Technická zpráva
Katedra kybernetiky, Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

Kinematická a dynamická analýza robotických architektur pro potřeby moderních ultrazvukových kontrol svarových spojů komplexních potrubních systémů jaderných elektráren

30. 12. 2011

Martin Švejda
msvejda@kky.zcu.cz

Obsah

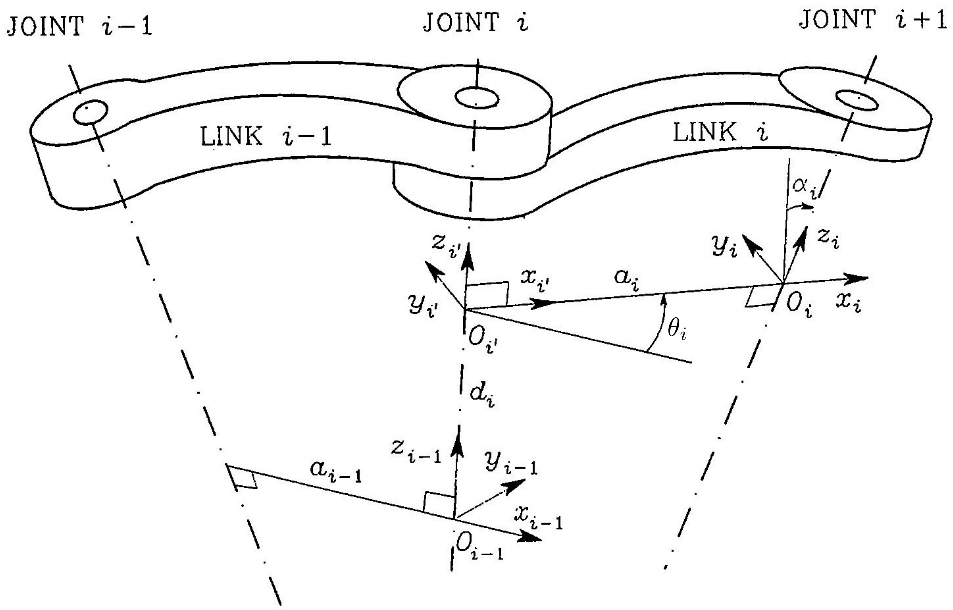
1 Úvod

Drtivá většina současných zařízení pro ultrazvukové (UZ) kontroly potrubních systémů je realizována jako jednoúčelová zařízení s maximálně jedním stupněm volnosti (DoF) koncového efektoru. Za účelem navýšení univerzálnosti takových zařízení je proto nutné se uchýlit ke komplexnějším robotických architekturám s více stupni volnosti, které výrazně zlepšují manévrovatelnost při polohování UZ sondy. Tento trend je bohužel vykoupen vyšší složitostí robotických architektur, kde kinematická a dynamická analýza hraje klíčovou roli při jejich návrhu, neboť intuitivně lze o kinematických a dynamických vlastnostech jen stěží korektně rozhodnout. Předložená zpráva se podrobně zabývá dvěma navrhovanými robotickým architekturami pro potřeby moderních ultrazvukových kontrol svarových spojů komplexních potrubních systémů jaderných elektráren. Jedná se o sériové manipulátory se 4 DoF (3 translační a 1 rotační) typu 4**R** a **RRPR**. Navržené architektury se zdají být dobrým kompromisem mezi složitostí modelu a manévrovatelností koncového efektoru. Třetí variantou je univerzální sériový manipulátor se 6 DoF (3 rotační a 3 translační) typu 6**R**. Tato varianta je pouze zmíněna a její podrobná analýza bude pravděpodobně prezentována v navazujících technických zprávách. Hlavní náplní zprávy je kinematická a dynamická analýza předložených architektur, která tvoří nedílnou součást syntézy těchto robotických zařízení s ohledem na mechanickou konstrukci, dimenzování pohonů a převodovek, osazení vhodných čidel, atd. Virtuální simulační modely byly vytvořeny v prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics.

2 Sériový manipulátor - Varianta 1

Sériový manipulátor v první variantě je tvořen čtyřmi rotačními aktuátory (manipulátor typu 4**R**). První kloub manipulátoru reprezentuje pojezd po potrubí kruhového průřezu. Koncový efektor manipulátoru umožňuje posunutí UZ sondy libovolně v prostoru (3 translační DoF) a její orientaci vzhledem k svislé ose pojezdu (1 rotační DoF). Obrázek 2 znázorňuje schématické uspořádání manipulátoru včetně zavedených souřadných systémů (s.s.). Základní kinematický popis manipulátoru je realizován prostřednictvím Denavit-Hartenbergovy (D-H) úmluvy. D-H úmluva umožňuje systematické zavedení souřadných systémů ramen manipulátorů takovým způsobem, aby vzájemné polohové vztahy mezi jednotlivými rameny bylo možné popsat maximálně čtveřicí kinematických parametrů (D-H parametry), viz Pozn. 1

■ **Poznámka 1 (Denavit-Hartenbergova úmluva)**
Dnes snad nejznámější úmluva pro elegantní popis geometrie sériových manipulátorů. Předpokládejme dvě ramena manipulátoru $Link\ i-1$ a $Link\ i$, která jsou spojena kloubem $Joint\ i$ s jedním stupněm volnosti, viz Obrázek 1.



Obrázek 1: D-H úmluva

Definice s.s. $F_i = \{\boldsymbol{O}_i - \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i\boldsymbol{z}_i\}$ za předpokladu znalosti s.s. $F_{i-1} = \{\boldsymbol{O}_{i-1} - \boldsymbol{x}_{i-1}\boldsymbol{y}_{i-1}\boldsymbol{z}_{i-1}\}$ dle D-H úmluvy je vyjádřena následovně:

- Zvol osu $\boldsymbol{z}_i$ podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint* $i+1$ a osu $\boldsymbol{z}'_i$ podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint* i
- Umísti počátek $\boldsymbol{O}_i$ s.s. F_i do průsečíku osy $\boldsymbol{z}_i$ a normály[1] os $\boldsymbol{z}_{i-1}$ a $\boldsymbol{z}_i$. Umísti počátek $\boldsymbol{O}'_i$ s.s. $F'_i = \{\boldsymbol{O}'_i - \boldsymbol{x}'_i\boldsymbol{y}'_i\boldsymbol{z}'_i\}$ do průsečíku osy $\boldsymbol{z}_{i-1}$ a téže normály.
- Zvol osu $\boldsymbol{x}_i$ a $\boldsymbol{x}'_i$ podél normály ve směru od kloubu *Joint* i do kloubu *Joint* $i+1$.
- Zvol osu $\boldsymbol{y}_i$ a $\boldsymbol{y}'_i$ tak, aby výsledné s.s. byly pravotočivé.

Lze snadno ukázat, že D-H úmluva nedefinuje jednoznačně umístění s.s. v následujících případech.

- Pro s.s. $F_0 = \{\boldsymbol{O}_0 - \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0\}$ je určena jednoznačně pouze osa $\boldsymbol{z}_0$ (podle osy rotace, resp. translace prvního kloubu manipulátoru *Joint* 1). Osu $\boldsymbol{x}_0$ a počátek $\boldsymbol{O}_0$ lze proto volit libovolně. Osa $\boldsymbol{y}_0$ je pak určena tak, aby výsledný systém byl opět pravotočivým.
- Pro s.s. $F_n = \{\boldsymbol{O}_n - \boldsymbol{x}_n\boldsymbol{y}_n\boldsymbol{z}_n\}$, kde n je počet kloubů s jedním stupněm volnosti uvažovaného manipulátoru není jednoznačně určena osa $\boldsymbol{z}_n$, neboť kloub *Joint* $n+1$ již neexistuje. Osa $\boldsymbol{x}_n$ však musí zůstat kolmá k ose $\boldsymbol{z}_{n-1}$.
- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy kloubů ($\boldsymbol{z}_{i-1}$ a $\boldsymbol{z}_i$) paralelní, jejich normála není jednoznačně definována (může být libovolně posunuta ve směru os kloubů).
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy kloubů ($\boldsymbol{z}_{i-1}$ a $\boldsymbol{z}_i$) protínají (normála je nulové délky), osa $\boldsymbol{x}_i$ bude volena tak, aby byla kolmá k rovině definované osami $\boldsymbol{z}_{i-1}$ a $\boldsymbol{z}_i$. Její *kladný směr* však může být volen libovolně.

Nyní může být vzájemná poloha s.s. F_{i-1} a F_i popsána pouze pomocí čtyř D-H parametrů:

[1] normála os $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ je spojnice těchto os s minimální vzdáleností svírající s osami pravý úhel

$a_i \ldots$ vzdálenost mezi počátky $\boldsymbol{O}_i$ a $\boldsymbol{O}'_i$

$d_i \ldots$ vzdálenost mezi počátky $\boldsymbol{O}_{i-1}$ a $\boldsymbol{O}'_i$

$\alpha_i \ldots$ úhel mezi osami $\boldsymbol{z}_{i-1}$ a $\boldsymbol{z}_i$ daný pootočením s.s. F'_i podél osy $\boldsymbol{x}'_i$

$\theta_i \ldots$ úhel mezi osami $\boldsymbol{x}_{i-1}$ a $\boldsymbol{x}_i$ daný pootočením s.s. F_i podél osy $\boldsymbol{z}_{i-1}$

Je zřejmé, že pro základní typy kloubů s jedním stupněm volnosti platí:

kloub *Joint i* **je typu P** proměnná definující pohyb kloubu je d_i, proměnné a_i, α_i, θ_i jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link i*

kloub *Joint i* **je typu R** proměnná definující pohyb kloubu je θ_i, proměnné a_i, d_i, α_i jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link i*

Transformační vztah, v našem případě homogenní transformační matice, mezi s.s. F_{i-1} a F_i je dán následujícím způsobem.

- Vyber s.s. F_{i-1}
- Posuň tento systém podél osy $\boldsymbol{z}_{i-1}$ o vzdálenost d_i a otoč jej okolo osy $\boldsymbol{z}_{i-1}$ o úhel $\theta_i \Rightarrow$ dostáváme s.s. F'_i. Matice přechodu[2]:

$$\boldsymbol{T}_{i'}^{i-1} = \mathrm{Trans}(\boldsymbol{z}, d_i) \cdot \mathrm{Rot}(\boldsymbol{z}, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

- Posuň s.s. F'_i podél osy $\boldsymbol{x}'_i$ o vzdálenost a_i a otoč jej okolo osy $\boldsymbol{x}'_i$ o úhel $\alpha_i \Rightarrow$ dostáváme s.s. F_i. Matice přechodu:

$$\boldsymbol{T}_{i}^{i'} = \mathrm{Trans}(\boldsymbol{x}, a_i) \cdot \mathrm{Rot}(\boldsymbol{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

- Výsledná matice přechodu ze s.s. F_{i-1} do s.s. F_i je dána:

$$\boldsymbol{T}_{i}^{i-1} = \boldsymbol{T}_{i'}^{i-1} \cdot \boldsymbol{T}_{i}^{i'} = \mathrm{Trans}(\boldsymbol{z}, d_i) \cdot \mathrm{Rot}(\boldsymbol{z}, \theta_i) \cdot \mathrm{Trans}(\boldsymbol{x}, a_i) \cdot \mathrm{Rot}(\boldsymbol{x}, \alpha_i) =$$
$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

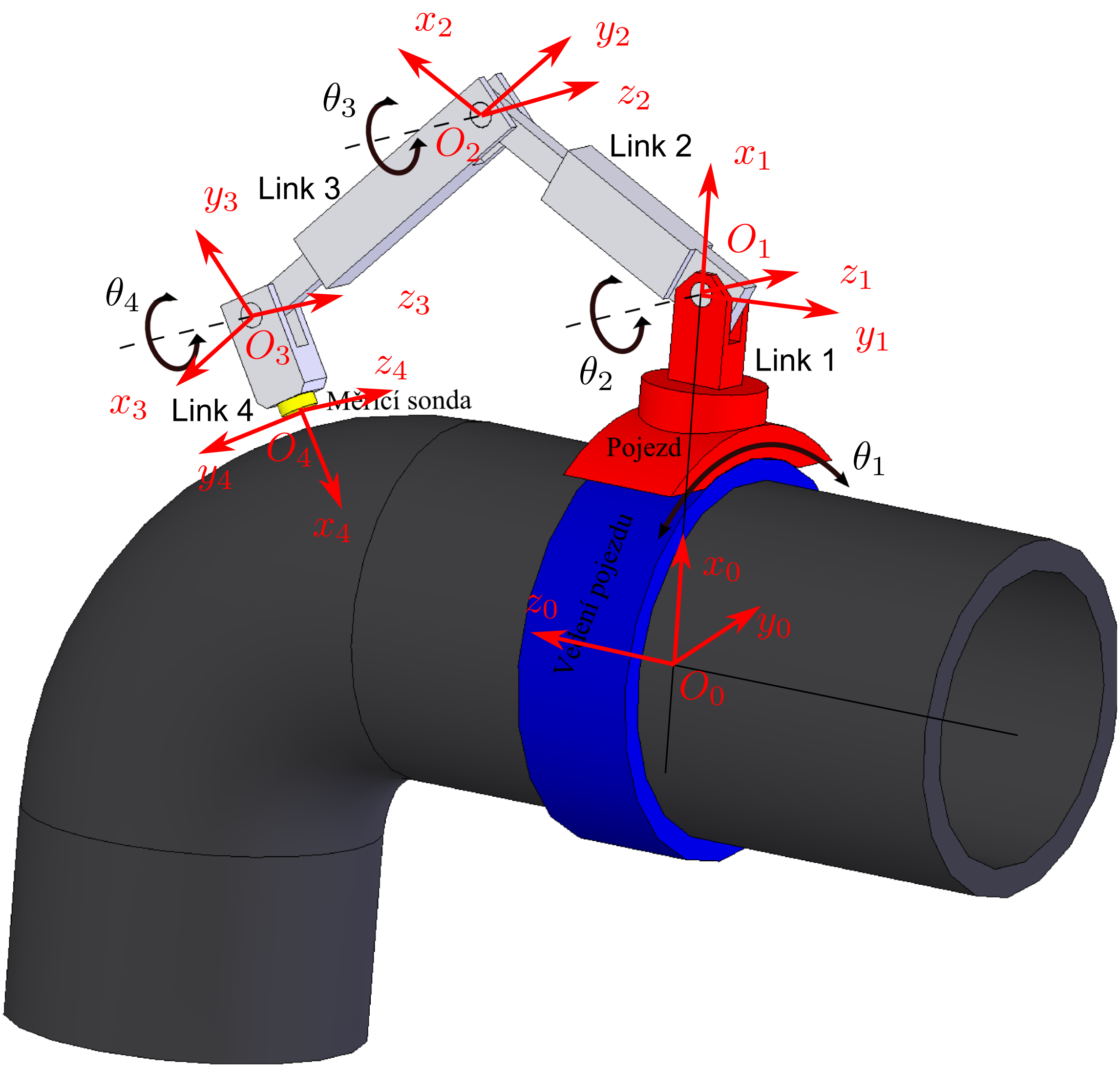
Připomeňme, že matice přechodu matice (3) je funkcí pouze kloubových souřadnic θ_i (pro rotační klouby R) a d_i (pro translační klouby P). ■

[2]Zkratka c_{θ_i}, resp. s_{θ_i} označuje $\cos \theta_i$, resp. $\sin \theta_i$.

D-H parametry manipulátoru pro vzájemnou polohu zavedených s.s. na Obrázku 2 lze stanovit následovně:

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	θ_1	a_1	$-\frac{\pi}{2}$
2	0	θ_2	a_2	0
3	0	θ_3	a_3	0
4	0	θ_4	a_4	0

Tabulka 1: D-H parametry manipulátoru - Varianta 1



Obrázek 2: Sériový manipulátor - Varianta 1

Polohy rotačních kloubů manipulátoru jsou určeny kloubovými souřadnicemi $\boldsymbol{Q}$ jako:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

Návrhové parametry manipulátoru $\boldsymbol{\xi}$ představují délky jednotlivých ramen:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

kde $a_1 = \|\boldsymbol{O}_0\boldsymbol{O}_1\|$, $a_2 = \|\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{O}_2\|$, $a_3 = \|\boldsymbol{O}_2\boldsymbol{O}_3\|$, $a_4 = \|\boldsymbol{O}_3\boldsymbol{O}_4\|$.

Poloha koncového efektoru lze popsat zobecněnými souřadnicemi $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x & y & z & \phi \end{bmatrix}^T \tag{6}$$

kde x, y, z jsou souřadnice bodu $\boldsymbol{O}_4$ vzhledem k s.s. F_0 a ϕ je vzájemné natočení s.s. F_4 a F_1 okolo osy $\boldsymbol{z}$, tedy matice rotace $\boldsymbol{R}_4^1 = \mathrm{rot}(\boldsymbol{z}, \phi)^3$.

2.1 Přímá (PKÚ) a inverzní (IKÚ) kinematická úloha

Kinematickými úlohami rozumíme závislost zobecněných souřadnic manipulátoru na souřadnicích kloubových a naopak, tedy relace:

$$\boldsymbol{X} = \mathbf{G}(\boldsymbol{Q}) \quad \text{(PKÚ)} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{Q} = \mathbf{G}^{-1}(\boldsymbol{X}) \quad \text{(IKÚ)} \tag{8}$$

Zatímco PKÚ je pro sériové manipulátory řešitelná vždy analyticky a má jednoznačné řešení, pro IKÚ toto obecně neplatí (nemusí existovat řešení v uzavřeném tvaru, existence více řešení). Avšak v případě námi uvažovaných architektur manipulátorů lze, s pomocí vhodné dekompozice, nalézt řešení IKÚ analyticky.

PKÚ:

PKÚ manipulátoru lze přímo vyjádřit postupným vynásobením homogenních transformačních matic, odpovídajícím D-H parametrům z Tabulky 1.

Pro pozici bodu koncového efektoru platí:

$$\boldsymbol{T}_4^0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{T}_1^0(\theta_1) \cdot \boldsymbol{T}_2^1(\theta_2) \cdot \boldsymbol{T}_3^2(\theta_3) \cdot \boldsymbol{T}_4^3(\theta_4) \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{O}_4^0 = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\xi})_4^0[1:3, 4]$$

Pro orientaci koncového efektoru pak platí:

$$\boldsymbol{T}_4^1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{T}_2^1(\theta_2) \cdot \boldsymbol{T}_3^2(\theta_3) \cdot \boldsymbol{T}_4^1(\theta_4) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{R}_4^1 = \boldsymbol{T}_4^1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\xi})[1:3, 1:3] = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \mathrm{atan2}(\boldsymbol{R}_4^1[2,1], \boldsymbol{R}_4^1[1,1])$$

IKÚ:

IKÚ lze stanovit pomocí dekompozice manipulátoru na jednodušší 2 DoF architekturu - planární manipulátor typu 2**R** tvořený rameny *Link* 2, *Link* 3 a umístěný vzhledem k s.s. F_1.

První kloubovou souřadnice lze stanovit přímo z polohy bodu $\boldsymbol{O}_4^0$ jako:

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}(\boldsymbol{O}_4^0[2], \boldsymbol{O}_4^0[1]) \tag{11}$$

[3] označení $\mathrm{rot}(\boldsymbol{z}, \phi) = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{z}, \phi)[1:3, 1:3]$, viz Pozn. 1 a označení $\boldsymbol{T}[c:d]$ označuje a-tý až b-tý řádek a c-tý až d-tý sloupec matice $\boldsymbol{T}$

Poloha $\boldsymbol{O}_3$ koncového efektoru 2**R** manipulátoru vzhledem k s.s. F_1 lze určit posunutím polohy bodu $\boldsymbol{O}_4$ ve směru osy $\boldsymbol{x}$ s.s. F_4:

$$\boldsymbol{O}_3^1 = \boldsymbol{O}_4^1 - \boldsymbol{R}_4^1[:,1] \cdot a_4 \tag{12}$$

kde

$$\boldsymbol{R}_4^1 = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{O}_4^1 = (\boldsymbol{T}_1^0(\theta_1))^{-1} \cdot \boldsymbol{O}_4^0$$

kde $\boldsymbol{T}_1^0(\theta_1)$ je již známá transformační matice.

Je zřejmé, že souřadnice bodu $\boldsymbol{O}_3$ musí odpovídat svým tvarem součinu příslušejících transformačních matic, tedy porovnáním:

$$\boldsymbol{O}_3^1 = \begin{bmatrix} w_x & w_y & 0 \end{bmatrix}^T \overset{!}{=} \boldsymbol{T}_3^1(\theta_2, \theta_3) \tag{13}$$

kde $\boldsymbol{T}_3^1(\theta_2, \theta_3) = \boldsymbol{T}_2^1(\theta_2) \cdot \boldsymbol{T}_3^2(\theta_3)$.

Dostáváme soustavu dvou rovnic pro neznámé[4] θ_2, θ_3 .

$$w_x = a_3 \cos\theta_{2,3} + a_2 \cos\theta_2 \tag{14}$$
$$w_y = a_3 \sin\theta_{2,3} + a_2 \sin\theta_2 \tag{15}$$

Umocněním a sečtením (14), (15) dostáváme:

$$w_x^2 + w_y^2 = a_3^2 + a_2^2 + 2a_2a_3\cos\theta_3$$
$$\cos\theta_3 = \frac{w_x^2 + w_y^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \tag{16}$$
$$\sin^2\theta_3 + \cos^2\theta_3 = 1 \Rightarrow \sin\theta_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_3} \tag{17}$$

Tedy;

$$\theta_3 = \operatorname{atan2}(\sin\theta_3, \cos\theta_3) \tag{18}$$

Řešením soustavy rovnic:

$$w_x = a_3 \cos\theta_{2,3} + a_2 \cos\theta_2 \tag{19}$$
$$w_y = a_3 \sin\theta_{2,3} + a_2 \sin\theta_2 \tag{20}$$

pro neznámé $\sin\theta_2$, $\cos\theta_2$ dostáváme:

$$\sin\theta_2 = \frac{-a_3\sin\theta_3 w_x + (a_2 + a_3\cos\theta_3)w_y}{w_x^2 + w_y^2} \tag{21}$$
$$\cos\theta_2 = \frac{(a_2 + a_3\cos\theta_3)w_x + a_3\sin\theta_3 w_y}{w_x^2 + w_y^2} \tag{22}$$

Tedy;

$$\theta_2 = \operatorname{atan2}(\sin\theta_2, \cos\theta_2) \tag{23}$$

Poslední kloubová souřadnice lze stanovit jednoduše rozdílem:

$$\theta_4 = \phi - \theta_2 - \theta_3 \tag{24}$$

Z rovnice (17) tedy vyplývají dvě řešení IKÚ.

[4] $\sin\theta_{2,3} = \sin(\theta_2 + \theta_3)$

2.2 Závislosti rychlostí a zrychlení

Aby bylo možné stanovit korektní dynamický model manipulátoru, je nezbytně nutné znát kromě polohových závislostí také závislosti rychlostí a zrychlení. Závislost rychlosti $\dot{\boldsymbol{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\boldsymbol{Q}}$ kloubových souřadnic na poloze $\boldsymbol{X}$, rychlosti $\dot{\boldsymbol{X}}$ a zrychlení $\ddot{\boldsymbol{X}}$ zobecněných souřadnic nazýváme inverzní *okamžitou* kinematickou úlohou (IOKÚ) a opačně přímou *okamžitou* kinematickou úlohou (POKÚ). Intuitivně je patrné, že IOKÚ by bylo možné odvodit od IKÚ přímou časovou derivací rovnice (8) potažmo rovnic v z Kapitoly 2.1. Přesto, že tento postup je možný (zejména využitím různých softwarových nástrojů pro symbolické derivování - Maple, Mathematica, atd.), většinou vede na složité, mnohačlenné vztahy, které jsou pro implementaci do řídících algoritmů nevhodné. Alternativním přístupem je systematická geometrická metoda, podrobně odvozená v [4]. Metoda je stručně shrnuta v Poznámce 2.

■ **Poznámka 2 (Výpočet rychlostí v kloubech manipulátoru - geometrický přístup)**
Translační rychlost $\dot{\boldsymbol{O}}_i^0$ a úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}_i^0$ i-tého s.s. F_i vzhledem k s.s. F_0 lze psát jako:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{O}}_i^0 \\ \boldsymbol{\omega}_i^0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{j}_1^p & \boldsymbol{j}_2^p & \cdots & \boldsymbol{j}_j^p & \cdots & \boldsymbol{j}_i^p \\ \boldsymbol{j}_1^o & \boldsymbol{j}_2^o & \cdots & \boldsymbol{j}_j^o & \cdots & \boldsymbol{j}_i^o \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{Q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \\ \vdots \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} \tag{25}$$

Tedy:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{O}}_i^0 &= \boldsymbol{j}_1^p \cdot \dot{q}_1 + \boldsymbol{j}_2^p \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \boldsymbol{j}_j^p \cdot \dot{q}_j + \cdots + \boldsymbol{j}_i^p \cdot \dot{q}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i^0 &= \boldsymbol{j}_1^o \cdot \dot{q}_1 + \boldsymbol{j}_2^o \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \boldsymbol{j}_j^o \cdot \dot{q}_j + \cdots + \boldsymbol{j}_i^o \cdot \dot{q}_i \end{aligned} \tag{26}$$

kde $j = 1 \ldots i$ a sloupcové subvektory $\begin{bmatrix} \boldsymbol{j}_j^p \\ \boldsymbol{j}_j^o \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{j}_j^p \in \mathbb{R}^3$ respektive $\boldsymbol{j}_j^o \in \mathbb{R}^3$ kinematického jakobiánu $\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{Q})$, zprostředkovávají příspěvek j-tého kloubu q_j do celkové translační respektive úhlové rychlosti s.s. F_i vzhledem k s.s. F_0.

Lze snadno ukázat, že příspěvek translační rychlosti $\boldsymbol{v}_{j,i}^0$ a úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_{j,i}^0$ do s.s. F_i (vyjádřenou vzhledem k s.s. F_0) způsobenou pohybem j-tého kloubu, lze pro konkrétní typy kloubů a zavedení popisu s.s. dle D-H úmluvy vyjádřit jako:

- *Joint* j je typu **P** ($q_j = d_j$):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{j,i}^0 &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v}_{j,i}^0 &= \dot{d}_j \cdot \boldsymbol{z}_{j-1}^0 \end{aligned} \tag{27}$$

- *Joint* j je typu **R** ($q_j = \theta_j$):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{j,i}^0 &= \dot{\theta}_j \cdot \boldsymbol{z}_{j-1}^0 \\ \boldsymbol{v}_{j,i}^0 &= \boldsymbol{\omega}_{j,i}^0 \times \boldsymbol{r}_{j-1,i}^0 = \dot{\theta}_j \cdot \boldsymbol{z}_{j-1}^0 \times \boldsymbol{r}_{j-1,i}^0 \end{aligned} \tag{28}$$

kde $\boldsymbol{z}_j^0$ je osa $\boldsymbol{z}$ s.s. F_j a $\boldsymbol{r}_{j,i}^0 = \boldsymbol{O}_i^0 - \boldsymbol{O}_j^0$ je vzájemná translační poloha s.s. F_j a F_i. Při znalosti matic přechodu $\boldsymbol{T}_j^0$ je zřejmé, že:

$$\boldsymbol{z}_j^0 = \boldsymbol{T}_j^0[1:3,3] \quad \text{a} \quad \boldsymbol{r}_{j,i}^0 = \boldsymbol{T}_i^0[1:3,4] - \boldsymbol{T}_j^0[1:3,4] \tag{29}$$

Sloupcové subvektory $\boldsymbol{j}_j^p$ a $\boldsymbol{j}_j^o$ lze tedy s ohledem na (26) psát jako:

- *Joint* j je typu $\mathbf{P}$ ($q_j = d_j$):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{j}_j^p \\ \boldsymbol{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{j-1}^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{30}$$

- *Joint* j je typu $\mathbf{R}$ ($q_j = \theta_j$):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{j}_j^p \\ \boldsymbol{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{j-1}^0 \times \boldsymbol{r}_{j-1,i}^0 \\ \boldsymbol{z}_{j-1}^0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Výsledný kinematický jakobián $\boldsymbol{J}_i(Q)$ je tedy přímo dán rovnicemi (30), (31), (29) a lze určit pomocí dílčích matic přechodu $\boldsymbol{T}_i^{i-1}$ s.s. manipulátoru.

Pro efektivní výpočet translační rychlosti $\dot{\boldsymbol{O}}_i$ a úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_i$ (tedy POKÚ pro libovolný s.s. v kinematickém řetězci manipulátoru) lze nastíněný postup modifikovat na následující zobecněný rekurzivní algoritmus pro libovolný typ kloubů.

Definujme pomocnou proměnnou σ_i, pro kterou platí:

$$\begin{aligned} &\sigma_j = 0 \quad \text{pokud} \quad \textit{Joint } j \quad \text{je typu } \mathbf{R}\ (q_j = \theta_j) \\ &\sigma_j = 1 \quad \text{pokud} \quad \textit{Joint } j \quad \text{je typu } \mathbf{P}\ (q_j = d_j) \\ &\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j \end{aligned}$$

Z rovnic (26), (30) a (31) vyplývá následující rekurzivní schéma vzhledem k s.s. F_0:

$$\boldsymbol{\omega}_j^0 = \boldsymbol{\omega}_{j-1}^0 + \boldsymbol{z}_{j-1}^0 \bar{\sigma}_j \dot{q}_j \tag{32}$$

$$\dot{\boldsymbol{O}}_j^0 = \dot{\boldsymbol{O}}_{j-1}^0 + \boldsymbol{\omega}_j^0 \times \boldsymbol{r}_{j-1,j}^0 + \boldsymbol{z}_{j-1}^0 \sigma_j \dot{q}_j \tag{33}$$

■

Z uvedeného postupu výpočtu rychlosti kloubových souřadnic v Poznámce 2 vyplývá, že pro danou polohu manipulátoru vždy existuje lineární závislost mezi rychlostmi kloubových a zobecněných souřadnic, která je dána kinematickým jakobiánem $\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{Q})$, kde n označuje počet aktuátorů manipulátoru. V případě námi uvažovaného manipulátoru lze translační rychlosti koncového efektoru $\dot{\boldsymbol{O}}_4^0$ vyjádřit prostřednictvím kinematického jakobiánu $J_4^0(\boldsymbol{Q})$ (horní index označuje vztažný s.s.) a úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}_4^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T$ prostřednictvím kinematického jakobiánu $\boldsymbol{J}_4^1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)$ následovně:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{O}}_4^0 \\ \boldsymbol{\omega}_4^0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_4^0(\boldsymbol{Q}) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{O}}_4^1 \\ \boldsymbol{\omega}_4^1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_4^1(\theta_2, \theta_3, \theta_4) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Kde kinematické jakobiány $\boldsymbol{J}_4^0$ a $\boldsymbol{J}_4^1$ jsou vypočítány postupem z Poznámky 2.

Výsledný kinematický jakobián celého manipulátoru $\boldsymbol{J}_4(\boldsymbol{Q})$ a řešení POKÚ a IOKÚ pro rychlosti lze souhrně psát jako:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{O}}_4^0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_4^0(\boldsymbol{Q})[1:3,:] \\ 0 \quad \boldsymbol{J}_4^1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)[6,:] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{J}_4(\boldsymbol{Q})} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}} \quad \text{(POKÚ)} \tag{35}$$

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = (\boldsymbol{J}_4(\boldsymbol{Q}))^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \quad \text{(IOKÚ)} \tag{36}$$

Chceme-li dále počítat POKÚ a IOKÚ pro zrychlení, je zřejmé, že potřebujeme znát i časovou derivaci kinematického jakobiánu. Poznámka 3 předkládá systematický geometrický přístup pro takový výpočet, jehož detailní odvození lze opět nalézt v [4].

■ **Poznámka 3 (Výpočet zrychlení v kloubech manipulátoru - geometrický přístup)** Translační zrychlení $\ddot{\boldsymbol{O}}_i^0$ a úhlové zrychlení $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0$ s.s. F_i vzhledem k s.s. F_0 lze stanovit přímou časovou derivací z rovnice (25) jako:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{O}}_i^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{J}}_i(\boldsymbol{\Theta}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \\ \vdots \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{\Theta}) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_j \\ \vdots \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} \tag{37}$$

Tedy:

$$\ddot{\boldsymbol{O}}_i^0 = \boldsymbol{j}_1^p \cdot \ddot{q}_1 + \boldsymbol{j}_2^p \cdot \ddot{q}_2 + \cdots + \boldsymbol{j}_j^p \cdot \ddot{q}_j + \cdots + \boldsymbol{j}_i^p \cdot \ddot{q}_i + \dot{\boldsymbol{j}}_1^p \cdot \dot{q}_1 + \dot{\boldsymbol{j}}_2^p \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \dot{\boldsymbol{j}}_j^p \cdot \dot{q}_j + \cdots + \dot{\boldsymbol{j}}_i^p \cdot \dot{q}_i$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^0 = \boldsymbol{j}_1^o \cdot \ddot{q}_1 + \boldsymbol{j}_2^o \cdot \ddot{q}_2 + \cdots + \boldsymbol{j}_j^o \cdot \ddot{q}_j + \cdots + \boldsymbol{j}_i^o \cdot \ddot{q}_i + \dot{\boldsymbol{j}}_1^o \cdot \dot{q}_1 + \dot{\boldsymbol{j}}_2^o \cdot \dot{q}_2 + \cdots + \dot{\boldsymbol{j}}_j^o \cdot \dot{q}_j + \cdots + \dot{\boldsymbol{j}}_i^o \cdot \dot{q}_i \tag{38}$$

Časová derivace kinematického jakobiánu $\dot{\boldsymbol{J}}_i(\boldsymbol{\Theta})$ je dána časovými derivacemi jeho dílčích prvků, tedy jeho sloupců, viz rovnice (30),(31):

- *Joint* j je typu **P** ($q_j = d_j$):

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{j}}_j^p \\ \dot{\boldsymbol{j}}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{z}}_{j-1}^0 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{39}$$

- *Joint* j je typu **R** ($q_j = \theta_j$):

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{j}}_j^p \\ \dot{\boldsymbol{j}}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{z}}_{j-1}^0 \times \boldsymbol{r}_{j-1,i}^0 + \boldsymbol{z}_{j-1}^0 \times \dot{\boldsymbol{r}}_{j-1,i}^0 \\ \dot{\boldsymbol{z}}_{j-1}^0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

kde $\dot{\boldsymbol{r}}_{j,i}^0 = \dot{\boldsymbol{O}}_i^0 - \dot{\boldsymbol{O}}_j^0$ a $\boldsymbol{z}_i^0 = \boldsymbol{T}_i^0[1:3,4]$.

Translační rychlosti $\dot{\boldsymbol{O}}_i^0$ a úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}_i^0$ lze vypočítat jako v rovnici (25) či pomocí rekurzivního algoritmu (32), (33).

Časovou derivaci osy $\dot{\boldsymbol{z}}_i^0$ lze se znalostí $\boldsymbol{\omega}_i^0$ určit jako:

$$\dot{\boldsymbol{z}}_i^0 = \boldsymbol{\omega}_i^0 \times \boldsymbol{z}_i^0 \tag{41}$$

■

Analogicky jako při výpočtu kinematického jakobiánu kompletního manipulátoru, viz rovnice (35) lze podle algoritmu v Poznámce 3 stanovit derivaci kompletního kinematického jakobiánu manipulátoru $\dot{\boldsymbol{J}}_4(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}})$:

$$\dot{\boldsymbol{J}}_4^0(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{J}}_4^0(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}})[1:3,:] \\ 0 \quad \dot{\boldsymbol{J}}_4^1(\theta_2, \theta_3, \theta_4, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4)[6,:] \end{bmatrix} \tag{42}$$

Kde derivace kinematických jakobiánů $\dot{\boldsymbol{J}}_4^0$ a $\dot{\boldsymbol{J}}_4^1$ jsou vypočítány postupem z Poznámky 3.

Řešení POKÚ a IOKÚ pro zrychlení lze pak psát ve tvaru:

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{O}}_4^0 \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{J}}_4(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{J}_4(\boldsymbol{Q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{Q}} \quad \text{(POKÚ)} \tag{43}$$

$$\ddot{\boldsymbol{Q}} = (\boldsymbol{J}_4(\boldsymbol{Q}))^{-1} \cdot \left(\ddot{\boldsymbol{X}} - \dot{\boldsymbol{J}}_4(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}\right) \quad \text{(IOKÚ)} \tag{44}$$

Výsledný dynamický simulační model byl realizován v prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics [2]. Požadované polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic jsou generovány výše uvedenými kinematickými modely (IKÚ,IOKÚ) z požadované trajektorie pohybu koncového efektoru manipulátoru. Požadovaná trajektorie koncového efektoru manipulátoru byla složena ze dvou primitivních trajektorií - přímky a kružnice. Výsledný testovací pohyb manipulátoru lze charakterizovat následovně:

- **Přibližovací fáze**
  Posun polohy koncového efektoru $\boldsymbol{X}$ z bodu $\boldsymbol{A}$ do bodu $\boldsymbol{B}$ po přímce:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 & \frac{3}{2}\pi \end{bmatrix}^T \; [m, m, m, rad]$$
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} R & 0 & L & \pi \end{bmatrix}^T \; [m, m, m, rad]$$

- **Testovací fáze**
  Posun pozice (translace) koncového efektoru $\boldsymbol{X}$ z bodu $\boldsymbol{B}$ do totožného bodu po kružnici kolmé k ose $\boldsymbol{z}$ s.s. F_0 s poloměrem $R = 0.5$ $[m]$ v kolmé vzdálenosti $L = 0.4$ $[m]$ od počátku s.s. F_0. Úhel natočení ϕ zůstává konstantní $\phi = \pi$.

- **Oddalovací fáze**
  Posun polohy koncového efektoru $\boldsymbol{X}$ z bodu $\boldsymbol{B}$ zpět do bodu $\boldsymbol{A}$ po přímce.

- **Omezení na rychlost v_{max} a zrychlení a_{max} v zobecněných souřadnicích $\boldsymbol{X}$** (časově optimální trajektorie - přepínání mezi a_{max} a $-a_{max}$, viz např. [3]):

$$a_{max} = 1 \; [\frac{m}{s^2}], \quad v_{max} = 1 \; [\frac{m}{s}]$$

- směr působení gravitace je volen v záporném směru osy $\boldsymbol{x}$ s.s. F_0

Parametry manipulátoru byly voleny jako:

- Kinematické parametry:

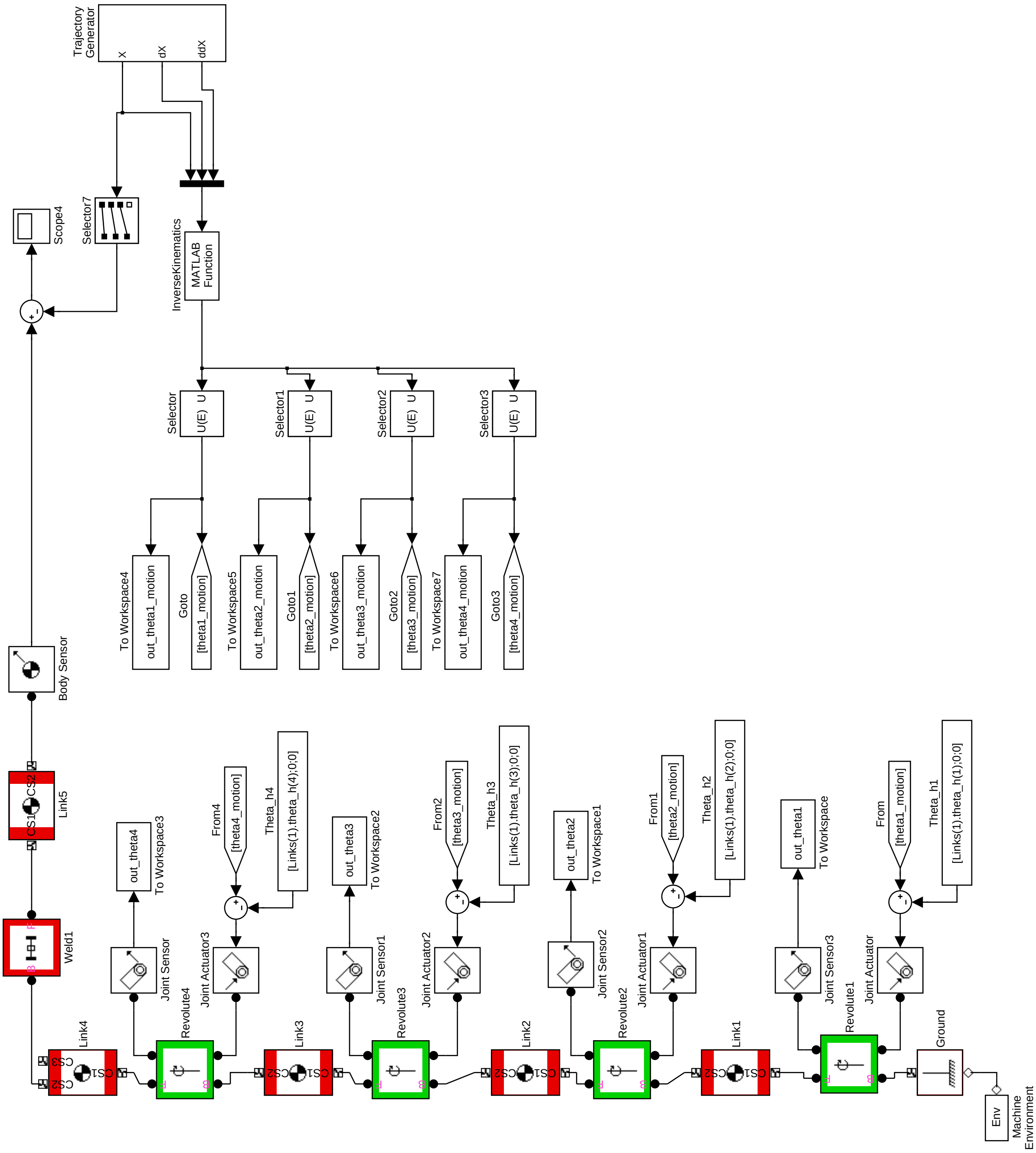
$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}^T \; [m, m, m, m]$$

- Dynamické parametry:
  - *Link* 1 (pojezd - hmotný bod):
    hmotnost: $m_1 = 5$ $[kg]$, poloha těžiště (vzhledem k s.s. F_1): $cg_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $[m]$
  - *Link* 2 (rameno - tenká plná tyč poloměru 0.01 m):
    hmotnost: $m_2 = 0.74$ $[kg]$, poloha těžiště (vzhledem k s.s. F_2): $cg_2 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $[m]$, matice setrvačnosti $I_2 = \mathrm{diag}(5.5 \cdot 10^{-3}, 5.5 \cdot 10^{-3}, 3.7 \cdot 10^{-5})$ $[kg \cdot m^2]$
  - *Link* 3 (rameno - tenká plná tyč poloměru 0.01 m):
    hmotnost: $m_3 = 0.49$ $[kg]$, poloha těžiště (vzhledem k s.s. F_3): $cg_3 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $[m]$, matice setrvačnosti $I_3 = \mathrm{diag}(1.6 \cdot 10^{-3}, 1.6 \cdot 10^{-3}, 2.5 \cdot 10^{-5})$ $[kg \cdot m^2]$

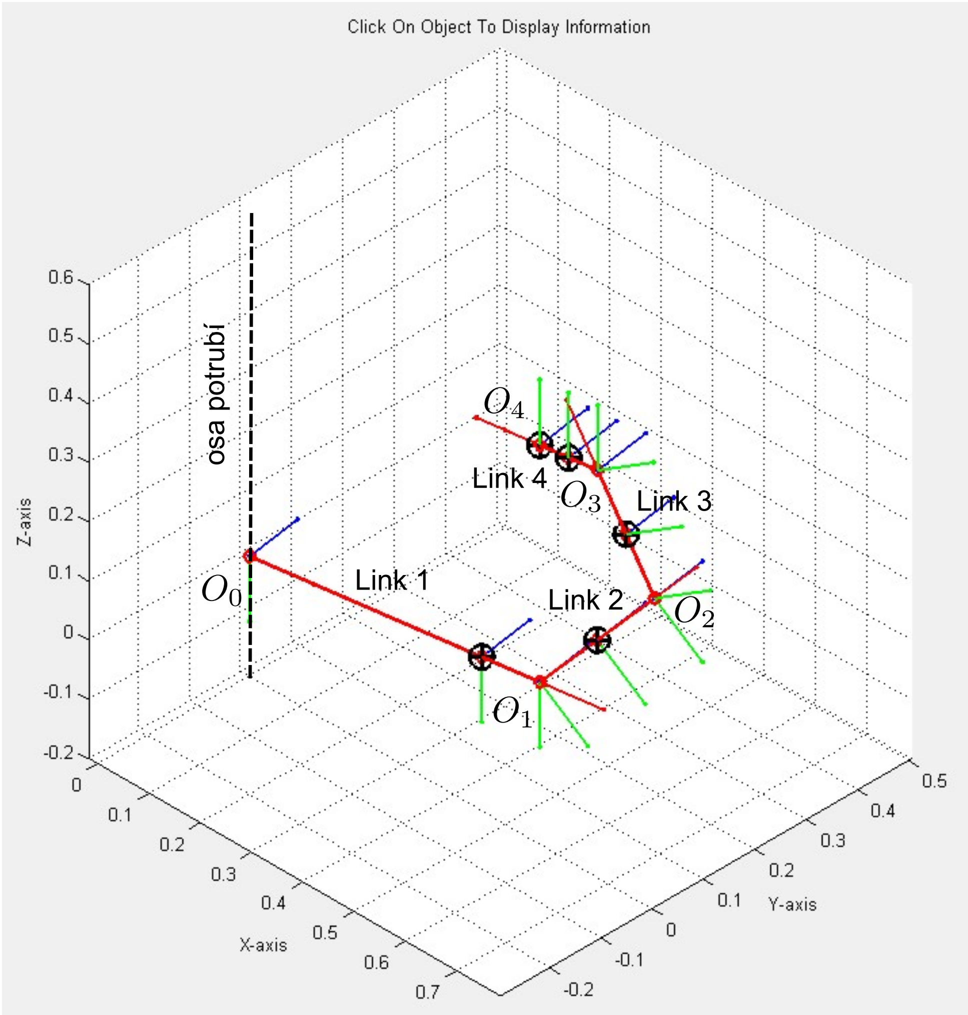
– *Link* 4 (rameno - tenká plná tyč poloměru 0.01 m):
hmotnost: $m_4 = 0.25$ $[kg]$, poloha těžiště (vzhledem k s.s. F_4): $cg_4 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $[m]$, matice setrvačnosti $I_4 = \mathrm{diag}(2.1 \cdot 10^{-4}, 2.1 \cdot 10^{-4}, 1.2 \cdot 10^{-5})$ $[kg \cdot m^2]$

– břemeno (UZ sonda - hmotný bod):
hmotnost: $m_5 = 0.3$ $[kg]$, umístěn v počátku s.s. F_4

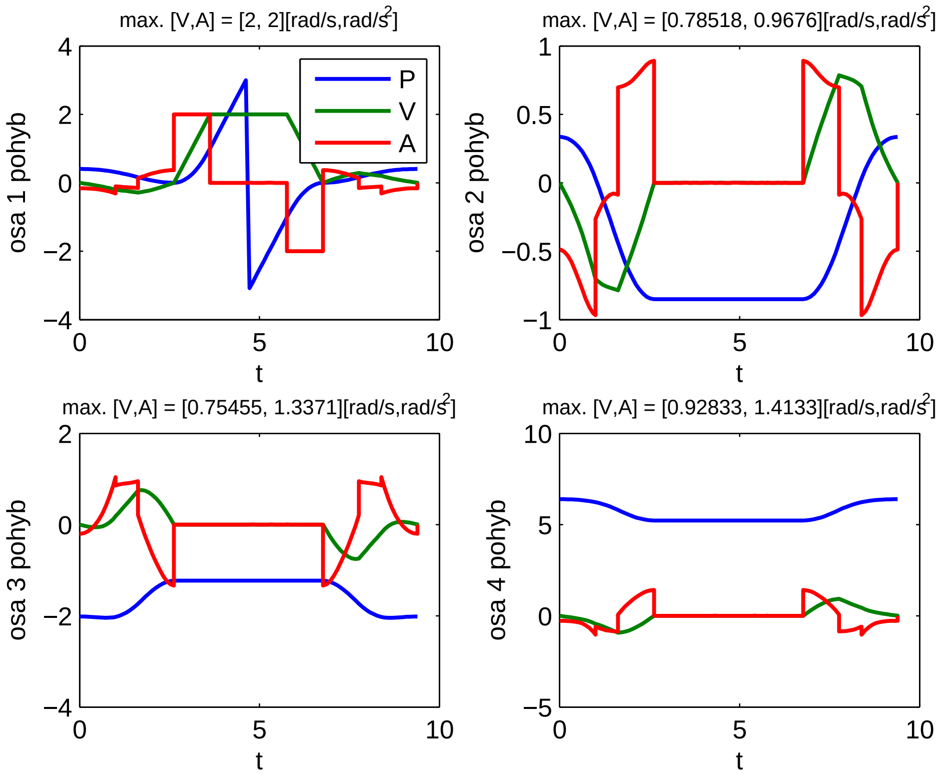
Obrázek 3 znázorňuje simulační schéma v prostředí Simulink/SimMechanics a Obrázek 4 zjednodušenou vizualizaci manipulátoru. Vzhledem k faktu, že známe polohy, rychlosti i zrychlení kloubových souřadnic manipulátoru, viz Obrázek 5, umožňuje SimMechanics simulovat model v režimu tzv. *inverzní dynamiky*. Právě tento režim simulace hraje klíčovou roli v analýze a návrhu komponent manipulátoru (ramena, aktuátory, převodovky, atd.) a plánování požadované trajektorie, neboť nám poskytuje požadované síly a silové momenty ve všech kloubech manipulátoru, viz Obrázek 6, které jsou zapotřebí pro generování požadovaného pohybu.



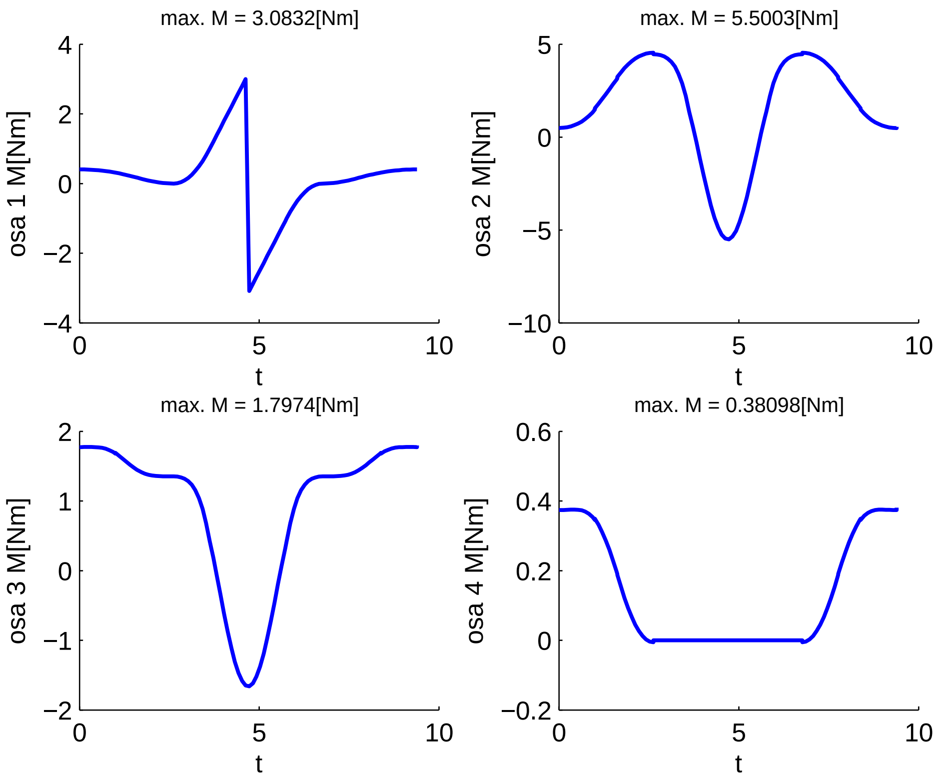
Obrázek 3: Simulační model v SimMechanicsu - Varianta 1



Obrázek 4: Simulační model v SimMechanicsu - Varianta 1



Obrázek 5: Polohy $\boldsymbol{Q}$, rychlosti $\dot{\boldsymbol{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\boldsymbol{Q}}$ kloubových souřadnic - Varianta 1



Obrázek 6: Požadované momenty v kloubech manipulátoru - Varianta 1

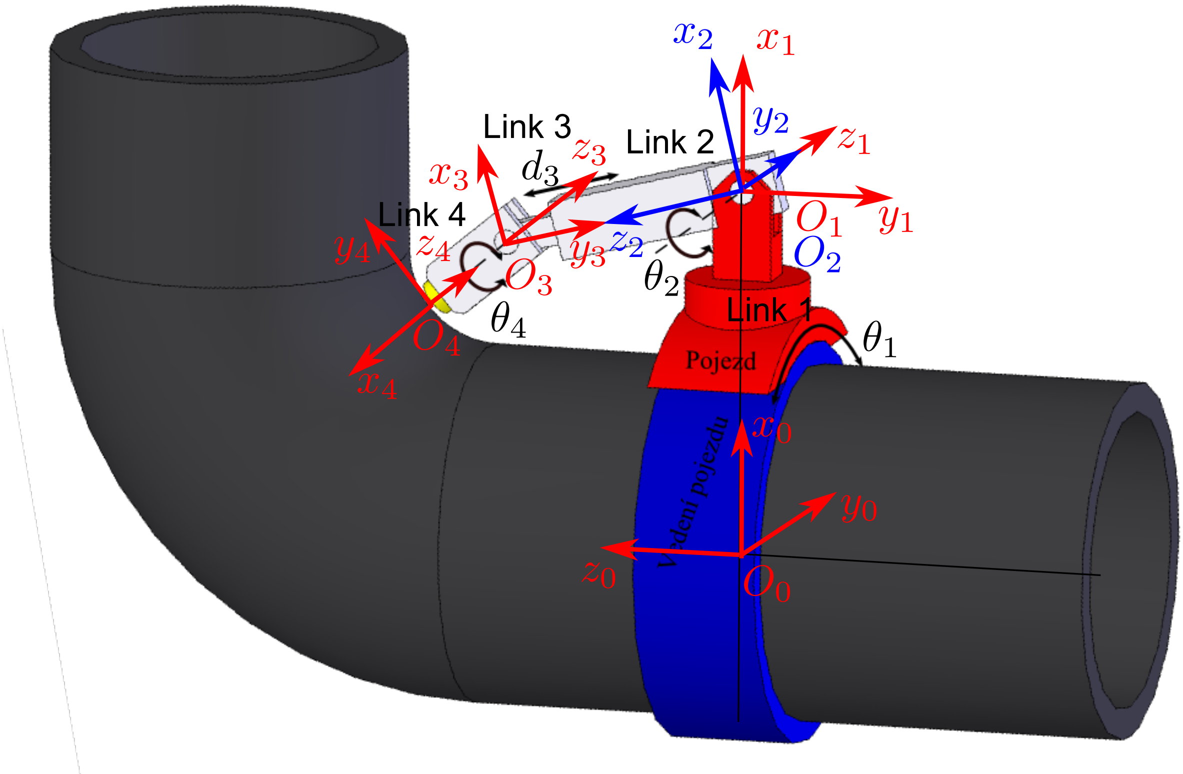
3 Sériový manipulátor - Varianta 2

Sériový manipulátor v druhé variantě je tvořen třemi rotačními aktuátory a jedním aktuátorem prizmatickým (manipulátor typu **RRPR**). První kloub manipulátoru opět reprezentuje pojezd po potrubí kruhového průřezu. Koncový efektor manipulátoru opět umožňuje posunutí UZ sondy libovolně v prostoru (3 translační DoF) a její orientaci vzhledem k svislé ose pojezdu (1 rotační DoF). Obrázek 7 znázorňuje schématické uspořádání manipulátoru včetně zavedených souřadných systémů dle D-H úmluvy.

D-H parametry manipulátoru pro vzájemnou polohu zavedených s.s. na Obrázku 7 lze stanovit následovně:

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	θ_1	a_1	$-\frac{\pi}{2}$
2	0	θ_2	0	$\frac{\pi}{2}$
3	d_3	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
4	0	θ_4	a_4	0

Tabulka 2: D-H parametry manipulátoru - Varianta 2



Obrázek 7: Sériový manipulátor - Varianta 2

Polohy kloubů manipulátoru jsou určeny kloubovými souřadnicemi $\boldsymbol{Q}$ jako:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & d_3 & \theta_4 \end{bmatrix}^T \tag{45}$$

Návrhové parametry manipulátoru $\boldsymbol{\xi}$ představují délky jednotlivých ramen:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 \end{bmatrix}^T \tag{46}$$

kde $a_1 = \|\boldsymbol{O}_0\boldsymbol{O}_1\|$, $a_4 = \|\boldsymbol{O}_3\boldsymbol{O}_4\|$.

Poloha koncového efektoru lze popsat zobecněnými souřadnicemi $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x & y & z & \phi \end{bmatrix}^T \tag{47}$$

kde x, y, z jsou souřadnice bodu $\boldsymbol{O}_4$ vzhledem k s.s. F_0 a ϕ je vzájemné natočení s.s. F_4 a F_1 okolo osy $\boldsymbol{z}$, tedy matice rotace $\boldsymbol{R}_4^1 = \mathrm{rot}(\boldsymbol{z}, \phi)$.

3.1 Přímá (PKÚ) a inverzní (IKÚ) kinematická úloha

PKÚ:

PKÚ manipulátoru lze opět přímo vyjádřit postupným vynásobením homogenních transformačních matic, odpovídajícím D-H parametrům z Tabulky 2.

Pro pozici bodu koncového efektoru platí:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_4^0(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\xi}) &= \boldsymbol{T}_1^0(\theta_1) \cdot \boldsymbol{T}_2^1(\theta_2) \cdot \boldsymbol{T}_3^2(d_3) \cdot \boldsymbol{T}_4^3(\theta_4) \\ \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T &= \boldsymbol{O}_4^0 = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\xi})_4^0[1:3, 4] \end{aligned} \tag{48}$$

Pro orientaci koncového efektoru pak platí:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_4^1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\xi}) &= \boldsymbol{T}_2^1(\theta_2) \cdot \boldsymbol{T}_3^2(d_3) \cdot \boldsymbol{T}_4^3(\theta_4) \\ \boldsymbol{R}_4^1 = \boldsymbol{T}_4^1(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\xi})[1:3, 1:3] &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \phi &= \mathrm{atan2}(\boldsymbol{R}_4^1[2,1], \boldsymbol{R}_4^1[1,1]) \end{aligned} \tag{49}$$

IKÚ:

První kloubovou souřadnici lze stanovit opět přímo z polohy bodu $\boldsymbol{O}_4^0$ jako:

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}(\boldsymbol{O}_4^0[2], \boldsymbol{O}_4^0[1]) \tag{50}$$

Poloha $\boldsymbol{O}_3$ lze také určit posunutím polohy bodu $\boldsymbol{O}_4$ ve směru osy $\boldsymbol{x}$ s.s. F_4:

$$\boldsymbol{O}_3^1 = \boldsymbol{O}_4^1 - \boldsymbol{R}_4^1[:, 1] \cdot a_4 \tag{51}$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_4^1 &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{O}_4^1 &= (\boldsymbol{T}_1^0(\theta_1))^{-1} \cdot \boldsymbol{O}_4^0 \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{T}_1^0(\theta_1)$ je již známá transformační matice.

Je zřejmé, že souřadnice bodu $\boldsymbol{O}_3$ musí odpovídat svým tvarem součinu příslušejících transformačních matic, tedy porovnáním:

$$\boldsymbol{O}_3^1 = \begin{bmatrix} w_x & w_y & 0 \end{bmatrix}^T \stackrel{!}{=} \boldsymbol{T}_3^1(\theta_2, d_3) \tag{52}$$

kde $\boldsymbol{T}_3^1(\theta_2, \theta_3) = \boldsymbol{T}_2^1(\theta_2) \cdot \boldsymbol{T}_3^2(d_3)$.

Dostáváme soustavu dvou rovnic pro neznámé θ_2, d_3 .

$$w_x = d_3 \sin\theta_2 \tag{53}$$
$$w_y = -d_3 \cos\theta_2 \tag{54}$$

Umocněním a sečtením (53), (54) dostáváme:

$$d_3 = \pm\sqrt{w_x^2 + w_y^2} \tag{55}$$

A zároveň:

$$\theta_2 = \mathrm{atan2}(w_x, -w_y) \quad \text{pro: } d_3 > 0 \tag{56}$$
$$\theta_2 = \mathrm{atan2}(-w_x, w_y) \quad \text{pro: } d_3 \leq 0 \tag{57}$$

Poslední kloubová souřadnice lze stanovit jednoduše rozdílem:

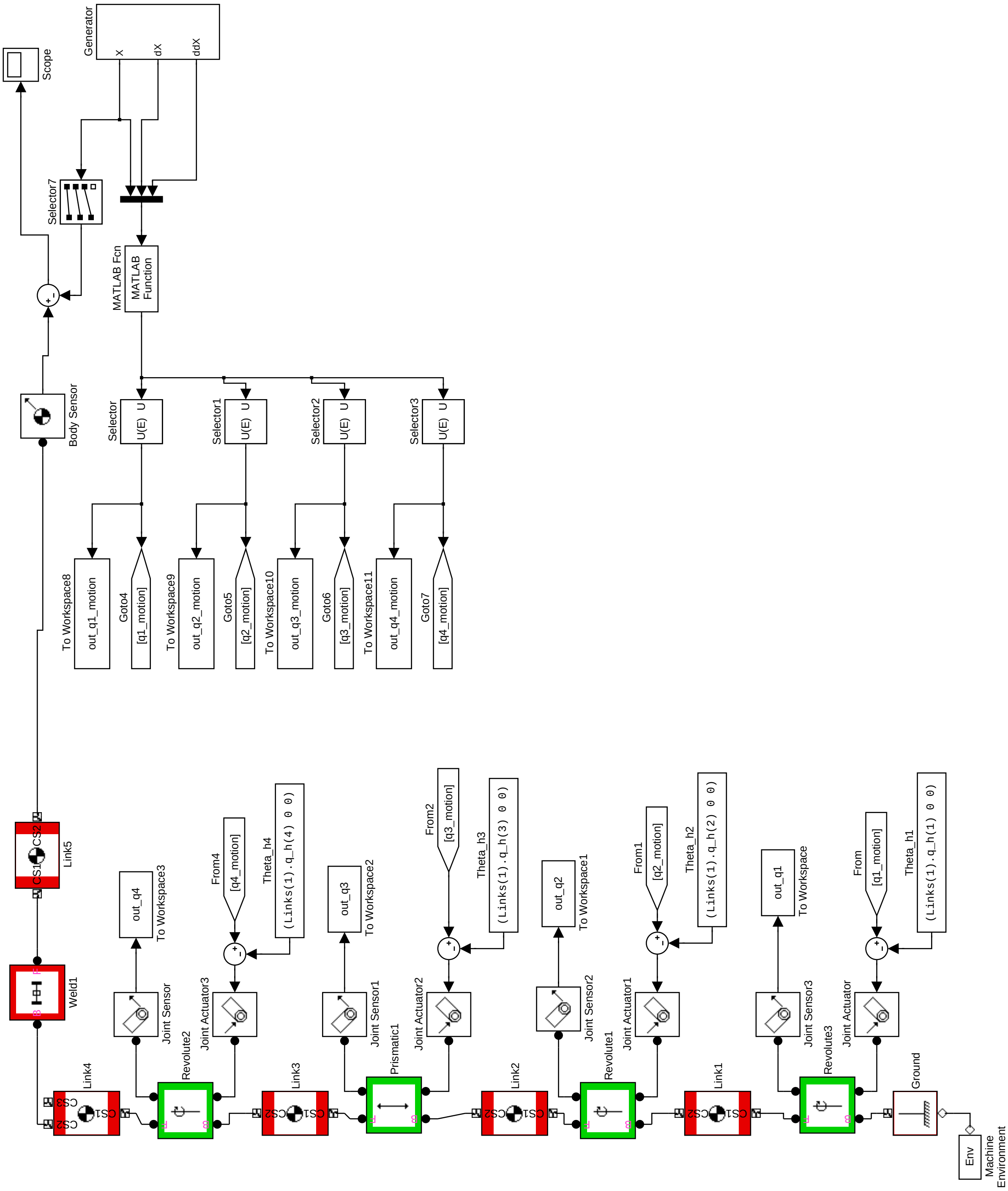
$$\theta_4 = \phi - \theta_2 \tag{58}$$

Z rovnice (55) tedy vyplývají dvě řešení IKÚ.

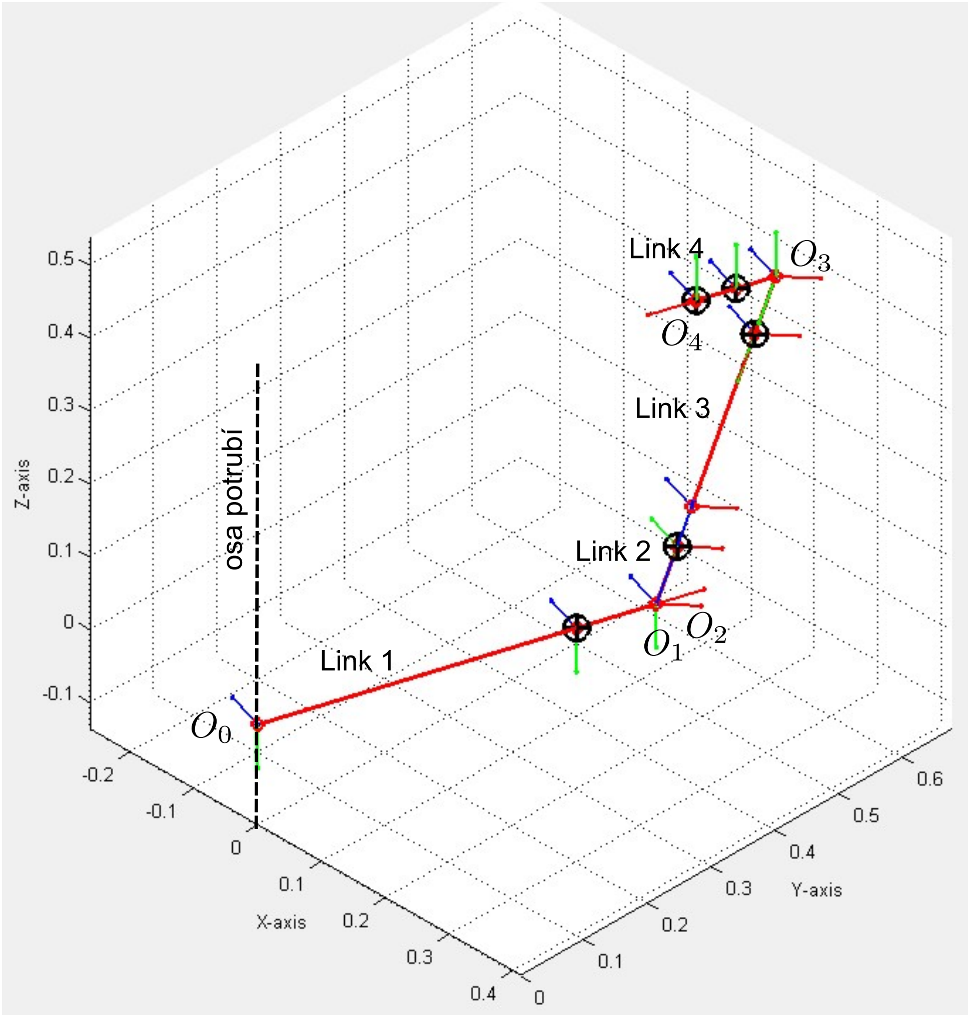
3.2 Závislosti rychlosti a zrychlení

Závislosti rychlostí a zrychlení lze stanovit analogicky jako v Kapitole 2.1. Výsledný simulační model byl opět vytvořen v prostředí SimMechanics a byla provedena simulace v režimu inverzní dynamiky pro pohyb po identické požadované trajektorii koncového efektoru manipulátoru. Parametry manipulátoru byly voleny následovně:

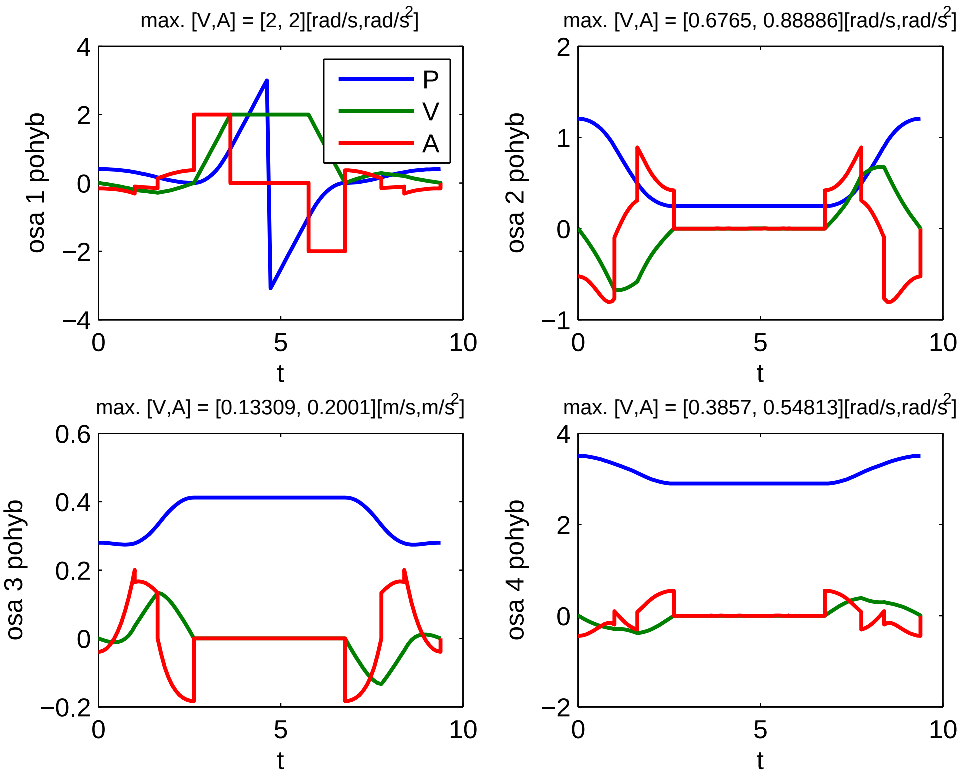
- Kinematické parametry:
$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}^T \; [m, m]$$
- Dynamické parametry:
  - *Link* 1 (pojezd - hmotný bod):
    hmotnost: $m_1 = 5$ $[kg]$, poloha těžiště (vzhledem k s.s. F_1): $cg_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $[m]$
  - *Link* 2 (rameno - tenká plná tyč poloměru 0.01 m):
    hmotnost: $m_2 = 0.37$ $[kg]$, poloha těžiště (vzhledem k s.s. F_2): $cg_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.075 \end{bmatrix}^T$ $[m]$,
    matice setrvačnosti $I_2 = \mathrm{diag}(7 \cdot 10^{-4}, 7 \cdot 10^{-4}, 1.8 \cdot 10^{-5})$ $[kg \cdot m^2]$
  - *Link* 3 (rameno - tenká plná tyč poloměru 0.01 m):
    hmotnost: $m_3 = 0.37$ $[kg]$, poloha těžiště (vzhledem k s.s. F_3): $cg_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.075 & 0 \end{bmatrix}^T$ $[m]$,
    matice setrvačnosti $\mathrm{diag}(7 \cdot 10^{-4}, 7 \cdot 10^{-4}, 1.8 \cdot 10^{-5})$ $[kg \cdot m^2]$
  - *Link* 4 (rameno - tenká plná tyč poloměru 0.01 m):
    hmotnost: $m_4 = 0.25$ $[kg]$, poloha těžiště (vzhledem k s.s. F_4): $cg_4 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $[m]$,
    matice setrvačnosti $I_4 = \mathrm{diag}(2.1 \cdot 10^{-4}, 2.1 \cdot 10^{-4}, 1.2 \cdot 10^{-5})$ $[kg \cdot m^2]$
  - břemeno (UZ sonda - hmotný bod):
    hmotnost: $m_5 = 0.3$ $[kg]$, umístěn v počátku s.s. F_4



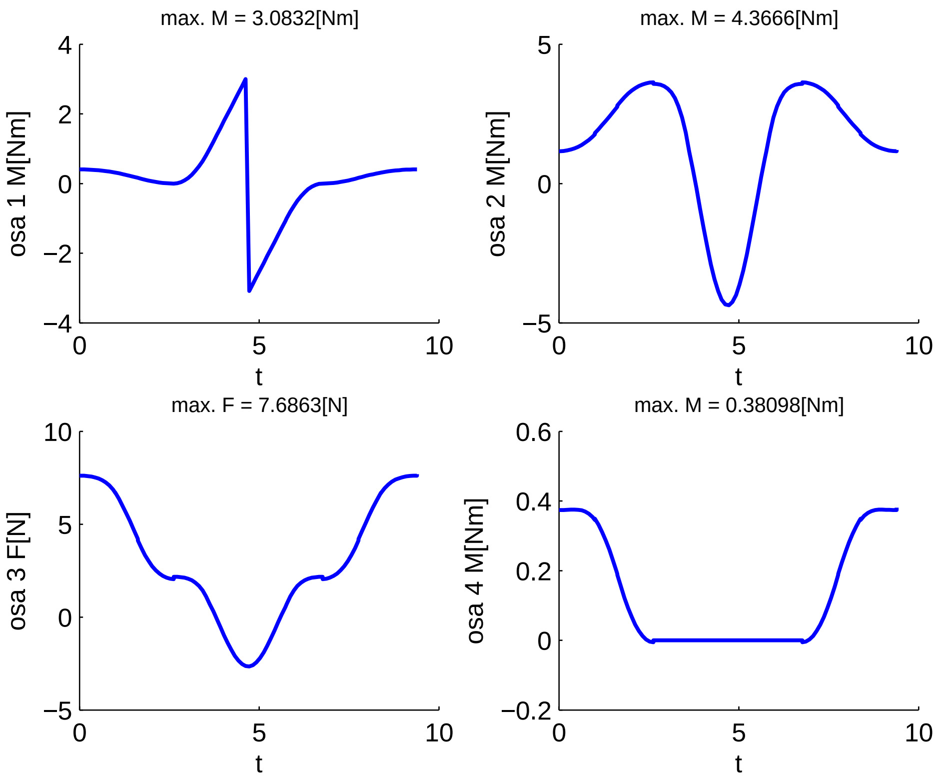
Obrázek 8: Simulační model v SimMechanicsu - Varianta 2



Obrázek 9: Simulační model v SimMechanicsu - Varianta 2



Obrázek 10: Polohy $\boldsymbol{Q}$, rychlosti $\dot{\boldsymbol{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\boldsymbol{Q}}$ kloubových souřadnic - Varianta 2

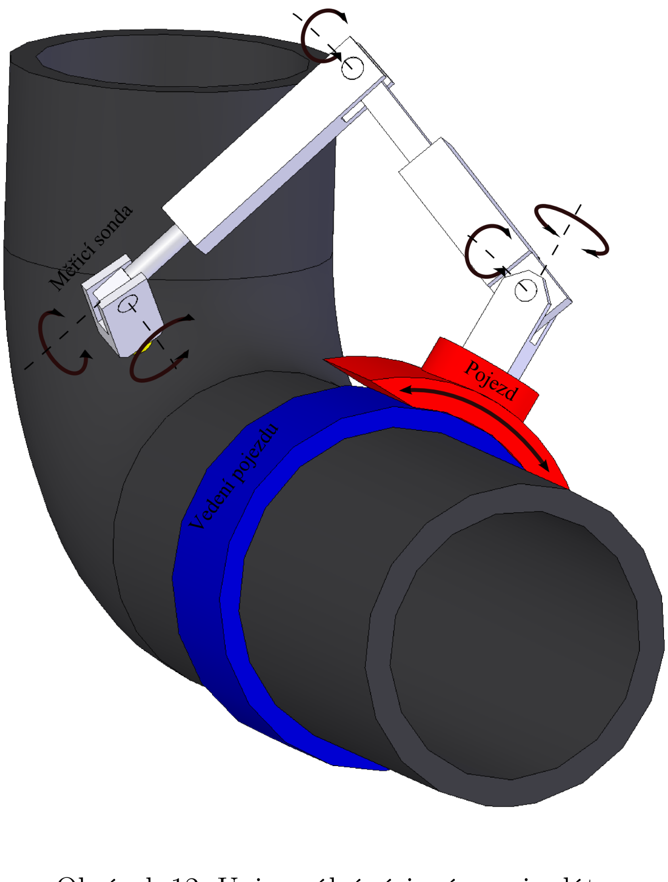


Obrázek 11: Požadované momenty v kloubech manipulátoru - Varianta 2

4 Univerzální sériový manipulátor

V Kapitolách 2 a 3 byly představeny sériové manipulátory se 4 DoF (3 translační a 1 rotační). UZ sonda tak může být vzhledem k povrchu potrubí polohována do libovolné pozice a její orientace může být libovolně měněna pouze úhlem (zobecněná souřadnice ϕ), který svírá kolmá osa potrubí (osa $\boldsymbol{x}$ s.s. F_1) s podélnou osou UZ sondy (osa $\boldsymbol{x}$ s.s. F_4). V případě nutnosti řízení obecné libovolné orientace UZ sondy je nezbytně nutné přistoupit k univerzálnějšímu řešení architektury manipulátoru. Jedna z možných variant manipulátoru se 6 DoF (3 translační a 3 rotační) je znázorněna na Obrázku 12. Tato předkládaná varianta nadále zůstává předmětem analýzy a vhodnost této konstrukce bude nadále diskutována s ohledem na potřeby univerzálnosti versus technologické složitosti. V současnosti vyvstávají následující fakta a otázky týkající se navržené architektury:

- PKÚ lze řešit analyticky (platí obecně pro sériové manipulátory).
- Analytické řešení IKÚ je známo pro sériové manipulátory typu 6**R** jen za předpokladu, že lze manipulátor dekomponovat na tzv. sférické zápěstí (3 rotační osy se společným průsečíkem) a zbývající část manipulátoru plnící roli translačního pohybu.
- Uvedená architektura toto nesplňuje ⇒ v současnosti nám nejsou známy efektivní algoritmy pro řešení IKÚ (vyjma algoritmů čistě numerických).
- Nutnost osazovat 6 nezávislých rotačních aktuátorů. Je to skutečně nutné, nestačilo by např. poslední dva klouby realizovat jako pasivní? (Zajištění tečného kontaktu s potrubím.)



Obrázek 12: Univerzální sériový manipulátor

5 Závěr

Náplní zprávy bylo vytvoření virtuálních kinematicko-dynamických modelů předložených architektur manipulátorů. Při analýze polohových závislostí mezi kloubovými a zobecněnými souřadnicemi manipulátorů byly nalezeny analytické vztahy pro řešení přímé i inverzní kinematické úlohy. Závislosti rychlostí a zrychlení kloubových a zobecněných souřadnic byly odvozeny systematickou geometrickou metodou bez nutnosti symbolického derivování polohových závislostí. Všechny výpočty byly relaizovány ve výpočetním prostředí Matlab [2] a Maple [1]. Virtuální simulační modely byly sestaveny s pomocí blocksetu SimMechanics v nadstavbě Simulink v Matlabu. Požadované síly a silové momenty v jednotlivých kloubech manipulátoru, které jsou zapotřebí pro generování požadované trajektorie koncového efektoru byly získány simulacemi v režimu inverzní dynamiky v SimMechanicsu.

Reference

[1] MapleSoft, Maple. http://www.maplesoft.com/.

[2] The MathWorks, Matlab. http://www.mathworks.com/.

[3] Bláha, L.: Groebnerova báze a teorie řízení. Práce ke státní doktorské zkoušce, Katedra kybernetiky, FAV, ZČU v Plzni, 2011.

[4] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Práce ke státní doktorské zkoušce, Katedra kybernetiky, FAV, ZČU v Plzni, 2011.