

Technická zpráva
Katedra kybernetiky, Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

**Inverzní kinematická a statická úloha
manipulátoru
AGEBOT**

10. 1. 2012

Martin Švejda
msvejda@kky.zcu.cz

Obsah

1	Úvod	3
2	Analýza sériového manipulátoru	3
2.1	Přímá a inverzní kinematická úloha (PKÚ, IKÚ)	5
2.2	Přímá a inverzní okamžitá kinematická úloha (POKÚ, IOKÚ)	7
2.3	Kompenzace gravitačních sil	9
2.4	Simulační výsledky pro sériový manipulátor	11
3	Analýza paralelního manipulátoru	14
3.1	Popis i -tého kinematického řetězce:	15
3.2	Popis paralelního manipulátoru	16
3.3	Inverzní kinematická úloha (IKÚ)	17
3.4	Inverzní okamžitá kinematická úloha (IOKÚ)	19
3.5	Kompenzace gravitačních sil	20
3.6	Simulační výsledky pro paralelní manipulátor	23
4	Závěr	27

1 Úvod

Zpráva se zabývá inverzní kinematickou a statickou úlohu sério-paralelního manipulátoru AGE-BOT (AGressive Environmental roBOT) pro použití v aplikacích průmyslového čištění (odmašťování, odlakování, atd.). Manipulátor je tvořen sériovou částí se 4 stupni volnosti (DoF) koncového efektoru a speciální paralelním sférickým zápěstím se 3 DoF koncového efektoru. Paralelní sférické zápěstí je konstruováno takovým způsobem, aby bylo možné snadno hermeticky oddělit elektrické vybavení manipulátoru od agresivního prostředí uvnitř průmyslových mycích linek. V textu je uveden algoritmus výpočtu přímé a inverzní kinematické úlohy a přímé a inverzní okamžité kinematické úlohy pro sériový manipulátor. Je ukázáno, že tento typ úloh vede na analytické řešení. Pro paralelní manipulátor je řešena pouze inverzní kinematická a inverzní okamžitá kinematická úloha. Lze ukázat, že přímá kinematická úloha nelze pro paralelní manipulátor řešit v uzavřeném tvaru a může obsahovat až 8 různých řešení, viz [5]. Výsledky v předkládané zprávě byly využity při návrhu řízení prototypu AGEBOTU.

2 Analýza sériového manipulátoru

Manipulátor je tvořen sériovým kinematickým řetězcem typu **PRRR** (všechny klouby manipulátoru jsou aktivní, zastávají tedy úlohu aktuátorů). Koncový efektor manipulátoru má 4 DoF (3 translační DoF - libovolná translace v prostoru a 1 rotační DoF - úhel svírající rameno koncového efektoru s osou \mathbf{y}_{0_S}). Obrázek 1 znázorňuje 3D CAD výkres a příslušné schématické uspořádání manipulátoru.

Kloubové souřadnice manipulátoru:

$$\Theta_S = [d_1 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \quad (1)$$

Zobecněné souřadnice manipulátoru (poloha koncového efektoru):

$$\mathbf{X}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_4^{0_S} \\ \phi \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z \quad \phi]^T \quad (2)$$

kde $\mathbf{O}_4^{0_S}$ označuje souřadnice bodu \mathbf{O}_4 vyjádřené v souřadném systému (s.s.) F_{0_S} ¹.

Návrhové parametry manipulátoru:

- Kinematické parametry:

$$\xi_S = [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4]^T \quad (3)$$

- Dynamické parametry (význam dynamických parametrů viz Obrázek 2):

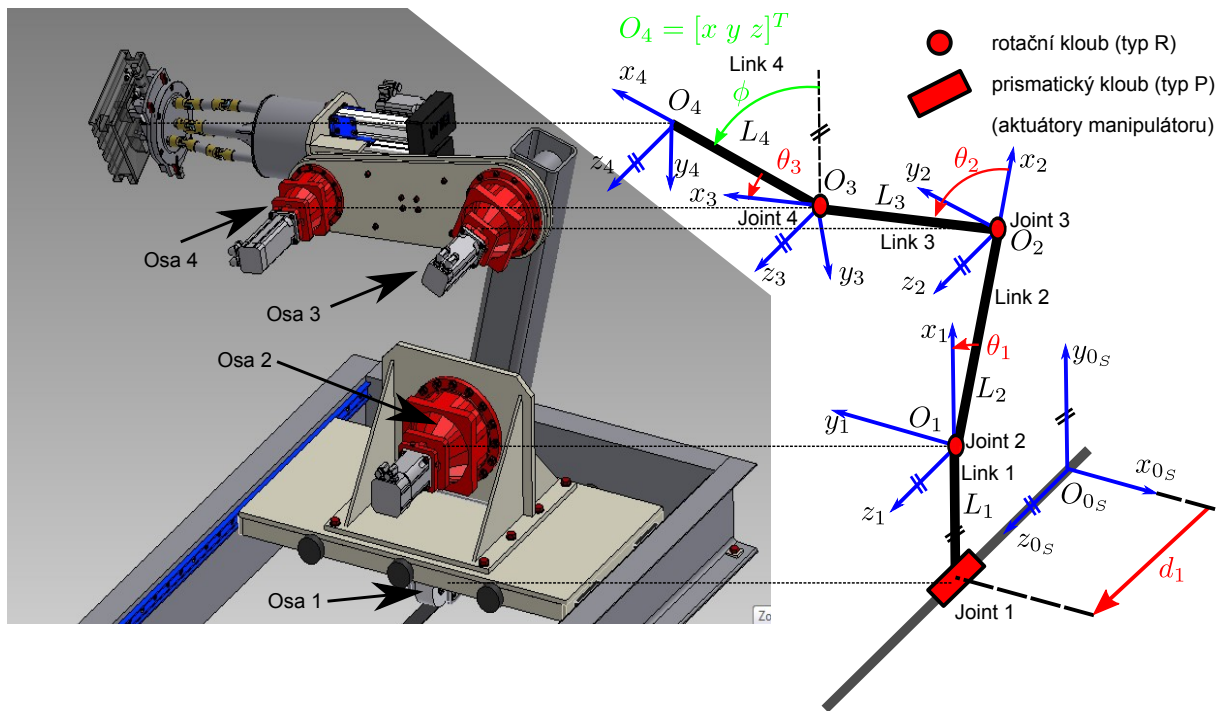
Poloha těžiště je chápána v s.s. příslušného ramene, např. pro rameno *Link 2* je poloha jeho těžiště udána v souřadnicích s.s. F_2 , který je s ramenem pevně spojen.

$$\mathbf{M}_S = [m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4 \quad m_e]^T \quad (4)$$

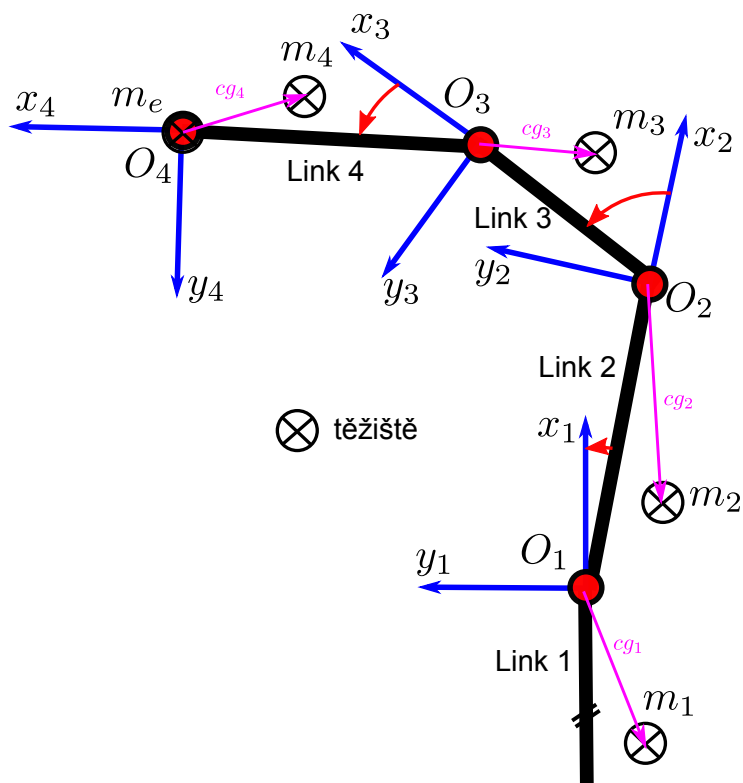
$$\mathbf{CG}_S = [\mathbf{cg}_1 \quad \mathbf{cg}_2 \quad \mathbf{cg}_3 \quad \mathbf{cg}_4]^T = \begin{bmatrix} cg_{1_x} & cg_{2_x} & cg_{3_x} & cg_{4_x} \\ cg_{1_y} & cg_{2_y} & cg_{3_y} & cg_{4_y} \\ cd_{1_z} & cg_{2_z} & cg_{3_z} & cg_{4_z} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Kde m_i značí hmotnost ramene *Link i* a m_e značí hmotnost břemene s těžištěm v bodě \mathbf{O}_4 .

¹Označení s.s. $F_i = \mathbf{O}_i - \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i \mathbf{z}_i$



Obrázek 1: Sériová část AGEBOTu



Obrázek 2: Dynamické parametry sériové části AGEBOTu (Poznamenejme, že z-tové souřadnice polohy těžišť jsou vzhledem k možnému pohybu manipulátoru nepodstatné.)

2.1 Přímá a inverzní kinematická úloha (PKÚ, IKÚ)

Inverzní (IKÚ) a přímá (PKÚ) kinematická úloha obnáší výpočet polohy aktivních kloubových souřadnic manipulátoru Θ_S na základě polohy zobecněných souřadnic \mathbf{X}_S a naopak. Polohové závislosti lze popsat následujícím způsobem, který vychází z modifikovaného modelu manipulátoru Agebot popsaného v [4].

Vhodným zavedením souřadných systémů (s.s.), které reprezentují polohu jednotlivých ramen (*Link i*) manipulátoru, lze kinematickou transformaci mezi dvěma s.s. $F_i = \mathbf{O}_i - \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i \mathbf{z}_i$ popsat s pomocí homogenních transformačních matic $\mathbf{T}_i^j \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, kde

- $\mathbf{T}_i^j[1 : 3, 1 : 3] = \mathbf{R}_i^j$ reprezentuje² matici rotace mezi s.s. F_i a F_j
- $\mathbf{T}_i^j[1 : 3, 4] = \mathbf{O}_i^j$ reprezentuje vektor posunutí mezi s.s. vzhledem k s.s. F_j
- transformace lze skládat prostým postupným násobením transformačních matic

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{T}_1^0 \cdot \mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2, \quad \mathbf{T}_3^1 = \mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2, \quad \text{atd.}$$

Poznamenejme, že zavedení s.s. je provedeno dle Denavit-Hartenbergovy úmluvy, více viz [2]. Pro sériový manipulátor tedy platí:

$$\mathbf{T}_1^{0s} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & L_2 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & L_2 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{T}_3^2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & L_3 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & L_3 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_4^3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & L_4 \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & L_4 \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Výsledná transformační matice \mathbf{T}_4^{0s} lze tedy psát³:

$$\mathbf{T}_4^{0s} = \prod_{i=2}^4 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_{i-1}) = \begin{bmatrix} -s_{\theta_{1,2,3}} & -c_{\theta_{1,2,3}} & 0 & -L_4 s_{\theta_{1,2,3}} - L_3 s_{\theta_{1,2}} - L_2 s_{\theta_1} \\ c_{\theta_{1,2,3}} & -s_{\theta_{1,2,3}} & 0 & L_4 c_{\theta_{1,2,3}} + L_3 c_{\theta_{1,2}} + L_2 c_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} -s_\phi & -c_\phi & 0 & x \\ c_\phi & -s_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PKÚ:

Z rovnice (7) je ihned vidět řešení přímé kinematické úlohy (PKÚ) sériového manipulátoru, neboť:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \mathbf{O}_4^{0s} = \mathbf{T}_4^{0s}[1 : 3, 4] \quad (8)$$

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

²Značení $\mathbf{A}[a : b, c : d]$ odpovídá submatici získané z matice \mathbf{A} vybráním řádku $a \dots b$ a sloupce $c \dots d$. Případný samostatný symbol ":" reprezentuje všechny řádky/sloupce.

³Značení $s_{\theta_{1,2,3}}$ odpovídá $\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$.

IKÚ:

Při řešení IKÚ je zřejmé, že kloubová souřadnice translačního pojezdu d_1 je přímo rovna hodnotě zobecněné souřadnice z . Dále lze tedy postupovat jako při řešení IKÚ pro planární manipulátor typu $3R$ (*Link 2, 3, 4*), viz Obrázek 3, jehož PKÚ popisuje homogenní transformační matice $\mathbf{T}_4^1(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Hodnotu této matice lze vyjádřit se znalostí zobecněných souřadnic \mathbf{X}_S , tedy se známou transformační maticí \mathbf{T}_4^{0s} , viz (7) :

$$\mathbf{T}_4^1 = \mathbf{T}_4^{0s} \cdot (\mathbf{T}_1^{0s})^{-1} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & y - L_1 \\ s_\phi & c_\phi & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{O}_4^1 = \begin{bmatrix} y - L_1 \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Poloha počátku s.s. F_3 v s.s. F_1 lze vypočítat jako:

$$\mathbf{O}_3^1 = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}_4^1 - \begin{bmatrix} L_4 c_\phi \\ L_4 s_\phi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - L_1 - L_4 c_\phi \\ -x - L_4 s_\phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Zároveň platí:

$$\mathbf{T}_3^1(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=2}^3 \mathbf{T}_i^{i-1}(\theta_{i-1}) = \begin{bmatrix} c_{\theta_{1,2}} & -s_{\theta_{1,2}} & 0 & L_3 c_{\theta_{1,2}} + L_2 c_{\theta_1} \\ s_{\theta_{1,2}} & c_{\theta_{1,2}} & 0 & L_3 s_{\theta_{1,2}} + L_2 s_{\theta_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Porovnáním příslušejících prvků rovnic (10) a (11) dostáváme soustavu dvou nelineárních rovnic pro dvě neznámé θ_1, θ_2 :

$$\begin{aligned} w_x &= L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_2 \cos \theta_1 \\ w_y &= L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_2 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Umocněním a sečtením dostáváme:

$$\begin{aligned} w_x^2 + w_y^2 &= L_3^2 + L_2^2 + 2L_2L_3 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_2 &= \frac{w_x^2 + w_y^2 - L_2^2 - L_3^2}{2L_2L_3} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2 = 1 \Rightarrow \sin \theta_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \quad (14)$$

Tedy:

$$\theta_2 = \text{atan2}(\sin \theta_2, \cos \theta_2) \quad (15)$$

Řešením soustavy rovnic (12) pro neznámé $\sin \theta_1, \cos \theta_1$ dostáváme:

$$\sin \theta_1 = \frac{-L_3 \sin \theta_2 w_x + (L_2 + L_3 \cos \theta_2) w_y}{w_x^2 + w_y^2} \quad (16)$$

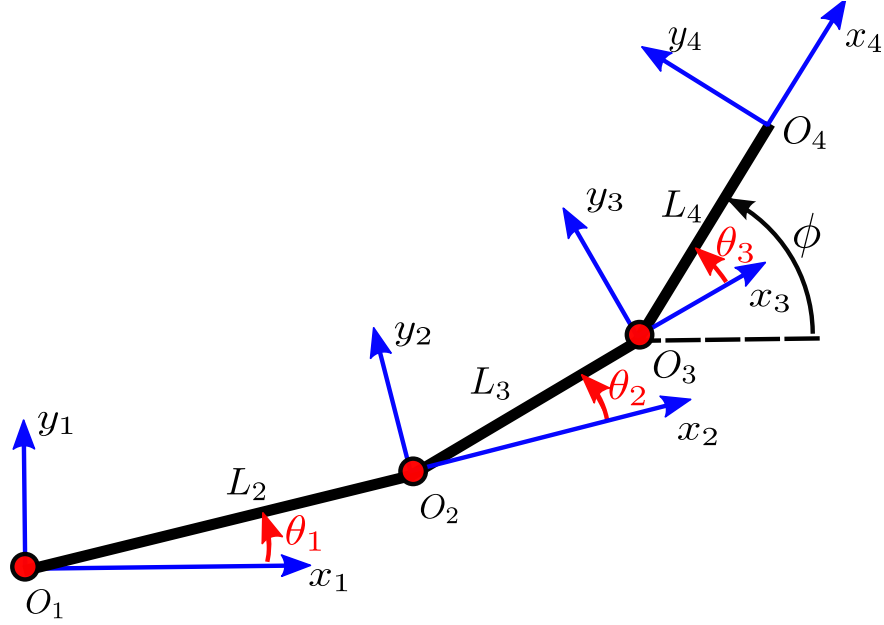
$$\cos \theta_1 = \frac{(L_2 + L_3 \cos \theta_2) w_x + L_3 \sin \theta_2 w_y}{w_x^2 + w_y^2} \quad (17)$$

Tedy:

$$\theta_1 = \text{atan2}(\sin \theta_1, \cos \theta_1) \quad (18)$$

Kloubová souřadnice θ_3 je vypočtena z rozdílu:

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (19)$$



Obrázek 3: Planární manipulátor typu 3R

2.2 Přímá a inverzní okamžitá kinematická úloha (POKÚ, IOKÚ)

Inverzní (IOKÚ) a přímá (POKÚ) okamžitá kinematická úloha obnáší výpočet rychlosti $\dot{\Theta}_S$ a zrychlení $\ddot{\Theta}_S$ aktivních kloubových souřadnic manipulátoru na základě rychlosti $\dot{\mathbf{X}}_S$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}_S$ zobecněných souřadnic a naopak. Rychlosti kloubových a zobecněných souřadnic lze popsat následující relací:

$$\dot{\mathbf{X}}_S = \mathbf{J}(\Theta_S) \cdot \dot{\Theta}_S \quad (\text{POKÚ}) \quad (20)$$

$$\dot{\Theta}_S = \mathbf{J}^{-1}(\Theta_S) \cdot \dot{\mathbf{X}}_S \quad (\text{IOKÚ}) \quad (21)$$

Kde \mathbf{J} respektive \mathbf{J}^{-1} označuje jakobián respektive inverzní jakobián.

Zrychlení kloubových a zobecněných souřadnic lze popsat následující relací:

$$\ddot{\mathbf{X}}_S = \dot{\mathbf{J}}(\Theta_S) \cdot \dot{\Theta}_S + \mathbf{J}(\Theta_S) \cdot \ddot{\Theta}_S \quad (\text{POKÚ}) \quad (22)$$

$$\ddot{\Theta}_S = \mathbf{J}^{-1}(\Theta_S) \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}}_S - \dot{\mathbf{J}}(\Theta_S) \cdot \dot{\Theta}_S \right) \quad (\text{IOKÚ}) \quad (23)$$

Kde $\dot{\mathbf{J}}$ respektive $\dot{\mathbf{J}}^{-1}$ označuje časovou derivaci jakobiánu respektive inverzního jakobiánu.

Jakobián \mathbf{J} lze počítat analyticky v podstatě dvěma způsoby. Buď přímou časovou derivací polohových závislostí kloubových souřadnic, nebo na základě systematického geometrického přístupu k výpočtu polohy koncového efektoru. První způsob výpočtu je intuitivní matematickým aparátem, nicméně jeho použití je vhodné pouze pro jednoduché kinematické architektury manipulátorů, neboť přímá časová derivace kloubových či zobecněných souřadnic často vede na složité mnohačlenné vztahy. Geometrický přístup výpočtu předkládá zcela obecný jednoduše algoritmi-zovatelný postup založený na rekurzivním schématu. Zabývejme se proto nadále právě tímto přístupem.

Lze ukázat, viz [5], že úplný kinematický jakobián⁴ $\mathbf{J}_{i_{full}}^{0s}$ vzhledem k s.s. F_{0s} lze pro sériový manipulátor s n klouby typu **P** (translační) a **R** (rotační) vyjádřit pouze na základě hodnot

⁴kinematický jakobián dává do souvislosti rychlosti kloubových souřadnic s translační a úhlovou rychlostí koncového efektoru, pouze jakobián může realizovat transformaci rychlostí, kde se na straně rychlostí koncového efektoru vyskytují například časové derivace Eulerových úhlů (nikoliv vektor úhlové rychlosti)

homogenních transformačních matic \mathbf{T}_i^j jako:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_i^{0s} \\ \boldsymbol{\omega}_i^{0s} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{j}_1^p & \cdots & \mathbf{j}_j^p & \cdots & \mathbf{j}_i^p \\ \mathbf{j}_1^o & \cdots & \mathbf{j}_j^o & \cdots & \mathbf{j}_i^o \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{i \text{ full}}^{0s}(\Theta_S)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix}}_{\dot{\Theta}_S} \quad i = n \quad (24)$$

Kde platí:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1}^{0s} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{pro kloub typu } \mathbf{P})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^p \\ \mathbf{j}_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1}^{0s} \times \mathbf{r}_{j-1,i}^{0s} \\ \mathbf{z}_{j-1}^{0s} \end{bmatrix} \quad (\text{pro kloub typu } \mathbf{R})$$

A zároveň \mathbf{z}_j^{0s} a $\mathbf{r}_{j,i}^{0s}$ lze stanovit z posloupnosti transformačních matic \mathbf{T}_1^{0s} , \mathbf{T}_2^{0s} , \mathbf{T}_3^{0s} , \mathbf{T}_4^{0s} jako:

$$\mathbf{z}_j^{0s} = \mathbf{T}_j^{0s}[1 : 3, 3] \quad \text{a} \quad \mathbf{r}_{j,i}^{0s} = \mathbf{T}_i^{0s}[1 : 3, 4] - \mathbf{T}_j^{0s}[1 : 3, 4]$$

Úplný kinematický jakobián $\mathbf{J}_{i \text{ full}}^{0s}$ našeho sériového manipulátoru ($i = 4$) lze tedy vyjádřit s pomocí (6) a (24) jako:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_4^{0s} \\ \boldsymbol{\omega}_4^{0s} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -L_4 d_2 - L_3 c_2 - L_2 b_2 & -L_4 d_2 - L_3 c_2 & -L_4 d_2 \\ 0 & -L_4 d_1 - L_3 c_1 - L_2 b_1 & -L_4 d_1 - L_3 c_1 & -L_4 d_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{4 \text{ full}}^{0s}(\Theta_S)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\Theta}_S} \quad (25)$$

Kde $b_1 = \sin \theta_1$, $b_2 = \cos \theta_1$, $c_1 = \sin \theta_{1,2}$, $c_2 = \cos \theta_{1,2}$, $d_1 = \sin \theta_{1,2,3}$, $d_2 = \cos \theta_{1,2,3}$.

Vzhledem k tomu, že koncový efektor může rotovat pouze v ose z s.s. F_{0s} , úplný kinematický jakobián $\mathbf{J}_{4 \text{ full}}^{0s}$ lze redukovat pouze na kinematický jakobián \mathbf{J}_4^{0s} :

$$\dot{\mathbf{X}}_S = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_4^{0s} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -L_4 d_2 - L_3 c_2 - L_2 b_2 & -L_4 d_2 - L_3 c_2 & -L_4 d_2 \\ 0 & -L_4 d_1 - L_3 c_1 - L_2 b_1 & -L_4 d_1 - L_3 c_1 & -L_4 d_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_4^{0s}(\Theta_S)} \cdot \dot{\Theta}_S \quad (26)$$

Výsledný výpočet inverzní úlohy (rychlosti):

$$\dot{\Theta}_S = (\mathbf{J}_4^{0s})^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}}_S \quad (27)$$

Z vztahů pro výpočet zrychlení (22), (23) je patrné, že potřebujeme navíc znát ještě derivaci kinematického jakobiánu. Tu lze vyjádřit, viz [5].

$$\dot{\mathbf{J}}_i^{0s}(\Theta_S, \dot{\Theta}_S) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{j}}_1^p & \cdots & \dot{\mathbf{j}}_j^p & \cdots & \dot{\mathbf{j}}_i^p \\ \dot{\mathbf{j}}_1^o & \cdots & \dot{\mathbf{j}}_j^o & \cdots & \dot{\mathbf{j}}_i^o \\ \dot{\mathbf{j}}_1 & \cdots & \dot{\mathbf{j}}_j & \cdots & \dot{\mathbf{j}}_i \end{bmatrix}, \quad i = n \quad (28)$$

Kde platí:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{J}_j^p \\ \dot{J}_j^b \\ \dot{J}_j^o \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_{j-1}^{0s} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{pro kloub typu } \mathbf{P}) \\ \begin{bmatrix} \dot{J}_j^p \\ \dot{J}_j^o \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_{j-1}^{0s} \times \mathbf{r}_{j-1,i}^{0s} + z_{j-1}^{0s} \times \dot{\mathbf{r}}_{j-1,i}^{0s} \\ \dot{z}_{j-1}^{0s} \end{bmatrix} \quad (\text{pro kloub typu } \mathbf{R}) \end{aligned}$$

A zároveň:

$$\dot{z}_i^{0s} = \boldsymbol{\omega}_i^{0s} \times z_i^{0s} \quad \text{a} \quad \dot{\mathbf{r}}_{j,i}^{0s} = \dot{\mathbf{O}}_i^{0s} - \dot{\mathbf{O}}_j^{0s}$$

Kde $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^{0s}$, $\dot{\mathbf{O}}_i^{0s}$ lze vypočítat z (24).

Časovou derivaci úplného kinematického jakobiánu \mathbf{J}_i^{0s} našeho sériového manipulátoru ($i = 4$) lze tedy vyjádřit s pomocí (6) a (28) jako⁵:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{4\text{ full}}^{0s}(\boldsymbol{\Theta}_S, \dot{\boldsymbol{\Theta}}_S) &= \tag{29} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_1 L_2 b_1 + (\dot{\theta}_{1,2}) L_3 c_1 + (\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_1 & (\dot{\theta}_{1,2}) L_3 c_1 + (\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_1 & (\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_1 \\ 0 & -\dot{\theta}_1 L_2 b_2 - (\dot{\theta}_{1,2}) L_3 c_2 - (\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_2 & -(\dot{\theta}_{1,2}) L_3 c_2 - (\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_2 & -(\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{30} \end{aligned}$$

Redukcí opět získáme derivaci kinematického jakobiánu jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_4^{0s}(\boldsymbol{\Theta}_S, \dot{\boldsymbol{\Theta}}_S) &= \tag{31} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_1 L_2 b_1 + (\dot{\theta}_{1,2}) L_3 c_1 + (\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_1 & (\dot{\theta}_{1,2}) L_3 c_1 + (\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_1 & (\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_1 \\ 0 & -\dot{\theta}_1 L_2 b_2 - (\dot{\theta}_{1,2}) L_3 c_2 - (\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_2 & -(\dot{\theta}_{1,2}) L_3 c_2 - (\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_2 & -(\dot{\theta}_{1,2,3}) L_4 d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{32} \end{aligned}$$

Výsledný výpočet inverzní úlohy (zrychlení):

$$\ddot{\boldsymbol{\Theta}}_S = (\mathbf{J}_4^{0s})^{-1} (\ddot{\mathbf{X}}_S - \mathbf{J}_4^{0s} \cdot \dot{\boldsymbol{\Theta}}_S) \tag{33}$$

2.3 Kompenzace gravitačních sil

Kompenzací gravitačních sil manipulátoru rozumíme úlohu výpočtu potřebných sil/momentů v aktuátorech manipulátoru, které zajistí klid manipulátoru při působení gravitačních sil na těžiště koncového efektoru a těžiště jednotlivých ramen manipulátoru. Z Obrázku 2 je patrné, že

⁵Značení $\dot{\theta}_{1,2,3}$ odpovídá $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3$.

polohu těžiště i -tého ramene *Link i* vzhledem k s.s. F_{i-1} lze vyjádřit prostřednictvím transformační matice T_i^{i-1} a dynamických návrhových parametrů CG_S následující transformační maticí T_{icg}^{i-1} :

$$T_{icg}^{i-1} = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & r_{i-1,i}^{i-1} + R_i^{i-1} \cdot cg_i \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

kde matice rotace $R_i^{i-1} = T_i^{i-1}[1 : 3, 1 : 3]$ a vektor posunutí s.s. $r_{i-1,i}^{i-1} = O_i^{i-1} = T_i^{i-1}[1 : 3, 4]$.

Lze ukázat, viz [6], [3], že vztah mezi statickými silami a momenty

$$F = [F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T$$

působícími na koncový efektor manipulátoru lze transformovat do sil/momentů τ kloubových souřadnic pomocí kinematického jakobiánu J_k následovně⁶:

$$\tau = J_k^T \cdot F \quad (35)$$

Rovnici (35) můžeme přirozeně využít nejen pro stanovení příspěvku kloubových sil/momentů od působení gravitace na koncový efektor, ale také pro stanovení příspěvků od těžišť jednotlivých ramen manipulátoru. V případě našeho sériového manipulátoru lze statické kompenzační momenty M_i , $i = 2 \dots 4$ v rotačních kloubech manipulátoru (*Joint 2-4*) stanovit následovně:

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J_{2cg}^1)^T & (J_{3cg}^1)^T & & \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & & (J_{4cg}^1)^T & (J_4^1)^T \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{g2}^1 \\ F_{g3}^1 \\ F_{g4}^1 \\ F_{ge}^1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Kde J_4^1 je redukovaný kinematický jakobián vypočtený analogicky jako kinematický jakobián J_4^{0s} z rovnice (24) vzhledem k s.s. F_1 , tzn. kinematický jakobián J_4^1 je vyjádřen z posloupnosti transformačních matic T_2^1 , T_3^1 , T_4^1 , viz (6). Redukované kinematické jakobiány J_{icg}^1 jsou počítány opět analogicky jako v (24) s tím rozdílem, že posloupnosti transformačních matic jsou následující:

- Pro J_{2cg}^1 : T_{2cg}^1
- Pro J_{3cg}^1 : T_2^1 , $T_{3cg}^1 = T_2^1 \cdot T_{3cg}^2$
- Pro J_{4cg}^1 : T_2^1 , T_3^1 , $T_{4cg}^1 = T_2^1 \cdot T_3^2 \cdot T_{4cg}^3$

Kde T_{icg}^{i-1} jsou transformační matice dány rovnicí (34). Poznamenejme, že redukovaným jakobiánem, např. J_4^1 v tomto případě rozumíme *pouze první tři řádky* úplného kinematického jakobiánu J_{4full}^1 , neboť chceme znát pouze zobrazení translačních sil F_x , F_y , F_z (gravitace) do vektoru momentů kloubových souřadnic τ .

⁶Někdy bývá vztah nazýván jako statická rovnováha manipulátoru či podmínka statické rovnováhy.

Výsledné redukované kinematické jakobiány mají tak následující tvar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{2cg}^1 &= \begin{bmatrix} -L_2b_1 - b_1cg_{2x} - b_2cg_{2y} \\ L_2b_2 + b_2cg_{2x} - b_1cg_{2y} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{3cg}^1 &= \begin{bmatrix} -L_3c_1 - c_1cg_{3x} - c_2cg_{3y} - L_2b_1 & -L_3c_1 - c_1cg_{3x} - c_2cg_{3y} \\ L_3c_2 + c_2cg_{3x} - c_1cg_{3y} + L_2b_2 & L_3c_2 + c_2cg_{3x} - c_1cg_{3y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{4cg}^1 &= \begin{bmatrix} -L_4d_1 - d_1cg_{4x} - d_2cg_{4y} - L_3c_1 - L_2b_1 & -L_4d_1 - d_1cg_{4x} - d_2cg_{4y} - L_3c_1 & -L_4d_1 - d_1cg_{4x} - d_2cg_{4y} \\ L_4d_2 + d_2cg_{4x} - d_1cg_{4y} + L_3c_2 + L_2b_2 & L_4d_2 + d_2cg_{4x} - d_1cg_{4y} + L_3c_2 & L_4d_2 + d_2cg_{4x} - d_1cg_{4y} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_4^1 &= \begin{bmatrix} -L_4d_1 - L_3c_1 - L_2b_1 & -L_4d_1 - L_3c_1 & -L_4d_1 \\ L_4d_2 + L_3c_2 + L_2b_2 & L_4d_2 + L_3c_2 & L_4d_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{37}$$

Záporně vzaté (kompensace) gravitační síly v těžištích ramen \mathbf{F}_{gi} a koncového efektoru \mathbf{F}_{ge} vyjádřené v s.s. F_1 jsou dány jako:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{gi}^1 &= [9.81 \cdot m_i \quad 0 \quad 0]^T, \quad i = 2 \dots 4 \\
\mathbf{F}_{ge}^1 &= [9.81 \cdot m_e \quad 0 \quad 0]^T
\end{aligned} \tag{38}$$

2.4 Simulační výsledky pro sériový manipulátor

Simulace manipulátoru byla realizována v programu Matlab v prostředí Simulink/SimMechanics. V SimMechanicsu byl vytvořen kompletní dynamický model a režim simulace byl nastaven na *inverzní dynamiku*. Tzn. simulační model generuje kompletní požadované síly/momenty v aktivních kloubech manipulátoru tak, aby polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic odpovídali požadovaným hodnotám, viz Obrázek 5. Požadované hodnoty polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic jsou získávány prostřednictvím IKŮ a IOKŮ z požadovaných poloh, rychlostí a zrychlení zobecněných souřadnic (požadovaná trajektorie pohybu koncového efektoru), viz Obrázek 4. Vzhledem ke známému algoritmu výpočtu kompenzace gravitace v podobě statických kompenzačních momentů aktivních kloubů lze snadno porovnat momentové požadavky na aktivní klouby manipulátoru z hlediska poměru mezi dynamickými silami (způsobené pohybem manipulátoru) a statickými silami (způsobené gravitačním působením na jednotlivé části manipulátoru), viz Obrázek 6.

Parametry manipulátoru:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_S &= [0.260 \quad 0.670 \quad 0.440 \quad 0.844]^T \\
\mathbf{M}_S &= [282 \quad 106 \quad 52 \quad 84 \quad 15]^T \\
\mathbf{CG}_S &= \begin{bmatrix} -0.13 & -0.19414 & -0.13227e & -0.51987 \\ 0 & 0.000097 & 0.000010 & 0.003837 \\ 0 & 0.092685 & 0.057912 & 0.016341 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Matice setrvačnosti ramen v těžištích (pro simulační model v SimMechanicsu):

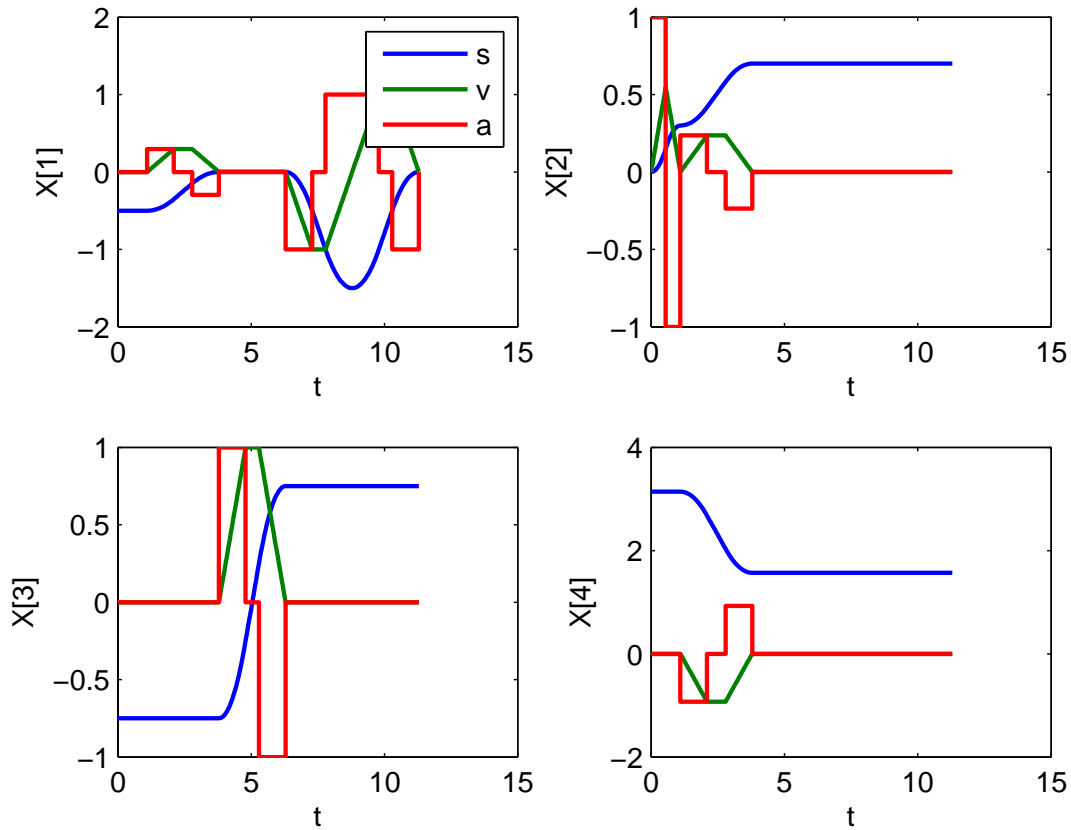
$$\mathbf{I}_{S_1} = \mathbf{I}_{S_2} = \begin{bmatrix} 3.80 & 0.00200 & -2.67 \\ 0.00200 & 11.5 & 0.00400 \\ -2.67 & 0.00400 & 8.06 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{S_3} = \begin{bmatrix} 0.631 & 0.00100 & -0.533 \\ 0.00100 & 2.11 & -0.00700 \\ -0.533 & -0.00700 & 1.77 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{S_4} = \begin{bmatrix} 0.987 & 0.158 & 0.393 \\ 0.158 & 10.5 & 0.0 \\ 0.393 & 0.0 & 10.4 \end{bmatrix}$$

Požadovaná trajektorie pohybu koncového efektoru v zobecněných souřadnicích manipulátoru byla zvolena jako po částech přímkový pohyb mezi body \mathbf{A} - \mathbf{F} , jejichž souřadnice reprezentují zobecněné souřadnice manipulátoru \mathbf{X}_S . Pohyb po přímkách mezi jednotlivými body trajektorie je časově optimální s ohledem na maximální povolenou rychlost v_{max} a zrychlení a_{max} , více o optimálním časovém plánování trajektorie s omezením lze nalézt např. v [1], [3], [6]⁷:

$$v_{max} = 1, a_{max} = 1$$

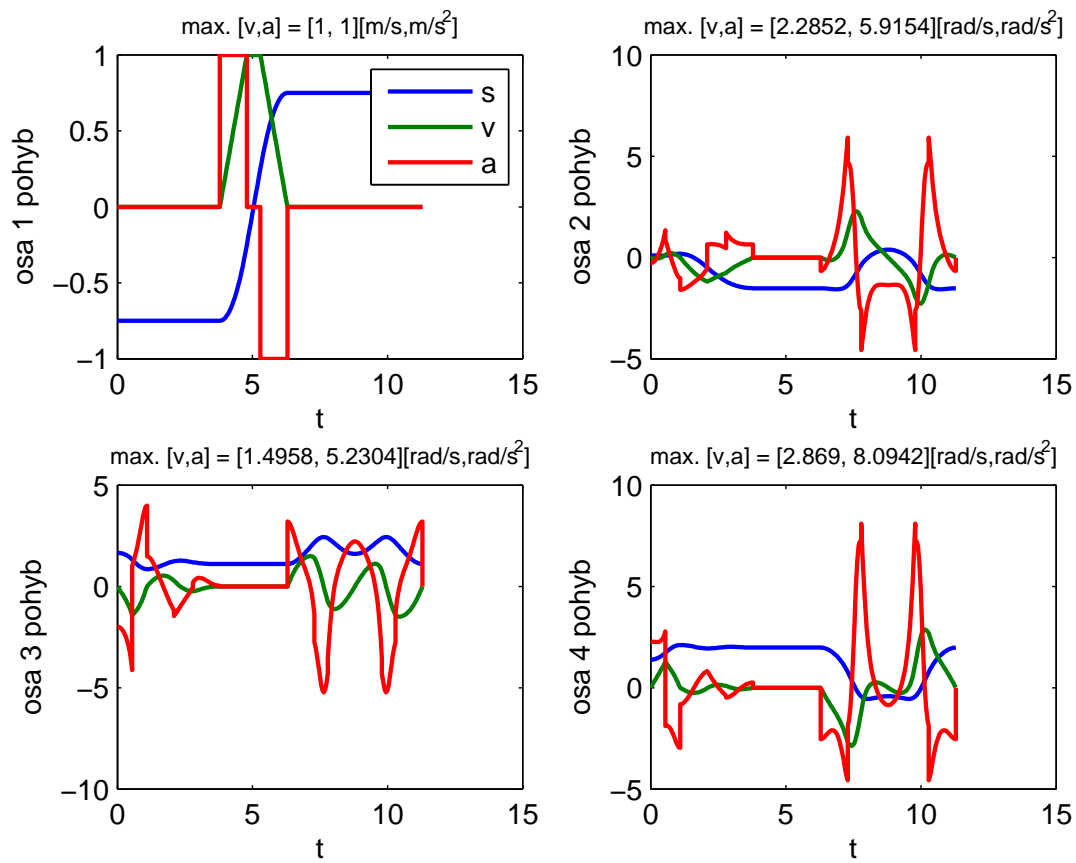
Požadovaná přímková trajektorie mezi body \mathbf{A} - \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [-0.5 \ 0 \ -0.75 \ \pi]^T, \mathbf{B} = [-0.5 \ 0.3 \ -0.75 \ \pi]^T, \mathbf{C} = [0 \ 0.7 \ -0.75 \ \frac{\pi}{2}]^T, \\ \mathbf{D} &= [0 \ 0.7 \ 0.75 \ \frac{\pi}{2}]^T, \mathbf{E} = [-1.5 \ 0.7 \ 0.75 \ \frac{\pi}{2}]^T, \mathbf{F} = [0 \ 0.7 \ 0.75 \ \frac{\pi}{2}]^T \end{aligned} \quad (39)$$

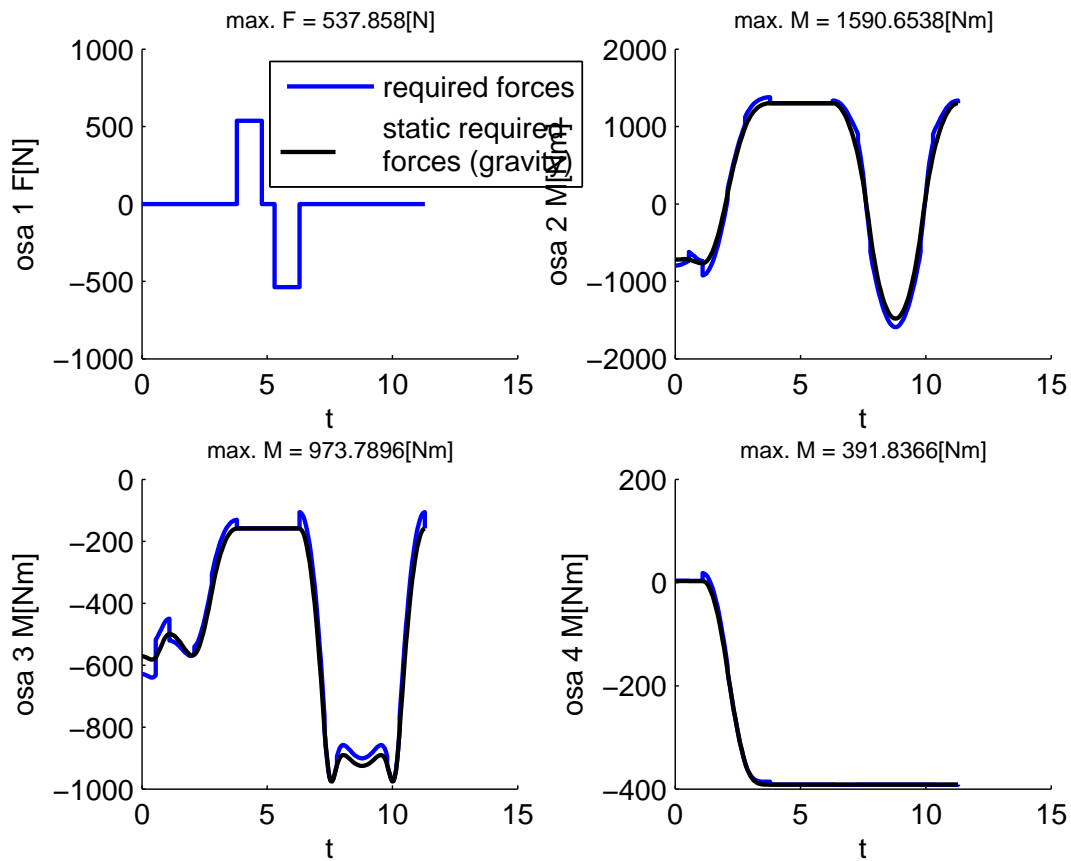


Obrázek 4: Polohy, rychlosti a zrychlení zobecněných souřadnic \mathbf{X}_S

⁷Poznamenejme, že plánovaná trajektorie je časově optimální vzhledem ke všem čtyřem zobecněným souřadnicím \mathbf{X}_P (3 souřadnice o jednotkách [m], 1 souřadnice o jednotkách [rad]). Hodnoty v_{max} a a_{max} mohou být chápány v jednotkách [m/s], [m/s²] pouze za předpokladu konstantní hodnoty natočení zobecněné souřadnice ϕ mezi dvěma po sobě jdoucími body přímkové trajektorie.



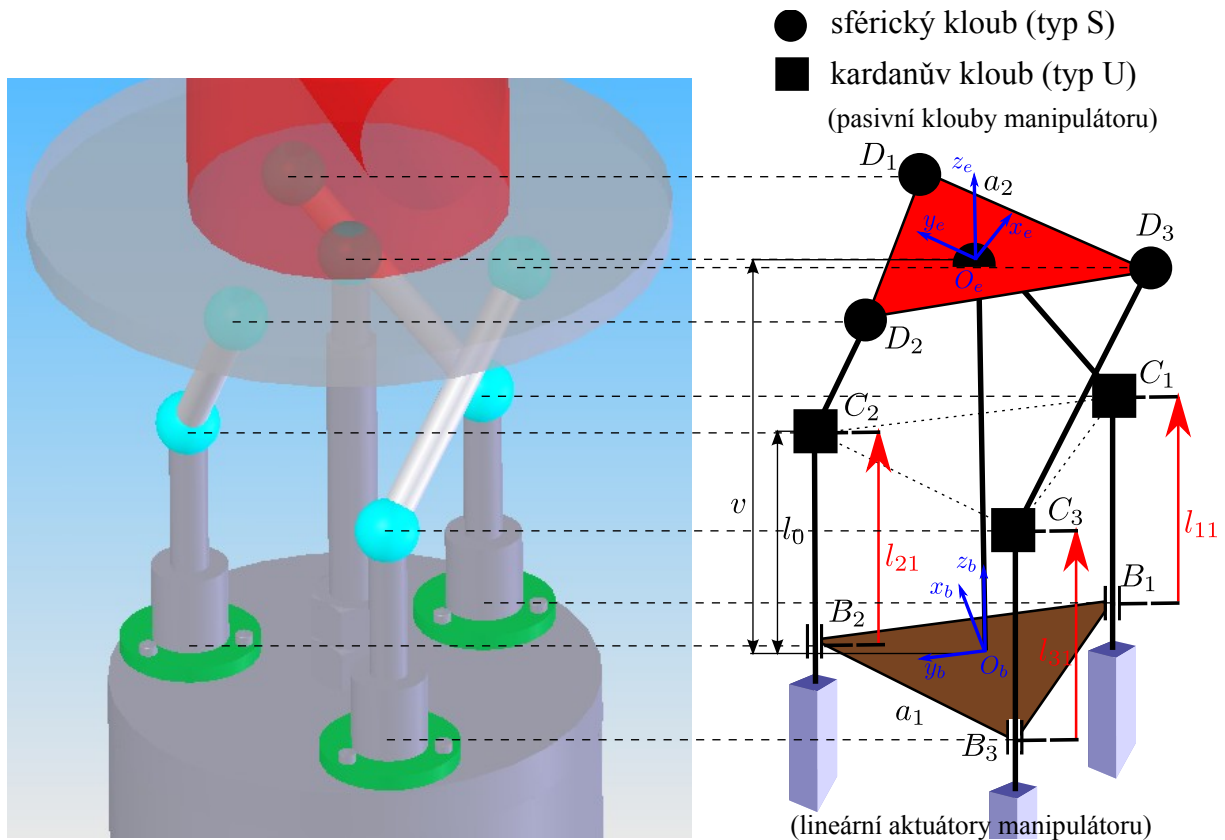
Obrázek 5: Polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic Θ_S



Obrázek 6: Požadované síly/momenty kloubových souřadnic F_1 (lineární pojezd) M_2 , M_3 , M_4 (rotační aktuátory), statická i dynamická složka požadovaných sil/momentů ze simulačního modelu v inverzní dynamice (modře), statické kompenzační momenty-kompensace gravitačních sil (černě)

3 Analýza paralelního manipulátoru

Manipulátor je tvořen třemi nezávislými aktivními kinematickými řetězci typu **PUS** (jeden lineární aktuátor pro každý řetězec) a jedním kinematickým řetězcem typu **S**, který tvoří pasivní stabilizační element a omezuje tak počet stupňů volnosti koncového efektoru na 3 rotační DoF. Obrázek 7 znázorňuje 3D CAD výkres a příslušné schématické uspořádání manipulátoru.



Obrázek 7: Paralelní část AGEBOTu (3 DoF)

Předložený paralelní manipulátor spadá do skupiny manipulátorů, kde je koncový efektor připojen k základně klouby typu S . Paralelní manipulátor lze tak dekomponovat na tři kinematické řetězce $B_i C_i D_i$ reprezentující sériové manipulátory typu PRR . Kinematický model těchto sériových manipulátorů lze odvodit prostřednictvím Denavit-Hartenbergovy (D-H) úmluvy, která jednoznačně definuje uspořádání jejich souřadných systémů, viz Obrázek 8.

3.1 Popis i -tého kinematického řetězce:

Každý kinematický řetězec lze popsat nezávislými kloubovými a zobecněnými souřadnicemi a sadou kinematických a dynamických návrhových parametrů, viz Obrázek 8(b).

Kloubové souřadnice kin. řetězce

$$\Theta_i = [l_{i1} \quad \theta_{i1} \quad \theta_{i2}]^T \quad (40)$$

Zobecněné souřadnice kin. řetězce

$$X_i = D_i \quad (41)$$

Návrhové parametry kin. řetězce:

- Kinematické parametry:

$$\xi_i = \|C_i D_i\| = l_{i2} \quad (42)$$

- Dynamické parametry:
Poloha těžiště ramen kin. řetězců je opět chápána v s.s. příslušného ramene (F_{i1} pro *body* $i1$, F_{i3} pro *body* $i3$). Rameno *body* $i2$ je chápáno jako nehmotné:

$$\mathbf{M}_i = [m_{i1} \quad m_{i3}]^T \quad (43)$$

$$\mathbf{CG}_i = [\mathbf{cg}_{i1} \quad \mathbf{cg}_{i3}]^T = \begin{bmatrix} cg_{i1_x} & cg_{i3_x} \\ cg_{i1_y} & cg_{i3_y} \\ cg_{i1_z} & cg_{i3_z} \end{bmatrix} \quad (44)$$

3.2 Popis paralelního manipulátoru

Předpokládejme nadále, že kinematické řetězce paralelního manipulátoru jsou identické (stejně kinematické i dynamické návrhové parametry) a aktuátory manipulátoru jsou reprezentovány pouze lineárními výsuvy s aktivními kloubovými souřadnicemi l_{i1} . Výsledný paralelní manipulátor lze tedy popsat následovně:

Kloubové souřadnice manipulátoru:

$$\Theta_P = [l_{11} \quad l_{21} \quad l_{31}]^T \quad (45)$$

Zobecněné souřadnice manipulátoru (poloha koncového efektoru):

$$\mathbf{X}_P = [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T \quad (46)$$

Kde α , β , γ označují postupné rotace koncového efektoru manipulátoru okolo os \mathbf{x} , \mathbf{y} a \mathbf{z} (Eulerovy úhly podle schématu rotace XYZ).

Návrhové parametry manipulátoru:

- Kinematické parametry:

$$\xi_P = [a_1 \quad a_2 \quad l \quad v \quad \psi]^T \quad (47)$$

kde a_1 respektive a_2 je délka strany rovnostranného trojúhelníka reprezentující základnu respektive koncový efektor manipulátoru, $l = l_{12} = l_{22} = l_{32}$ je dáno parametry kin. řetězců, v je výška manipulátoru a ψ je natočení manipulátoru okolo osy \mathbf{z}_b v jeho domovské poloze $l_{i1} = l_0$ pro $i = 1 \dots 3$.

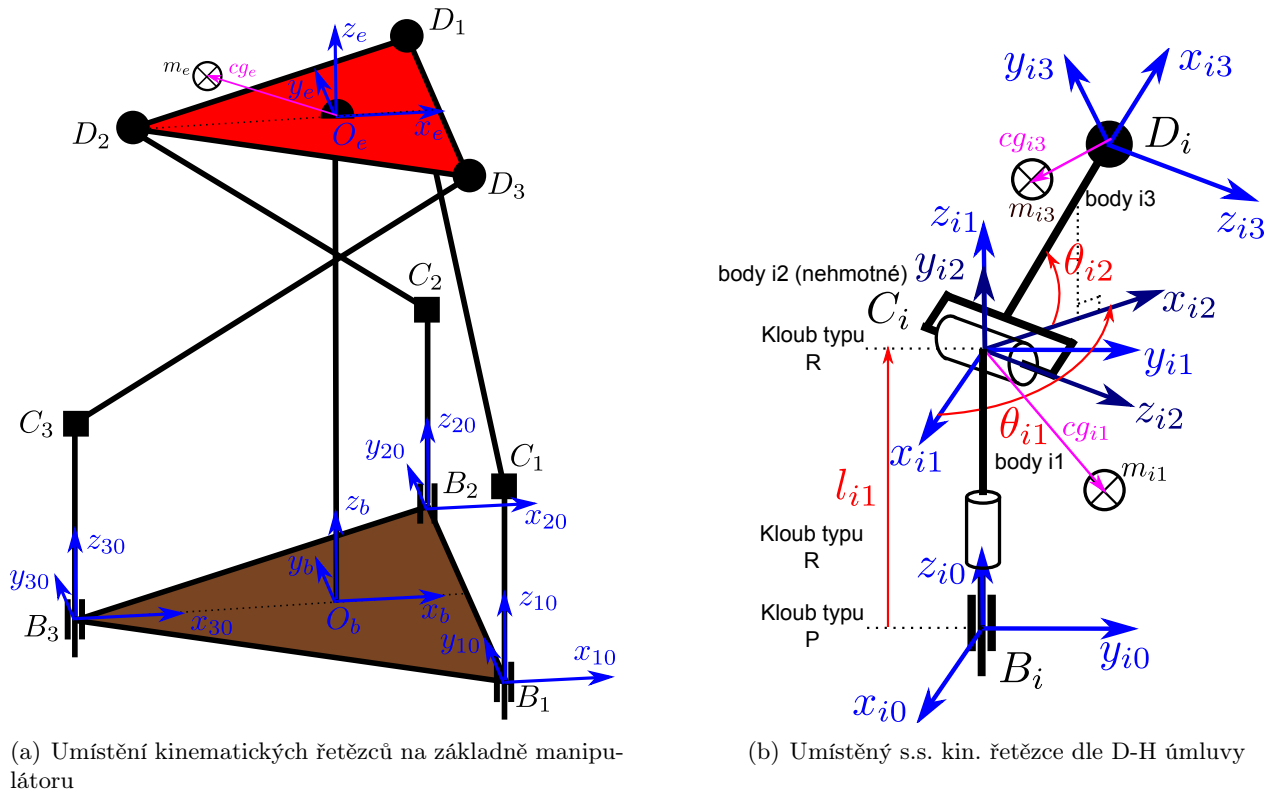
- Dynamické parametry (význam dynamických parametrů viz Obrázek 8):
Poloha těžiště koncového efektoru je dána v s.s. F_e .

$$\mathbf{M}_P = [m_1 \quad m_3 \quad m_e]^T \quad (48)$$

Kde $m_1 = m_{11} = m_{21} = m_{31}$ a $m_3 = m_{13} = m_{23} = m_{33}$

$$\mathbf{CG}_P = [\mathbf{cg}_1 \quad \mathbf{cg}_3 \quad \mathbf{cg}_e]^T = \begin{bmatrix} cg_{1_x} & cg_{3_x} & cg_{e_x} \\ cg_{1_y} & cg_{3_y} & cg_{e_y} \\ cg_{1_z} & cg_{3_z} & cg_{e_z} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Kde $\mathbf{cg}_1 = \mathbf{cg}_{11} = \mathbf{cg}_{21} = \mathbf{cg}_{31}$ a $\mathbf{cg}_3 = \mathbf{cg}_{13} = \mathbf{cg}_{23} = \mathbf{cg}_{33}$



Obrázek 8: Dekompozice paralelního manipulátoru na kin. řetězce

3.3 Inverzní kinematická úloha (IKÚ)

Pro paralelní manipulátory, pro které platí, že je základna manipulátoru připojena ke koncovému efektoru dvěma a více nezávislými kinematickými řetězci prostřednictvím sférického kloubu S , lze řešení IKÚ provést dekompozicí paralelního manipulátoru na sériové kinematické řetězce. Polohy, rychlosti a zrychlení pasivních θ_{i1} , θ_{i2} a aktivních l_{i1} kloubových souřadnic Θ_i lze řešit poté odděleně pro každý kinematický řetězec, jelikož polohy, rychlosti a zrychlení koncových bodů kinematických řetězců (v našem případě D_i) jsou jednoznačně dány polohou \mathbf{X}_P , rychlostí $\dot{\mathbf{X}}_P$ a zrychlením $\ddot{\mathbf{X}}_P$ koncového efektoru paralelního manipulátoru.

Nechť $F_{i0} = \mathbf{B}_i - \mathbf{x}_{i0}\mathbf{y}_{i0}\mathbf{z}_{i0}$ pro $i = 1 \dots 3$ označuje s.s. kinematického řetězce $\mathbf{B}_i\mathbf{C}_i\mathbf{D}_i$ a jeho orientace je shodná se s.s. základny manipulátoru $F_b = \mathbf{0}_b - \mathbf{x}_b\mathbf{y}_b\mathbf{z}_b$, viz Obrázek 8(a).

Počátek O_e s.s. koncového efektoru F_e lze vyjádřit v s.s. jednotlivých kinematických řetězců jako:

$$\mathbf{O}_e^{10} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6}a_1 & \frac{a_1}{2} & v \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{O}_e^{20} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6}a_1 & -\frac{a_1}{2} & v \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{O}_e^{30} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}a_1 & 0 & v \end{bmatrix}^T \quad (50)$$

Přípojný bod koncového efektoru v jeho s.s. $F_e = \mathbf{x}_e\mathbf{y}_e\mathbf{z}_e$ lze vyjádřit jako:

$$\mathbf{D}_1^e = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}a_2 & \frac{a_2}{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{D}_2^e = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3}a_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{D}_3^e = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}a_2 & -\frac{a_2}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (51)$$

Vektory $\overrightarrow{\mathbf{B}_i\mathbf{D}_i}$ reprezentující polohu koncového efektoru dílčích kinematických řetězců v příslušném s.s. F_{i0} lze tak vyjádřit jako:

$$\overrightarrow{\mathbf{B}_i\mathbf{D}_i}^{i0} = \mathbf{O}_e^{i0} + \mathbf{R}_e^{i0} \cdot \mathbf{D}_i^e \quad (52)$$

Kde $\mathbf{R}_e^{i0} = \mathbf{R}_e^b(\Theta_P)$ pro $i = 1 \dots 3$ je známá matice vzájemné rotace s.s. základny F_b a koncového efektoru F_e podle schématu XYZ o hodnoty Eulerových úhlů α, β, γ představující zobecněné souřadnice paralelního manipulátoru:

$$\mathbf{R}_e^b = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \quad (53)$$

Kde $s_\alpha = \sin(\alpha)$, $c_\alpha = \cos(\alpha)$, $s_\beta = \sin(\beta)$, $c_\beta = \cos(\beta)$, $s_\gamma = \sin(\gamma)$, $c_\gamma = \cos(\gamma)$.

IKÚ lze nyní stanovit přímo z podmínky na konstantní délku vektoru $\overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i} = l_{i2} = l$ řešením soustavy rovnic, viz [4]:

$$\|\overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i}^{i0}\|^2 = l^2, \quad i = 1 \dots 3 \quad (54)$$

Kde $\overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i}^{i0} = \overrightarrow{\mathbf{B}_i \mathbf{D}_i}^{i0} - [0 \ 0 \ l_{i1}]^T$.

Lze ukázat, že existují dvě řešení IKÚ. Polohu kloubových souřadnic Θ_P lze potom psát:

$$l_{i1} = \overrightarrow{\mathbf{B}_i \mathbf{D}_i}^{i0}[3] \pm \sqrt{l^2 - \overrightarrow{\mathbf{B}_i \mathbf{D}_i}^{i0}[1]^2 - \overrightarrow{\mathbf{B}_i \mathbf{D}_i}^{i0}[2]^2}, \quad i = 1 \dots 3 \quad (55)$$

Výpočet pasivních kloubových souřadnic kinematických řetězců

Každý dílčí i -tý kinematický řetězec $\mathbf{B}_i \mathbf{C}_i \mathbf{D}_i$ lze popsat prostřednictvím D-H úmluvy pomocí homogenních transformačních matic mezi s.s. $F_{i0}, F_{i1}, F_{i2}, F_{i3}$, viz Obrázek 8(b):

$$\mathbf{T}_{i1}^{i0}(l_{i0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_{i1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{i2}^{i1}(\theta_{i1}) = \begin{bmatrix} c_{i1} & 0 & s_{i1} & 0 \\ s_{i1} & 0 & -c_{i1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{i3}^{i2}(\theta_{i2}) = \begin{bmatrix} c_{i2} & -s_{i2} & 0 & l \cdot c_{i2} \\ s_{i2} & c_{i2} & 0 & l \cdot s_{i2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Kde $s_{i1} = \sin(\theta_{i1})$, $c_{i1} = \cos(\theta_{i1})$, $s_{i2} = \sin(\theta_{i2})$, $c_{i2} = \cos(\theta_{i2})$.

Ze znalosti aktivních kloubových souřadnic l_{i1} lze dopočítat pasivní souřadnice θ_{i1}, θ_{i2} například porovnáním směrového vektoru x -ové osy s.s. F_{i3} vyjádřeného v s.s. F_{i1} a normovaného již známého vektoru $\overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i}$ vyjádřeného v totožném s.s.:

$$\mathbf{T}_{i3}^{i1} = \mathbf{T}_{i2}^{i1} \cdot \mathbf{T}_{i3}^{i2} = \begin{bmatrix} c_{i1} c_{i2} & * & * & * \\ s_{i1} c_{i2} & * & * & * \\ s_{i2} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{i1} c_{i2} \\ s_{i1} c_{i2} \\ s_{i2} \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \frac{\overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i}^{i1}}{l} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i}^{i0}}{l} \triangleq \begin{bmatrix} cd_{ix} \\ cd_{iy} \\ cd_{iz} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Pasivní kloubové souřadnice lze tedy určit jako:

$$s_{i2} = cd_{iz}, \quad c_{i2} = \pm \sqrt{cd_{ix}^2 + cd_{iy}^2} \Rightarrow \theta_{i2} = \text{atan2}(s_{i2}, c_{i2})$$

$$s_{i1} = \frac{cd_{iy}}{c_{i2}}, \quad c_{i1} = \frac{cd_{ix}}{c_{i2}} \Rightarrow \theta_{i1} = \text{atan2}(s_{i1}, c_{i1}) \quad (58)$$

3.4 Inverzní okamžitá kinematická úloha (IOKÚ)

Vzhledem k tomu, že poloha \mathbf{X}_P , rychlost $\dot{\mathbf{X}}_P$ i zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}_P$ zobecněných souřadnic manipulátoru jsou známé, lze stanovit i rychlosti a zrychlení přípojných bodů \mathbf{D}_i kinematických řetězců ke koncovému efektoru manipulátoru:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{D}}_i^{i0} &= \boldsymbol{\omega}_e^{i0} \times \overrightarrow{O_e \mathbf{D}_i^{i0}} = \boldsymbol{\omega}_e^{i0} \times \mathbf{R}_e^{i0} \mathbf{D}_i^e \\ \ddot{\mathbf{D}}_i^{i0} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_e^{i0} \times \mathbf{R}_e^{i0} \mathbf{D}_i^e + \boldsymbol{\omega}_e^{i0} \times \dot{\mathbf{R}}_e^{i0} \mathbf{D}_i^e\end{aligned}\quad (59)$$

Kde derivace matice rotace $\dot{\mathbf{R}}_e^{i0}$, vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_e^{i0}$ a zrychlení $\dot{\boldsymbol{\omega}}_e^{i0}$ koncového efektoru lze vyjádřit následovně, viz [5]:

- Eulerovy kinematické rovnice pro Eulerovy úhly se schématem rotace XYZ :

$$\boldsymbol{\omega}_e^{i0} = \boldsymbol{\omega}_e^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_\beta \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha c_\beta \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{X}}_P$$

- Derivace matice rotace:

$$\dot{\mathbf{R}}_e^{i0} = \dot{\mathbf{R}}_e^b = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_e^b) \cdot \mathbf{R}_e^b \quad \text{kde} \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_e^b) = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_e^b[3] & \boldsymbol{\omega}_e^b[2] \\ \boldsymbol{\omega}_e^b[3] & 0 & -\boldsymbol{\omega}_e^b[1] \\ -\boldsymbol{\omega}_e^b[2] & \boldsymbol{\omega}_e^b[1] & 0 \end{bmatrix}$$

- Přímá časová derivace vektoru úhlové rychlosti:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_e^{i0} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_e^b = \begin{bmatrix} c_\beta \dot{\beta} \dot{\gamma} \\ -s_\beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - c_\alpha c_\beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} + s_\alpha s_\beta \dot{\beta} \dot{\gamma} \\ c_\alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} - s_\alpha c_\beta \dot{\alpha} \dot{\gamma} - c_\alpha s_\beta \dot{\beta} \dot{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & s_\beta \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha c_\beta \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}}_P$$

Rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic (pasivních i aktivních) všech tří kinematických řetězců $\mathbf{B}_i \mathbf{C}_i \mathbf{D}_i$ lze vyjádřit analogicky jako rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic pro sériový manipulátor v Kapitole 2.1. Kinematické jakobiány a jejich derivace pro dílčí sériové kinematické řetězce $\mathbf{B}_i \mathbf{C}_i \mathbf{D}_i$ lze určit podobným způsobem jako v rovnicích (24), (28) a mají následující tvar:

$$\mathbf{J}_{i3}^{i0} = \begin{bmatrix} 0 & -s_{i1} l c_{i2} & -c_{i1} l s_{i2} \\ 0 & c_{i1} l c_{i2} & -s_{i1} l s_{i2} \\ 1 & 0 & l c_{i2} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Tedy rychlosti pasivních a aktivních kloubových souřadnic i -tého kinematického řetězce lze vyjádřit jako:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i = \begin{bmatrix} \dot{l}_{i1} \\ \dot{\theta}_{i1} \\ \dot{\theta}_{i2} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_{i3}^{i0})^{-1} \cdot \dot{\mathbf{D}}_i^{i0} \quad (61)$$

Derivaci kinematického jakobiánu potom lze psát jako:

$$\dot{\mathbf{J}}_{i3}^{i0} = \begin{bmatrix} 0 & l \left(-\dot{\theta}_{i1} c_{i1} c_{i2} + \dot{\theta}_{i2} s_{i1} s_{i2} \right) & l \left(\dot{\theta}_{i1} s_{i1} s_{i2} - \dot{\theta}_{i2} c_{i1} c_{i2} \right) \\ 0 & -l \left(\dot{\theta}_{i2} c_{i1} s_{i2} + \dot{\theta}_{i1} s_{i1} c_{i2} \right) & -l \left(\dot{\theta}_{i1} c_{i1} s_{i2} + \dot{\theta}_{i2} s_{i1} c_{i2} \right) \\ 0 & 0 & -l \dot{\theta}_{i2} s_{i2} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Zrychlení pasivních a aktivních kloubových souřadnic i -tého kinematického řetězce lze tedy psát jako:

$$\ddot{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \ddot{l}_{i1} \\ \ddot{\theta}_{i1} \\ \ddot{\theta}_{i2} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_{i3}^{i0})^{-1} \left(\ddot{\mathbf{D}}_i^{i0} - \mathbf{J}_{i3}^{i0} \cdot \dot{\Theta}_i \right) \quad (63)$$

Rychlosti $\dot{\Theta}_P$ a zrychlení $\ddot{\Theta}_P$ aktivních kloubových souřadnic paralelního manipulátoru lze pak snadno získat výběrem z řešení (61), (63).

Poznamenejme, že inverzní kinematický jakobián $(\mathbf{J}_e^b)^{-1}$ kompletního paralelního manipulátoru lze získat vyjádřením složek vektoru úhlové rychlosti ω_e^b z rovnic rychlosti pohybu přípojných bodů $\dot{\mathbf{D}}_i^{0i}$ koncového efektoru, viz rovnice (59) následovně:

$$\dot{\mathbf{D}}_i^{i0} = \hat{\mathbf{D}}_i^{i0} \cdot \omega_e^b \quad (64)$$

Kde:

$$\hat{\mathbf{D}}_i^{i0} = -\mathbf{S}(\mathbf{R}_e^{i0} \cdot \mathbf{D}_i^e) = \begin{bmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/6 c_\beta a_2 (c_\gamma \sqrt{3} - 3 s_\gamma) \\ y_1 &= 1/6 a_2 (\sqrt{3} s_\alpha s_\beta c_\gamma + \sqrt{3} c_\alpha s_\gamma - 3 s_\alpha s_\beta s_\gamma + 3 c_\alpha c_\gamma) \\ z_1 &= -1/6 a_2 (\sqrt{3} c_\alpha s_\beta c_\gamma - \sqrt{3} s_\alpha s_\gamma - 3 c_\alpha s_\beta s_\gamma - 3 s_\alpha c_\gamma) \\ x_2 &= -1/3 c_\beta c_\gamma a_2 \sqrt{3} \\ y_2 &= -1/3 (s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma) a_2 \sqrt{3} \\ z_2 &= 1/3 a_2 (c_\alpha s_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma) \sqrt{3} \\ x_3 &= 1/6 c_\beta a_2 (c_\gamma \sqrt{3} + 3 s_\gamma) \\ y_3 &= 1/6 a_2 (\sqrt{3} s_\alpha s_\beta c_\gamma + \sqrt{3} c_\alpha s_\gamma + 3 s_\alpha s_\beta s_\gamma - 3 c_\alpha c_\gamma) \\ z_3 &= -1/6 a_2 (\sqrt{3} c_\alpha s_\beta c_\gamma - \sqrt{3} s_\alpha s_\gamma + 3 c_\alpha s_\beta s_\gamma + 3 s_\alpha c_\gamma) \end{aligned}$$

Tedy, známe-li kinematické jakobiány dílčích kinematických řetězců \mathbf{J}_{i3}^{i0} , viz rovnice (60), (61), lze inverzní kinematický jakobián kompletního paralelního manipulátoru $(\mathbf{J}_e^b)^{-1}$ vyjádřit jako:

$$\dot{\Theta}_i = \begin{bmatrix} \dot{l}_{i1} \\ \dot{\theta}_{i1} \\ \dot{\theta}_{i2} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_{i3}^{i0})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_i^{i0} \cdot \omega_e^b \quad (66)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}_P = \begin{bmatrix} \dot{l}_{11} \\ \dot{l}_{21} \\ \dot{l}_{31} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ((\mathbf{J}_{13}^{10})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_1^{10}) [1, :] \\ ((\mathbf{J}_{23}^{20})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_2^{20}) [1, :] \\ ((\mathbf{J}_{33}^{30})^{-1} \hat{\mathbf{D}}_3^{30}) [1, :] \end{bmatrix}}_{(\mathbf{J}_e^b)^{-1}} \cdot \omega_e^b \quad (67)$$

3.5 Kompenzace gravitačních sil

Problém kompenzace gravitačních sil pro paralelní manipulátory je poněkud složitější než pro manipulátory sériové, neboť příspěvky od gravitačních sil dílčích kinematických řetězců jsou

mezi sebou navzájem vázány prostřednictvím připojení na koncový efektor. Nelze tedy, jako v případě kompenzace gravitace u sériových manipulátorů, viz Kapitola 2.3, připočítávat vliv působení gravitačních sil na daný kinematický řetězec pouze do sil a momentů v kloubech tohoto řetězce. Základní myšlenka výpočtu kompenzace gravitačních sil pro paralelní manipulátory lze formulovat následovně:

1. Pro každý samostatný kinematický řetězec přepočti působení gravitace na jejich ramena do sil a momentů kloubových souřadnic řetězce
2. Přepočti působení těchto získaných kloubových sil a momentů na sílu/moment působící na koncový efektor v přípojném bodě uvažovaného kinematického řetězce
3. Silové/momentové působení v přípojných bodech kinematických řetězců přepočti na sílu/moment, která působí na koncový efektor (vzhledem k uvažovaným zobecněným souřadnicím)
4. Vypočti vliv gravitace na koncový efektor a výsledné síly/momenty přičti k získaným hodnotám sil/momentům z předchozího bodu \Rightarrow známe kompletní silové/momentové působení na koncový efektor vlivem působení gravitace na všechny části manipulátoru.
5. Přepočti silové/momentové působení na koncový efektor na momenty/síly aktivních kloubových souřadnic manipulátoru

Add 1:

Analogicky jako v Kapitole 2.3, rovnice (36) lze stanovit potřebné síly F_{i1} aktivních a momenty M_{i1} , M_{i2} pasivních kloubových souřadnic každého i -tého kinematického řetězce:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \begin{bmatrix} F_{i1} \\ M_{i1} \\ M_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_{i1\,cg}^{i0})^T \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix} (\mathbf{J}_{i3\,cg}^{i0})^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{gi1}^{i0} \\ \mathbf{F}_{gi3}^{i0} \end{bmatrix} \quad (68)$$

kde $(\mathbf{J}_{i1\,cg}^{i0})^T$ je redukovaný kinematický jakobián i -tého kinematického řetězce vzhledem k s.s. F_{i0} vyjádřený z transformační matice $\mathbf{T}_{i1\,cg}^{i0}$, $(\mathbf{J}_{i3\,cg}^{i0})^T$ je redukovaný kinematický jakobián i -tého kinematického řetězce vzhledem k s.s. F_{i0} vyjádřený z posloupnosti transformačních matic \mathbf{T}_{i1}^{i0} , \mathbf{T}_{i2}^{i1} , $\mathbf{T}_{i3\,cg}^{i2}$, viz rovnice (24), transformační matice $\mathbf{T}_{ik\,cg}^{i(k-1)}$ jsou dány analogicky jako v rovnici (34):

$$\mathbf{T}_{ik\,cg}^{i(k-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ik}^{i(k-1)} & \mathbf{r}_{i(k-1),ik}^{i(k-1)} + \mathbf{R}_{ik}^{i(k-1)} \cdot \mathbf{cg}_{ik} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

kde matice rotace $\mathbf{R}_{ik}^{i(k-1)} = \mathbf{T}_{ik}^{i(k-1)}[1 : 3, 1 : 3]$ a vektor posunutí s.s. $\mathbf{r}_{i(k-1),ik}^{i(k-1)} = \mathbf{O}_{ik}^{i(k-1)} = \mathbf{T}_{ik}^{i(k-1)}[1 : 3, 4]$ jsou dány transformačními maticemi sériových kinematických řetězců manipulátoru z rovnice (56). \mathbf{cg}_{ik} jsou polohy těžišť a m_{ik} hmotnosti i -tého kinematického řetězce, viz rovnice (43), (48).

Záporně vzaté gravitační síly v těžištích ramen i -tého kinematického řetězce jsou dány:

$$\mathbf{F}_{gik}^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9.81 \cdot m_{ik} \end{bmatrix}^T \quad (70)$$

Redukované kinematické jakobiány mají pak následující tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{i1\,cg}^{i0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{i3\,cg}^{i0} &= \begin{bmatrix} 0 & ((-l - \mathbf{cg}_3[1]) c_{i2} + s_{i2} \mathbf{cg}_3[2]) s_{i1} + c_{i1} \mathbf{cg}_3[3] & -c_{i1} ((l + \mathbf{cg}_3[1]) s_{i2} + c_{i2} \mathbf{cg}_3[2]) \\ 0 & ((l + \mathbf{cg}_3[1]) c_{i2} - s_{i2} \mathbf{cg}_3[2]) c_{i1} + s_{i1} \mathbf{cg}_3[3] & -s_{i1} ((l + \mathbf{cg}_3[1]) s_{i2} + c_{i2} \mathbf{cg}_3[2]) \\ 1 & 0 & (l + \mathbf{cg}_3[1]) c_{i2} - s_{i2} \mathbf{cg}_3[2] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (71)$$

Poznamenejme, že z kinematického jakobiánu $\mathbf{J}_{i1\,cg}^{i0}$ je patrné, že poloha těžiště \mathbf{cg}_1 neovlivní výpočet kompenzačních sil.

Add 2:

Prostřednictvím známého kinematického jakobiánu \mathbf{J}_{i3}^{i0} i -tého kinematického řetězce, viz rovnice (60), lze přepočítat vliv působení gravitace z kloubů kinematického řetězce $\boldsymbol{\tau}_i$ na sílu \mathbf{F}_{D_i} působící na koncový efektor manipulátoru v přípojném bodě D_i následovně, dle rovnice (35):

$$\mathbf{F}_{D_i} = ((\mathbf{J}_{i3}^{i0})^T)^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_i \quad (72)$$

Add 3:

Vzhledem k zavedeným zobecněným souřadnicím \mathbf{X}_P manipulátoru (Eulerovy úhly) je pohyb koncového efektoru omezen pouze na rotaci dle schématu XYZ. Na koncový efektor bude tedy, vlivem gravitačních účinků na ramena kinematických řetězců k efektoru připojených, působit silový moment, který lze ze známé polohy přípojných bodů D_i určit vzhledem k s.s. F_b součtem:

$$\mathbf{M}_{e\,cg\,chains}^b = \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_e^b \cdot \mathbf{D}_i^e \times \mathbf{F}_{D_i} \quad (73)$$

kde \mathbf{R}_e^b je známá matice rotace, viz (53) a \mathbf{D}_i^e jsou známé konstantní polohy přípojných bodů vzhledem k s.s. F_e , viz (51).

Add 4:

Silový moment působící na vlastní koncový efektoru manipulátoru v důsledku gravitace lze vyjádřit jako:

$$\mathbf{M}_{e\,cg}^b = \mathbf{R}_e^b \cdot \mathbf{cg}_e \times \mathbf{F}_{ge}^b \quad (74)$$

kde \mathbf{cg}_e je poloha těžiště v s.s. F_e , viz (48) a záporně vzatá gravitační síla v těžišti koncového efektoru o hmotnosti m_e je:

$$\mathbf{F}_{ge}^b = [0 \quad 0 \quad 9.81 \cdot m_e]^T$$

Celkový vliv gravitace od kinematických řetězců i vlastního koncového efektoru lze vyjádřit výsledným silovým momentem \mathbf{M}_e^b , který působí na koncoví efektor a který musí být kompenzován vhodnými reakčními silami v aktivních kloubech manipulátoru.

$$\mathbf{M}_e^b = \mathbf{M}_{e\,cg\,chains}^b + \mathbf{M}_{e\,cg}^b \quad (75)$$

Add 5:

Prostřednictvím vztahu pro statickou rovnováhu paralelního manipulátoru, který je formálně shodný se vztahem pro statickou rovnováhu manipulátorů sériových, viz (35), lze díky známému inverzního kinematickému jakobiánu kompletního paralelního manipulátoru $(\mathbf{J}_e^b)^{-1}$ z rovnice (66) vyjádřit potřebné síly v aktivních kloubech (typ **P**) paralelního manipulátoru jako:

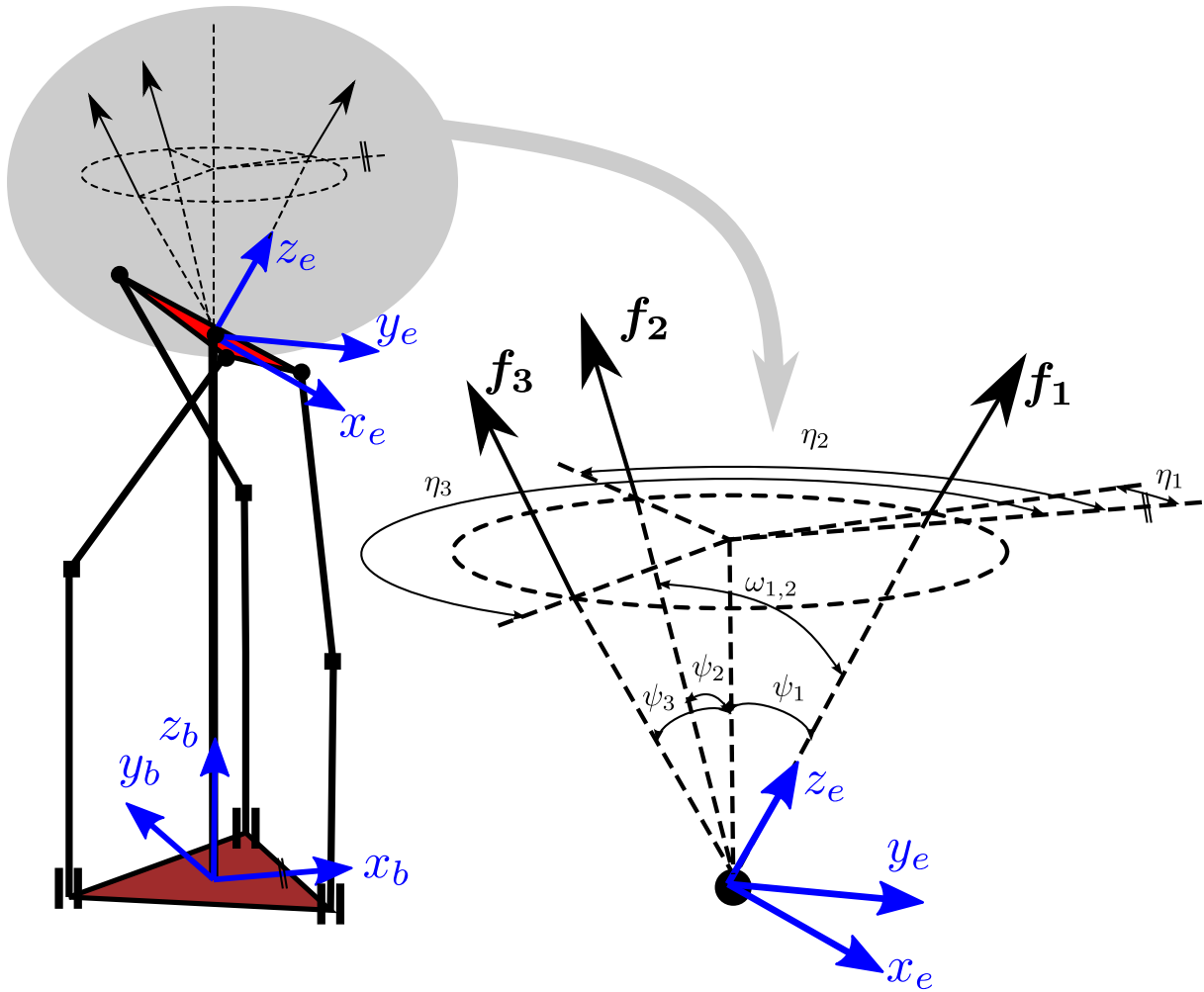
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_e^b)^T \cdot \mathbf{M}_e^b \quad (76)$$

kde F_i jsou statické kompenzační síly v prismatických kloubech manipulátoru.

3.6 Simulační výsledky pro paralelní manipulátor

Simulace manipulátoru byla provedena stejným způsobem jako u manipulátoru sériového z Kapitoly 2.4. Generátor požadované trajektorie koncového efektoru manipulátoru byl realizován tak, aby generované zobecněné souřadnice \mathbf{X}_P odpovídaly postupnému natočení osy \mathbf{z} s.s. F_e ve směru zadaných směrových vektorů \mathbf{f}_i pro $i = 1 \dots 3$. Natočení kolem z -tové osy (zobecněná souřadnice γ) zůstala konstantní. Rozmístění polohy směrových vektorů \mathbf{f}_i je dáno parametry ψ_i a η_i dle Obrázku 9. Označíme-li úhel mezi dvěma po sobě jdoucími směrovými vektory \mathbf{f}_i a \mathbf{f}_{i+1} jako $\omega_{i,i+1}$, omezení na rychlost v_{max} a zrychlení a_{max} změny polohy koncového efektoru je chápáno jako omezení na rychlost a zrychlení úhlu $\omega_{i,i+1}$ pro $i = 1 \dots 3$.

$$\begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.5236 & 0.5236 & 0.5236 \end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1.7453 & 3.4907 \end{bmatrix}^T$$
$$v_{max} = 1 \text{ [rad/s]}, \quad a_{max} = 1 \text{ [rad/s}^2\text{]}$$



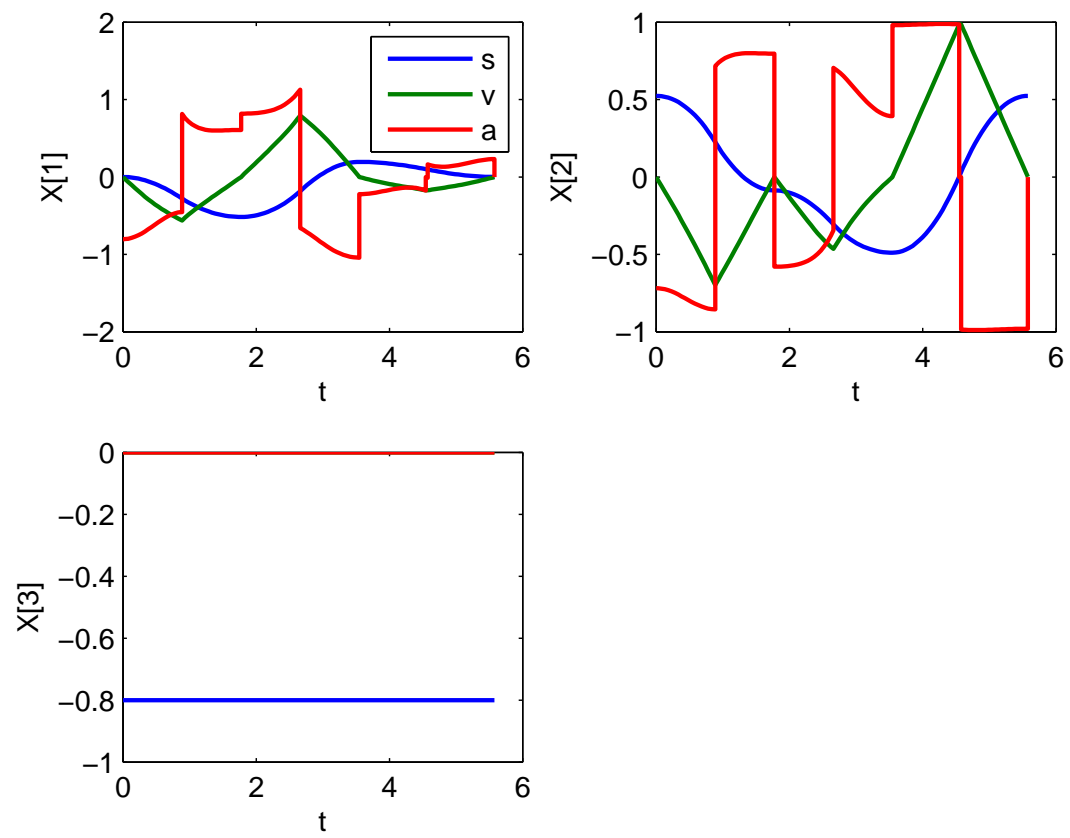
Obrázek 9: Princip generování polohy koncového efektoru paralelního manipulátoru

Parametry manipulátoru:

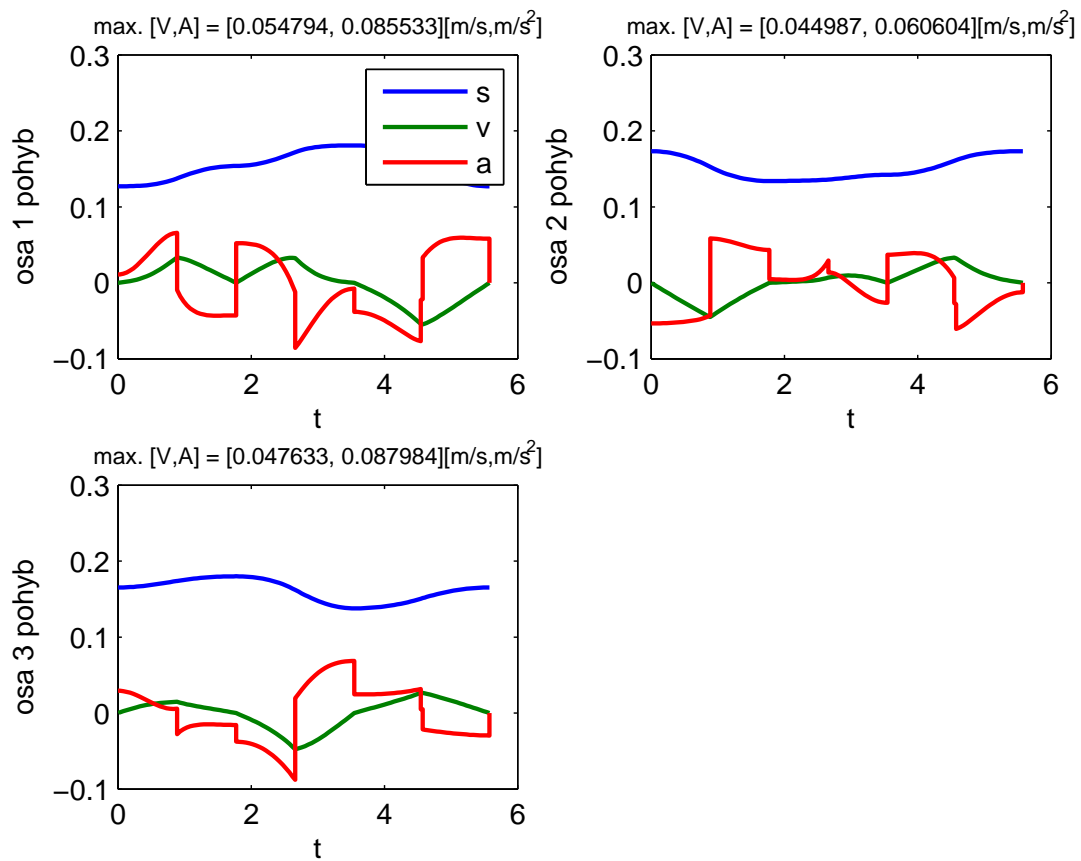
$$\begin{aligned} \xi_P &= [0.1298 \quad 0.10108 \quad 0.1465 \quad 0.278 \quad -8.0023]^T \\ M_P &= [1.5 \quad 2 \quad 5]^T \\ CG_P &= \begin{bmatrix} 0 & -0.07325 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.08 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matice setrvačnosti ramen v těžištích (pro simulační model v SimMechanicsu):

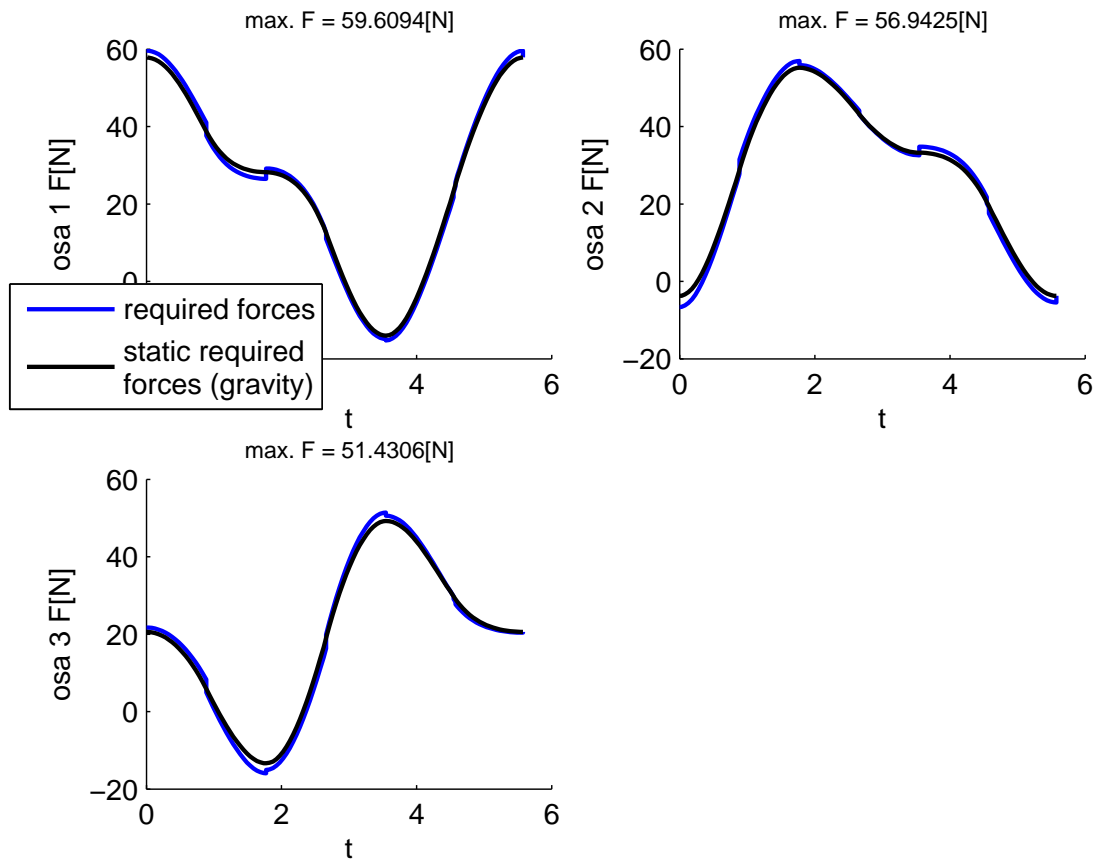
$$I_{P_1} = \begin{bmatrix} 3.80 & 0.00200 & -2.67 \\ 0.00200 & 11.5 & 0.00400 \\ -2.67 & 0.00400 & 8.06 \end{bmatrix}, \quad I_{P_3} = \begin{bmatrix} 3.80 & 0.00200 & -2.67 \\ 0.00200 & 11.5 & 0.00400 \\ -2.67 & 0.00400 & 8.06 \end{bmatrix}, \quad I_{P_e} = \begin{bmatrix} 3.80 & 0.00200 & -2.67 \\ 0.00200 & 11.5 & 0.00400 \\ -2.67 & 0.00400 & 8.06 \end{bmatrix}$$



Obrázek 10: Polohy, rychlosti a zrychlení zobecněných souřadnic \mathbf{X}_P



Obrázek 11: Polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic Θ_P



Obrázek 12: Požadované síly kloubových souřadnic F_i , statická i dynamická složka požadovaných sil ze simulačního modelu v inverzní dynamice (modře), statické kompenzační síly-kompensace gravitačních sil (černě)

4 Závěr

Přesto, že uvedená zpráva se zabývá jedním specifickým řešením sério-parallelního manipulátoru, uvedené algoritmy lze snadno použít pro všechny neredundantní sériové manipulátory a bez omezení také pro neredundantní paralelní manipulátory, jejichž koncový efektor je připojen ke kinematickým řetězcům relací neomezující vzájemnou orientaci připojených komponent, tzn. (kloub typu **R** pro planární a kloub typu **S** pro prostorové manipulátory). Z uvedených postupů je patrné, že veškeré *okamžité* a *statické* kinematické závislosti je možné stanovit analyticky, pokud jsou známy polohové závislosti mezi zobecněnými a kloubovými souřadnicemi manipulátoru (PKÚ, IKÚ). Poznamenejme, že POKÚ pro paralelní manipulátory není v textu zahrnuta, nicméně může být snadno odvozena inverzí IOKÚ, která vede na řešení soustavy lineárních rovnic.

Reference

- [1] L. Bláha. Groebnerova báze a teorie řízení. Práce ke státní doktorské zkoušce, Katedra kybernetiky, FAV, ZČU v Plzni, 2011.
- [2] J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *J. Appl. Mechanics*, June 1955, 22:215–221, 1955.
- [3] B. Siciliano L. Sciavicco. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, 2 edition, 2000.
- [4] M. Švejda. Kinematický popis manipulátoru agebot. Technical report, katedra kybernetiky, FAV, ZČU Plzeň, 2011.
- [5] Martin Švejda. *Kinematika robotických architektur*. PhD thesis, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, 2011.
- [6] E Dombre W. Khalil. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Butterworth-Heinemann, 2004.