu  $r = \min(M, N)$ . Není-li tento předpoklad splněn (manipulátor se nachází v singulární poloze) nastává problém s algoritmy IKÚ pro neredundantní, viz Kapitola 4.1 i redundantní manipulátory, viz Kapitola 4.2:

- Neredundantní manipulátory ( $M = N$ ):  
Jakobián  $\mathbf{J}$  je singulární maticí, neexistuje tedy jeho inverze  $\mathbf{J}^{-1}$ . V blízkosti singulární polohy je pak operace inverze špatně podmíněná a algoritmus IKÚ vede na velké hodnoty rychlostí kloubových souřadnic (přímo v singulární poloze na nekonečně velké hodnoty).
- Redundantní manipulátory ( $M < N$ ):  
Matice  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T$  je singulární, neexistuje tedy její inverze  $(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}$  a tedy ani zobecněná inverze  $\mathbf{J}^\dagger$ . V blízkosti singulárních poloh nastává stejný problém jako v předchozím bodě.

Řešení přináší využití metody tlumených nejmenších čtverců (neredundantní manipulátory) či tlumené pseudoinverze (redundantní manipulátory). Obě metody vycházejí z předpokladu, že v singulární poloze manipulátoru není možné, z výše uvedených důvodů, přesně splnit vztah mezi zobecněnými a kloubovými rychlostmi  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\Theta}$  a zároveň udržet rychlosti kloubových souřadnic  $\dot{\Theta}$  v přijatelných mezích. Jako kompromisní řešení budeme tedy minimalizovat smíšené kritérium typu:

$$Q(\dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \cdot (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J} \cdot \dot{\Theta})^T \cdot (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J} \cdot \dot{\Theta}) + \alpha^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \dot{\Theta}^T \cdot \dot{\Theta} \quad (4.23)$$

kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  je váhový koeficient. Větší hodnoty  $\alpha$  vedou na nižší hodnoty rychlostí kloubových souřadnic  $\dot{\Theta}$  na úkor nepřesnosti sledování požadované trajektorie koncovým efektem a naopak.

#### Neredundantní manipulátory ( $M = N$ )

Z nutné podmínky existence extrému dostáváme kritéria (4.23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\dot{\Theta})}{\partial \dot{\Theta}} &= \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\Theta} + \alpha^2 \cdot \dot{\Theta} - \mathbf{J}^T \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0 \\ \dot{\Theta} &= (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Inverze jakobiánu  $\mathbf{J}^{-1}$  v algoritmech výpočtu IKÚ v Kapitole 4.1 je tedy nahrazena v blízkosti singularit tlumenou verzí s koeficientem tlumení  $\alpha > 0$ :

$$\mathbf{J}^{-1} \Rightarrow (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \quad (4.25)$$

Tedy:

$$\dot{\Theta} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}} \Rightarrow \dot{\Theta} = (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (4.26)$$

#### Redundantní manipulátory ( $M < N$ )

Analogicky lze získat tlumenou verzí pseudoinverze  $\mathbf{J}^\dagger$ , viz [20]. Pseudoinverze jakobiánu  $\mathbf{J}^\dagger$  v algoritmech výpočtu IKÚ v Kapitole 4.2 je tedy nahrazena v blízkosti singularit tlumenou verzí s koeficientem tlumení  $\alpha > 0$ :

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1} \Rightarrow \mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \quad (4.27)$$

Provedeme-li nyní singulární dekompozici jakobiánu  $\mathbf{J}$ , viz (4.2), v tlumené verzi inverze (4.25), dostáváme:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T &= (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^T \\
 (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T &= (\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^2 + \alpha^2 \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{V}^T)^{-1} \cdot \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^T \\
 (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T &= (\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^2 + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{V}^T) \cdot \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{U}^T \\
 (\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{J}^T &= \mathbf{V} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{\Sigma}^2 + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma}}_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \cdot \mathbf{U}^T
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

kde

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \alpha^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\sigma_2^2 + \alpha^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_r}{\sigma_r^2 + \alpha^2} \end{bmatrix}$$

Rozepsáním rovnice (4.26) pomocí (4.28) dostáváme důkaz, že singulární jakobián  $\mathbf{J}$  (alespoň jedno jeho singulární číslo  $\sigma_i = 0$ ) nevede na nekonečně velké rychlosti kloubových souřadnic  $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \cdot \mathbf{V}[:, i] \cdot \mathbf{U}[:, i]^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \xrightarrow{\sigma_i \rightarrow 0} \infty \tag{4.29}$$

Chyba  $\mathbf{e}_{\dot{\boldsymbol{\Theta}}}$  ve výpočtu rychlostí kloubových souřadnic  $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$  způsobená tlumením lze vyjádřit jako:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{\dot{\boldsymbol{\Theta}}} &= \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \cdot \mathbf{V}[:, i] \cdot \mathbf{U}[:, i]^T \cdot \dot{\mathbf{X}} - \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} \cdot \mathbf{V}[:, i] \cdot \mathbf{U}[:, i]^T \cdot \dot{\mathbf{X}} = \\
 &= \sum_{i=1}^r \frac{-\alpha^2}{(\sigma_i^2 + \alpha^2)\sigma_i} \cdot \mathbf{V}[:, i] \cdot \mathbf{U}[:, i]^T \cdot \dot{\mathbf{X}}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Poznamenejme, že stejný výsledek lze získat analogicky i pro tlumenou pseudoinverzi z rovnice (4.27). V praktických aplikacích řízení se koeficient tlumení  $\alpha$  často mění dynamicky, podle míry vzdálenosti koncového efektoru manipulátoru k singulární poloze.

Postupy popsané v této kapitole pro numerické řešení IKÚ sériových manipulátorů lze analogicky aplikovat na řešení PKÚ manipulátorů paralelních, proto se jimi již nebudeme dále zabývat. Více o numerických přístupech řešení kinematiky manipulátorů lze nalézt v [15], [29], [34], [12].



# Kapitola 5

## Závěr

Práce se zabývá problémem kinematiky robotických architektur, tedy závislostmi mezi polohami, rychlostmi a zrychleními v mechanických konstrukcích robotů bez ohledu na síly a silové momenty, kterými jsou vyvolány. Dynamika robotů proto není náplní práce, avšak důkladná kinematická analýza je nezbytnou podmínkou k jejímu zkoumání. Přestože pojem robot je dnešní společností chápán spíše jako humanoidní bytost schopná autonomního životního cyklu (pohyb, rozhodování, atd.) v práci jsou diskutovány robotické struktury spadající výhradně do oblasti robotických manipulátorů, které hrají významnou roli nejen v průmyslu ale stejně tak i v lékařských oborech, armádních aplikacích, kosmickém výzkumu atd.

Cílem práce je předložit ucelený přehled stávajících metod k řešení kinematiky manipulátorů založený na současném stavu v této oblasti. Přestože, řada jednodušších problémů v kinematice manipulátorů může být řešena intuitivně postupy, využívající přístupy středoškolské matematiky (analytiky, geometrie, fyziky), v práci je kladen důraz především na možnost algoritmizace předložených metod za účelem jejich implementace do automatických algoritmů. Tyto algoritmy by pak měly stát základem vytvoření softwarového nástroje pro intuitivní automatické generování modelů manipulátorů pro vědecké i studijní účely, viz Kapitola 1.3. Příklady takových softwarových nástrojů lze nalézt např. v [10], [6], [18].

Problémy kinematiky jsou diskutovány pro dva základní typy architektur manipulátorů - sériové a paralelní. Porovnání vlastností těchto dvou základních skupin lze nalézt v Kapitole 1.2. V Kapitole 2.2 jsou představeny dvě nejznámější úmluvy pro popis kinematických architektur manipulátorů, které umožňují automatické rekurzivní generování souřadných systémů definující polohy jednotlivých ramen manipulátorů. Transformační vztahy mezi souřadnými systémy lze pak považovat za kinematický model manipulátoru, jehož návrhové parametry jsou tvořeny sadou geometrických parametrů, které jednoznačně udávají uspořádání mechanické konstrukce manipulátoru (tvar ramen, typy a umístění kloubů).

Kapitola 2.3 je věnována závislostem mezi kloubovými souřadnicemi manipulátoru a zobecněnými souřadnicemi koncového efektoru. Rozlišujeme dvě základní kinematické úlohy - přímou kinematickou úlohu (PKÚ), tedy závislost polohy zobecněných souřadnic na polohách souřadnic kloubových a zpětnou (inverzní) kinematickou úlohu (IKÚ), tedy závislost polohy kloubových souřadnic na souřadnicích zobecněných. V textu je ukázáno, že výpočetní náročnost kinematických úloh jednoznačně závisí na typu manipulátoru.

V případě sériových manipulátorů je PKÚ řešitelná vždy analyticky a její výpočet lze získat jednoduše z kinematického modelu manipulátoru. PKÚ pro sériové manipulátory vede vždy na právě jedno řešení. IKÚ pro sériové manipulátory s sebou přináší řadu problémů, neboť obecně vede na výpočet soustavy transcendentních rovnic s více možnými řešeními. V jednoduchých případech lze tyto rovnice řešit intuitivně, viz Kapitola 2.3.2.1, takové postupy jsou však obtížně algoritmizovatelné. Někdy je možné dekomponovat mechanickou konstrukci manipulátoru na dvě vzájemně nezávislé části a IKÚ řešit odděleně pro každou část zvlášť, viz Kapitola 2.3.2.2. Poznamenejme, že tento případ nastává pro drtivou většinu dnešních průmyslových manipulátorů, kde je tak řešení IKÚ výrazně zjednodušeno (lze nalézt analyticky). Kapitola 2.3.2.3 analyzuje

možnost řešení IKÚ obecného sériového manipulátoru se 6DoF. Představená metoda však vyžaduje relativně složité symbolické předzpracování řešených rovnic, jejichž úpravami lze získat tzv. kinematický polynom manipulátoru (polynom v jedné proměnné). Nalezení kořenů kinematického polynomu potom určuje řešení IKÚ. Poznamenejme, že kinematický polynom je v tomto případě stupně 16, tedy nelze nalézt řešení IKÚ v uzavřeném (analytickém) tvaru. Hledání kořenů polynomů vysokých stupňů přináší také problémy se stabilitou a přesností numerických výpočtů.

Pro paralelní manipulátory obecně platí, že analyticky řešitelná není ani PKÚ ani IKÚ, viz Kapitola 2.4. Však vzhledem k faktu, že kinematické řetězce spojující koncový efektor se základnou manipulátoru jsou většinou relativně jednoduché, lze analyticky nalézt řešení IKÚ. PKÚ pro paralelní manipulátory však dodnes zůstává otevřeným problémem. V práci jsou zahrnuty ukázky výpočtu pro některé varianty manipulátorů (planární paralelní manipulátory, paralelní sférické zápěstí a jeho ekvivalence k známé zjednodušené variantě paralelních manipulátorů). I zde však nestávají nemalé problémy s numerickými algoritmy. Efektivní algoritmy pro výpočet PKÚ obecného 6DoF paralelního manipulátoru zůstávají tak i nadále předmětem intenzivního zkoumání.

Kapitola 3 je věnována analýze rychlostí a zrychlením mezi kloubovými a zobecněnými souřadnicemi, tzv. přímá okamžitá kinematická úloha (POKÚ) a zpětná (inverzní) okamžitá kinematická úloha (IOKÚ). Možnost prostého derivování rovnic polohových závislostí (PKÚ či ÍKU) není v textu uvažováno. Algoritmizace automatického symbolického derivování je sice možná, většinou však vede na mnohačlené složité vztahy zcela nevhodné pro implementaci do reálných algoritmů řízení či jako vstupy pro tvorbu dynamických modelů manipulátorů. Místo toho jsou odvozeny závislosti rychlostí a zrychleních pomocí geometrie mechaniky manipulátoru a dále pak ukázány efektivní rekurzivní algoritmy výpočtu rychlostí a zrychlení libovolného kloubu manipulátoru. V kapitole je dále zahrnut stručný přehled pojednávající o singulárních polohách koncového efektoru a jejich dopadům na kinematické chování manipulátoru.

V Kapitole 4 je analyzován numerický přístup k řešení IKÚ pro sériové manipulátory, který může být snadno aplikován i na řešení PKÚ pro manipulátory paralelní. Uvedený numerický přístup je modifikací základního Newtonova algoritmu pro hledání řešení nelineárních rovnic. Mezi výhody numerického přístupu jednoznačně patří jeho snadná implementace do reálných algoritmů řízení a možnost odstranění numerických chyb. Bohužel, i zde existuje nebezpečí, že numerický algoritmus bude konvergovat k jinému řešení IKÚ, než je požadováno, z důvodu existence více takových řešení v blízkosti aktuální polohy koncového efektoru. Pomoc v takových případech nabízí např. metody intervalové analýzy. V kapitole je dále ukázána možnost využití redundance manipulátorů (větší počet nezávislých aktuátorů než počet DoF koncového efektoru) k výpočtu kloubových souřadnic zajišťujících požadovaný pohyb koncového efektoru manipulátoru a zároveň optimalizující dané sekundární kritérium (vzdálenost od singulárních poloh, udržování hodnot aktuátorů od svých limitních poloh, atd.). Na závěr je zmíněna možná modifikace numerických algoritmů výpočtu pro manipulátory nacházející se v blízkosti singulárních poloh.

Další problémy robotiky navazující na uvedenou práci, které by měly být postupně řešeny a později integrovány do zmíněného softwarového nástroje lze shrnout v následujících bodech:

- Dynamický model manipulátoru
- Kalibrace geometrických parametrů manipulátoru z reálných naměřených dat
- Metody odhadu dynamických parametrů manipulátoru z reálných naměřených dat
- Vyšetřování pracovního prostoru manipulátoru
- Metody optimalizace kinematické konstrukce manipulátoru dle aplikačních požadavků
- Metody pro řízení pohybu manipulátoru
- Vizualizace pohybu manipulátoru

# Literatura

- [1] J. Angeles. Kinematics synthesis. *lecture notes, Department of Mechanical Engineering, McGill University, Montreal (Quebec), Canada*, 2009.
- [2] F. Bennis. *Contribution á la modélisation géométrique et dynamique des robots á chaine simple et complexe*. PhD thesis, E.N.S.M., Nantes, France, 1991.
- [3] F. Bennis. Modele géométrique inverse des robots a chaine découplable : application aux équations de contraintes des boucles fermées. *Trans. of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 17:473–492, 1993.
- [4] L. Bláha. Groebnerova báze a teorie řízení. Práce ke státní doktorské zkoušce, Katedra kybernetiky, FAV, ZČU v Plzni, 2011.
- [5] Ilian Bonev. The true origins of parallel robots. *www.parallemic.org*, 2003.
- [6] P. I. Corke. A robotic toolbox for matlab. *IEEE Robot. Automat. Mag.*, (24 - 33), 1996.
- [7] D. O’Shea D. Cox, J. Little. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, 2nd edition, 2006.
- [8] J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *J. Appl. Mechanics*, June 1955, 22:215–221, 1955.
- [9] Boston Dynamic. <http://www.bostondynamics.com/>.
- [10] Tenreiro Machado J.A. Fonseca Ferreira N.M. Roblib: an educational program for robotics. *IFAC symposium on robot control*, 1(163-168), 2000.
- [11] W. Fulton. *Algebraic Curves: An Introduction To Algebraic Geometry*. New York: Benjamin, 1969.
- [12] Luis Gracia and Josep Tornero. Tracking trajectories with a robotic manipulator with singularities. In *Proceedings of the 2nd international conference on Advances in brain, vision and artificial intelligence*, BVAI’07, pages 595–605, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag.
- [13] <http://www.mathpages.com/home/kmath544/kmath544.htm>. The resultant and bezout’s theorem.
- [14] K. H. Hunt. Structural kinematics of in parallel actuated robot arms. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, pages 705–712, 1983.
- [15] M. Valášek J. Böhm, K. Belda. The direct kinematics for path control of redundant parallel robots. *Advances in Systems Science: Measurement, Circuits and Control*, pages 253–258, 2001.
- [16] W. Khalil and F. Bennis. Automatic generation of the inverse geometric model of robots. *Robotics and Autonomous Systems*, 7(1):47 – 56, 1991.
- [17] W. Khalil and J. Kleinfinger. A new geometric notation for open and closed-loop robots. volume 3, pages 1174 – 1179, apr. 1986.
- [18] Wisama Khalil and Denis Creusot. Symoro+: A system for the symbolic modelling of robots. *Robotica*, 15:153–161, March 1997.

- [19] B. Siciliano L. Sciavicco. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, 2 edition, 2000.
- [20] Anthony A. Maciejewski and Charles A. Klein. Numerical filtering for the operation of robotic manipulators through kinematically singular configurations. *Journal of Robotic Systems*, 5(6):527–552, 1988.
- [21] D. Manocha and J.F. Canny. Efficient inverse kinematics for general 6r manipulators. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 10(5):648–657, October 1994.
- [22] J.-P. Merlet. Direct kinematics and assembly modes of parallel manipulators. *Int. J. Rob. Res.*, 11:150–162, April 1992.
- [23] J.-P. Merlet. Direct kinematics of planar parallel manipulators. In *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, volume 4, pages 3744–3749 vol.4, April 1996.
- [24] J.-P. Merlet. Kinematics’ not dead! *Proceedings of the 2000 IEEE, International Conference on Robotics and Automation*, 2000.
- [25] J. P. Merlet. *Parallel robots*. Springer, 2006.
- [26] J.-P. Merlet. Interval analysis and reliability in robotics. *International Journal of Reliability and Safety*, 3(1-3):104–130, 2009.
- [27] Jean-Pierre Merlet. Manipulateurs paralleles, 4eme partie : mode d’assemblage et cinématique directe sous forme polynomiale. Research Report RR-1135, INRIA, 1990.
- [28] P. Nanua and K.J. Waldron. Direct kinematic solution of a stewart platform. In *Robotics and Automation, 1989. Proceedings., 1989 IEEE International Conference on*, pages 431–437 vol.1, May 1989.
- [29] Denny Oetomo and Marcelo H. Ang Jr. Singularity robust algorithm in serial manipulators. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, 25:122–134, February 2009.
- [30] Centre of Computer Graphics and UWB Pilsen Data Visualisation. Analytická geometrie pro počítačovou grafiku ii, <http://herakles.zcu.cz/education/zpg/cviceni.php?no=5>.
- [31] S. Rabinowitz. A useful trigonometric substitution. *Digital Equipment Corporation, Nashua, NH*, 1986.
- [32] M. Raghavan and B. Roth. Inverse kinematics of the general 6r manipulator and related linkages. *Journal of Mechanical Design*, 115(3):502–508, 1993.
- [33] Paul R.C.P. *Robot manipulators: mathematics, programming and control*. MIT Press, Cambridge, USA, 1981.
- [34] Bruno Siciliano. Kinematic control of redundant robot manipulators: A tutorial. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 3:201–212, 1990. 10.1007/BF00126069.
- [35] Atega s.r.o. <http://www.atega.cz/>.
- [36] Eurotec JKR s.r.o. <http://www.eurotec-jkr.cz>.
- [37] M. Švejda. Overview of parallel architectures for gearing robot. Technical report, katedra kybernetiky, FAV, ZČU Plzeň, 2009.
- [38] Martin Švejda. Kinematická analýza antropomorfního manipulátoru se sférickým zápěstím. Technical report, katedra kybernetiky, FAV, ZČU Plzeň, 2010.
- [39] D. Murareci W. Khalil. On the general solution of the inverse kinematics of six-degrees-of-freedom manipulators. *Advances in Robot Kinematics and Computational Geometry*, 115:309–318, 1994.

## Literatura

- [40] E Dombre W. Khalil. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [41] J.F. Kleinfinger W. Khalil. A new geometric notation for open and closed-loop robots. *Robotics and Automation. Proceedings. IEEE International Conference*, 1986.
- [42] Yan Wang, Lu-bin Hang, and Ting-li Yang. Inverse kinematics analysis of general 6r serial robot mechanism based on groebner base. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 1:115–124, 2006. 10.1007/s11465-005-0022-7.