

## **Technická zpráva**

Katedra kybernetiky, Fakulta aplikovaných věd  
Západočeská univerzita v Plzni

# **Kinematika manipulátorů**

10. 9. 2011

**Martin Švejda**  
msvejda@kky.zcu.cz

# Obsah

1	Reprezentace obecného pohybu v robotice . . . . .	3
1.1	Reprezentace polohy . . . . .	3
1.2	Reprezentace rychlosti a zrychlení . . . . .	8
2	Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů . . . . .	10
2.1	Denavit-Hartenbergova úmluva (D-H) . . . . .	10
2.2	Khalil-Kleinfingerova úmluva (K-K) . . . . .	13
3	Polohové závislosti manipulátorů . . . . .	20
3.1	Přímý kinematický problém pro sériové manipulátory . . . . .	20
3.2	Inverzní kinematický problém pro sériové manipulátory . . . . .	22
3.2.1	Přímé analytické řešení jednoduchých architektur manipulátorů . . . . .	23
3.2.2	Specializované metody pro řešení konkrétních variant architektur manipulátorů . . . . .	28
3.2.3	Metody pro řešení obecných architektur manipulátorů . . . . .	31

Pod pojmem kinematika manipulátorů rozumíme závislosti mezi obecnými polohami, rychlostmi, zrychleními či vyššími derivacemi polohy jednotlivých částí manipulátoru bez ohledu na síly a silové momenty tyto závislosti ovlivňující. Vyšetřování kinematických závislostí proto řadíme mezi nejvíce podstatné oblasti při analýze a syntéze manipulátorů. Lze obecně říci, že kinematika v podstatě každého manipulátoru je založena na základní myšlence využít jednoduchého pohybu lineárních či rotačních aktuátorů a prostřednictvím vhodného mechanismu jej převést na komplexní rovinný či prostorový pohyb. Takový mechanismus si je pak, společně s aktuátory, možné představit jako mechatronický počítač, kde jeho program je ukryt v jeho mechanické konstrukci. V posledních letech se začíná ve světě objevovat názor, že kinematika manipulátorů je již postupně upadajícím oborem robotiky, většina důležitých problémů je již dávno vyřešena a díky stále se zdokonalujícím a zlevňujícím komponentám (výkonné počítače, inteligentní čidla a pohony), které mohou snadno kompenzovat nedokonalosti při jejím návrhu, nehraje zvlášť významnou roli. Jean Paul Merlet, jeden z předních odborníků, zejména pak v oblasti paralelní robotiky, představil v roce 2000 na konferenci IEEE-International Conference on Robotics zajímavý příspěvek s příznačným názvem "Kinematics' not dead!", viz [24], ve kterém argumentuje právě proti zmíněnému názoru následujícími poznatky:

- náklady na mechanickou část manipulátoru nepřesahují zpravidla 20-30 % celého systému
- měření chyb v mechanické konstrukci je sice možné, nicméně vývoj řídicího systému pro jejich následnou kompenzaci je velmi obtížné a zdlouhavé
- výpočetní výkon by měl být využit především na vývoj "inteligence" manipulátoru bez nutnosti jej využívat pro zásah do chování manipulátoru dané jeho architekturou

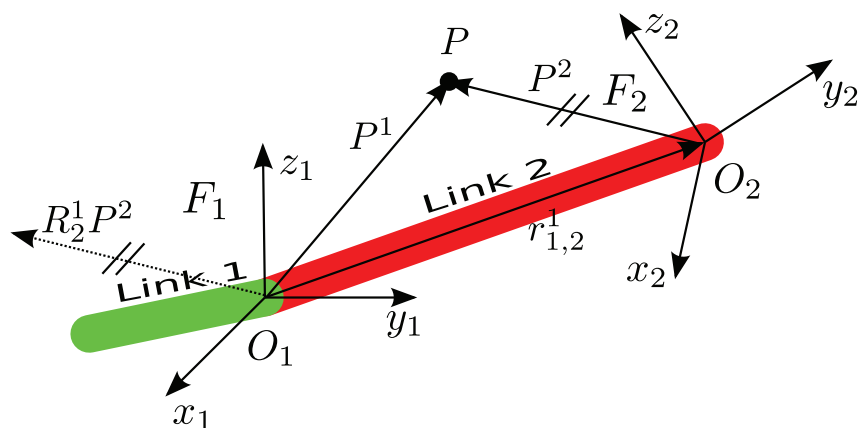
Dále zmiňuje některé doposud otevřené problémy v robotice, které dodnes nejsou uspokojivě řešeny, zejména pak problém syntézy a optimalizace manipulátorů.

## 1 Reprezentace obecného pohybu v robotice

Pro popis pohybu manipulátorů, jako systému složeného s pevných hmotných ramen a nehmotných kloubů, byla zavedena celá řada metodik (jinými slovy úmluv), z nichž dvě nejpoužívanější budou detailně zmíněny v Kapitole 2. Všechny úmluvy však vychází z myšlenky vzájemné transformace polohy souřadných systémů, umístěných v jednotlivých ramenech manipulátoru. Zabývejme se proto nejprve reprezentací polohy, rychlosti a zrychlení obecného tělesa představující jedno rameno manipulátoru.

### 1.1 Reprezentace polohy

Předpokládejme dvojici souřadných systémů (dále jen s.s.), z nichž první s.s.  $F_1 = \{\mathbf{O}_1 - \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{z}_1\}$  je pevně spojen s ramenem *Link* 1 a druhý s.s.  $F_2 = \{\mathbf{O}_2 - \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 \mathbf{z}_2\}$  s ramenem *Link* 2, viz Obrázek 1.1.



Obrázek 1.1: Transformace souřadných systémů

Vzájemné translace s.s.  $F_1$  a  $F_2$  je zřejmě dána vektorem translace  $\mathbf{r}_{1,2}^1 = \mathbf{O}_2^1 - \mathbf{O}_1^1 = \mathbf{O}_2^1$ . Jejich vzájemná rotace může být vyjádřena maticí rotace  $\mathbf{R}_2^1$ , pro kterou platí následující<sup>1</sup>:

- $\mathbf{R}_2^1$  je reálná matice rozměru  $[3 \times 3]$ , jejíž sloupce reprezentují souřadnice jednotkových směrových vektorů s.s.  $F_2$  v s.s. (či vzhledem k s.s.)  $F_1$ .

$$\mathbf{R}_2^1 = [\mathbf{x}_2^1 \quad \mathbf{y}_2^1 \quad \mathbf{z}_2^1]$$

- $\mathbf{R}_2^1$  je ortogonální maticí (její sloupce jsou vzájemně ortogonální-kolmé). Tedy nutně platí:

$$(\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{R}_2^1 = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{R}_2^1)^{-1} = (\mathbf{R}_2^1)^T = \mathbf{R}_1^2 \quad (1.1)$$

kde  $\mathbf{R}_1^2$  je matice rotace, jejíž sloupce reprezentují souřadnice jednotkových směrových vektorů s.s.  $F_1$  v s.s.  $F_2$ .

$$\mathbf{R}_1^2 = [\mathbf{x}_1^2 \quad \mathbf{y}_1^2 \quad \mathbf{z}_1^2]$$

Poznamenejme, že prvky matice rotace jsou vzájemně závislé. Lze ukázat, že minimální počet parametrů pro popis obecné rotace je tři (viz např. Eulerovy úhly).

Nechť  $\mathbf{P}^1$  označuje souřadnice bodu  $\mathbf{P}$  v s.s.  $F_1$  a  $\mathbf{P}^2$  souřadnice stejného bodu v s.s.  $F_2$ , pak:

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \quad \text{a zároveň, viz (1.1)} \quad \mathbf{P}^2 = -\mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_1^2 \cdot \mathbf{P}^1 \quad (1.2)$$

- Rozlišujeme tři základní elementární rotace dvou s.s.

– Rotace kolem osy  $\mathbf{x}_1$  s.s.  $F_1$  o úhel  $\alpha$

Tedy s.s.  $F_2$  vznikne natočením souřadného systému  $F_1$  kolem osy  $\mathbf{x}_1$  o úhel  $\alpha$ .

$$\mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

– Rotace kolem osy  $\mathbf{y}_1$  s.s.  $F_1$  o úhel  $\beta$

Tedy s.s.  $F_2$  vznikne natočením souřadného systému  $F_1$  kolem osy  $\mathbf{y}_1$  o úhel  $\beta$ .

$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

<sup>1</sup>Dolní index označuje konkrétní vektor (bod), zatímco horní index vyjadřuje, v souřadnicích kterého souřadného systému je tento vektor (bod) vyjádřen. Např.:  $\mathbf{r}_{1,2}^1$  a  $\mathbf{r}_{1,2}^2$  označuje ten samý vektor, ale jeho souřadnice jsou jednou uvažovány vzhledem k s.s.  $F_1$  a podruhé k s.s.  $F_2$ .

- Rotace kolem osy  $z_1$  s.s.  $F_1$  o úhel  $\gamma$   
Tedy s.s.  $F_2$  vznikne natočením souřadného systému  $F_1$  kolem osy  $z_1$  o úhel  $\gamma$ .

$$\mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

- Úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  se nazývají *Eulerovské úhly* a tvoří jeden ze známých možností popisů rotace těles v prostoru.
- Obecnou rotaci můžeme vyjádřit skládáním rotací elementárních, a to dvěma základními postupy:

### 1. Postupná rotace kolem os souřadných systémů

Například podle schématu XYZ<sup>2</sup>:

- Odrotuj s.s.  $F_1$  okolo osy  $x_1$  o úhel  $\alpha \Rightarrow$  vzniká nový souřadný systém  $F'_1$  (matice rotace  $\mathbf{R}_x(\alpha)$ ).
- Odrotuj s.s.  $F'_1$  okolo osy  $y'_1$  o úhel  $\beta \Rightarrow$  vzniká nový souřadný systém  $F''_1$  (matice rotace  $\mathbf{R}_y(\beta)$ ).
- Odrotuj s.s.  $F''_1$  okolo osy  $z''_1$  o úhel  $\gamma \Rightarrow$  vzniká výsledný souřadný systém  $F_2$  (matice rotace  $\mathbf{R}_z(\gamma)$ ).

Výslednou matici rotace můžeme tak psát jako:

$$\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_x(\alpha) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_z(\gamma) \quad (1.6)$$

### 2. Rotace kolem os souřadného systému $F_1$ (fixované osy rotace)

Opět podle schématu XYZ:

- Odrotuj s.s.  $F_1$  okolo osy  $x_1$  o úhel  $\alpha \Rightarrow$  vzniká nový souřadný systém  $F'_1$  (matice rotace  $\mathbf{R}_x(\alpha)$ ).
- Odrotuj s.s.  $F'_1$  okolo osy  $y_1$  o úhel  $\beta \Rightarrow$  vzniká nový souřadný systém  $F''_1$  (matice rotace  $\mathbf{R}_y(\beta)$ ).
- Odrotuj s.s.  $F''_1$  okolo osy  $z_1$  o úhel  $\gamma \Rightarrow$  vzniká výsledný souřadný systém  $F_2$  (matice rotace  $\mathbf{R}_z(\gamma)$ ).

Lze ukázat, že výslednou matici rotace můžeme tak psát jako:

$$\mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}_z(\gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha) \quad (1.7)$$

#### ■ Poznámka 1.1 (Singularity v transformaci: matice rotace - Eulerovy úhly)

Je zřejmé, že ze známých Eulerových úhlů  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  lze bez jakýchkoliv potíží vždy vypočítat matici rotace  $\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma)$ , viz vztah (1.6,1.7), mluvíme o tzv. *dopředné transformaci*.

*Zpětnou transformaci* pak rozumíme stanovení Eulerovských úhlů  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ze známé matice rotace

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

<sup>2</sup>Schéma XYZ označuje posloupnost rotací kolem jednotlivých os, často používané schéma je např. ZYZ.

Budeme-li uvažovat schéma XYZ s postupnou rotací kolem os souřadných systémů, matice rotace je dána podle (1.6):

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cos(\gamma) & -\cos(\beta) \sin(\gamma) & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \sin(\gamma) & -\sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\gamma) & -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \sin(\gamma) & \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) + \sin(\alpha) \cos(\gamma) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Porovnáním rovnice (1.9) a (1.8) lze určit Eulerovy úhly následovně<sup>3</sup>:

**Pro**  $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $\cos \beta \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(-r_{23}, r_{33}) \\ \beta &= \text{atan2}(r_{13}, \sqrt{(r_{23}^2 + r_{33}^2)}) \\ \gamma &= \text{atan2}(-r_{12}, r_{11}) \end{aligned}$$

**Pro**  $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ ,  $\cos \beta < 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{atan2}(r_{23}, -r_{33}) \\ \beta &= \text{atan2}(r_{13}, -\sqrt{(r_{23}^2 + r_{33}^2)}) \\ \gamma &= \text{atan2}(r_{12}, -r_{11}) \end{aligned}$$

**Pro**  $\beta = -\frac{\pi}{2}$  matice rotace degeneruje na matici:

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\alpha - \gamma) & \cos(\alpha - \gamma) & 0 \\ \cos(\alpha - \gamma) & \sin(\alpha - \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

Lze určit jen úhel  $\phi = \alpha - \gamma$ .

**Pro**  $\beta = \frac{\pi}{2}$  matice rotace degeneruje na matici:

$$\mathbf{R}_2^1(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha + \gamma) & \sin(\alpha + \gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

Lze určit jen úhel  $\phi = \alpha + \gamma$ .

Jinými slovy, úhel  $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$  představuje singularitu v reprezentaci rotace pomocí Eulerových úhlů, neboť osa  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{z}_1''$  jsou rovnoběžné (opačné či shodné) a nelze tak jednoznačně určit úhly  $\alpha$ ,  $\gamma$ . Jednoznačně lze určit jen jejich rozdíl, či součet  $\phi$ . ■

Pro popis rotace dvou souřadných systémů se ještě využívají krom matice rotace další způsoby reprezentace. Mezi nejznámější patří zejména:

### 1. Reprezentace pomocí obecné osy rotace

Každou obecnou rotaci lze převést na rotaci okolo obecné osy  $\mathbf{r}$  o úhel  $\theta$ . Zatímco přímá transformace  $\{\mathbf{r}, \theta\} \mapsto \mathbf{R}_2^1(\mathbf{r}, \theta)$  lze opět vypočítat vždy, pro inverzní transformaci  $\mathbf{R}_2^1(\mathbf{r}, \theta) \mapsto \{\mathbf{r}, \theta\}$  dochází k singularnímu případu pro  $\theta = 0$  a  $\theta = \pi$ , kdy nelze jednoznačně určit směr vektoru  $\mathbf{r}$ .

<sup>3</sup>Funkce  $\phi = \text{atan2}(x, y)$  zohledňuje znaménka argumentů  $x$  a  $y$  a vrací korektní řešení ve všech kvadrantech  $\phi \in < 0, 2\pi >$

## 2. Reprezentace pomocí jednotkového kvaternionu

Jednotkový quaternion  $\mathcal{Q}$  lze stanovit z úhlu  $\theta$  a osy rotace  $\mathbf{r}$  jako:

$$\mathcal{Q} = \{\eta, \boldsymbol{\epsilon}\} = \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \mathbf{r} \right\}$$

Výhodou jednotkového kvaternionu je, že umožňuje popsat rotaci okolo obecné osy  $\mathbf{r}$  pro úhel  $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  přičemž nevykazuje žádné singularity.

Detailní popis přímé a inverzní transformace pro výše uvedené reprezentace rotace lze nalézt např. v [19], [40].

### Homogenní transformační matice

K celkovému popisu polohy (rotace a translace) s.s. lze s výhodou využít tzv. *homogenních souřadnic*. Zavedení homogenních souřadnic úzce souvisí s problematikou geometrické projekce (jedná se v podstatě o projektivní transformaci) a podrobné vysvětlení včetně řady názorných animací lze nalézt např. v [30].

Polohu s.s.  $F_2$  vzhledem k s.s.  $F_1$  lze pomocí homogenní transformační matice  $\mathbf{T}_2^1$  psát jako, viz Obr. 1.1:

$$\mathbf{T}_2^1 = \begin{bmatrix} & & & \\ & \mathbf{R}_2^1 & & \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Je zřejmé, že pomocí homogenní transformační matice  $\mathbf{T}_2^1$  lze homogenní souřadnice bodu  $\mathbf{P}$  v s.s.  $F_1$  vyjádřit pomocí jeho homogenních souřadnic v s.s.  $F_2$  jako, viz (1.2):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,2}^1 + \mathbf{R}_2^1 \cdot \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Homogenní transformační matice nám tak zahrnuje informaci o obecné poloze tělesa v prostoru, a to jeho rotaci  $\mathbf{T}_2^1[1 : 3, 1 : 3] = \mathbf{R}_2^1$  a translaci  $\mathbf{T}_2^1[1 : 3, 4] = \mathbf{r}_{1,2}^1$  najednou<sup>4</sup>.

Vyjádríme-li nyní z rovnice (1.11) souřadnice  $\mathbf{P}^2$  v závislosti na souřadnicích  $\mathbf{P}^1$ , s ohledem na platnost (1.1), dostáváme inverzní transformační vztah:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{P}^1 - (\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \underbrace{(\mathbf{T}_2^1)^{-1}}_{\mathbf{T}_1^2} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

kde

$$(\mathbf{T}_2^1)^{-1} = \mathbf{T}_1^2 = \begin{bmatrix} & & & \\ & (\mathbf{R}_2^1)^T & & -(\mathbf{R}_2^1)^T \cdot \mathbf{r}_{1,2}^1 \\ & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

je inverze homogenní transformační matice  $\mathbf{T}_2^1$ . Poznamenejme, že pro homogenní transformační matici již neplatí, že její inverze lze nahradit její transpozicí (nesplňuje podmínky ortogonality!)  $(\mathbf{T}_2^1)^{-1} \neq (\mathbf{T}_2^1)^T$ .

<sup>4</sup>Zápis  $\mathbf{X}[a : b, c : d]$  označuje submatici (subvektor), který se skládá z  $a$ . až  $b$ . řádku a  $c$ . až  $d$ . sloupce matice  $\mathbf{X}$ .

### Skládání transformací s.s.

Uvažujme trojici s.s.  $F_1, F_2, F_3$  a odpovídající homogenní transformační matice mezi s.s.  $F_1, F_2$ :  $T_2^1$  a  $F_2, F_3$ :  $T_3^2$ . Potom výsledná homogenní transformační matice mezi s.s.  $F_1, F_3$  lze psát:

$$\begin{aligned} T_3^1 &= \begin{bmatrix} R_3^1 & r_{2,3}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_2^1 \cdot T_3^2 = \\ &= \begin{bmatrix} R_2^1 & r_{1,2}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_3^2 & r_{2,3}^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2^1 R_3^2 & R_2^1 r_{2,3}^2 + r_{1,2}^1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14) \end{aligned}$$

Tedy pro skládání rotací s.s. platí:

$$R_3^1 = R_2^1 R_3^2$$

A pro skládání translací s.s.:

$$r_{1,3}^1 = r_{1,2}^1 + R_2^1 r_{2,3}^2$$

### Transformace souřadnice bod versus vektor mezi s.s.

Často je velmi výhodné transformovat souřadnice bodu či vektoru z jednoho s.s. do jiného. Přesto, že po formální stránce je bod a vektor velmi podobný, v případě jejich transformací mezi s.s. se tato dvojice geometrických objektů chová diametrálně odlišně. Předpokládejme opět dva s.s.  $F_1$  a  $F_2$  se vzájemnou homogenní transformační maticí  $T_2^1$  a dva libovolné body  $P$  a  $Q$  jednoznačně definující vektor  $v = Q - P$ .

- Transformace souřadnic bodu  $P$  ze s.s.  $F_2$  do s.s.  $F_1$

$$\begin{bmatrix} P^1 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = T_2^1 \cdot \begin{bmatrix} P^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,2}^1 + R_2^1 \cdot P^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} \quad \text{viz (1.11)}$$

Tedy:

$$P^1 = r_{1,2}^1 + R_2^1 \cdot P^2$$

- Transformace souřadnic vektoru  $v$  ze s.s.  $F_2$  do s.s.  $F_1$

$$v^1 = Q^1 - P^1 = r_{1,2}^1 + R_2^1 \cdot Q^2 - r_{1,2}^1 - R_2^1 \cdot P^2 = R_2^1 \cdot (Q^2 - P^2)$$

Tedy:

$$v^1 = R_2^1 \cdot v^2$$

## 1.2 Repräsentace rychlosti a zrychlení

Rychlost respektive zrychlení bodu  $P$  v s.s.  $F_1$  lze, v závislosti na jeho rychlosti respektive zrychlení v s.s.  $F_2$ , snadno získat časovou derivací vztahu (1.11):

$$\begin{bmatrix} \dot{P}^1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \dot{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} P^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} + T_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \dot{P}^2 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{P}^1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \ddot{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} P^2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} + 2\dot{T}_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \dot{P}^2 \\ \hline 0 \end{bmatrix} + T_2^1 \cdot \begin{bmatrix} \ddot{P}^2 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$



kde

$$\dot{T}_2^1 = \begin{bmatrix} \dot{R}_2^1 & \dot{r}_{1,2}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ddot{T}_2^1 = \begin{bmatrix} \ddot{R}_2^1 & \ddot{r}_{1,2}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Časová derivace translačního vektoru  $r_{1,2}^1$  je zřejmá a vyjadřuje translační rychlost respektive zrychlení s.s.  $F_2$  v s.s.  $F_1$ . Je intuitivně jasné, že časová derivace matice rotace  $R_2^1$  bezpochyby souvisí s vektorem úhlové rychlosti  $\omega_2^1$ .

Z ortogonality matice rotace (1.1) plyne

$$R_2^1 \cdot (R_2^1)^T = I \quad \rightarrow \text{derivací podle času} \rightarrow \dot{R}_2^1 \cdot (R_2^1)^T + R_2^1 \cdot (\dot{R}_2^1)^T = 0$$

Zavedením matice  $S = \dot{R}_2^1 \cdot (R_2^1)^T$  dostáváme  $S + S^T = 0$  (tedy  $S$  je antisymetrická matice). Časovou derivaci matice rotace  $R_2^1$  lze tedy pomocí zatím nespécifikované antisymetrické matice  $S$  vyjádřit jako:

$$\dot{R}_2^1 = S \cdot R_2^1 \quad (1.17)$$

Uvažujme nyní *konstantní* vektor  $P^2$  (bod  $P$  je pevně spojen se s.s.  $F_2$ ) a předpokládejme, že se s.s.  $F_2$  vzhledem k s.s.  $F_1$  pouze otáčí úhlovou rychlostí  $\omega_2^1 = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  (neposouvá se  $r_{1,2}^1 = \text{konst.}$ ) a jejich okamžitou orientaci popisuje matice rotace  $R_2^1$ . Tedy časovou derivaci vektoru  $P^1$  v s.s.  $F_1$  lze psát jako, viz (1.15):

$$\dot{P}^1 = \dot{R}_2^1 \cdot P^2 \quad (1.18)$$

Ze zákonitostí kinematiky plyne, že rychlost *konstantního* vektoru  $P^2$  lze v s.s.  $F_1$  psát také jako:

$$\dot{P}^1 = \omega_2^1 \times R_2^1 \cdot P^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{P}^1 = \omega_2^1 \times P^1 \quad (1.19)$$

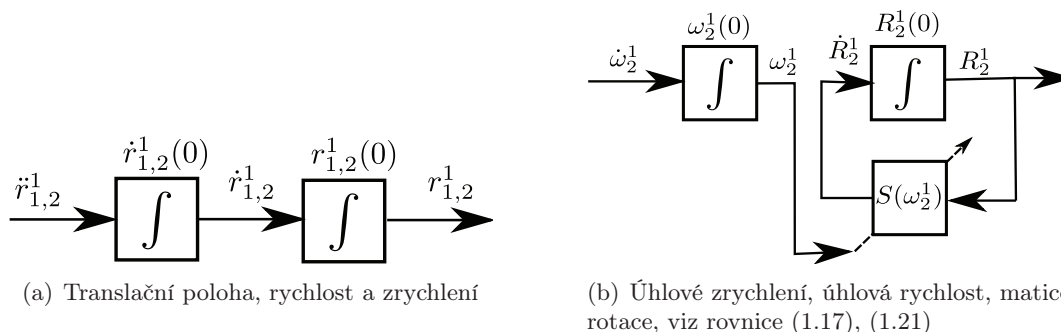
Dosadíme-li vztah (1.17) pro časovou derivaci matice rotace do rovnice (1.18) a následně porovnáme s rovnicí (1.19)

$$\dot{P}^1 = S \cdot R_2^1 \cdot P^2 = S \cdot P^1 \quad \longleftrightarrow \quad \dot{P}^1 = \omega_2^1 \times P^1 \quad (1.20)$$

je zřejmé, že násobení vektoru  $P^1$  maticí  $S$  je ekvivalentní vektorovému součinu vektoru úhlové rychlosti  $\omega_2^1$  a vektoru  $P^1$ . Z definice vektorového násobení tedy plyne tvar matice  $S$ :

$$S = S(\omega_2^1) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Závislosti mezi polohou, rychlostí a zrychlením s.s.  $F_2$  vzhledem k s.s.  $F_1$  lze pak znázornit pomocí následujících simulačních schémat:



Obrázek 1.2: Simulační schémata generování polohy s.s.  $F_2$  vzhledem k s.s.  $F_1$  (parametr (0) označuje počáteční podmínky integrátorů)

Někdy bývá vhodné úhlovou rychlost s.s.  $F_2$  v s.s.  $F_1$  vyjádřit místo vektoru úhlové rychlosti  $\omega_2^1$  časovou derivací Eulerových úhlů  $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T$  (dle daného schématu rotace, např. XYZ). Tuto transformaci řeší tzv. *Eulerovy kinematické rovnice*. Přímoú časovou derivací matice  $\mathbf{R}_2^1$ , viz (1.9), z definice matice  $\mathbf{S}(\omega) = \dot{\mathbf{R}}_2^1 \cdot (\mathbf{R}_2^1)^T$  lze ukázat, že pro schéma rotace XYZ platí:

$$\omega_2^1 = \mathbf{H}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (1.22)$$

kde

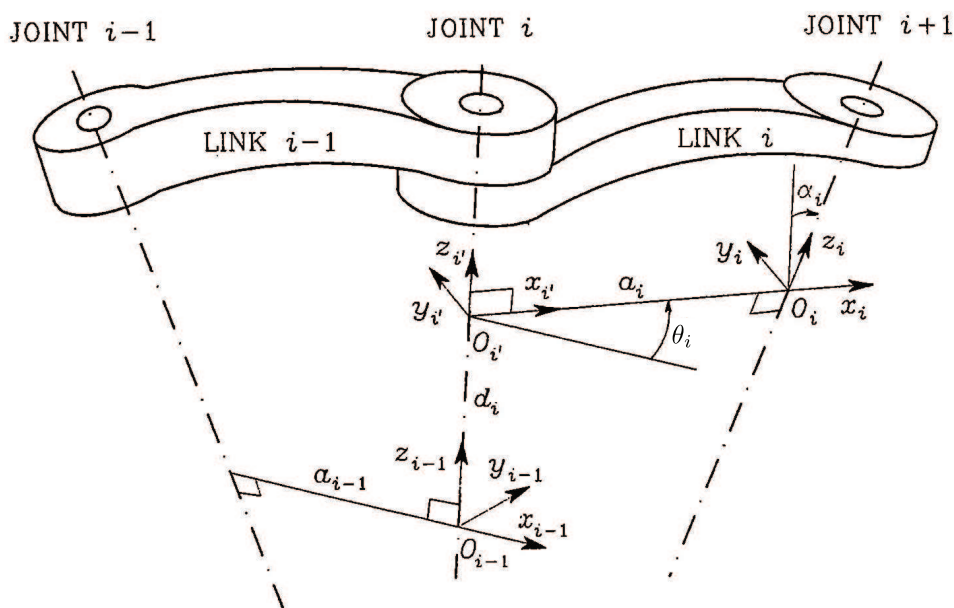
$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

## 2 Úmluvy pro popis kinematiky manipulátorů

Pro popis geometrického uspořádání ramen a kloubů manipulátorů bylo zavedeno mnoho metod. Ty se pokouší jednoduchou a systematickou cestou rekurzivně definovat souřadné systémy reprezentující jednotlivá ramena manipulátoru a jejich vzájemnou polohovou transformaci. Polohová transformace dvou po sobě jdoucích s.s. závisí na daných konstantních geometrických parametrech (zahrnují geometrický tvar ramen, kloubů a jejich vzájemnou konfiguraci) a kloubových souřadnicích  $\Theta$  (zahrnují aktuální polohu kloubů manipulátoru). Mezi nejznámější takové úmluvy patří tzv. *Denavit-Hartenbergova úmluva* [8] a *Khalil-Kleinfingerova úmluva* [17]. Obě úmluvy budou demonstrovány na antropomorfním manipulátoru se sférickým zápěstím (AM+SZ)( $n = 6$ ), viz [38].

### 2.1 Denavit-Hartenbergova úmluva (D-H)

Dnes snad nejznámější úmluva pro elegantní popis geometrie sériových manipulátorů. Předpokládejme dvě ramena manipulátoru *Link*  $i - 1$  a *Link*  $i$ , která jsou spojena kloubem *Joint*  $i$  s jedním stupněm volnosti, viz Obr. 2.1.



Obrázek 2.1: D-H úmluva

Definice s.s.  $F_i = \{\mathbf{O}_i - \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i \mathbf{z}_i\}$  za předpokladu znalosti s.s.  $F_{i-1} = \{\mathbf{O}_{i-1} - \mathbf{x}_{i-1} \mathbf{y}_{i-1} \mathbf{z}_{i-1}\}$  dle D-H úmluvy je vyjádřena následovně:

- Zvol osu  $\mathbf{z}_i$  podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint*  $i + 1$  a osu  $\mathbf{z}'_i$  podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint*  $i$
- Umístí počátek  $\mathbf{O}_i$  s.s.  $F_i$  do průsečíku osy  $\mathbf{z}_i$  a normály<sup>5</sup> os  $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$ . Umístí počátek  $\mathbf{O}'_i$  s.s.  $F'_i = \{\mathbf{O}'_i - \mathbf{x}'_i \mathbf{y}'_i \mathbf{z}'_i\}$  do průsečíku osy  $\mathbf{z}_{i-1}$  a téže normály.
- Zvol osu  $\mathbf{x}_i$  a  $\mathbf{x}'_i$  podél normály ve směru od kloubu *Joint*  $i$  do kloubu *Joint*  $i + 1$ .
- Zvol osu  $\mathbf{y}_i$  a  $\mathbf{y}'_i$  tak, aby výsledné s.s. byly pravotočivé.

Lze snadno ukázat, že D-H úmluva nedefinuje jednoznačně umístění s.s. v následujících případech.

- Pro s.s.  $F_0 = \{\mathbf{O}_0 - \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0\}$  je určena jednoznačně pouze osa  $\mathbf{z}_0$  (podle osy rotace, resp. translace prvního kloubu manipulátoru *Joint* 1). Osa  $\mathbf{x}_0$  a počátek  $\mathbf{O}_0$  lze proto volit libovolně. Osa  $\mathbf{y}_0$  je pak určena tak, aby výsledný systém byl opět pravotočivým.
- Pro s.s.  $F_n = \{\mathbf{O}_n - \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n \mathbf{z}_n\}$ , kde  $n$  je počet kloubů s jedním stupněm volnosti uvažovaného manipulátoru není jednoznačně určena osa  $\mathbf{z}_n$ , neboť kloub *Joint*  $n + 1$  již neexistuje. Osa  $\mathbf{x}_n$  však musí zůstat kolmá k ose  $\mathbf{z}_{n-1}$ .
- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$ ) paralelní, jejich normála není jednoznačně definována (může být libovolně posunuta ve směru os kloubů).
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$ ) protínají (normála je nulové délky), osa  $\mathbf{x}_i$  bude volena tak, aby byla kolmá k rovině definované osami  $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$ . Její *kladný směr* však může být volen libovolně.

Nyní může být vzájemná poloha s.s.  $F_{i-1}$  a  $F_i$  popsána pouze pomocí čtyř D-H parametrů:

$a_i \dots$  vzdálenost mezi počátky  $\mathbf{O}_i$  a  $\mathbf{O}'_i$

$d_i \dots$  vzdálenost mezi počátky  $\mathbf{O}_{i-1}$  a  $\mathbf{O}'_i$

$\alpha_i \dots$  úhel mezi osami  $\mathbf{z}_{i-1}$  a  $\mathbf{z}_i$  daný pootočením s.s.  $F'_i$  podél osy  $\mathbf{x}'_i$

$\theta_i \dots$  úhel mezi osami  $\mathbf{x}_{i-1}$  a  $\mathbf{x}_i$  daný pootočením s.s.  $F_i$  podél osy  $\mathbf{z}_{i-1}$

Je zřejmé, že pro základní typy kloubů s jedním stupněm volnosti platí:

**kloub *Joint*  $i$  je typu P** proměnná definující pohyb kloubu je  $d_i$ , proměnné  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$  jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link*  $i$

**kloub *Joint*  $i$  je typu R** proměnná definující pohyb kloubu je  $\theta_i$ , proměnné  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$  jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link*  $i$

Transformační vztah, v našem případě homogenní transformační matice v analogickém tvaru k (1.10), mezi s.s.  $F_{i-1}$  a  $F_i$  je dán následujícím způsobem.

- Vyber s.s.  $F_{i-1}$
- Posuň tento systém podél osy  $\mathbf{z}_{i-1}$  o vzdálenost  $d_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{z}_{i-1}$  o úhel  $\theta_i \Rightarrow$  dostáváme s.s.  $F'_i$ . Matice přechodu<sup>6</sup>:

$$\mathbf{T}_{i'}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

<sup>5</sup>normála os  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  je spojnice těchto os s minimální vzdáleností svírající s osami pravý úhel

<sup>6</sup>zkratka  $c_{\theta_i}$ , resp.  $s_{\theta_i}$  označuje  $\cos \theta_i$ , resp.  $\sin \theta_i$ . Podobně  $s_{(\theta_1 + \theta_2)}$  označuje  $\sin(\theta_1 + \theta_2)$

- Posuň s.s.  $F'_i$  podél osy  $x'_i$  o vzdálenost  $a_i$  a otoč jej okolo osy  $x'_i$  o úhel  $\alpha_i \Rightarrow$  dostáváme s.s.  $F_i$ . Matice přechodu:

$$\mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

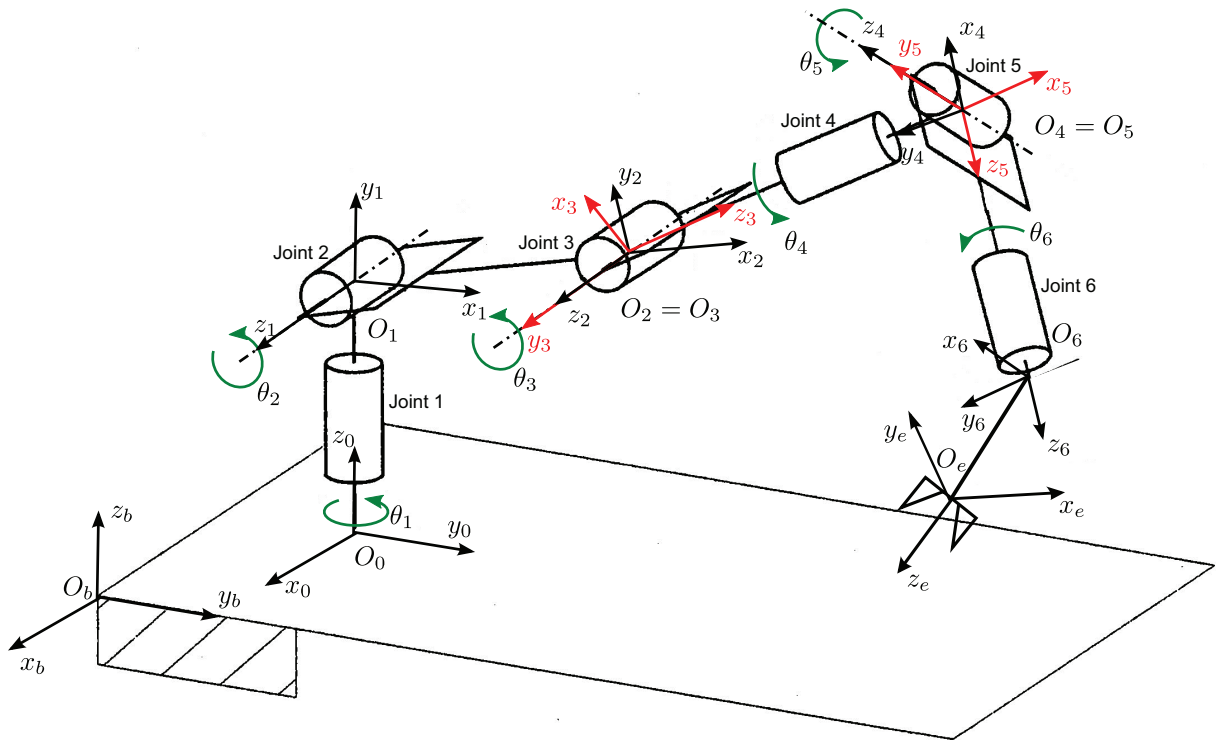
- Výsledná matice přechodu ze s.s.  $F_{i-1}$  do s.s.  $F_i$  je dána:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{i-1} &= \mathbf{T}_i^{i-1} \cdot \mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3) \end{aligned}$$

Připomeňme, že matice přechodu matice (2.3) je funkcí pouze kloubových souřadnic  $\theta_i$  (pro rotační klouby R) a  $d_i$  (pro translační klouby P).

### ★ Příklad 2.1 (D-H úmluva pro AM+SZ)

Obrázek 2.2 znázorňuje zavedení souřadných systémů pro jednotlivá ramena AM+SZ.



Obrázek 2.2: Zavedení souřadných systémů pro AM+SZ dle D-H úmluvy

Geometrické parametry manipulátoru (tzv. D-H parametry), jsou pak dány následující tabulkou:

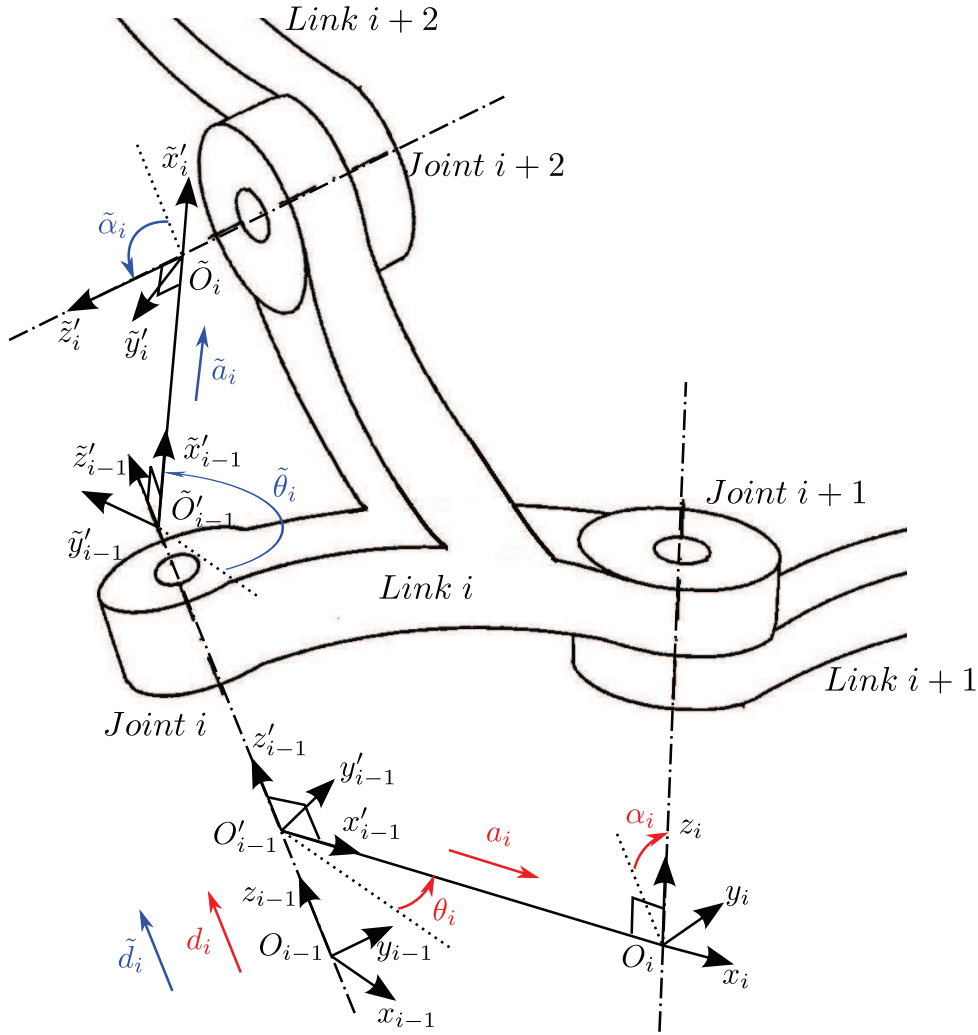
<i>Joint i</i>	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$l_1$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	$l_2$	0
3	0	0	$\frac{\pi}{2}$
4	$l_3$	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	0	$\frac{\pi}{2}$
6	$l_4$	0	0

Tabulka 0.1: D-H parametry AM+SZ

★

## 2.2 Khalil-Kleinfingerova úmluva (K-K)

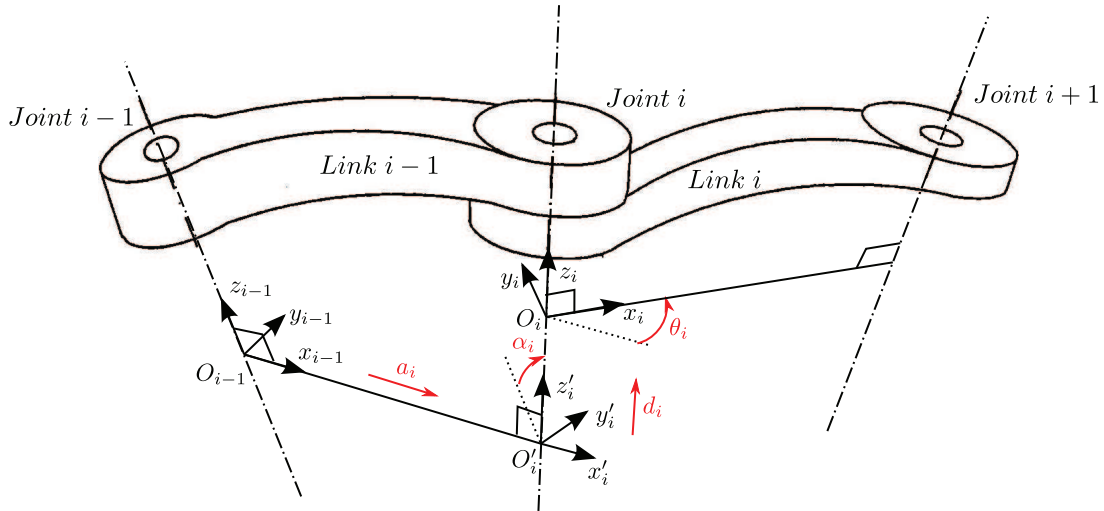
Khalil-Kleinfingerova úmluva, viz [41], představuje modifikaci D-H úmluvy pro popis souřadných systémů manipulátoru. Předpokládáme opět dvě ramena manipulátoru *Link i*−1 a *Link i*, která jsou spojena kloubem *Joint i* s jedním stupněm volnosti, viz Obr. 2.4. Tentokrát jsou však souřadné systémy v jednotlivých kloubech definovány jiným způsobem. Zatímco v D-H úmluvě byl s.s.  $F_i$ , který je pevně svázán s ramenem *Link i*, umístěn na konci tohoto ramene, tedy s osou  $z_i$  shodnou s osou rotace kloubu *Joint i* + 1, u K-K úmluvy je tento souřadný systém umístěn přímo na rotační ose kloubu *Joint i*. Opodstatnění takovéto změny není pouze ve zvýšení přehlednosti popisu souřadných systémů, ale především v možnosti popisu komplexních architektur manipulátorů, jako jsou *rozvětvené (tree chains)* a *uzavřené (closed chains)* kinematické řetězce, pro které popis prostřednictvím *D-H úmluvy* přináší komplikace a nejasnosti.



Obrázek 2.3: D-H úmluva vedoucí na nejednoznačnost v definici souřadných systémů při použití na rozvětvené kinematické řetězce

Pro ilustraci předpokládejme, že bychom chtěli popsat pomocí D-H úmluvy rozvětvený kinematický řetězec, viz Obr. 2.3. Je zřejmé, že transformace polohy z kloubu *Joint i* do kloubu *Joint i + 1* vede na definici s.s.  $F_i$ , který je pevně spřažen s ramenem *Link i*, a jeho poloha je daná rotací  $\theta_i$  respektive translací  $d_i$  (společně s parametry určující geometrii ramene  $a_i, \alpha_i$ ) vyvolanou kloubem *Joint i*. Jinými slovy s.s.  $F_i$  jednoznačně určuje vliv kloubu *Joint i* na rameno *Link i*. Toto zdánlivě jednoznačné určení však selhává v okamžiku, kdy je třeba definovat s.s. v kloubu *Joint i + 2* v rozvětvené části mechanismu. Využijeme-li znovu stejného postupu, musíme definovat s.s.  $\tilde{F}_i = \{\tilde{O}_i - \tilde{x}_i \tilde{y}_i \tilde{z}_i\}$ , který je opět pevně spřažen s ramenem *Link 1* a jeho poloha je daná rotací ( $\tilde{\theta}_i$ ) respektive translací ( $\tilde{d}_i$ ) (společně s parametry určující geometrii ramene  $\tilde{a}_i, \tilde{\alpha}_i$ ) vyvolanou kloubem *Joint i*.

Zde se však dostáváme do sporu, neboť poloha ramene *Link i* vyvolaná jediným kloubem *Joint i* je popsána dvěma různými s.s.  $F_i$  a  $\tilde{F}_i$ . Nabízí se tak otázka, jaké jsou vlastně kloubové souřadnice kloubu *Joint i*? ( $\theta_i$  respektive  $d_i$  nebo  $\tilde{\theta}_i$  respektive  $\tilde{d}_i$ )



Obrázek 2.4: K-K úmluva

Zavedeme-li nyní souřadné systémy kloubů dle K-K úmluvy, viz Obr. 2.4, definice s.s.  $F_i$  za předpokladu znalosti s.s.  $F_{i-1}$  je vyjádřena následovně:

- Zvol osu  $z_i$  a  $z'_i$  podél osy rotace, resp. translace kloubu  $Joint\ i$ . (Pro  $i = 1$  není s.s.  $F'_i$  definován.)
- Umístí počátek  $O_i$  s.s.  $F_i$  do průsečíku osy  $z_i$  a normály os  $z_i$  a  $z_{i+1}$ . Umístí počátek  $O'_i$  s.s.  $F'_i$  do průsečíku osy  $z_i$  a normály os  $z_{i-1}$  a  $z_i$ .
- Zvol osu  $x_i$  podél normály ve směru od kloubu  $Joint\ i$  do kloubu  $Joint\ i + 1$ .
- Zvol osu  $y_i$  tak, aby výsledné s.s. byly pravotočivé.

Lze snadno ukázat, že K-K úmluva nedefinuje jednoznačně umístění s.s. v následujících případech.

- Pro s.s.  $F_n$ , kde  $n$  je počet kloubů s jedním stupněm volnosti uvažovaného manipulátoru je jednoznačně určena pouze osa  $z_n$ , neboť kloub  $Joint\ n + 1$  již neexistuje. Osa  $x_n$  může být volena totožná s osou  $x_{n-1}$ .
- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $z_i$  a  $z_{i+1}$ ) paralelní, jejich normála není jednoznačně definována (může být libovolně posunuta ve směru os kloubů). Může být volena tak, že parametr  $d_i = 0$  nebo  $d_{i+1} = 0$ .
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy kloubů ( $z_i$  a  $z_{i+1}$ ) protínají (normála je nulové délky), osa  $x_i$  bude volena tak, aby byla kolmá k rovině definované osami  $z_i$  a  $z_{i+1}$ . Její *kladný směr* však může být volen libovolně.
- S.s.  $F_0$  může být volen libovolně, zpravidla jako totožný se s.s.  $F_1$  pro  $\theta_1 = 0$ , respektive  $d_1 = 0$  (nulová poloha kloubu  $Joint\ 1$ ).

Nyní může být vzájemná poloha s.s.  $F_{i-1}$  a  $F_i$  popsána pouze pomocí čtyř K-K parametrů:

$\alpha_i \dots$  úhel mezi osami  $z_{i-1}$  a  $z_i$  kolem normály  $x_{i-1}$

$a_i \dots$  vzdálenost mezi počátkem  $O_{i-1}$  a osou  $z_i$  (kolmá vzdálenost mezi osami)

$d_i \dots$  vzdálenost mezi počátky  $O'_i$  a  $O_i$

$\theta_i \dots$  úhel mezi osami  $x_{i-1}$  a  $x_i$  daný kolem osy  $z_i$

Je zřejmé, že pro základní typy kloubů s jedním stupněm volnosti opět platí:

**kloub *Joint i* je typu P** proměnná definující pohyb kloubu je  $d_i$ , proměnné  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$  jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link i*

**kloub *Joint i* je typu R** proměnná definující pohyb kloubu je  $\theta_i$ , proměnné  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$  jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link i*

Transformační vztah (homogenní transformační matice) mezi s.s.  $F_{i-1}$  a  $F_i$  je dán následujícím způsobem.

- Vyber s.s.  $F_{i-1}$
- Posuň tento systém podél osy  $\mathbf{x}_{i-1}$  o vzdálenost  $a_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{x}_{i-1}$  o úhel  $\alpha_i \Rightarrow$  dostáváme s.s.  $F'_i$ . Matice přechodu:

$$\mathbf{T}_{i'}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

- Posuň s.s.  $F'_i$  podél osy  $\mathbf{z}'_i$  o vzdálenost  $d_i$  a otoč jej okolo osy  $\mathbf{z}'_i$  o úhel  $\theta_i \Rightarrow$  dostáváme s.s.  $F_i$ . Matice přechodu:

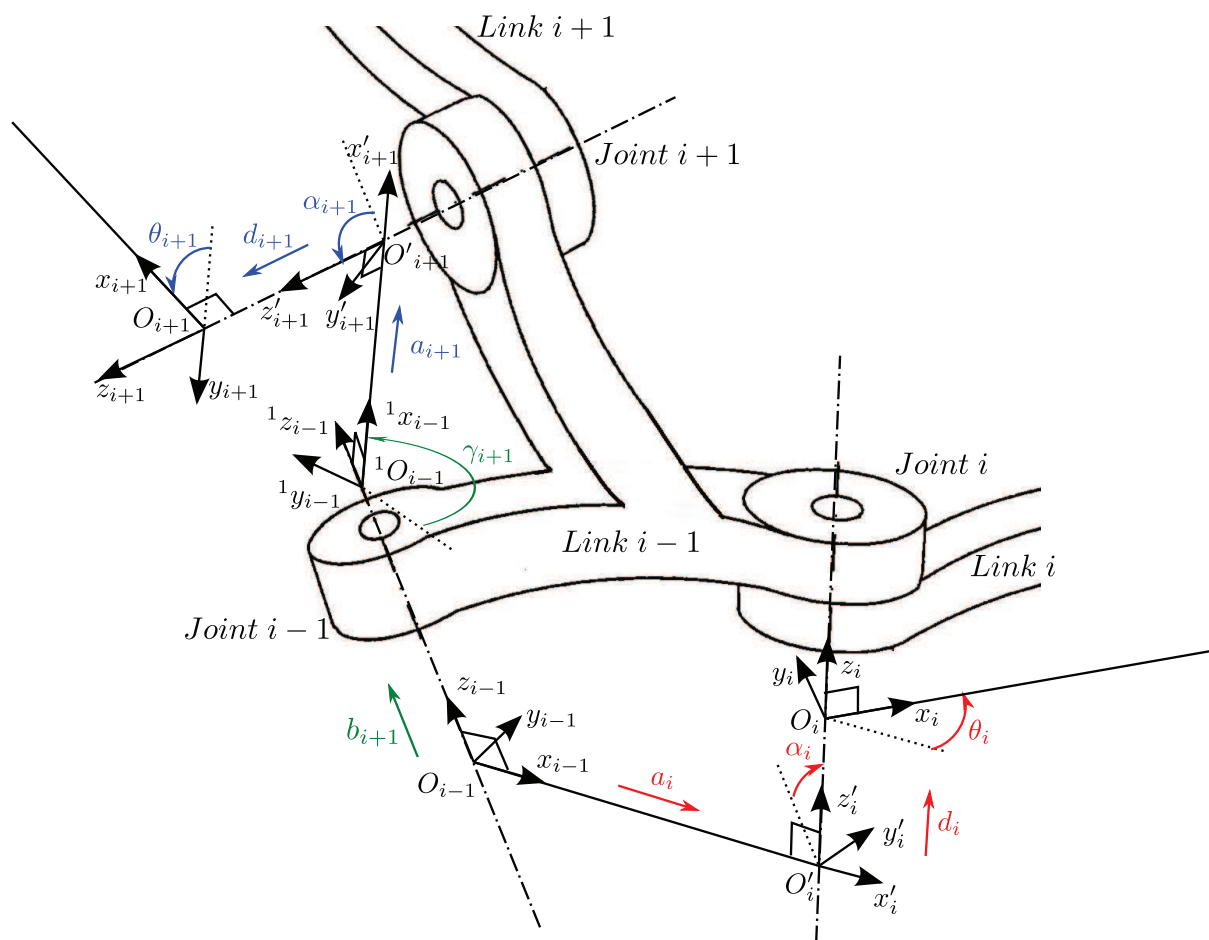
$$\mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

- Výsledná matice přechodu ze s.s.  $F_{i-1}$  do s.s.  $F_i$  je dána:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{i-1} &= \mathbf{T}_{i'}^{i-1} \cdot \mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_i \\ c_{\alpha_i} s_{\theta_i} & c_{\alpha_i} c_{\theta_i} & -s_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} d_i \\ s_{\alpha_i} s_{\theta_i} & s_{\alpha_i} c_{\theta_i} & c_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6) \end{aligned}$$

Porovnáním parametrů D-H úmluvy, viz Obr. 2.1 a K-K úmluvy, viz Obr. 2.4 můžeme vypočítat fakt, že D-H parametry  $[\theta_i, d_i, \alpha_i, a_i]$  odpovídají K-K parametrům  $[\theta_i, d_i, \alpha_{i+1}, a_{i+1}]$  (vyjma případu pro první a poslední čtveřici parametrů, neboť s.s.  $F_0$  může být volen libovolně a s.s.  $F_n$  má pevně určený jen směr osy  $\mathbf{z}_n$ ).





Obrázek 2.5: Khalil-Kleinfingerova úmluva pro rozvětvené kinematické řetězce

Ukažme nyní výhodu K-K úmluvy pro definování rozvětvených architektur. Pro ilustraci předpokládejme stejný případ jako na Obr. 2.3, však se zavedením souřadných systémů jako na Obr. 2.5. Transformaci s.s.  $F_{i-1}$  kloubu *Link i - 1* do s.s.  $F_i$  kloubu *Link i* již známe a je dána pouze 4 parametry  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $d_i$ ,  $\gamma_i$ , viz rovnice (2.6). Poznamenejme, že zmíněné s.s. jsou k sobě navzájem ve specifické poloze, učené normálou os  $z_{i-1}$  a  $z_i$ , a tedy postačují pouze 4 DoF k jejich vzájemnému polohování.

Definujme dále normálu os  $z_{i-1}$  a  $z_{i+1}$  a s ní související pomocný souřadný systém  ${}^1F_{i-1} = {}^1O_{i-1} - {}^1x_{i-1} \ {}^1y_{i-1} \ {}^1z_{i-1}$ , který má osu  ${}^1z_{i-1}$  totožnou s osou  $z_{i-1}$  a osu  ${}^1x_{i-1}$  ve směru definované normály.

Poloha s.s.  $F_{i-1}$  a  ${}^1F_{i-1}$  bude popsána pouze dvojicí parametrů:

$\gamma_{i+1} \dots$  úhel mezi osami  $x_{i-1}$  a  ${}^1x_{i-1}$  kolem osy  $z_{i-1}$

$b_{i+1} \dots$  vzdálenost mezi počátkem  $O_{i-1}$  a počátkem  ${}^1O_{i-1}$

Transformační vztah těchto s.s. je dán pak následujícím způsobem:

- Posuň s.s.  $F_{i-1}$  podél osy  $z_{i-1}$  o hodnotu  $b_{i+1}$  a otoč jej kolem osy  $z_{i-1}$  o úhel  $\gamma_{i+1} \Rightarrow$

dostáváme s.s.  ${}^1F_{i-1}$  Matice přechodu:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i-1}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{z}, b_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_{i+1}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\gamma_{i+1}} & -s_{\gamma_{i+1}} & 0 & 0 \\ s_{\gamma_{i+1}} & c_{\gamma_{i+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\gamma_{i+1}} & -s_{\gamma_{i+1}} & 0 & 0 \\ s_{\gamma_{i+1}} & c_{\gamma_{i+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nyní je zřejmé, že transformace mezi s.s.  ${}^1F_{i-1}$  a  $F_{i+1}$  již bude dána známou transformační maticí  $\mathbf{T}_{i+1}^{i-1}$  analogickou jako v rovnici (2.6) s parametry  $[\theta_{i+1}, d_{i+1}, \alpha_{i+1}, a_{i+1}]$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i+1}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_{i+1}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_{i+1}) &= \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_{i+1}} & -s_{\theta_{i+1}} & 0 & a_{i+1} \\ c_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & -s_{\alpha_{i+1}} & -s_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} \\ s_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & s_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

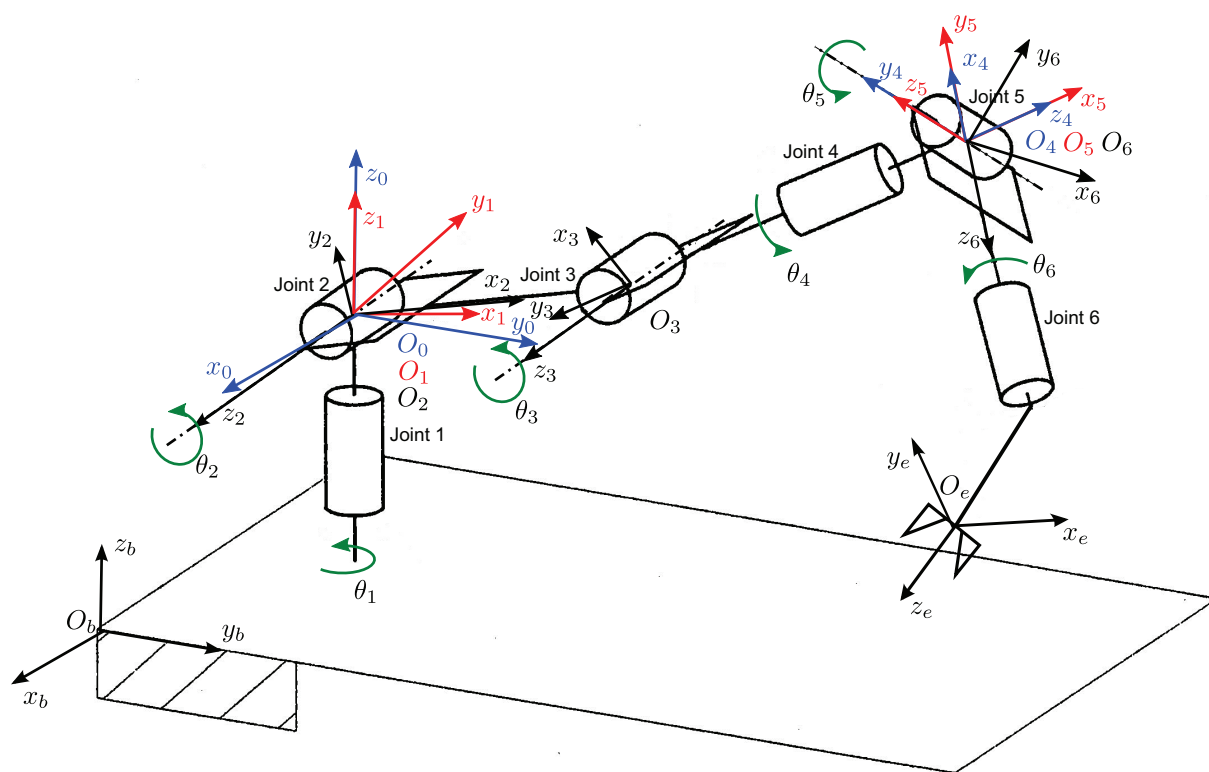
Výsledná matice přechodu ze s.s.  $F_{i-1}$  do s.s.  $F_{i+1}$  je dána:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{i+1}^{i-1} &= \mathbf{T}_{i-1}^{i-1} \cdot \mathbf{T}_{i+1}^{i-1} = \\ &= \text{Trans}(\mathbf{z}, b_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_{i+1}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_{i+1}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_{i+1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_{i+1}) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\gamma_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} - s_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & -c_{\gamma_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} - s_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & s_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} & s_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} + c_{\gamma_{i+1}} a_{i+1} \\ s_{\gamma_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} + c_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & -s_{\gamma_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} + c_{\gamma_{i+1}} c_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & -c_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} & -c_{\gamma_{i+1}} s_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} + s_{\gamma_{i+1}} a_{i+1} \\ s_{\alpha_{i+1}} s_{\theta_{i+1}} & s_{\alpha_{i+1}} c_{\theta_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} & c_{\alpha_{i+1}} d_{i+1} + b_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Poznamenejme, že stejným způsobem lze odvodit transformační vztahy pro libovolný počet kloubů připojených na rameno *Link*  $i - 1$ . Je patrné, že K-K úmluvu jednoznačně definuje, narozdíl od D-H úmluvy, kloubové souřadnice každého kloubu.

### ★ Příklad 2.2 (K-K úmluva pro SM+SZ)

Obrázek 2.6 znázorňuje zavedení souřadných systémů pro jednotlivá ramena AM+SZ.



Obrázek 2.6: Zavedení souřadných systémů pro AM+SZ dle K-K úmluvy

Geometrické parametry manipulátoru (tzv. K-K parametry), jsou pak dány následující tabulkou:

Joint $i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	0	0	0
2	0	0	$\frac{\pi}{2}$
3	0	$l_2$	0
4	$l_3$	0	$\frac{\pi}{2}$
5	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
6	0	0	$\frac{\pi}{2}$

Tabulka 0.2: K-K parametry AM+SZ. Poznamenejme, že se nyní v popisu manipulátoru nevy-  
skytují parametry  $l_1$  respektive  $l_4$ . Bez újmy na obecnosti mohou být tyto parametry  
součástí konstantních transformačních matic  $\mathbf{T}_0^b$  respektive  $\mathbf{T}_e^n$ , viz Poznámka 3.1.

★

### 3 Polohové závislosti manipulátorů

Polohovými závislostmi rozumíme vztah mezi kloubovými  $\Theta$  a zobecněnými  $\mathbf{X}$  souřadnicemi manipulátoru a dělíme je na dva základní problémy:

- **přímý kinematický problém/úloha (PKÚ)**  
Tedy nalezení závislosti zobecněných souřadnic  $\mathbf{X}$  na kloubových souřadnicích  $\Theta$ . V cizojazyčné literatuře často nazývaný jako *direct/forward kinematics problem* [19], *direct geometric model* [40].
- **inverzní kinematický problém/úloha (IKÚ)**  
Tedy nalezení závislosti kloubových souřadnic  $\Theta$  na zobecněných souřadnicích  $\mathbf{X}$ . V cizojazyčné literatuře často nazývaný jako *inverse kinematic problem* [19], *inverse geometric problem* [40].

Pro lepší orientaci v textu zavedme následující značení pro kloubové souřadnice manipulátoru:

$$\Theta = [ \vartheta_1 \quad \dots \quad \vartheta_n ]^T \quad (3.1)$$

kde

$$\vartheta_i = \theta_i \text{ (Joint } i \text{ je typu } \mathbf{R}) \quad \text{a} \quad \vartheta_i = d_i \text{ (Joint } i \text{ je typu } \mathbf{P})$$

#### 3.1 Přímý kinematický problém pro sériové manipulátory

Přímý kinematický problém pro sériové manipulátory nepředstavuje vážné komplikace a pro jeho řešení lze s výhodou využít úmluvy pro popis manipulátorů z Kapitoly 2, neboť každá transformační matice  $\mathbf{T}_i^{i-1}$  závisí přímo na aktivní kloubové souřadnici  $\vartheta_i$ .

Přímá kinematická úloha pro  $n$  aktivních kloubů sériového manipulátoru lze tak formulovat ve tvaru:

$$\mathbf{T}_n^0(\Theta) = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1}(\vartheta_i) \quad (3.2)$$

kde transformační matice  $\mathbf{T}_i^{i-1}(\vartheta_i)$  jsou dány dle použité úmluvy přímo rovnicemi (2.3) nebo (2.6).

Je tedy zřejmé, že přímá kinematická úloha pro sériové manipulátory má **vždy analytické řešení**.

#### ■ Poznámka 3.1 (Kompenzace polohy základny a koncového efektoru)

Z praktického hlediska je výhodné definovat ještě dva další s.s., a to s.s. základny (rámu) manipulátoru  $F_b = \{\mathbf{O}_b - \mathbf{x}_b \mathbf{y}_b \mathbf{z}_b\}$  a s.s. koncového efektoru  $F_e = \{\mathbf{O}_e - \mathbf{x}_e \mathbf{y}_e \mathbf{z}_e\}$ . Je zřejmé, že s.s. jsou nezávislé na poloze kloubů manipulátoru, a lze je tedy vyjádřit vzhledem k poloze s.s. prvního  $F_0$  a posledního  $F_n$  kloubu *konstantními* maticemi přechodu  $\mathbf{T}_0^b$  a  $\mathbf{T}_e^n$ , viz Obr. 3.1. V technické praxi tyto matice představují většinou kompenzaci umístění konkrétního manipulátoru na výrobní lince ( $\mathbf{T}_0^b$ ) či kompenzaci polohy pracovního nástroje na koncovém efektoru manipulátoru ( $\mathbf{T}_e^n$ ).

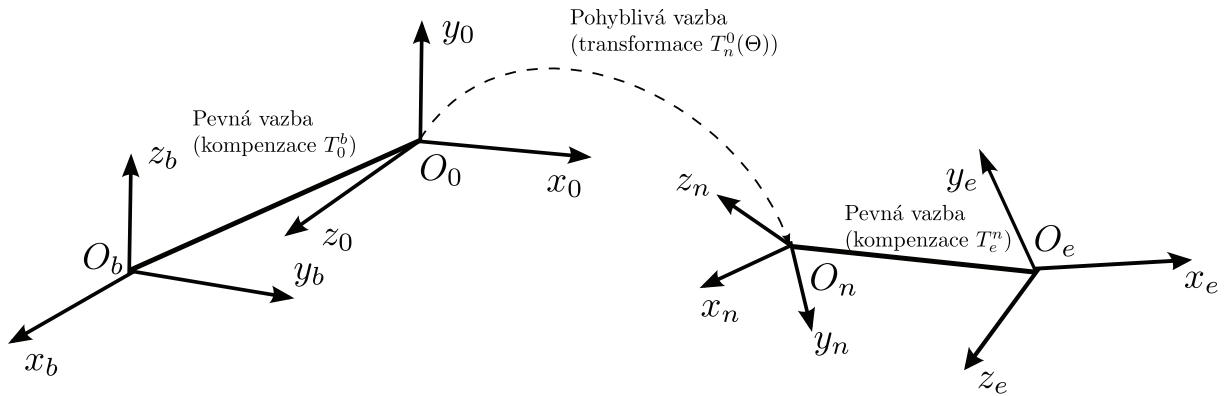
Výsledná matice přechodu  $\mathbf{T}_e^b(\Theta)$  závislejší na poloze kloubových souřadnic  $\Theta$  respektující i výše uvedené kompenzace polohy bude mít tak následující tvar:

$$\mathbf{T}_e^b(\Theta) = \mathbf{T}_0^b \cdot \mathbf{T}_n^0 \cdot \mathbf{T}_e^n = \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}_e^b & & & \mathbf{r}_{b,e}^b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (3.3)$$

kde

$$\mathbf{R}_e^b = [ \mathbf{x}_e^b \quad \mathbf{y}_e^b \quad \mathbf{z}_e^b ] \quad (3.4)$$

je matice rotace a  $\mathbf{r}_{b,e}^b = \mathbf{O}_e^b - \mathbf{O}_b^b = \mathbf{O}_e^b$  je translační vektor s.s.  $F_e$  vzhledem k s.s.  $F_b$ .



Obrázek 3.1: Princip kompenzací manipulátoru

■

Poznamenejme, že vektor zobecněných souřadnic manipulátoru  $\mathbf{X}$  lze získat z transformační matice  $\mathbf{T}_e^b$  např., jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\mathbf{R}_e^b \quad \mathbf{O}_e^b] \quad \text{matice rotace + translační vektor} & (3.5) \\ \mathbf{X} &= [\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad (\mathbf{O}_e^b)^T]^T \quad \text{Eulerovy úhly (z } \mathbf{R}_e^b) + \text{translační vektor} \\ & \dots \text{ atd.} \end{aligned}$$

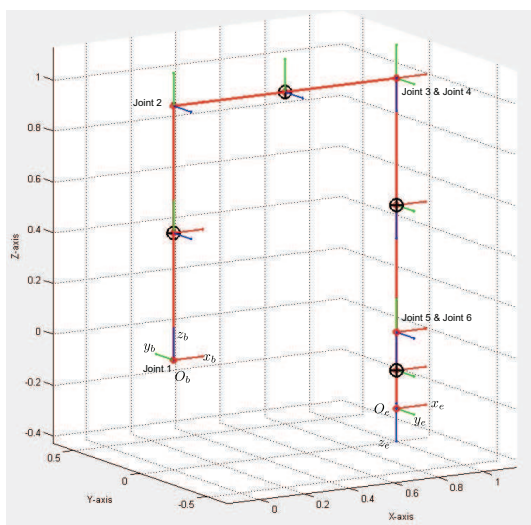
Přímý kinematický problém lze tak s využitím rovnice (3.2) interpretovat jako nelineární vektorovou transformační funkci parametrizovanou návrhovými parametry manipulátoru  $\xi$  (v literatuře často označována jako *geometrická omezení manipulátoru*):

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}(\Theta), \quad \text{kde } \mathbf{G} = \mathbf{G}(\xi) \quad (3.6)$$

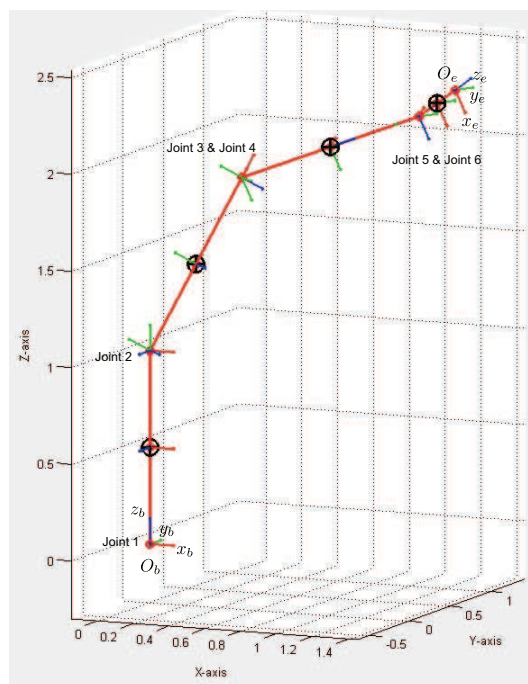
★ **Příklad 3.1 (Přímá kinematická úloha pro SM+SZ)**

Přímá kinematická úloha SM+SZ pro domovskou ( $\Theta = \mathbf{0}$ ) a obecnou polohu koncového efektoru manipulátoru (bez kompenzace  $\mathbf{T}_0^b = \mathbf{T}_e^6 = \mathbf{I}$ ):

$$\begin{aligned} \Theta = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T & \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.3 \end{bmatrix} \\ \Theta = \left[ \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2} \right]^T & \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.51 & 0.33 & 0.79 & 1.28 \\ -0.20 & 0.94 & -0.27 & 0.96 \\ -0.84 & -0.02 & 0.55 & 2.29 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



(a) Domovská poloha



(b) Obecná poloha

Obrázek 3.2: Přímá kinematická úloha pro SM+SZ (model v SimMechanicsu)



### 3.2 Inverzní kinematický problém pro sériové manipulátory

Formulace inverzního kinematického problému plyne přímo z rovnice (3.6). Polohu kloubových souřadnic  $\Theta$  lze pro danou polohu koncového efektoru  $\mathbf{X}$  stanovit jako:

$$\Theta = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X}) \quad (3.7)$$

Nalezení inverze nelineární vektorové transformační funkce  $\mathbf{G}^{-1}$  je v obecném případě velmi složité, neboť ve funkci  $\mathbf{G}$  se, díky transformační matici  $\mathbf{T}_e^b$ , vyskytují součty násobků a mocnin členů  $\sin \vartheta_i$ ,  $\cos \vartheta_i$ .

Uvažujme obecný neredundantní sériový prostorový manipulátor se všemi 6 stupni volnosti koncového efektoru, a tedy právě 6 kloubovými souřadnicemi  $\Theta = [\vartheta_1 \ \dots \ \vartheta_6]^T$ . Jelikož zobecněný vektor souřadnic  $\mathbf{X}$  má v prostoru maximálně 6 nezávislých proměnných (např. 3 Eulerovy úhly a vektor translace koncového efektoru) je zřejmé, že řešení inverzní kinematické úlohy pro obecný neredundantní manipulátor vede na soustavu 6 nelineárních rovnic pro 6 neznámých.

Metody pro nalezení řešení inverzní kinematické úlohy pro sériové manipulátory lze rozdělit v podstatě do následujících skupin, které budou stručně zmíněny v následujících kapitolách:

- Přímé analytické řešení jednoduchých architektur manipulátorů
- Specializované metody pro řešení konkrétních variant architektur manipulátorů (omezené uspořádání kloubů daných typů)
- Metody pro řešení obecných architektur manipulátorů

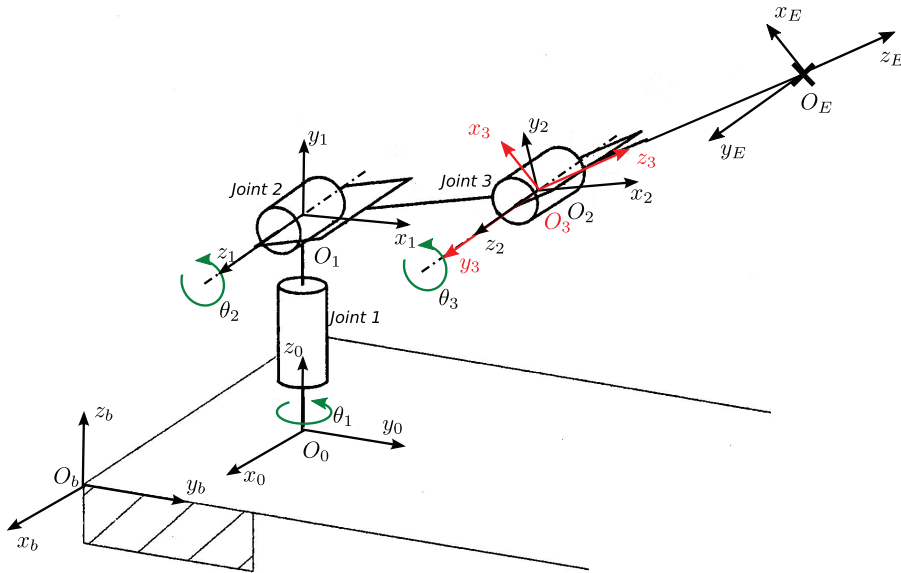
### 3.2.1 Přímé analytické řešení jednoduchých architektur manipulátorů

Využívá se zejména pro jednoduché konstrukce manipulátorů, kde je možné s určitou dávkou zkušeností a matematické intuice relativně snadno nalézt inverzní kinematickou transformaci  $\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X})$ . Metody přímého analytického řešení bývají aplikovány na jednoduché planární či prostorové manipulátory, viz Příklad 3.2, 3.3.

#### ★ Příklad 3.2 (Translační část AM+SZ z Obrázku 2.2)

Zobecněné souřadnice translační části AM+SZ definujeme jako (předpokládejme  $\mathbf{T}_0^b = \mathbf{I} \Rightarrow F_0 = F_b$ , žádná kompenzace polohy základny manipulátoru):

$$\mathbf{X}_{tran} = \mathbf{r}_{0,E}^0 = \mathbf{O}_E^0 = \begin{bmatrix} O_{E_x}^0 & O_{E_y}^0 & O_{E_z}^0 \end{bmatrix}^T$$



Obrázek 3.3: Translační část AM+SZ (zavedení s.s. dle D-H úmluvy, viz Příklad 2.1)

Všimněme si, že řešení IKÚ pro translační část AM+SZ, lze rozdělit na dvě fáze.

Pro kloubovou souřadnici  $\theta_1$  budou díky umístění kloubů zřejmě existovat dvě řešení ve tvaru:

$$\theta_1 = \text{atan2}(O_{E_x}^0, O_{E_y}^0) \quad (3.8)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(O_{E_x}^0, O_{E_y}^0) + \pi \quad (3.9)$$

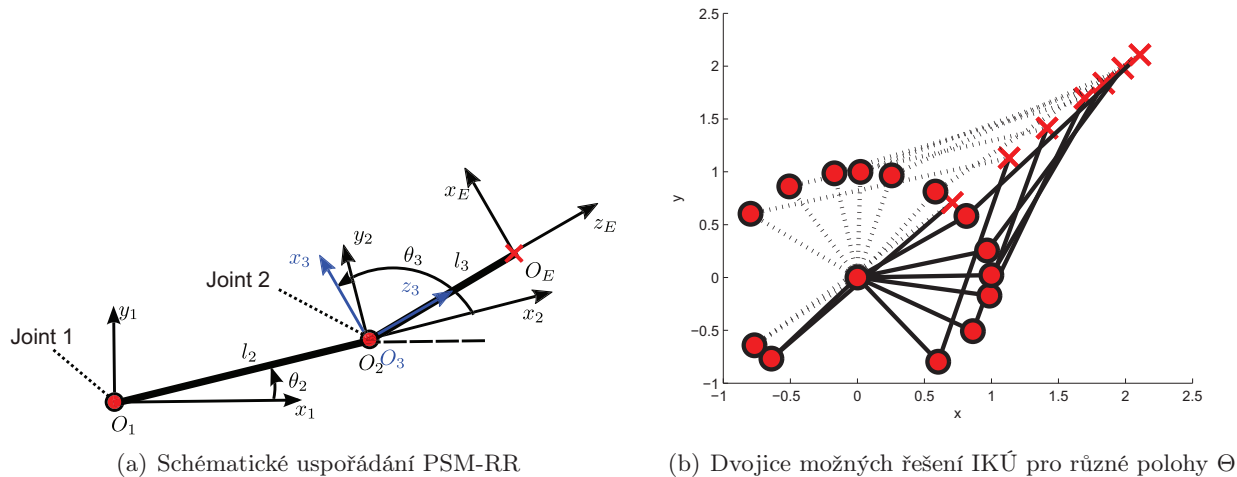
Tím jsme problém převedli na řešení IKÚ planárního sériového manipulátoru typu  $\underline{RR}$  (PSM-RR) se dvěma DoF, jehož schématické uspořádání je znázorněno na Obrázku 0.4(a). Zobecněné souřadnice PSM-RR definujeme jako:

$$\mathbf{X}_{psm} = \mathbf{O}_E^1 = \begin{bmatrix} O_{E_x}^1 & O_{E_y}^1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

kde  $\mathbf{X}_{psm}$  lze díky znalosti kloubové souřadnice  $\theta_1$  získat z  $\mathbf{X}_{tran}$  jako

$$\mathbf{O}_E^1 = (\mathbf{T}_1^0(\theta_1))^{-1} \cdot \mathbf{O}_E^0$$

kde matice přechodu  $\mathbf{T}_1^0(\theta_1)$  je dána rovnicí (2.3) a hodnotami z Tabulky 2.1.



Obrázek 3.4: IKÚ pro planární sériový manipulátor typu RR

Řešení PKÚ pro PSM-RR lze psát:

$$\mathbf{T}_E^1(\Theta) = \prod_{i=2}^3 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i) \cdot \mathbf{T}_E^3 = \begin{bmatrix} * & * & * & l_3 s(\theta_2 + \theta_3) + l_2 c\theta_2 \\ * & * & * & -l_3 c(\theta_2 + \theta_3) + l_2 s\theta_2 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

kde

$$\mathbf{T}_E^3 = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \mathbf{I} & & 0 \\ & & & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je konstantní kompenzační matice polohy koncového efektoru a matice přechodu  $\mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i)$  jsou opět určeny rovnicí (2.3) a hodnotami z Tabulky 2.1.

Poloha koncového efektoru PSM-RR je tedy dána jako:

$$\mathbf{X}_{psm} = \mathbf{T}_E^1[1 : 3, 3] = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{E_x}^1 \\ \mathbf{O}_{E_y}^1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 s(\theta_2 + \theta_3) + l_2 c\theta_2 \\ -l_3 c(\theta_2 + \theta_3) + l_2 s\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

IKÚ pro PSM-RR lze potom řešit následovně:

Umocněním a sečtením prvků  $\mathbf{O}_{E_x}^1$  a  $\mathbf{O}_{E_y}^1$  dostáváme, s využitím součtových goniometrických vzorců, hodnotu kloubové souřadnice  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{O}_{E_x}^1)^2 + (\mathbf{O}_{E_y}^1)^2 &= l_3^2 + l_2^2 + 2l_2l_3s\theta_3 \\ s\theta_3 &= \frac{(\mathbf{O}_{E_x}^1)^2 + (\mathbf{O}_{E_y}^1)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$s_{\theta_3}^2 + c_{\theta_3}^2 = 1 \Rightarrow c_{\theta_3} = \pm \sqrt{1 - s_{\theta_3}^2} \quad (3.12)$$

$$\theta_3 = \text{atan2} \left( \frac{s_{\theta_3}}{c_{\theta_3}} \right) \quad (3.13)$$



Řešením soustavy rovnic, opět s využitím součtových goniometrických vzorců,

$$\begin{aligned} O_{E_x}^1 &= l_3 c_{(\theta_2+\theta_3)} + l_2 c_{\theta_2} \\ O_{E_y}^1 &= -l_3 s_{(\theta_2+\theta_3)} + l_2 s_{\theta_2} \end{aligned}$$

pro neznámé  $s_{\theta_2}$ ,  $c_{\theta_2}$ , dostáváme hodnotu kloubové souřadnice  $\theta_2$ :

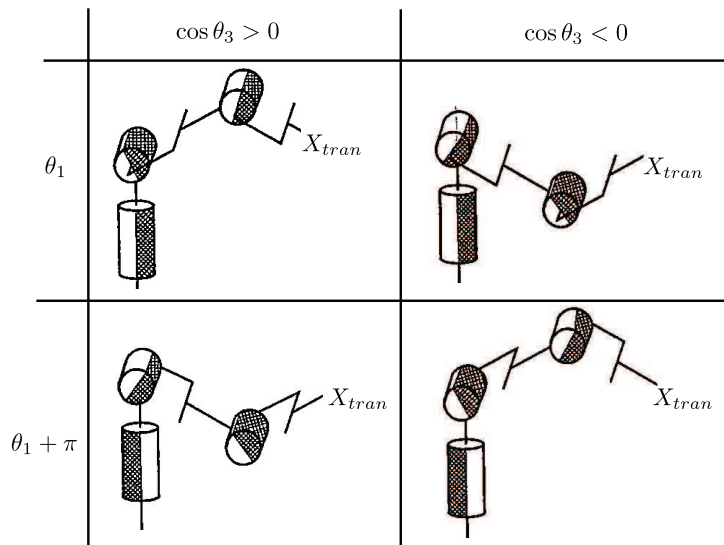
$$\begin{aligned} s_{\theta_2} &= \frac{l_3 c_{\theta_3} O_{E_x}^1 + (l_2 + l_3 s_{\theta_3}) O_{E_y}^1}{(O_{E_x}^1)^2 + (O_{E_y}^1)^2} \\ c_{\theta_2} &= \frac{(l_2 + l_3 s_{\theta_3}) O_{E_x}^1 - l_3 c_{\theta_3} O_{E_y}^1}{(O_{E_x}^1)^2 + (O_{E_y}^1)^2} \\ \theta_2 &= \text{atan2} \left( \frac{s_{\theta_2}}{c_{\theta_2}} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ze vztahu (3.12) je zřejmé, že IKÚ pro PSM-RR má dvě řešení, viz Obrázek 0.4(b). Poznamenejme dále, že řešení IKÚ existuje pouze za předpokladu  $-1 \leq s_{\theta_3} \leq 1$ , viz rovnice (3.12). Pro možné umístění koncového efektoru tak platí (po jednoduchých úpravách) nerovnost,

$$l_2 - l_3 \leq \|X_{psm}\| \leq l_2 + l_3$$

která definuje pracovní prostor manipulátoru.

Je tedy zřejmé, že IKÚ pro translační část AM+SZ má celkem 4 různá řešení (dvojice řešení pro kloubovou souřadnici  $\theta_1$  a dvojice řešení pro PSM-RR), viz Obrázek 3.5.



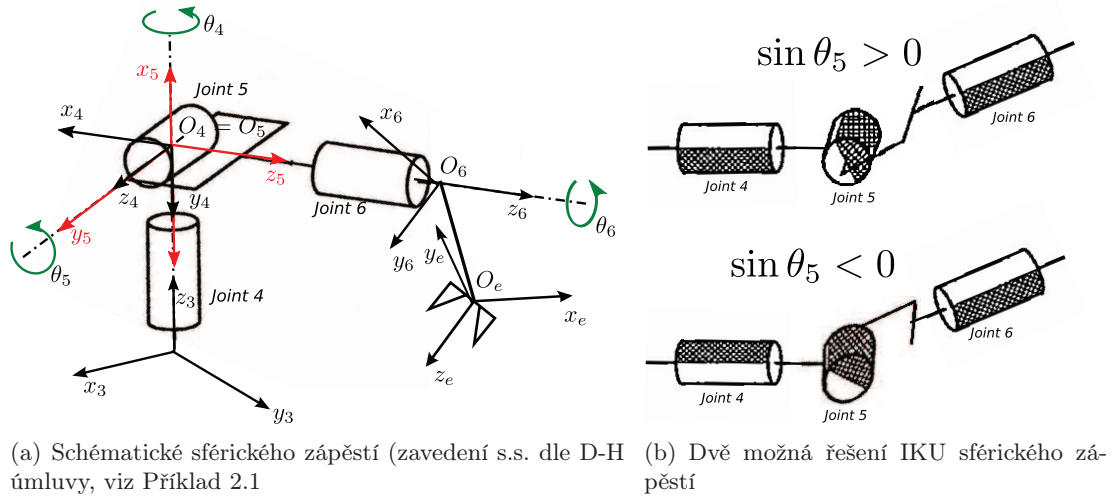
Obrázek 3.5: Možná řešení IKÚ pro translační část AM+SZ

★

★ **Příklad 3.3 (Sférické zápěstí AM+SZ z Obrázku 2.2)**

Zobecněné souřadnice sférického zápěstí AM+SZ definujeme jako (předpokládejme  $T_e^6 = I \Rightarrow F_6 = F_e$ , žádná kompenzace polohy koncového efektoru manipulátoru):

$$X_{sz} = R_6^3 = [x_6^3 \quad y_6^3 \quad z_6^3]$$



Obrázek 3.6: IKU sférické zápěstí

Řešení PKU pro sférické zápěstí lze psát:

$$\mathbf{T}_6^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_6^3 & \mathbf{O}_6^3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \prod_{i=4}^6 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i) \quad (3.15)$$

kde

$$\mathbf{R}_6^3 = \begin{bmatrix} c_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} - s_{\theta_4}s_{\theta_6} & -c_{\theta_4}c_{\theta_5}c_{\theta_6} - s_{\theta_4}c_{\theta_6} & c_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ s_{\theta_4}c_{\theta_5} + c_{\theta_4}s_{\theta_6} & -s_{\theta_4}c_{\theta_5}s_{\theta_6} + c_{\theta_4}c_{\theta_6} & s_{\theta_4}s_{\theta_5} \\ -s_{\theta_5}c_{\theta_6} & s_{\theta_5}s_{\theta_6} & c_{\theta_5} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

a matice přechodu  $\mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i)$  jsou opět určeny rovnicí (2.3) a hodnotami z Tabulky 2.1.

Ze soustavy rovnic (3.16) lze odvodit, že se IKU pro sférické zápěstí rozpadá na dvě řešení, viz Obrázek 0.6(b).

Umocněním a sečtením prvků  $a_x^3$  a  $a_y^3$  dostáváme:

$$(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2 = s_{\theta_5}^2 \Rightarrow s_{\theta_5} = \pm \sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}$$

$$1. \text{ Pro } s_{\theta_5} = +\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2} \geq 0 \Rightarrow \theta_5 \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(s_{\theta_4}s_{\theta_5}, c_{\theta_4}s_{\theta_5}) = \text{atan2}(s_{\theta_4}, c_{\theta_4}) = \text{atan2}(a_y^3, a_x^3) \quad (3.17)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(s_{\theta_5}, c_{\theta_5}) = \text{atan2}(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(s_{\theta_5}s_{\theta_6}, -(-s_{\theta_5}c_{\theta_6})) = \text{atan2}(s_{\theta_6}, c_{\theta_6}) = \text{atan2}(s_z^3, -n_z^3)$$

$$2. \text{ Pro } s_{\theta_5} = -\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2} \leq 0 \Rightarrow \theta_5 \in \langle -\pi, 0 \rangle$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(s_{\theta_4}(-s_{\theta_5}), c_{\theta_4}(-s_{\theta_5})) = \text{atan2}(s_{\theta_4}, c_{\theta_4}) = \text{atan2}(-a_y^3, -a_x^3) \quad (3.18)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(s_{\theta_5}, c_{\theta_5}) = \text{atan2}(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3)$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(-s_{\theta_5}s_{\theta_6}, -(s_{\theta_5}c_{\theta_6})) = \text{atan2}(s_{\theta_6}, c_{\theta_6}) = \text{atan2}(-s_z^3, n_z^3)$$

Systematické řešení IKÚ pro jednoduché manipulátory, pro které platí, že většina D-H respektive K-K parametrů  $a_i$ ,  $d_i$  jsou nulové a  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$  jsou nulové či rovné  $\pm\frac{\pi}{2}$ , popsal Richard P. Paul, viz [33]. Jeho metoda v podstatě zobecňuje řešení IKÚ demonstrované v Příkladech 3.2 a 3.3 a v literatuře je často nazývána jako *Paulova metoda* (*Paul method*). Metoda je založena na myšlence postupného vyjadřování kloubových souřadnic  $\vartheta_i$  z celkového kinematického popisu manipulátoru daného rovnicí PKÚ, následujícím postupem:

- Výpočet matice přechodu  $\mathbf{T}_n^0$  ze zobecněných souřadnic  $\mathbf{X}$ , viz Kapitola 3.1. Získáváme tak soustavu 12 nelineárních rovnic pro  $n$  neznámých (3.2):

$$\mathbf{T}_n^0 = \mathbf{T}_1^0(\vartheta_1) \cdot \mathbf{T}_2^1(\vartheta_2) \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_n^{n-1} \quad (3.19)$$

- Přenásobením rovnice (3.19) zleva maticí přechodu  $(\mathbf{T}_1^0(\vartheta_1))^{-1}$  dostáváme:

$$\mathbf{T}_0^1(\vartheta_1) \cdot \mathbf{T}_n^0 = \mathbf{T}_2^1(\vartheta_2) \cdot \mathbf{T}_3^2(\vartheta_3) \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_n^{n-1}(\vartheta_n) \quad (3.20)$$

Levá strana rovnice (3.20) je pak závislá pouze na kloubové souřadnici  $\vartheta_1$ , kterou se pokusíme vypočítat.

- Přenásobením rovnice (3.20) zleva maticí přechodu  $(\mathbf{T}_2^1(\vartheta_2))^{-1}$  dostáváme:

$$\mathbf{T}_1^2(\vartheta_2) \cdot \mathbf{T}_0^1(\vartheta_1) \cdot \mathbf{T}_n^0 = \mathbf{T}_3^2(\vartheta_3) \cdot \mathbf{T}_4^3(\vartheta_4) \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_n^{n-1}(\vartheta_n) \quad (3.21)$$

Levá strana rovnice (3.21) je pak závislá pouze na kloubové souřadnici  $\vartheta_2$  ( $\vartheta_1$  již známe), kterou se pokusíme vypočítat.

- Analogickým způsobem se pokusíme postupně dopočítat všechny zbývající kloubové souřadnice  $\vartheta_i$ ,  $i = 3 \dots n$

Bylo experimentálně ukázáno, že pro celou řadu průmyslově používaných manipulátorů degeneruje IKÚ pomocí Paulovy metody na řešení 8 základních typů rovnic uvedených v Tabulce 0.3, jejichž analytické řešení je známé (zde jej však dále neuvádíme a lze nalézt společně s konkrétním příkladem (řešení IKÚ pro AM+SZ) např. v [40]).

Typ 1	$X \cdot d_i = Y$
Typ 2	$X \cdot s_{\theta_i} + Y \cdot c_{\theta_i} = Z$
Typ 3	$X_1 \cdot s_{\theta_i} + Y_1 \cdot c_{\theta_i} = Z_1$ $X_2 \cdot s_{\theta_i} + Y_2 \cdot c_{\theta_i} = Z_2$
Typ 4	$X_1 \cdot d_j \cdot s_{\theta_i} = Y_1$ $X_2 \cdot d_j \cdot c_{\theta_i} = Y_2$
Typ 5	$X_1 \cdot s_{\theta_i} = Y_1 + Z_1 \cdot d_j$ $X_2 \cdot c_{\theta_i} = Y_2 + Z_2 \cdot d_j$
Typ 6	$W \cdot s_{\theta_j} = X \cdot c_{\theta_i} + Y \cdot s_{\theta_i} + Z_1$ $W \cdot c_{\theta_j} = X \cdot c_{\theta_i} - Y \cdot s_{\theta_i} + Z_2$
Typ 7	$W_1 \cdot c_{\theta_j} + W_2 \cdot s_{\theta_j} = X \cdot c_{\theta_i} + Y \cdot s_{\theta_i} + Z_1$ $W_1 \cdot s_{\theta_j} - W_2 \cdot c_{\theta_j} = X \cdot s_{\theta_i} - Y \cdot c_{\theta_i} + Z_2$
Typ 8	$X \cdot c_{\theta_i} + Y \cdot c_{(\theta_i+\theta_j)} = Z_1$ $X \cdot s_{\theta_i} + Y \cdot s_{(\theta_i+\theta_j)} = Z_2$

Tabulka 0.3: Typické rovnice řešené při použití Paulovy metody, kde  $\theta_i$  resp.  $d_i$  jsou kloubové souřadnice kloubu typu  $\mathbf{R}$  resp.  $\mathbf{P}$  a  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$ ,  $W_i$  jsou reálné koeficienty závislé na D-H či K-K geometrických parametrech manipulátoru

### 3.2.2 Specializované metody pro řešení konkrétních variant architektur manipulátorů

V průmyslových aplikacích se velmi často vyskytují sériové manipulátory, jejichž architektura je navržena takovým způsobem, aby byl výpočet IKÚ co možná nejvíce usnadněn. Jedná se zejména o případy, kdy je možné daný manipulátor vhodně dekomponovat na více funkčních celků a IKÚ řešit pro každý celek samostatně (např. prostřednictvím přímých analytických metod, viz kapitola 3.2.1). Vypustíme-li jednoduché pravouhlé (portálové) manipulátory, pro které je IKÚ triviální, drtivou většinu manipulátorů v průmyslu tvoří právě antropomorfní manipulátor se sférickým zápěstím.

#### ★ Příklad 3.4 (IKÚ AM+SZ z Obrázku 2.2)

Nechť

$$\mathbf{X} = [ \mathbf{x}_e^b \quad \mathbf{y}_e^b \quad \mathbf{z}_e^b \quad \mathbf{O}_e^b ] \quad (3.22)$$

jsou zobecněné souřadnice manipulátoru se zavedenými s.s. dle D-H úmluvy, viz Příklad 2.1.

Je zřejmé, že směrové vektory os a počátek s.s.  $F_6$  vzhledem k s.s.  $F_0$  lze získat z  $\mathbf{X}$  pomocí kompenzačních matic  $\mathbf{T}_0^b$  a  $\mathbf{T}_e^6$  jako:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{x}_6^0 & \mathbf{y}_6^0 & \mathbf{z}_6^0 & \mathbf{O}_6^0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = (\mathbf{T}_0^b)^{-1} \cdot \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{x}_e^b & \mathbf{y}_e^b & \mathbf{z}_e^b & \mathbf{O}_e^b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot (\mathbf{T}_e^6)^{-1} \quad (3.23)$$

Zobecněné souřadnice translační části manipulátoru z Příkladu 3.2 lze potom vypočítat jako:

$$\mathbf{X}_{tran} = \mathbf{O}_E^0 = \mathbf{O}_4^0 = \mathbf{O}_5^0 = \mathbf{O}_6^0 - l_4 \cdot \mathbf{z}_6^0 \quad (3.24)$$

Získáváme tak řešení pro kloubové souřadnice  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  a  $\theta_3$ .

Zobecněné souřadnice sférického zápěstí z Příkladu 3.3 nyní lze spočítat jako:

$$\mathbf{X}_{sz} = \mathbf{R}_6^3 = \underbrace{(\mathbf{T}_3^0(\theta_1, \theta_2, \theta_3)[1:3, 1:3])^T}_{\mathbf{R}_0^3} \cdot \underbrace{[\mathbf{x}_6^0 \quad \mathbf{y}_6^0 \quad \mathbf{z}_6^0]}_{\mathbf{R}_6^0} \quad (3.25)$$

kde

$$\mathbf{T}_3^0(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \prod_{i=1}^3 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i)$$

a matice přechodu  $\mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_i)$  jsou určeny rovnicí (2.3) a hodnotami z Tabulky 2.1.

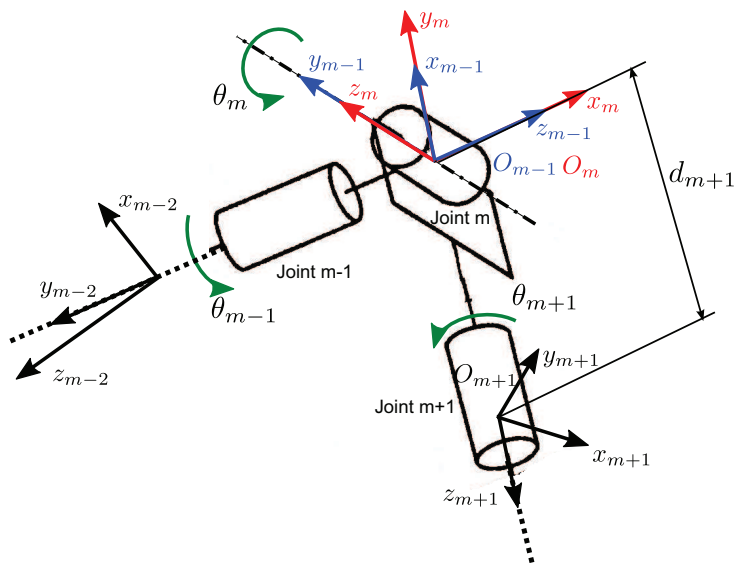
Získáváme tak řešení pro zbývající kloubové souřadnice  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  a  $\theta_6$ . IKÚ pro AM+SZ má tedy celkem 8 různých řešení (4 pro translační část krát 2 pro sférické zápěstí). ★

Metodu řešení IKÚ AM+SZ pomocí vhodné dekompozice na translační část (obecně řešení polohové rovnice) a sférické zápěstí (obecně řešené rotační rovnice) ukázanou v Příkladu 3.4 lze zobecnit pro dva základní typy architektury manipulátorů se 6 DoF, viz [16]. Uveďme dále jen nástin řešení, podrobnější popis lze nalézt například v [40].

#### Manipulátor obsahující sférické zápěstí v libovolné části kinematického řetězce

**Možné varianty kinematického řetězce:**

**XXX(RRR), X(RRR)XX, XX(RRR)X, XXX(RRR)**, kde (RRR) označuje sférické zápěstí a X označuje kloub typu P nebo R.



Obrázek 3.7: Sférické zápěstí (obecný případ)

**Nástin metody:**

Předpokládáme-li popis s.s. manipulátoru pomocí K-K úmluvy, viz Příklad 2.2, trojice po sobě jdoucích kloubů *Joint m - 1*, *Joint m* a *Joint m + 1*, kde  $2 \leq m \leq 5$ , tvoří sférické zápěstí, pokud pro K-K parametry platí následující, viz Obrázek 3.7:

$$\begin{aligned} a_m &= d_m = a_{m+1} = 0 \\ s_{\alpha_m} &\neq 0 \\ s_{\alpha_{m+1}} &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Je zřejmé, že počátky s.s.  $F_{m-1}$  a  $F_m$  jsou shodné a nezávislé na kloubových souřadnicích sférického zápěstí  $\theta_{m-1}$ ,  $\theta_m$ ,  $\theta_{m+1}$ . Polohu těchto počátků můžeme tedy vyjádřit vzhledem k s.s.  $F_{m-2}$  jako:

$$\begin{bmatrix} O_{m-1}^{m-2} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot \text{Trans}(z, -d_{m+1}) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ -d_{m-1}s_{\alpha_{m-1}} \\ d_{m-1}c_{\alpha_{m-1}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Rovnice (3.2) lze tedy psát s využitím rovnice (3.27) jako (matice přechodu  $\mathbf{T}_6^0$  lze opět vypočítat ze zobecněných souřadnic manipulátoru):

$$\mathbf{T}_{m-2}^0 \cdot \mathbf{T}_{m+1}^{m-2} \cdot \mathbf{T}_6^{m+1} = \mathbf{T}_6^0 \quad (3.28)$$

$$\mathbf{T}_{m-2}^0 \cdot \begin{bmatrix} O_{m-1}^{m-2} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_6^0 \cdot \mathbf{T}_{m+1}^6 \cdot \text{Trans}(z, -d_{m+1}) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Rovnice (3.29) se nazývá *polohovou rovnicí*, neboť závisí pouze na kloubových souřadnicích, které nepřísluší sférickému zápěstí  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-2}$  a  $\vartheta_{m+1}, \dots, \vartheta_6$ . Zřejmě tedy platí:

$$\mathbf{T}_{m-2}^0 = \mathbf{T}_{m-2}^0(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-2}) \quad \text{a} \quad \mathbf{T}_{m+1}^6 = \mathbf{T}_{m+1}^6(\vartheta_{m+1}, \dots, \vartheta_6)$$

kde  $\vartheta_i$  je kloubová souřadnice kloubu typu **P** respektive **R**, viz (3.1).

Lze ukázat, že rovnice (3.29) vede na řešení 6 typů rovnic, jejichž analytické řešení je opět známé. První tři rovnice jsou shodné s rovnicemi typu 1, 2 a 3 z Tabulky 0.3 a zbývající tři typy rovnic jsou uvedeny v Tabulce 0.4. Počet možných řešení je roven čtyřem.

Typ 9	$a_2 d_i^2 + a_1 d_i + a_0 = 0$
Typ 10	$a_4 d_i^4 + a_3 d_i^3 + a_2 d_i^2 + a_1 d_i + a_0 = 0$
Typ 11	$a_4 s_{\theta_i}^2 + a_3 c_{\theta_i} s_{\theta_i} + a_2 c_{\theta_i} + a_1 s_{\theta_i} + a_0 = 0$

Tabulka 0.4: Další typické rovnice použité při řešení IKÚ manipulátoru se sférickým zápěstím, kde  $\theta_i$  resp.  $d_i$  jsou kloubové souřadnice kloubu typu  $\mathbf{R}$  resp.  $\mathbf{P}$  a  $a_i$  jsou reálné koeficienty závislé na K-K geometrických parametrech manipulátoru

Z rovnice (3.28) je možné vzhledem k (1.10) odvodit závislosti pro rotační matice jednotlivých souřadných systémů:

$$\mathbf{R}_{m-2}^0 \cdot \mathbf{R}_{m+1}^{m-2} \cdot \mathbf{R}_6^{m+1} = \mathbf{R}_6^0 \quad (3.30)$$

Rovnice (3.30) se nazývá *rotační rovnici*, neboť, pro nyní již známé hodnoty kloubových souřadnic nepříslušejícím sférickému zápěstí (matice  $\mathbf{R}_{m-2}^0$  a  $\mathbf{R}_6^{m+1}$  jsou konstantní matice), závisí pouze na kloubových souřadnicích sférického zápěstí:

$$\mathbf{R}_{m+1}^{m-2} = \mathbf{R}_{m+1}^{m-2}(\theta_{m-1}, \theta_m, \theta_{m+1})$$

Lze ukázat, že rovnice (3.30) vede na řešení rovnic typu 2 a 3 z Tabulky 0.3. Počet možných řešení je roven dvěma.

### Manipulátor obsahující 3 klouby typu $\mathbf{P}$ a 3 klouby typu $\mathbf{R}$ v libovolném uspořádání

#### Možné varianty kinematického řetězce:

PPRRRR, PPRPRR, ... + dalších 18 kombinací.

#### Nástin metody:

Označme klouby typu  $\mathbf{R}$  jako *Joint i*, *Joint j* a *Joint k* a klouby typu  $\mathbf{P}$  jako *Joint i'*, *Joint j'* a *Joint k'*.

Je zřejmé, že klouby typu  $\mathbf{P}$  nemohou jakkoliv ovlivnit orientaci koncového efektoru manipulátoru. *Rotační rovnici* můžeme tedy odvodit z rovnice (3.2) opět s využitím (1.10) jako:

$$\mathbf{R}_i^0(\theta_i) \cdot \mathbf{R}_j^i(\theta_j) \cdot \mathbf{R}_6^j(\theta_k) = \mathbf{R}_6^0 \quad (3.31)$$

Lze ukázat, že rovnice (3.31) vede na podobné řešení jako *rotační rovnice* (3.30). Stejně tak i počet řešení je roven dvěma.

*Polohovou rovnici* lze psát jako:

$$\mathbf{T}_i^0(d_{i'}) \cdot \mathbf{T}_j^i(d_{j'}) \cdot \mathbf{T}_6^k = \mathbf{T}_6^0 \quad (3.32)$$

Vzhledem k tomu, že matice přechodu v rovnici (3.32) jsou závislé pouze na kloubových souřadnicích kloubů typu  $\mathbf{P}$  (kloubové souřadnice  $\theta_i, \theta_j, \theta_k$  kloubů typu  $\mathbf{R}$  známe z řešení rovnice (3.31)), nevyskytují se v této polohové rovnici žádné členy typu  $\sin$ ,  $\cos$  a rovnice je tak soustavou lineárních rovnic v neznámých  $d_{i'}, d_{j'}, d_{k'}$ .

### 3.2.3 Metody pro řešení obecných architektúr manipulátorů

Pod obecnou architekturou manipulátoru se 6 Dof rozumíme manipulátor se 6 klouby typu **P** respektive **R** s libovolně orientovanými osami translace respektive rotace. D-H či K-K geometrické parametry mohou tedy nabývat libovolných reálných hodnot. Dnes nejznámější obecnou metodou pro řešení IKÚ takových manipulátorů je *Raghavan-Rothova metoda* (*Raghavan-Roth method*), viz [32].

**Nástin metody (pro sériový manipulátor se 6 klouby typu R):**

Rovnice (3.2) lze přepsat následovně:

$$\mathbf{T}_1^0(\theta_1) \cdot \mathbf{T}_2^1(\theta_2) \cdot \mathbf{T}_3^2(\theta_3) \cdot \mathbf{T}_4^3(\theta_4) = \mathbf{T}_6^0 \cdot \mathbf{T}_5^6(\theta_6) \cdot \mathbf{T}_4^5(\theta_5) \quad (3.33)$$

Prvky matice na pravé straně rovnice (3.33) jsou funkcemi pouze kloubových souřadnic  $\theta_5, \theta_6$  a prvky na levé straně kloubových souřadnic  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ , což výrazně usnadňuje další symbolické výpočty. Lze ukázat, že porovnáním vhodných příslušejících si prvků matic na levé a pravé straně, rozšířením soustavy rovnic o přídatné rovnice a následném zjednodušení, dostáváme soustavu rovnic, již nezávislou na  $\theta_4$  (formálně shodnou s lineární soustavou rovnic):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_1 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} \quad (3.34)$$

kde

$$\mathbf{X}_1 = [s_{\theta_2} s_{\theta_3} \quad s_{\theta_2} c_{\theta_3} \quad c_{\theta_2} s_{\theta_3} \quad c_{\theta_2} c_{\theta_3} \quad s_{\theta_2} \quad c_{\theta_2} \quad s_{\theta_3} \quad c_{\theta_3} \quad 1]^T$$

$$\mathbf{Y} = [s_{\theta_5} s_{\theta_6} \quad s_{\theta_5} c_{\theta_6} \quad c_{\theta_5} s_{\theta_6} \quad c_{\theta_5} c_{\theta_6} \quad s_{\theta_5} \quad c_{\theta_5} \quad s_{\theta_6} \quad c_{\theta_6}]^T$$

$\mathbf{A}$  je matice  $[14 \times 9]$  s prvky danými lineární kombinací funkcí  $s_{\theta_1}, c_{\theta_1}$

$\mathbf{B}$  je konstantní matice  $[14 \times 8]$

Za účelem eliminace  $\theta_5$  a  $\theta_6$  lze rovnice (3.34) rozdělit následovně:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Y} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{X}_1 &= \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{Y} \\ \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{X}_1 &= \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3.35)$$

kde  $\mathbf{A}_1$  je matice  $[6 \times 9]$ ,  $\mathbf{A}_2$  je matice  $[8 \times 9]$ ,  $\mathbf{B}_1$  je matice  $[6 \times 8]$  a  $\mathbf{B}_2$  je matice  $[8 \times 8]$ .

Eliminací  $\mathbf{Y}$  dostáváme rovnici:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{X}_1 = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.36)$$

kde  $\mathbf{D} = [\mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2^{-1} \cdot \mathbf{A}_2]$  je matice  $[6 \times 9]$  závislá pouze na lineární kombinaci  $s_{\theta_1}$  a  $c_{\theta_1}$ .

Dosazením známe substituce, viz [31]

$$x_i = \tan \frac{\theta_i}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s_{\theta_i} &= \frac{2x_i}{1+x_i^2} \\ c_{\theta_i} &= \frac{1-x_i^2}{1+x_i^2} \end{aligned}, \quad \text{pro } i = 1, 2, 3 \quad (3.37)$$

do rovnice (3.36) dostáváme rovnici:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.38)$$

kde  $\mathbf{X}_2 = [x_2^2 x_3^2 \quad x_2^2 x_3 \quad x_2^2 \quad x_2 x_3^2 \quad x_2 x_3 \quad x_2 \quad x_3^2 \quad x_3 \quad 1]^T$  a  $\mathbf{E}$  je matice  $[6 \times 9]$  jejíž prvky jsou kvadratickými funkcemi v proměnné  $x_1$ .

Z rovnice (3.38) lze eliminovat  $x_2$  a  $x_3$  tzv. *dylitickou eliminací*, která je založena na následujícím postupu. Vynásobením rovnice (3.38) proměnou  $x_2$  dostáváme rovnici:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{X}_3 = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (3.39)$$

kde  $\mathbf{X}_3 = [x_2^3 x_3^2 \quad x_2^3 x_3 \quad x_2^3 \quad x_2^2 x_3^2 \quad x_2^2 x_3 \quad x_2^2 \quad x_2 x_3^2 \quad x_2 x_3 \quad x_2]$ .

Kombinací rovnic (3.38) a (3.39) dostáváme soustavu rovnic:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}_{12 \times 1} \quad (3.40)$$

kde  $\mathbf{X} = [x_2^3 x_3^2 \quad x_2^3 x_3 \quad x_2^3 \quad x_2^2 x_3^2 \quad x_2^2 x_3 \quad x_2^2 \quad x_2 x_3^2 \quad x_2 x_3 \quad x_2 \quad x_3^2 \quad x_3 \quad 1]^T$  a  $\mathbf{S}$  je matice  $[12 \times 12]$  jejíž prvky jsou opět kvadratickými funkcemi v proměnné  $x_1$  a platí:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{0}_{6 \times 3} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že  $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}_{12 \times 1}$  soustava rovnic (3.40) má netriviální řešení, a to pouze za předpokladu:

$$\det(\mathbf{S}) = 0 \quad (3.41)$$

Raghavan ukázal, že  $\det(\mathbf{S}) = 0$  je polynodem stupně 24 v proměnné  $x_1$  a má jediný společný faktor  $(x_1^2 + 1)^4$  vedoucí na komplexní kořeny. Rovnice 3.41 lze tedy psát:

$$\det(\mathbf{S}) = \mathbf{f}(x_1)(x_1^2 + 1)^4 = 0 \quad (3.42)$$

kde  $\mathbf{f}(x_1)$  je polynom stupně 16 s reálnými kořeny (někdy v literatuře nazýván jako *charakteristický polynom manipulátoru*).

Je tedy zřejmé že obecný 6R manipulátor má maximálně 16 různých řešení IKŮ. Kloubové souřadnice jsou postupně vypočítány pro všechny kořeny  $x_{1_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$  polynomu  $\mathbf{f}(x_1)$  následovně:

- $x_{2_i}$  a  $x_{3_i}$  lze získat řešením soustavy lineárních rovnic (3.40), neboť  $\mathbf{S}(x_{1_i})$  je numerická matice a obecně platí  $\text{rank}(\mathbf{S}(x_{1_i})) = 11$  (řešíme tak soustavu 11 rovnic pro 11 neznámých). Zpětnou substitucí (3.37) získáváme kloubové souřadnice  $\theta_{1_i}$ ,  $\theta_{2_i}$  a  $\theta_{3_i}$ .
- Substitucí  $\theta_{1_i}$ ,  $\theta_{2_i}$ ,  $\theta_{3_i}$  do rovnice  $\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{X}_1$  z (3.35) dostáváme soustavu 8 lineárních rovnic pro 8 neznámých v  $\mathbf{Y}$ . Kloubové souřadnice  $\theta_{5_i}$  a  $\theta_{6_i}$  lze pak vypočítat prostřednictvím funkce  $\text{atan2}(\star)$ .
- Přeorganizováním rovnice (3.33) a substitucí  $\theta_{1_i}$ ,  $\theta_{2_i}$ ,  $\theta_{3_i}$ ,  $\theta_{5_i}$ ,  $\theta_{6_i}$  dostáváme

$$\mathbf{T}_4^3(\theta_4) = \mathbf{T}_2^3(\theta_3) \cdot \mathbf{T}_1^2(\theta_2) \cdot \mathbf{T}_0^1(\theta_1) \cdot \mathbf{T}_6^0 \cdot \mathbf{T}_5^6(\theta_6) \cdot \mathbf{T}_4^5(\theta_5)$$

a vzhledem k (2.6), pro popis s.s. podle K-K úmluvy, lze poslední kloubovou souřadnici vypočítat z prvků  $\mathbf{T}_4^3(\theta_4)[1, 1]$  a  $\mathbf{T}_4^3(\theta_4)[1, 2]$  opět pomocí funkce  $\text{atan2}(\star)$ .

Metodu je možné v mírně pozměněné podobě aplikovat i na manipulátory s klouby typu **P**. Poznamenejme, že pro manipulátor nacházející se v singulární poloze se v matici  $\mathbf{S}$  objevují lineárně závislé řádky, úloha potom nemá řešení. Naopak lineárně závislé sloupce se mohou v matici  $\mathbf{S}$  vyskytovat pro specifickou kombinaci K-K či D-H geometrických parametrů manipulátoru. V takovém případě je třeba změnit prvky matice, které se porovnávají v rovnici (3.33), případně tuto "startovací" rovnici zvolit jiným způsobem, existuje celkem 6 možných variant:

$$\mathbf{T}_1^0 \cdot \mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2 \cdot \mathbf{T}_4^3 = \mathbf{T}_6^0 \cdot \mathbf{T}_5^6 \cdot \mathbf{T}_4^5$$

$$\mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2 \cdot \mathbf{T}_4^3 \cdot \mathbf{T}_5^4 = \mathbf{T}_0^1 \cdot \mathbf{T}_6^0 \cdot \mathbf{T}_5^6$$

$$\mathbf{T}_3^2 \cdot \mathbf{T}_4^3 \cdot \mathbf{T}_5^4 \cdot \mathbf{T}_6^5 = \mathbf{T}_1^2 \cdot \mathbf{T}_0^1 \cdot \mathbf{T}_6^0$$

$$\mathbf{T}_4^3 \cdot \mathbf{T}_5^4 \cdot \mathbf{T}_6^5 \cdot \mathbf{T}_0^6 = \mathbf{T}_2^3 \cdot \mathbf{T}_1^2 \cdot \mathbf{T}_0^1$$

$$\mathbf{T}_5^4 \cdot \mathbf{T}_6^5 \cdot \mathbf{T}_0^6 \cdot \mathbf{T}_1^0 = \mathbf{T}_3^4 \cdot \mathbf{T}_2^3 \cdot \mathbf{T}_1^2$$

$$\mathbf{T}_6^5 \cdot \mathbf{T}_0^6 \cdot \mathbf{T}_1^0 \cdot \mathbf{T}_2^1 = \mathbf{T}_4^5 \cdot \mathbf{T}_3^4 \cdot \mathbf{T}_2^3$$



Řešení IKÚ pro specifické hodnoty geometrických parametrů (konkrétní kombinace kloubů) založené na modifikace Raghavanovy metody je podrobně diskutováno např. v [39]. Efektivní implementaci obecné Raghavanovy metody s ohledem na výpočetní náročnost, stabilitu a potlačení numerických chyb lze nalézt v [21].

Poznamenejme, že z obecného pohledu je tedy řešení IKÚ pro sériové manipulátory převoditelné na problém řešení soustavy polynomiálních rovnic. Raghavanova metoda tento problém dále převádí na hledání kořenu polynomu  $n$ -tého stupně. Alternativním přístupem se dnes stává pomalu, ale jistě se rozšiřující metoda *Gröbnerových bází*, založená na principu převodu soustavy polynomiálních rovnic na ekvivalentní soustavu, jejíž řešení lze vypočítat postupným dosazováním dílčích výsledků (např. jedna rovnice soustavy je polynomem v jedné proměnné, atd.). Názorný příklad s využitím právě Gröbnerových bází pro PSM-RR z Příkladu 3.2 lze nalézt v [4]. Řešení IKÚ pro obecný sériový manipulátor z Kapitoly 3.2.3 pak např. v [42].

# Literatura

- [1] J. Angeles. Kinematics synthesis. *lecture notes, Department of Mechanical Engineering, McGill University, Montreal (Quebec), Canada*, 2009.
- [2] F. Bennis. *Contribution á la modélisation géométrique et dynamique des robots á chaine simple et complexe*. PhD thesis, E.N.S.M., Nantes, France, 1991.
- [3] F. Bennis. Modele géométrique inverse des robots a chaine découplable : application aux équations de contraintes des boucles fermées. *Trans. of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 17:473–492, 1993.
- [4] L. Bláha. Groebnerova báze a teorie řízení. Práce ke státní doktorské zkoušce, Katedra kybernetiky, FAV, ZČU v Plzni, 2011.
- [5] Ilian Bonev. The true origins of parallel robots. *www.parallemic.org*, 2003.
- [6] P. I. Corke. A robotic toolbox for matlab. *IEEE Robot. Automat. Mag.*, (24 - 33), 1996.
- [7] D. O’Shea D. Cox, J. Little. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, 2nd edition, 2006.
- [8] J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *J. Appl. Mechanics*, June 1955, 22:215–221, 1955.
- [9] Boston Dynamic. <http://www.bostondynamics.com/>.
- [10] Tenreiro Machado J.A. Fonseca Ferreira N.M. Roblib: an educational program for robotics. *IFAC symposium on robot control*, 1(163-168), 2000.
- [11] W. Fulton. *Algebraic Curves: An Introduction To Algebraic Geometry*. New York: Benjamin, 1969.
- [12] Luis Gracia and Josep Tornero. Tracking trajectories with a robotic manipulator with singularities. In *Proceedings of the 2nd international conference on Advances in brain, vision and artificial intelligence*, BVAI’07, pages 595–605, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag.
- [13] <http://www.mathpages.com/home/kmath544/kmath544.htm>. The resultant and bezout’s theorem.
- [14] K. H. Hunt. Structural kinematics of in parallel actuated robot arms. *J. of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, pages 705–712, 1983.
- [15] M. Valášek J. Böhm, K. Belda. The direct kinematics for path control of redundant parallel robots. *Advances in Systems Science: Measurement, Circuits and Control*, pages 253–258, 2001.
- [16] W. Khalil and F. Bennis. Automatic generation of the inverse geometric model of robots. *Robotics and Autonomous Systems*, 7(1):47 – 56, 1991.
- [17] W. Khalil and J. Kleinfinger. A new geometric notation for open and closed-loop robots. volume 3, pages 1174 – 1179, apr. 1986.
- [18] Wisama Khalil and Denis Creusot. Symoro+: A system for the symbolic modelling of robots. *Robotica*, 15:153–161, March 1997.

- [19] B. Siciliano L. Sciavicco. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, 2 edition, 2000.
- [20] Anthony A. Maciejewski and Charles A. Klein. Numerical filtering for the operation of robotic manipulators through kinematically singular configurations. *Journal of Robotic Systems*, 5(6):527–552, 1988.
- [21] D. Manocha and J.F. Canny. Efficient inverse kinematics for general 6r manipulators. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 10(5):648–657, October 1994.
- [22] J.-P. Merlet. Direct kinematics and assembly modes of parallel manipulators. *Int. J. Rob. Res.*, 11:150–162, April 1992.
- [23] J.-P. Merlet. Direct kinematics of planar parallel manipulators. In *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*, volume 4, pages 3744–3749 vol.4, April 1996.
- [24] J.-P. Merlet. Kinematics' not dead! *Proceedings of the 2000 IEEE, International Conference on Robotics and Automation*, 2000.
- [25] J. P. Merlet. *Parallel robots*. Springer, 2006.
- [26] J.-P. Merlet. Interval analysis and reliability in robotics. *International Journal of Reliability and Safety*, 3(1-3):104–130, 2009.
- [27] Jean-Pierre Merlet. Manipulateurs paralleles, 4eme partie : mode d'assemblage et cinématique directe sous forme polynomiale. Research Report RR-1135, INRIA, 1990.
- [28] P. Nanua and K.J. Waldron. Direct kinematic solution of a stewart platform. In *Robotics and Automation, 1989. Proceedings., 1989 IEEE International Conference on*, pages 431–437 vol.1, May 1989.
- [29] Denny Oetomo and Marcelo H. Ang Jr. Singularity robust algorithm in serial manipulators. *Robot. Comput.-Integr. Manuf.*, 25:122–134, February 2009.
- [30] Centre of Computer Graphics and UWB Pilsen Data Visualisation. Analytická geometrie pro počítačovou grafiku ii, <http://herakles.zcu.cz/education/zpg/cviceni.php?no=5>.
- [31] S. Rabinowitz. A useful trigonometric substitution. *Digital Equipment Corporation, Nashua, NH*, 1986.
- [32] M. Raghavan and B. Roth. Inverse kinematics of the general 6r manipulator and related linkages. *Journal of Mechanical Design*, 115(3):502–508, 1993.
- [33] Paul R.C.P. *Robot manipulators: mathematics, programming and control*. MIT Press, Cambridge, USA, 1981.
- [34] Bruno Siciliano. Kinematic control of redundant robot manipulators: A tutorial. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 3:201–212, 1990. 10.1007/BF00126069.
- [35] Atega s.r.o. <http://www.atega.cz/>.
- [36] Eurotec JKR s.r.o. <http://www.eurotec-jkr.cz>.
- [37] M. Švejda. Overview of parallel architectures for gearing robot. Technical report, katedra kybernetiky, FAV, ZČU Plzeň, 2009.
- [38] Martin Švejda. Kinematická analýza antropomorfního manipulátoru se sférickým zápěstím. Technical report, katedra kybernetiky, FAV, ZČU Plzeň, 2010.
- [39] D. Murareci W. Khalil. On the general solution of the inverse kinematics of six-degrees-of-freedom manipulators. *Advances in Robot Kinematics and Computational Geometry*, 115:309–318, 1994.

## Literatura

- [40] E Dombre W. Khalil. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [41] J.F. Kleinfinger W. Khalil. A new geometric notation for open and closed-loop robots. *Robotics and Automation. Proceedings. IEEE International Conference*, 1986.
- [42] Yan Wang, Lu-bin Hang, and Ting-li Yang. Inverse kinematics analysis of general 6r serial robot mechanism based on groebner base. *Frontiers of Mechanical Engineering in China*, 1:115–124, 2006. 10.1007/s11465-005-0022-7.