

**Technická zpráva**  
Katedra kybernetiky, Fakulta aplikovaných věd  
Západočeská univerzita v Plzni

# **Kinematická kalibrace sériových a paralelních manipulátorů**

**Aplikace kalibračních metod na sério-paralelní manipulátor  
AGEBOT**

**3. 4. 2012**

**Martin Švejda**  
msvejda@kky.zcu.cz

# Obsah

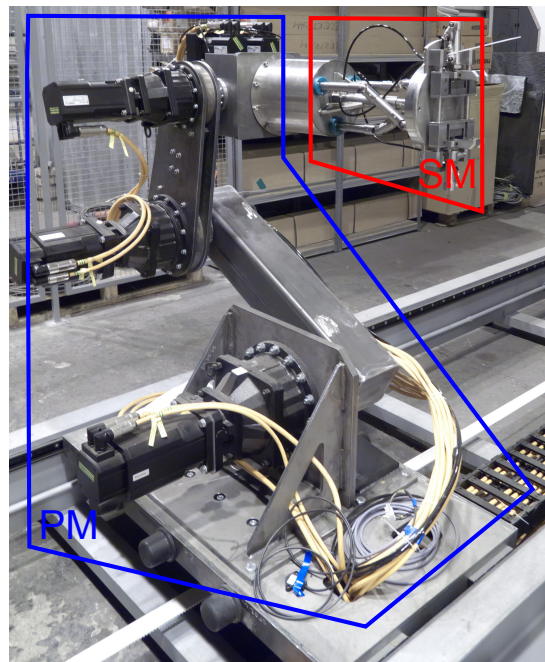
<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Geometrické parametry a kalibrační model pro obecný SM</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Algoritmus kalibrace - iterační metoda nejmenších čtverců</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Chyba kalibrace</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Identifikovatelnost parametrů manipulátoru</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Simulační model pro část SM manipulátoru AGEBOT</b>	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>Metody kalibrace pro SM</b>	<b>22</b>
7.1	Měření kompletní polohy koncového efektoru . . . . .	22
7.2	Měření vzdálenosti mezi koncovým efektozem a daným referenčním bodem . . . . .	25
7.3	Autokalibrační metoda: využití redundance . . . . .	29
7.4	Metoda kalibrace využívající omezení pohybu koncového efektoru . . . . .	33
7.5	Kombinovaná metoda s modifikací kompenzace základny . . . . .	36
7.6	Shrnutí uvedených kalibračních metod pro SM . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Simulační model pro část PM manipulátoru AGEBOT</b>	<b>47</b>
<b>9</b>	<b>Kalibrační model pro PM</b>	<b>49</b>
<b>10</b>	<b>Metody kalibrace PM</b>	<b>54</b>
10.1	Kalibrace PM - využití IKÚ . . . . .	54
10.2	Kalibrace PM - využití PKÚ . . . . .	61
<b>11</b>	<b>Závěr</b>	<b>68</b>

# 1 Úvod

Předložená zpráva se zabývá stručným přehledem možností kinematické kalibrace neredundantních sériových a paralelních manipulátorů. Uvedené kalibrační metody jsou demonstrovány na sério-paralelním manipulátoru AGEBOT (AGgressive Environment roBOT, viz Obrázek 1). Práce je věnována oblasti parametrické kalibrace, kdy předpokládáme známou kinematickou strukturu manipulátoru. Cílem kalibrace je potom na základě externího měření polohy koncového efektoru, či dalších odvozených charakteristik, efektivně stanovit správnou hodnotu kalibrovaných geometrických (kinematických) parametrů. Na kinematickou kalibraci lze nahlížet v zásadě dvěma různými směry. Nelineární kalibrace, jejíž cílem je přímo hledat hodnoty kalibrovaných parametrů na základě nelineárních optimalizačních metod (zpravidla bez omezení). Tento přístup však je často, vzhledem ke komplexnosti kalibračních modelů, příliš složitý. Druhým směrem je možnost využití lokální linearizace nelineárních kalibračních modelů a zavedení vhodné, numericky stabilní iterační metody, které vede na uspokojivé řešení s ohledem na složitost výsledného algoritmu. Následující text bude výhradně věnován tomuto linearizovanému přístupu. V práci jsou demonstrovány čtyři základní metody kalibrace sériové části manipulátoru AGEBOT (měření kompletní polohy koncového efektoru, měření vzdálenosti mezi koncovým efektoem a daným referenčním bodem, autokalibrační metoda využívající redundanci a kalibrační metoda založená na omezení pohybu koncového efektoru). Z praktického hlediska je však kompletní měření polohy koncového efektoru relativně komplikovanou záležitostí. Zbývající metody potom bohužel neumožňují kalibraci všech zavedených geometrických parametrů manipulátoru. Z tohoto důvodu je analyzována nová metoda kalibrace sériové části AGEBOTU, které je založena na kombinaci měření vzdálenosti koncového efektoru od zvoleného referenčního bodu (zvolený počátek souřadného systému základny manipulátoru) a měření náklonu posledního ramena. Metoda umožňuje kalibrovat všechny geometrické parametry bez nutnosti požadavků na komplexní měření polohy koncového efektoru.

Kalibrace paralelní části manipulátoru je založena na dvou přístupech, využití řešení inverzní a přímé kinematické úlohy. Kalibrační model paralelního manipulátoru je odvozen na základě jeho dekompozice na dílčí kinematické řetězce představující jednoduché sériové manipulátory. Uvedený přístup může být aplikován na libovolný paralelní manipulátor, který splňuje předpoklad, že dílčí kinematické řetězce jsou připojeny ke koncovému efektoru nezávisle na své vzájemné orientaci, tzn. v prostorovém případě sférickým kloubem a v planárním případě kloubem rotačním s osou rotace kolmou k rovině pohybu koncového efektoru.

Poznamenejme, že představené postupy tvorby kalibračních modelů jsou založeny na využití geometrického modelu manipulátoru vytvořeného prostřednictvím Denavit-Hartenbergovy úmluvy. Tedy všechny algebraické výpočty vycházejí z prvků homogenních transformačních matic, které popisují transformační vztahy mezi dílčími souřadnými systémy manipulátoru. Takový přístup je výhodný, neboť umožňuje vytvářet kalibrační modely systematickou cestou bez nutnosti složitých symbolických výpočtů parciálních derivací.



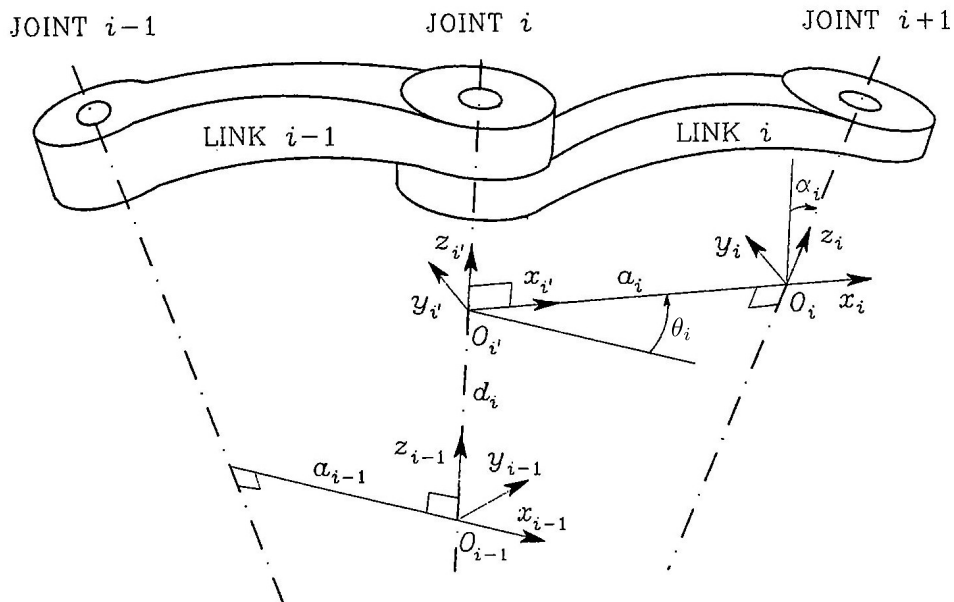
Obrázek 1: Manipulátor AGEBOT, SM označuje sériovou část manipulátoru, PM označuje paralelní část manipulátoru

## 2 Geometrické parametry a kalibrační model pro obecný SM

K modelování kinematiky sériových neredundantních manipulátorů lze využít známou Denavit-Hartenbergovu (DH) úmluvu [1], která umožňuje systematicky popsat polohové závislosti mezi jednotlivými souřadnými systémy (s.s.) manipulátoru. Tyto s.s. reprezentují polohy ramen manipulátoru (např. s.s.  $F_i$  reprezentuje polohu  $i$ -tého ramene manipulátoru a je s tímto ramenem pevně spojen). Předpokládáme-li, že klouby manipulátoru budou prizmatické klouby (typ **P**) či rotační klouby (typ **R**), DH úmluva předpokládá umístění  $z$ -tových os s.s. do os rotace respektive translace jednotlivých kloubů. Schéma použití DH úmluvy pro dvojici ramen manipulátoru je znázorněno na Obrázku 2. Vzájemnou polohu mezi s.s.  $F_{i-1}$  a  $F_i$  lze popsat celkem čtyřmi nezávislými geometrickými parametry  $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $a_i$ . Poznamenejme, že čtyři parametry jsou dostačující, protože souřadné systémy nezájemají vůči sobě obecnou polohu v prostoru a jsou omezeny prostřednictvím své normálové přímky, která jednoznačně definuje počátek  $O_i$  a osu  $x_i$  s.s.  $F_i$ . Lze ukázat, že homogenní transformační matice mezi s.s.  $F_{i-1}$  a  $F_i$  může být vyjádřena následující posloupností elementárních transformací: Translací „Trans(**směr translace**, velikost translace)“ a rotací „Rot(**osa rotace**, úhel rotace)“:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{i-1} &= \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

Připomeňme, že homogenní transformační matice (1) je funkcí pouze kloubových souřadnic  $\theta_i$  (pro rotační klouby R) a  $d_i$  (pro translační klouby P). Ostatní parametry jsou uvažovány jako návrhové geometrické parametry manipulátoru. Podrobný rozbor použití DH úmluvy lze nalézt v [8].



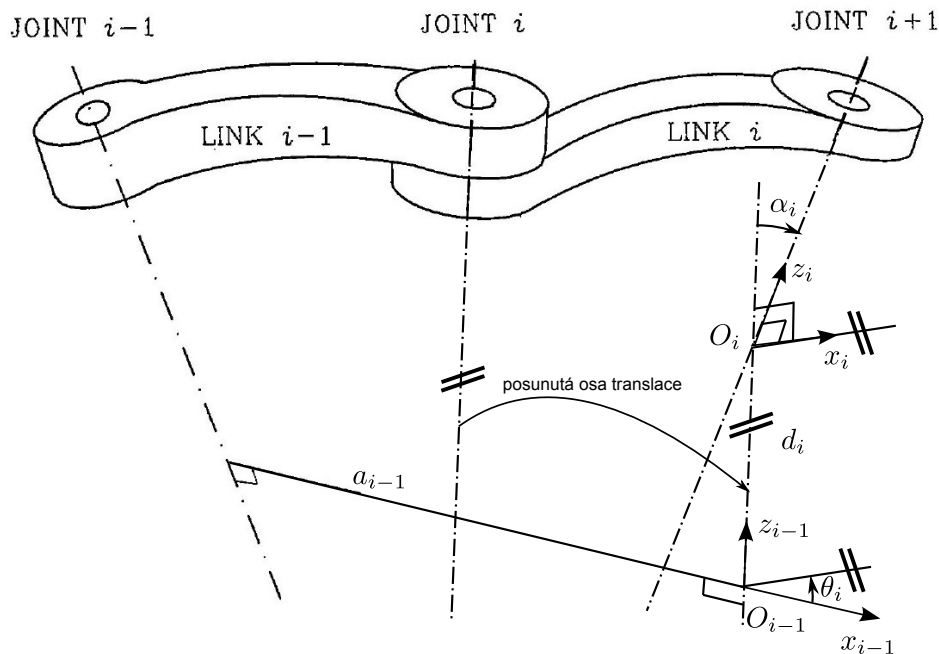
Obrázek 2: DH úmluva (obecně)

Poznamenejme, že v případě kloubu *Joint i* typu **R** je nutné stanovit orientaci osy kloubu *Joint i + 1*, tzn. určit dva odpovídající rotační parametry  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$  a její posunutí, tzn. určit dva



translační parametry  $d_i$ ,  $a_i$  (posun do středu otáčení). Je tedy zřejmé, že i v případě, kdy uvažujeme nulové natočení rotačního kloubu (nulový pohyb aktuátoru robotu), jsou stále zapotřebí čtyři geometrické parametry k jednoznačnému stanovení polohy osy rotace. Kloubová souřadnice  $\theta_i$  lze tedy chápat jako „sdružený parametr“, který v obecném případě nelze vypustit pro nulovou polohu natočení aktuátoru, protože může reprezentovat geometrické uspořádání ramen (např. ohyb ramene *Link i* takovým způsobem, že je tato deformace odražena v hodnotě parametru  $\theta_i$ ). Pro geometrický popis kloubu typu **R** jsou tedy nutné čtyři geometrické parametry (dva rotační a dva translační)  $\theta_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$ .

Jiná situace nastává pro kloub *Joint i* typu **P**, pro který je zřejmé, že osa translace kloubu *Joint i + 1* je jednoznačně určena pouze svou orientací, tzn. rotačními parametry  $\alpha$ ,  $\theta$ , neboť osa translace kloubu *Joint i* může být volena v libovolném umístění v prostoru), viz Obrázek 3. Z obrázku je patrné, že kloubová souřadnice  $d_i$  nemá žádný vliv na orientaci osy kloubu *Joint i + 1* a není tak považována za geometrický parametr. Pro geometrický popis kloubu typu **P** jsou tedy dostačující pouze dva geometrické (rotační) parametry  $\theta_i$  a  $\alpha_i$ . Detailní odvození minimálního počtu parametrů lze nalézt např. v [2].



Obrázek 3: DH úmluva (modifikace pro kloub typu **P**)

Předpokládejme dále, že manipulátor je složen s posloupnosti  $n$  kloubů typu **P** a **R**. Výsledný transformační vztah mezi s.s.  $F_0$  a s.s.  $F_n$  lze definovat jako:

$$\mathbf{T}_n^0 = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}_i^{i-1} \quad (2)$$

kde  $\mathbf{T}_i^{i-1}$  jsou homogenní transformační matice příslušející kloubům manipulátoru.

Analýzou DH úmluvy lze ukázat, viz [8], že pro první s.s.  $F_0$  je jednoznačně určena pouze osa  $z_0$  (osa rotace/translace prvního kloubu). Počátek  $O_0$  a osu  $x_0$  lze tedy volit libovolně. Pro poslední s.s.  $F_n$  není naopak jednoznačně určena osa  $z_n$  neboť kloub *Joint n + 1* již neexistuje. Z uvedeného vyplývá, že první a poslední s.s. manipulátoru může být definován nekonečně mnoha způsoby.

V reálné situaci běžně nastává potřeba realizovat tzv. kompenzační transformace, tedy transformace právě mezi prvním s.s.  $F_0$  a bázovým s.s.  $F_b$  (umístění manipulátoru v bázovém s.s.  $F_b$ ) a

posledním s.s.  $F_n$  a s.s.  $F_e$ , který reprezentuje s.s. koncového efektoru manipulátoru (kompenzace polohy obrobku, pracovního nástroje, atd.). Kompenzační homogenní transformační matice  $\mathbf{T}_0^b$  a  $\mathbf{T}_e^n$  jsou konstantními maticemi a vyjadřují libovolnou polohu a orientaci mezi zmíněnými s.s. Lze je tedy vyjádřit prostřednictvím 6 nezávislých parametrů následovně, viz Obrázky 4, 5.

$$\mathbf{T}_0^b = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_0) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_0) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_0) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_0) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, b_0) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_0) \quad (3)$$

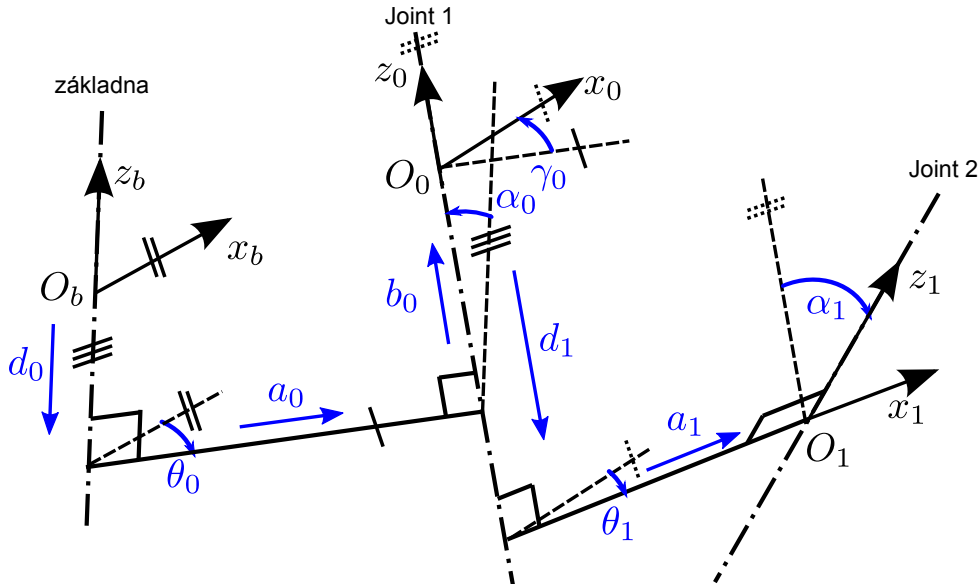
$$\mathbf{T}_e^n = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_e) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_e) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_e) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_e) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, b_e) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_e) \quad (4)$$

### Kompenzace polohy základny:

Kompenzaci polohy základny vzhledem k poloze prvního s.s.  $F_0$  vyjadřuje Obrázek 4. Transformační vztah mezi s.s.  $F_b$  a s.s.  $F_1$  lze psát potom jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1^b &= \mathbf{T}_0^b \cdot \mathbf{T}_1^0 = \\ &= \text{Trans}(\mathbf{z}, d_0) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_0) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_0) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_0) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, b_0) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_0) \cdot \\ &\quad \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_1) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_1) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_1) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_1) \\ \mathbf{T}_1^b &= \text{Trans}(\mathbf{z}, d_0) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_0) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_0) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_0) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, \underbrace{b_0 + d_1}_{d'_1}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \underbrace{\gamma_0 + \theta_1}_{\theta'_1}) \cdot \\ &\quad \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_1) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_1) \end{aligned} \quad (5)$$

Z rovnice (5) je patrné, že některé parametry určující kompenzaci základny manipulátoru lze sloučit s parametry určující vztah mezi s.s.  $F_0$  a  $F_1$ , výsledný počet geometrických parametrů transformace  $\mathbf{T}_1^b$  je tedy redukován z původního počtu 10 na pouhých 8 nezávislých parametrů. Jinými slovy, závislost mezi parametry  $b_0$  a  $d_1$  a parametry  $\gamma_0$  a  $\theta_1$  je způsobena nedefinovanou pevnou polohou s.s.  $F_0$ . Z uvedeného je patrné, že pokud zvolíme s.s.  $F_0$  s osou  $\mathbf{x}_0$  rovnoběžnou s normálou mezi  $\mathbf{z}_b$  a  $\mathbf{z}_0$  a počátek  $\mathbf{O}_0$  v průsečíku normály a osy  $\mathbf{z}_0$ , bude platit přímo  $b_0 = \gamma_0 = 0$ .

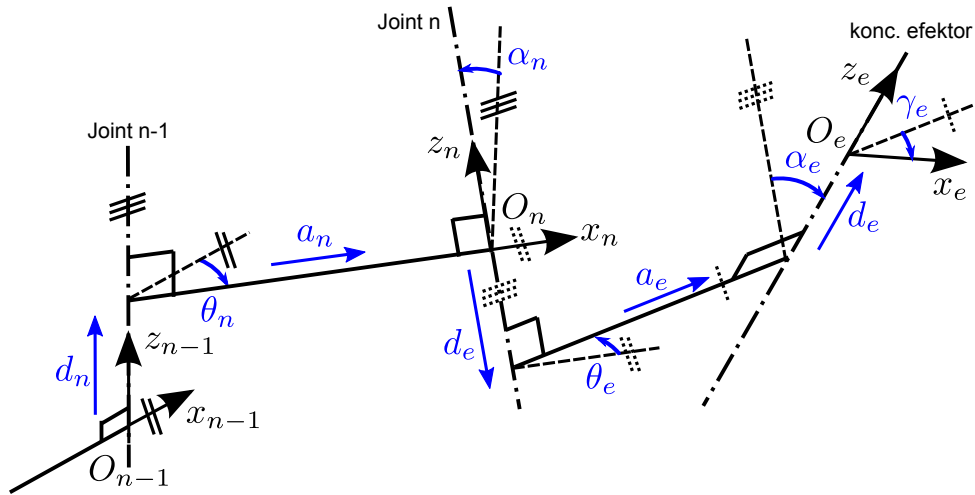


Obrázek 4: Geometrické parametry - kompenzace polohy základny

## Kompensace polohy koncového efektoru:

Kompensaci polohy koncového efektoru vzhledem k poloze posledního s.s.  $F_n$  vyjadřuje Obrázek 5. Transformační vztah mezi s.s.  $F_{n-1}$  a s.s.  $F_e$  lze psát jako:

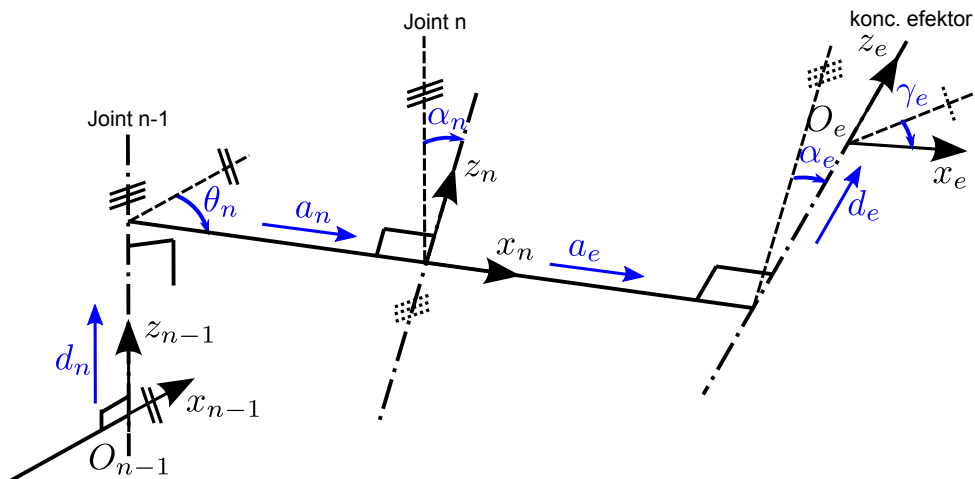
$$\begin{aligned} \mathbf{T}_e^{n-1} &= \mathbf{T}_n^{n-1} \cdot \mathbf{T}_e^n = \\ &= \text{Trans}(\mathbf{z}, d_n) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_n) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_n) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_n) \cdot \\ &\quad \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, d_e) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_e) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_e) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_e) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, b_e) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_e) \end{aligned} \quad (6)$$



Obrázek 5: Geometrické parametry - kompensace koncového efektoru

Vzhledem k tomu, že poloha osy  $z_n$  s.s. posledního kloubu není jednoznačně určena, lze její vhodnou volbou redukovat geometrické parametry  $d_e$  a  $\theta_e$ . Uvažujme umístění osy  $z_n$  takovým způsobem, že je kolmá k normále os  $z_{n-1}$  a  $z_e$ . Obrázek 5 tedy degeneruje na schéma dané Obrázekem 6. Rovnice (6) tak přejde na tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_e^{n-1} &= \mathbf{T}_n^{n-1} \cdot \mathbf{T}_e^n = \\ &= \text{Trans}(\mathbf{z}, d_n) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_n) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, \underbrace{a_n + a_e}_{a'_n}) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \underbrace{\alpha_n + \alpha_e}_{\alpha'_n}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{z}, b_e) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma_e) \cdot \\ &\quad \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, 0) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, 0) \end{aligned} \quad (7)$$



Obrázek 6: Geometrické parametry - kompensace koncového efektoru (modifikace  $d_e = \theta_e = 0$ )

Z rovnic (6) a (7) je patrné, že lze opět (pomocí vhodné volby s.s.  $F_n$ ) sloučit některé geometrické parametry a redukovat tím jejich počet z původních 10 pouze na 6.

Z tvarů rovnic (5) a (7) je také zřejmé, že kompenzace polohy základny i koncového efektoru nemění žádným způsobem zavedený systém DH úmluvy, neboť přechod mezi všemi po sobě následujícími s.s., včetně základny a koncového efektoru, je standardně určen postupným násobením elementárních transformací  $\text{Trans}(\mathbf{z}, d_*)$ ,  $\text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_*)$ ,  $\text{Trans}(\mathbf{x}, a_*)$ ,  $\text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_*)$ . Dochází pouze ke změně významu některých parametrů v důsledku jejich sloučení, tzn. parametry  $d_*$ ,  $\theta_*$ ,  $a_*$ ,  $\alpha_*$  lze vyjádřit postupně jako:

- transformační matici  $\mathbf{T}_0^b$  odpovídají parametry  $d_0, \theta_0, a_0, \alpha_0$
- transformační matici  $\mathbf{T}_1^0$  odpovídají parametry  $d'_1, \theta'_1, a_1, \alpha_1$
- transformační matici  $\mathbf{T}_n^{n-1}$  odpovídají parametry  $d_n, \theta_n, a'_n, \alpha'_n$
- transformační matici  $\mathbf{T}_e^n$  odpovídají parametry  $b_e, \gamma_e, 0, 0$

Celkový počet geometrických parametrů pro DH úmluvu s respektováním kompenzace polohy základny a koncového efektoru lze stanovit následovně:

- počet geometrických parametrů pro transformace s.s.  $F_1$  až  $F_{n-1}$  je roven  $4(n-2)$
- počet geometrických parametrů pro transformace s.s.  $F_b$  až  $F_1$  je roven 8
- počet geometrických parametrů pro transformace s.s.  $F_{n-1}$  až  $F_e$  je roven 6

Výsledný maximální počet nezávislých geometrických parametrů  $N_{max}$  manipulátoru s  $n$  klouby typu  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{R}$  v obecné poloze je roven  $N_{max} = 4(n-2) + 8 + 6 = 4n + 6$ . Toto odpovídá představě, že kompenzace polohy základny a koncového efektoru je statickou transformací ovlivňující polohu koncového efektoru vzhledem k základně, tedy 6 dodatečných geometrických parametrů představuje minimální počet parametrů pro realizaci libovolného pohybu v prostoru. Uvážíme-li dále výše zmíněný fakt, že pro kloub typu  $\mathbf{P}$  jsou dostačující pouze dva geometrické parametry  $\alpha_i, \theta_i$ , lze výsledný maximální počet geometrických parametrů stanovit přesně za předpokladu, že manipulátor obsahuje právě  $n_R$  kloubů typu  $\mathbf{R}$  a  $n_P$  kloubů typu  $\mathbf{P}$ :

$$N = 4n_r + 2n_p + 6 \quad (8)$$

Podrobnou matematickou analýzu minimálního počtu geometrických parametrů lze nalézt např. v [2].

Předpokládejme dále, že kloubové souřadnice manipulátoru (DH parametry  $d_*$  pro kloub typu  $\mathbf{P}$  a  $\theta_*$  pro kloub typu  $\mathbf{R}$ ) popisuje vektor kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}$ . Geometrické návrhové parametry (všechny zbývající DH parametry) jsou obsaženy ve vektoru parametrů  $\boldsymbol{\xi}$  a poloha koncového efektoru manipulátoru je reprezentována vektorem zobecněných souřadnic  $\mathbf{X}$ .

## Rozšíření geometrických parametrů o vlastnosti převodovek

V případě reálných manipulátorů není však řízena přímo poloha jejich kloubů  $\mathbf{Q}$ , ale poloha aktuátorů  $\mathbf{Q}_m$  na tyto klouby připojených prostřednictvím nějakého převodového zařízení (převod rotace/rotace, převod rotace/translace). Taková převodová zařízení, dále jen převodovky, lze pro jednoduchost popsat v drtivé většině případů lineární převodovou funkcí:

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{K}) \cdot \mathbf{Q}_m + \mathbf{Q}_{off} \quad (9)$$

kde  $\mathbf{K} = [n \times 1]$  je vektor převodových poměrů  $k_i$  a  $\mathbf{Q}_{off} = [n \times 1]$  je vektor offsetů  $q_{i\ off}$  reprezentující počáteční natočení převodovky.

Z uvedeného vyplývá, že ke geometrickým parametrům  $\xi$  můžeme přidat ještě dalších  $2 \cdot n$  parametrů  $K_i, q_{i\ off}$ , charakterizující převodovky manipulátoru. Výsledný soubor parametrů budeme dále nazývat jako *kalibrované parametry* manipulátoru a ponechme jejich označení symbolem  $\xi = [N \times 1]$ .

## Odvození kalibračního modelu

Označme řešení PKŮ manipulátoru, tedy závislost zobecněných souřadnic manipulátoru  $\mathbf{X}$  na poloze aktuátorů  $\mathbf{Q}_m$ , jako:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \xi) \quad (10)$$

Předpokládáme-li, že můžeme snadno měřit polohu aktuátorů  $\mathbf{Q}_m$  (měření je většinou přímo dostupné v hardwaru aktuátoru) a zároveň máme k dispozici dostatečně přesné měření polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_M$ , lze problém kalibrace definovat jako nalezení takových kalibrovaných parametrů  $\xi^*$ , pro které platí:

$$\mathbf{X}_M = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \xi^*) \quad (11)$$

kde  $\xi^* = \xi_N + \Delta\xi$  a  $\Delta\xi$  je odchylka kalibrovaných parametrů od jejich nominální (aktuálně známé) hodnoty  $\xi_N$ . Nominální hodnota kalibrovaných parametrů je většinou známá např. z technické dokumentace výroby manipulátoru, nebo může vycházet z předchozích, většinou méně přesných, kalibračních metod (prvotní technické měření parametrů manipulátoru, atd.)

Nechť máme k dispozici  $m$  měření polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_M^i$ , kterému odpovídá  $m$  hodnot měření polohy aktuátorů  $\mathbf{Q}_m^i$ , potom můžeme stanovit agregovanou podobu rovnice (10), kde  $\mathbf{e} = [p \cdot m \times 1]$  představuje chybu rovnice danou odchylkou kalibrovaných parametrů od správné hodnoty  $\xi^*$ :

$$\mathbf{X}_{ag} = \mathbf{F}_{ag} + \mathbf{e} \quad (12)$$

kde

$$\mathbf{X}_{ag} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_M^1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_M^m \end{bmatrix} = [p \cdot m \times 1], \quad \mathbf{F}_{ag} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m^1, \xi) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m^m, \xi) \end{bmatrix} = [p \cdot m \times 1]$$

Poznamenejme, že pro možnost měření kompletní polohy  $\mathbf{X}_M$  koncového efektoru platí  $p = n$ , v mnoha případech však není technicky možné měřit všechny složky polohy  $\mathbf{X}_M$ , ale pouze některé z nich, tedy platí  $p < n$ .

Problém kalibrace může být řešen ve dvou hlavních směrech:

- **Nelineární optimalizace kalibrovaných parametrů:**  
Neboli nalezení optimálního  $\Delta\xi$ , minimalizující kritérium:

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{X}_{ag} - \mathbf{F}_{ag})^T \cdot (\mathbf{X}_{ag} - \mathbf{F}_{ag})$$

Tedy:

$$\Delta\xi^* = \underset{\Delta\xi}{\operatorname{argmin}}(\mathbf{J}) \quad (13)$$

Jelikož se jedná o hledání globálního optima nelineární transcendentní funkce, její řešení se často uchyluje k metodám přímého hledání optimální hodnoty, které jsou založené na prohledávání prostoru parametrů  $\xi$ , jako např. *Golden selection*, *General Patern Search Algorithm* či různé modifikace genetických algoritmů. Tyto metody však většinou konvergují velmi pomalu. Alternativní přístup tvoří gradientní metody hledání lokálního extrému

funkce, např. Newtonova metoda či její zjednodušená verze Gaus-Newtonova metoda (metody se liší v možnosti využití Hessovy matice, tedy druhé derivace, funkce  $\mathbf{J}$ ). Gradientní metody tvoří přechod od nelineárního přístupu k její linearizované verzi.

- **Linearizované metody kalibrace parametrů**

Využívají aproximativního lineárního modelu, který dává do souvislosti chybu měření polohy koncového efektoru  $\Delta \mathbf{X}$  a chybu kalibrovaných parametrů  $\Delta \boldsymbol{\xi}$ . V následujícím textu se budeme zabývat právě tímto přístupem kalibrace parametrů.

Základem metody je stanovení tzv. *zobecněného jakobiánu*  $\Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}) = [p, N]$ , který vyjadřuje vztah mezi změnou kalibrovaných parametrů manipulátoru  $\Delta \boldsymbol{\xi}$  a změnou polohy jeho koncového efektoru  $\Delta \mathbf{X}$  pro danou polohu  $\mathbf{Q}_m$  aktuátorů. Taylorovým rozvojem PKÚ (11) v bodě odpovídajícím skutečné hodnotě parametrů  $\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}_N + \Delta \boldsymbol{\xi}$  dostáváme:

$$\underbrace{\mathbf{X}_M - \mathbf{X}}_{\Delta \mathbf{X}} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}^*)}{\partial \boldsymbol{\xi}^*}}_{\Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}_N)} \underbrace{(\boldsymbol{\xi}^* - \boldsymbol{\xi}_N)}_{\Delta \boldsymbol{\xi}} \quad (14)$$

kde  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}_N)$ .

## Odvození zobecněného jakobiánu $\Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$

Zobecněný jakobián sériového manipulátoru lze získat přímou derivací funkce  $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$  z rovnice (10) řešící PKÚ podle kalibrovaných parametrů.

$$\Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (15)$$

Tento přístup je však v praxi obtížný, neboť vede na výpočet parciálních derivací obecně složitě funkce. Lze ukázat, že mnohem výhodnější způsob odvození zobecněného jakobiánu je dán systematickou geometrickou metodou, která je založena na stejném principu jako odvození *kinematického jakobiánu* pro sériový manipulátor, viz [8], [7]<sup>1</sup>. Metoda spočívá v geometrickém stanovení příspěvků změny polohy koncového efektoru manipulátoru na základě změny konkrétní hodnoty geometrického parametrů z DH úmluvy. Lze ukázat, že příspěvky změny polohy koncového efektoru od změny hodnoty daného geometrického DH parametru jsou dány:

- Pro parametr  $d_i$ :

$$\Delta \mathbf{X}_{d_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}}_{\Psi_{d_i}} \cdot \Delta d_i \quad (16)$$

- Pro parametr  $\theta_i$ :

$$\Delta \mathbf{X}_{\theta_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1, n} \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}}_{\Psi_{\theta_i}} \cdot \Delta \theta_i \quad (17)$$

- Pro parametr  $a_i$ :

$$\Delta \mathbf{X}_{a_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{0}_{3 \times 0} \end{bmatrix}}_{\Psi_{a_i}} \cdot \Delta a_i \quad (18)$$

<sup>1</sup>Kinematický jakobián  $\mathbf{J}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi})$  vztahuje rychlosti a polohy zobecněných a kloubových souřadnic manipulátoru:  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}$  a  $\mathbf{J}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{Q}}$

- Pro parametr  $\alpha_i$ :

$$\Delta \mathbf{X}_{\alpha_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \times \mathbf{r}_{i,n} \\ \mathbf{x}_i \end{bmatrix}}_{\Psi_{\alpha_i}} \cdot \Delta \alpha_i \quad (19)$$

kde prvky sloupcových vektorů jsou přímo funkcemi prvků homogenních transformačních matic<sup>2</sup>:

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{T}_i[1 : 3, 3], \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{T}_i[1 : 3, 1], \quad \mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{T}_j[1 : 3, 4] - \mathbf{T}_i[1 : 3, 4]$$

Vzhledem k tomu, že kloubové souřadnice  $\mathbf{Q}$  jsou reprezentovány DH parametry  $d_i$  respektive  $\theta_i$  pro klouby typu  $\mathbf{P}$  respektive  $\mathbf{R}$ , lze nahlížet na přírůstky těchto parametrů jako na offsety příslušných kloubových souřadnic. Příspěvek změny polohy koncového efektoru vlivem změny převodového poměru převodovek  $\mathbf{K}$  lze získat pomocí Taylorova rozvoje rovnice, viz (9):

$$\mathbf{Q}_M = \mathbf{diag}(\mathbf{K}^*) \cdot \mathbf{Q}_m + \mathbf{Q}_{off}^* \quad (20)$$

kde  $\mathbf{Q}_M$  označuje měřené hodnoty kloubových souřadnic a  $\mathbf{K}^*$ ,  $\mathbf{Q}_{off}^*$  skutečné hodnoty parametrů převodovek.

Taylorův rozvoj bude vypočten v bodě  $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_N + \Delta \mathbf{K}$ , kde  $\mathbf{K}_N$  označuje nominální hodnotu převodových poměrů.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_M &= \mathbf{Q} + \frac{\partial(\mathbf{diag}(\mathbf{K}^*) \cdot \mathbf{Q}_m + \mathbf{Q}_{off}^*)}{\partial \mathbf{K}^*} \Big|_{\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_N} \cdot (\mathbf{K}^* - \mathbf{K}_N) \\ \underbrace{\mathbf{Q}_M - \mathbf{Q}}_{\Delta \mathbf{Q}_K} &= \mathbf{diag}(\mathbf{Q}_m) \cdot \underbrace{(\mathbf{K}^* - \mathbf{K}_N)}_{\Delta \mathbf{K}} \end{aligned} \quad (21)$$

kde  $\mathbf{Q} = \mathbf{diag}(\mathbf{K}_N) \cdot \mathbf{Q}_m + \mathbf{Q}_{off}^*$ .

Změnu hodnot kloubových souřadnic  $\Delta \mathbf{Q}_K$  lze přepočítat na hodnotu změny polohy koncového efektoru prostřednictvím kinematického jakobiánu  $\mathbf{J}(\mathbf{Q}, \xi)$ :

$$\Delta \mathbf{X}_K = \mathbf{J}(\mathbf{Q}, \xi) \cdot \Delta \mathbf{Q}_K = \mathbf{J}(\mathbf{Q}, \xi) \cdot \mathbf{diag}(\mathbf{Q}_m) \cdot \Delta \mathbf{K} \quad (22)$$

Kde kinematický jakobián  $\mathbf{J}$  lze stanovit opět pouze z hodnot homogenních transformačních matic [8] a jeho sloupcové vektory odpovídají pro příslušný typ kloubů sloupcovým vektorům z rovnic (16), (17) :

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}, \xi) = [\mathbf{j}_1 \quad \dots \quad \mathbf{j}_i \quad \dots \quad \mathbf{j}_n]$$

Kde:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_i &= \Psi_{d_i} \quad (\text{pro kloub typu } \mathbf{P}) \\ \mathbf{j}_i &= \Psi_{\theta_i} \quad (\text{pro kloub typu } \mathbf{R}) \end{aligned}$$

- Příspěvek změny polohy koncového efektoru vlivem změny kalibrovaného parametru  $k_i$  lze vyjádřit z rovnice (22):

$$\Delta \mathbf{X}_{k_i} = \Psi_{k_i} \cdot \Delta k_i \quad (23)$$

Kde:

$$\begin{aligned} \Psi_{k_i} &= \Psi_{d_i} \cdot \mathbf{Q}_m[i] \quad (\text{pro kloub typu } \mathbf{P}) \\ \Psi_{k_i} &= \Psi_{\theta_i} \cdot \mathbf{Q}_m[i] \quad (\text{pro kloub typu } \mathbf{R}) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Vypuštěním horního indexu u vektorů a homogenních transformačních matic se předpokládá, že tyto jsou vztaheny vzhledem k s.s.  $F_b$  základny manipulátoru. Značení  $\mathbf{A}[a : b, c : d]$  odpovídá submatici získané z matice  $\mathbf{A}$  vybráním řádku  $a \dots b$  a sloupce  $c \dots d$ . Případný samostatný symbol ":" reprezentuje všechny řádky/sloupce.

Výslednou odchylku polohy koncového efektoru v důsledku odchylek kalibrovaných parametrů pro konkrétní hodnotu poloh aktuátorů manipulátoru lze získat součtem odchylek z rovnic (16-19, 23). Tedy výsledný zobecněný jakobián  $\Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$  je sestaven ze sloupců  $\Psi_{d_i}$ ,  $\Psi_{\theta_i}$ ,  $\Psi_{a_i}$ ,  $\Psi_{\alpha_i}$ ,  $\Psi_{k_i}$  tak, aby uspořádání sloupců odpovídalo uspořádání parametrů ve vektoru kalibrovaných parametrů  $\boldsymbol{\xi}$ :

$$\Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}) = [\Psi_*^1 \quad \dots \quad \Psi_*^N], \quad \Psi_*^j = \{\Psi_{d_i}, \Psi_{\theta_i}, \Psi_{a_i}, \Psi_{\alpha_i}, \Psi_{k_i}\} \quad (24)$$

Poznamenejme, že uvedeným geometrickým postupem získáme tedy vztah mezi přírůstem polohy koncového efektoru a změnou kalibrovaných parametrů:

$$\Delta \mathbf{X} = \Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\xi} \quad (25)$$

kde

$$\Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X}_p \\ \Delta \mathbf{X}_r \end{bmatrix} \quad (26)$$

a  $\Delta \mathbf{X}_p = [3, 1]$  je přírůstek translace a  $\Delta \mathbf{X}_r = [3, 1]$  je přírůstek rotace koncového efektoru. Přírůstek rotace  $\Delta \mathbf{X}_r$  je vyjádřen jako vektor, jehož směr udává osu rotace (obecná osa v prostoru) a jeho velikost potom velikost úhlu rotace kolem této osy.

Předpokládejme, že poloha koncového efektoru je dána vektorem translace  $\mathbf{X}[1 : 3]$  a vektorem tří Eulerovských úhlů  $\mathbf{X}[4 : 6]$  (např. postupná rotace podle schématu XYZ). Měření polohy koncového efektoru kalibračním snímačem je dáno jako  $\mathbf{X}_M$  a poloha  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$  označuje předpokládanou polohu koncového efektoru vypočtenou prostřednictvím PKÚ (10) z naměřených hodnot polohy aktuátorů  $\mathbf{Q}_m$  a aktuálních hodnot kalibrovaných parametrů  $\boldsymbol{\xi}$ . Potom chybu polohy koncového efektoru  $\Delta \mathbf{X}$  z rovnice (26) lze stanovit jako:

$$\Delta \mathbf{X}_p = \mathbf{X}_M[1 : 3] - \mathbf{X}[1 : 3] \quad (27)$$

Chyba rotace  $\Delta \mathbf{X}_r$  může být vyjádřena dvěma způsoby:

1. **Absolutně** např. jako elementární rotaci  $\Delta \delta$  okolo obecného směrového vektoru  $\mathbf{u}$ :

- Převod Eulerovských úhlů na odpovídající matici rotace, viz např. [4], [9]:

$$\mathbf{X}[4 : 6] \rightarrow \mathbf{R}, \quad \mathbf{X}_M[4 : 6] \Rightarrow \mathbf{R}_M$$

- Výpočet doplňkové matice rotace  $\text{Rot}(\mathbf{u}, \Delta \delta)$ :

$$\mathbf{R}_M = \text{Rot}(\mathbf{u}, \Delta \delta) \cdot \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \text{Rot}(\mathbf{u}, \Delta \delta) = \mathbf{R}_M \cdot \mathbf{R}^T$$

- Převod doplňkové matice rotace na odpovídající obecný úhel  $\mathbf{u}$  a rotaci kolem něj  $\Delta \delta$ , viz např. [9]:

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \Delta \delta) \rightarrow \mathbf{u}, \Delta \delta$$

- Vyjádření vektoru absolutní chyby:

$$\Delta \mathbf{X}_r = \Delta \delta \cdot \mathbf{u}$$

2. **Relativně** využitím vztahu pro derivaci matice rotace, viz [8]:

- Výpočet rozdílové matice rotace:

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_M - \mathbf{R}$$



- Využitím vztahu pro časovou derivaci matice rotace

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{R}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega[3] & \omega[2] \\ \omega[3] & 0 & -\omega[1] \\ -\omega[2] & \omega[1] & 0 \end{bmatrix}$$

lze vyjádřit vektor diferenciální rotace  $d\boldsymbol{\omega}$ :

$$d\mathbf{S} = \Delta\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_M^T \Rightarrow d\boldsymbol{\omega} = [d\mathbf{S}[3,2] \quad d\mathbf{S}[1,3] \quad d\mathbf{S}[2,1]]^T$$

- Lze ukázat, že pro dostatečně malou změnu matice rotace  $\Delta\mathbf{R}$  platí:

$$\Delta\mathbf{X}_r = d\boldsymbol{\omega}, \quad \Delta\delta = \|d\boldsymbol{\omega}\|, \quad \mathbf{u} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{\Delta\delta}$$

Předpokládejme dále, že máme k dispozici opět  $m$  měření poloh koncového efektoru. Agregovaný výsledný **kalibrační model** manipulátoru lze pak vyjádřit jako:

$$\Delta\mathbf{X}_{ag} = \mathbf{W} \cdot \Delta\boldsymbol{\xi} + \mathbf{V} \quad (28)$$

kde agregovaný vektor chyby měření  $\Delta\mathbf{X}_{ag}$  a matice pozorování  $\mathbf{W}$  budou:

$$\Delta\mathbf{X}_{ag} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X}^1 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{X}^m \end{bmatrix} = [p \cdot m \times 1], \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{Q}_m^1, \boldsymbol{\xi}) \\ \vdots \\ \Psi(\mathbf{Q}_m^m, \boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = [p \cdot m \times N]$$

$\Delta\mathbf{X}^i$  bude chyba polohy koncového efektoru pro  $i$ -té měření daná rovnicí (26), kde  $\mathbf{X}_M = \mathbf{X}_M^i$  a  $\mathbf{Q}_m = \mathbf{Q}_m^i$ .  $\mathbf{V} = [p \cdot m \times 1]$  je vektor chyby rovnice.

Poznamenejme, že matice pozorování  $\mathbf{W}$  je složena ze zobecněných jakobiánů  $\Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$  (pokud měříme kompletní polohu koncového efektoru,  $p = n$ ), nebo z odpovídajících řádků zobecněných jakobiánů (pokud měříme pouze některé složky polohy koncového efektoru,  $p < n$ ). Jak bude patrné dále, některé kalibrační metody nevyužívají přímo zobecněného jakobiánu, ale tzv. *kalibračních jakobiánů*  $\Phi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$ . Ty mohou být odvozeny právě na základě zobecněných jakobiánů. Matice pozorování má tedy v obecném případě tvar:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{Q}_m^1, \boldsymbol{\xi}) \\ \vdots \\ \Phi(\mathbf{Q}_m^m, \boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} \quad (29)$$

### 3 Algoritmus kalibrace - iterační metoda nejmenších čtverců

Jak již bylo zmíněno, kalibrace manipulátorů je obecně nelineárním problémem optimalizace. Opustíme-li tedy přímé metody hledání optima, viz Kapitola 2, lze řešit úlohu kalibrace iteračně prostřednictvím linearizovaného kalibračního modelu (28). Algoritmus výpočtu kalibrovaných parametrů lze potom psát jako:

#### ◆ Algoritmus 1 (Kalibrace - metoda nejmenších čtverců)

1. Počáteční hodnota kalibrovaných parametrů  $\boldsymbol{\xi}^{(0)}$  je rovna jejich nominální hodnotě  $\boldsymbol{\xi}_N$ <sup>3</sup>:

$$\boldsymbol{\xi}^{(k)} = \boldsymbol{\xi}_N, \quad k = 0 \quad (30)$$

<sup>3</sup>Index  $\star^{(k)}$  označuje  $k$ -tou iteraci algoritmu.

2. Pro daných  $m$  měření polohy aktuátorů  $\mathbf{Q}_m^i$  a polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_M^i$  vypočti agregovanou chybu polohy  $\Delta \mathbf{X}_{ag}^{(k)}$  a matici pozorování  $\mathbf{W}^{(k)}$  pro aktuální hodnoty kalibrovaných parametrů  $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ .
3. Metodou lineárních nejmenších čtverců vypočti řešení rovnice (28) pro  $\Delta \boldsymbol{\xi}^{(k)}$ . Tzn. minimalizujeme kritérium podle změny kalibrovaných parametrů  $\Delta \boldsymbol{\xi}$ :

$$J^{(k)} = (\mathbf{V}^{(k)})^T \cdot \mathbf{V}^{(k)} = \left( \Delta \mathbf{X}_{ag}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)} \cdot \Delta \boldsymbol{\xi}^{(k)} \right)^T \cdot \left( \Delta \mathbf{X}_{ag}^{(k)} - \mathbf{W}^{(k)} \cdot \Delta \boldsymbol{\xi}^{(k)} \right) \quad (31)$$

Tedy řešením metody lineárních nejmenších čtverců z nutné podmínky existence extrému  $\frac{\partial J^{(k)}}{\partial \Delta \boldsymbol{\xi}^{(k)}} = 0$  dostáváme:

$$\Delta \boldsymbol{\xi}^{(k)} = \left( \left( \mathbf{W}^{(k)} \right)^T \cdot \mathbf{W}^{(k)} \right)^{-1} \cdot \left( \mathbf{W}^{(k)} \right)^T \cdot \Delta \mathbf{X}_{ag}^{(k)} \quad (32)$$

4. Vypočti opravenou (novou) hodnotu kalibrovaných parametrů:

$$\boldsymbol{\xi}^{(k+1)} = \boldsymbol{\xi}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\xi}^{(k)} \quad (33)$$

5. Podmínka zastavení algoritmu: Dokud  $\max_{i=1 \dots N} \|\Delta \boldsymbol{\xi}^{(k)}[i]\| > \epsilon$  potom  $k = k + 1$  a jdi na bod 2, jinak konec algoritmu a výsledná kalibrovaná parametry jsou:

$$\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}^{(k)} \quad (34)$$

◆

Numerický algoritmus je ovšem v uvedené verzi často numericky nestabilní, což je způsobeno špatnou podmíněností úlohy lineárních nejmenších čtverců. Důvody špatné podmíněnosti algoritmu jsou následující:

- **Identifikovatelnost**

Vektor kalibrovaných parametrů  $\boldsymbol{\xi}$  obsahuje buď zcela nepozorovatelné (neidentifikovatelné) parametry, nebo parametry které jsou špatně identifikovatelné. Toto může být způsobeno buď mechanickým (strukturálním) uspořádáním manipulátoru (odpovídající parametry nemohou být jakkoliv identifikovány), nebo nevhodnou volbou kalibračních poloh  $\mathbf{X}_M^i$  a odpovídajícím hodnotám poloh aktuátorů  $\mathbf{Q}_m^i$  (parametry mohou být identifikovány pro jinou volbu kalibračních poloh). Více v Kapitole 5.

- **Normování chyby polohy koncového efektoru**

Složky vektoru chyby měření  $\Delta \mathbf{X}$  mají různé jednotky. Ve většině případů má translační část vektoru rozměr  $[m]$  a vektor rotace rozměr  $[rad]$ . Lze snadno ukázat, že budeme-li uvažovat roboty, jejichž ramena mají přibližně velikosti lidské ruky (tzv. *human-sized arms*), jsou složky translace a rotace velikostí srovnatelné, neboť platí  $s = r \cdot \theta$ , kde  $s [m]$  je dráha uražená ramenem délky  $r [m]$  při otočení ramena o úhel  $\theta [rad]$ . Tzn., že pokud bude rozměr ramena  $r \simeq 1 [m]$ , bude platit  $s \simeq \theta$ , tedy translační a rotační složky chyby polohy koncového efektoru jsou svou velikostí srovnatelné.

V případě diametrálně odlišných rozměrů ramen robotu (milimetry, jednotky či desítky metrů) vykazuje vektor chyby polohy koncového efektoru velké rozdíly mezi velikostí translačních a rotačních složek. Toto potom vede na špatnou podmíněnost úlohy lineárních nejmenších čtverců a je třeba provést normování (*scaling*). Normování lze provést přenásobením kalibračního modelu (28) (bez uvažování chyby  $\mathbf{V}$ ) zleva maticí  $\mathbf{G} = [p \cdot m \times p \cdot m]$ :

$$\underbrace{\mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{X}_{ag}}_{\Delta \tilde{\mathbf{X}}_{ag}} = \underbrace{\mathbf{G} \cdot \mathbf{W}}_{\tilde{\mathbf{W}}} \cdot \Delta \boldsymbol{\xi} \quad (35)$$

Metoda lineárních nejmenších čtverců pro normovanou rovnici vede na řešení:

$$\begin{aligned}
J &= \left( \Delta \tilde{\mathbf{X}}_{ag} - \tilde{\mathbf{W}} \cdot \Delta \xi \right)^T \cdot \left( \Delta \tilde{\mathbf{X}}_{ag} - \tilde{\mathbf{W}} \cdot \Delta \xi \right), \quad \frac{\partial J}{\partial \Delta \xi} = 0 \Rightarrow \\
\Delta \xi &= (\tilde{\mathbf{W}}^T \cdot \tilde{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{W}}^T \cdot \Delta \tilde{\mathbf{X}}_{ag} = (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{X}_{ag} \quad (36) \\
\Delta \xi &= (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{X}_{ag}
\end{aligned}$$

kde  $\mathbf{L} = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}$  je váhová matice chyby koncového efektoru.

- **Normování kalibrovaných parametrů**

V drtivé většině případů prováděných kalibrací robotů mají kalibrované parametry diametrálně rozdílné velikosti, např. pro sériovou část AGEBOTU jsou parametry převodových poměrů převodovek více než 10x menší než parametry reprezentující délky ramen. Je tak zřejmé, že pokud vektor chyby měření  $\Delta \mathbf{X}_{ag}$  obsahuje přibližně srovnatelné velikosti složek (v důsledku normování chyby polohy koncového efektoru), musí mít sloupce matice pozorování  $\mathbf{W}$  (odpovídající přenosu chyby kalibrovaných parametrů do těchto složek) velmi rozdílné normy. V důsledku toho může být podmíněnost úlohy lineárních nejmenších čtverců opět výrazně snížena. Situaci lze vyřešit přenásobením jednotlivých sloupců matice pozorování  $\mathbf{W}$  převrácenou hodnotou jejich odpovídajících norem a vhodně upravit vektor kalibrovaných parametrů. Úpravou rovnice (28) dostáváme:

$$\Delta \mathbf{X}_{ag} = \underbrace{\mathbf{W} \cdot \mathbf{H}}_{\tilde{\mathbf{W}}} \cdot \underbrace{\mathbf{H}^{-1} \cdot \Delta \xi}_{\Delta \tilde{\xi}} \quad (37)$$

kde

$$\mathbf{H} = \text{diag}(h_1, \dots, h_N), \quad h_i = \|\mathbf{W}[:, i]\|^{-1}$$

Potom platí, že složky vektoru přírůstku normovaných kalibrovaných parametrů  $\Delta \tilde{\xi}$  jsou přenášeny do vektoru chyb koncového efektoru se stejným (jednotkovým) zesílením a tedy všechny ovlivňují vektor chyby  $\Delta \mathbf{X}_{ag}$  přibližně stejným způsobem. Poznamenejme, že normováním kalibrovaných parametrů se nemění řešení metody lineárních nejmenších čtverců, jako tomu bylo při normování chyby polohy koncového efektoru:

$$\begin{aligned}
J &= \left( \Delta \mathbf{X}_{ag} - \tilde{\mathbf{W}} \cdot \Delta \tilde{\xi} \right)^T \cdot \left( \Delta \mathbf{X}_{ag} - \tilde{\mathbf{W}} \cdot \Delta \tilde{\xi} \right), \quad \frac{\partial J}{\partial \Delta \xi} = 0 \Rightarrow \\
\underbrace{\Delta \tilde{\xi}}_{\mathbf{H}^{-1} \cdot \Delta \xi} &= (\tilde{\mathbf{W}}^T \cdot \tilde{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{W}}^T \cdot \Delta \mathbf{X}_{ag} = (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{W}^T \cdot \Delta \mathbf{X}_{ag} \quad (38) \\
\Delta \xi &= (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \Delta \mathbf{X}_{ag}
\end{aligned}$$

Tedy původní špatně podmíněná úloha (bez normování kalibrovaných parametrů) i modifikovaná normovaná metoda vede na stejný výsledek kalibrace.

- **Tlumená verze metody lineárních nejmenších čtverců**

Někdy může nastat situace, kdy i přes normování chyby polohy koncového efektoru a kalibrovaných parametrů dochází ke špatné podmíněnosti úlohy kalibrace. Často takové situace vznikají při nevhodném výběru kalibračních poloh. V důsledku špatné podmíněnosti dochází ke generování velkých nekorektních přírůstků  $\Delta \xi$ , neboť matice pozorování  $\mathbf{W}$  je velmi blízko singulární matici, viz rovnice (32). Problém může být řešen tlumenou verzí metody lineárních nejmenších čtverců. Uvažujme, že v  $k$ -tém kroku iterace algoritmu kalibrace chceme minimalizovat rozšířené kritérium  $J_{ex}$  místo standardního kritéria  $J$ .

$$J_{ex} = (\Delta \mathbf{X}_{ag} - \mathbf{W} \cdot \Delta \xi)^T \cdot (\Delta \mathbf{X}_{ag} - \mathbf{W} \cdot \Delta \xi) + \lambda^2 \cdot \underbrace{(\xi_{k+1} - \xi_k)}_{\Delta \xi}$$

kde  $\lambda$  je koeficient tlumení. Čím větší hodnota  $\lambda$  tím více zohledňujeme důvěryhodnost odhadnutých parametrů  $\xi_k$  v předchozím kroku algoritmu kalibrace, jinými slovy minimalizujeme přírůstek kalibrovaných parametrů  $\Delta\xi$ , tedy nedovolujeme výpočet velkých nekorektních přírůstků. Výpočtem řešení tlumené verze metody nejmenších čtverců dostáváme:

$$J_{ex} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\xi = (\mathbf{W}^T \cdot \mathbf{W} + \lambda^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \Delta\mathbf{X}_{ag} \quad (39)$$

Z řešení (39) je patrné, že v případě blízkosti matice  $\mathbf{W}$  k singulární matici je inverze vždy realizovatelná díky nenulovému koeficientu tlumení  $\lambda$ . S ohledem na kompletní iterační algoritmus kalibrace Algoritmus 1 je zřejmé, že použitím tlumené verze metody lineárních nejmenších čtverců můžeme prostřednictvím koeficientu tlumení  $\lambda$  zajistit, aby se kalibrované parametry  $\xi_k$  výrazně neodchýlily od jejich nominální hodnoty  $\xi_N$ .

## 4 Chyba kalibrace

Metoda kalibrace pochopitelně vykazuje chybu vlivem nepřesnosti měření polohy koncového efektoru. Předpokládejme, že chyba  $\mathbf{V}$  v kalibračním modelu (28) je reprezentována náhodnou veličinou typu bílý šum:

$$\mathbf{E}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}_{p \cdot m \times 1}, \quad \mathbf{Var}(\mathbf{V}) = \mathbf{E}(\mathbf{V}\mathbf{V}^T) = \Sigma_v \quad (40)$$

kde  $\Sigma_v = [p \cdot m \times 1]$  je diagonální matice s prvky  $\sigma_v^2[i]$  reprezentující rozptyl šumu.

Označíme-li odhad přírůstku kalibrovaných parametrů  $\Delta\hat{\xi}$ , viz řešení lineární metody nejmenších čtverců s respektováním normování polohy koncového efektoru z rovnice (36), můžeme psát chybu odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \Delta\xi - \Delta\hat{\xi} = \Delta\xi - (\mathbf{W}^T \mathbf{L} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{L} \underbrace{\Delta\mathbf{X}_{ag}}_{\mathbf{W} \cdot \Delta\xi + \mathbf{V}} \\ \mathbf{e} &= -(\mathbf{W}^T \mathbf{L} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{L} \cdot \mathbf{V} \end{aligned} \quad (41)$$

Kde  $\Delta\mathbf{X}_{ag}$  je dáno kalibračním modelem (28).

Výpočtem střední hodnoty chyby odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů lze usuzovat na nestrannost odhadu, neboť:

$$\mathbf{E}(\mathbf{e}) = -(\mathbf{W}^T \mathbf{L} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{V}) = \mathbf{0}_{p \cdot m \times 1}$$

Varianci chyby odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů lze vyjádřit z definice kovariance náhodné veličiny:

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(\mathbf{e}) &= \mathbf{E}((\mathbf{e} - \mathbf{E}(\mathbf{e}))(\mathbf{e} - \mathbf{E}(\mathbf{e}))^T) = \mathbf{E}(\mathbf{e}\mathbf{e}^T) \\ \mathbf{Var}(\mathbf{e}) &= (\mathbf{W}^T \mathbf{L} \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{L} \Sigma_v \mathbf{L} \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{L} \mathbf{W})^{-1} \end{aligned} \quad (42)$$

Pokud bychom znali vlastnosti šumu měření, tedy kovarianční matici  $\Sigma_v$ , lze volit váhovou matici normování polohy koncového efektoru jako  $\mathbf{L} = \Sigma_v^{-1}$ . V takovém případě přejde odhad přírůstku kalibrovaných parametrů ve tvaru lineárních nejmenších čtverců z rovnice (36) na tvar:

$$\Delta\xi = (\mathbf{W}^T \cdot \Sigma_v^{-1} \cdot \mathbf{W})^{-1} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \Sigma_v^{-1} \cdot \Delta\mathbf{X}_{ag} \quad (43)$$

A kovarianční matice chyby (42) přejde na tvar:

$$\mathbf{Var}(\mathbf{e}) = (\mathbf{W}^T \Sigma_v^{-1} \mathbf{W})^{-1} \quad (44)$$

Lze ukázat, že odhad přírůstku kalibrovaných parametrů daný rovnicí (43) je *nejlepším lineárním nestranným estimátorem s minimální variancí chyby odhadu* (*Best Linear Unbiased Estimator - BLUE*),  $\Delta\xi$  je v tomto případě považováno za náhodnou veličinu se střední hodnotou nula a nekonečným rozptylem, viz [6].

Bohužel, v praxi kovarianční matice  $\Sigma_v$  není známá, tudíž váhová matice  $\mathbf{L}$  nemůže být korektně určena. Určitou možnost skýtá využití statistického odhadu kovarianční matice  $\Sigma_v$  z rovnice kalibračního modelu (28) a definice kovariance. Budeme-li předpokládat, že každá složka náhodného vektoru chyby měření  $\mathbf{V}$  bude mít stejný rozptyl  $\sigma_v^2$ , lze tuto hodnotu odhadnout z měřených dat chyby polohy koncového  $\Delta\mathbf{X}_{ag}$  efektoru následovně:

$$\sigma_v^2 \approx \frac{(\Delta\mathbf{X}_{ag} - \mathbf{W} \cdot \Delta\xi)^T \cdot (\Delta\mathbf{X}_{ag} - \mathbf{W} \cdot \Delta\xi)}{p \cdot m - N} \quad (45)$$

kde  $p \cdot m - N$  je statistický počet experimentů snížený o počet kalibrovaných parametrů, neboť  $N$  rovnic je statisticky nutno využít k identifikaci kalibrovaných parametrů.

## 5 Identifikovatelnost parametrů manipulátoru

Jako ve všech identifikačních problémech tak i v problémech kalibrace manipulátorů platí, že nastávají situace, kdy některé z kalibrovaných parametrů nelze identifikovat z naměřených dat, nebo jsou tyto parametry obtížně identifikovatelné. Jak bylo již zmíněno v předchozí kapitole, takové situace vedou na špatnou podmíněnost kalibračního algoritmu. Je zřejmé, že pokud  $j$ -tý sloupec matice pozorování je nulový (např. je nulový příslušný sloupec kalibračního jakobiánu  $\Phi(\mathbf{Q}_m\xi)$ ), nelze identifikovat  $j$ -tý kalibrovaný parametr vektoru  $\xi$ , neboť změna tohoto příslušného parametru nemá žádný vliv na chybu polohy koncového efektoru. Takový parametr musí být z identifikace vypuštěn (včetně vyřazení příslušného sloupce matice  $\mathbf{W}$ ), dostáváme tak *redukovaný kalibrační model*. Podobná situace nastává, pokud se mezi sloupci matice pozorování  $\mathbf{W}$  objevují lineárně závislé sloupce. Potom lze říci, že příslušné kalibrované parametry nelze identifikovat jednotlivě, ale pouze v jejich lineární kombinaci (v praxi se v tomto případě jedná o neidentifikovatelné parametry, protože vliv jejich změny na chybu polohy koncového efektoru nelze jednoznačně oddělit). Vypuštěním lineárně závislých sloupců z matice pozorování  $\mathbf{W}$  a příslušných odpovídajících parametrů z vektoru  $\xi$  dostáváme opět redukovaný kalibrační model.

Poznamenejme, že neidentifikovatelné parametry můžeme dále rozdělit na dvě skupiny podle jejich vlivu na redukovaný kalibrační model:

- *Neidentifikovatelné parametry, které nemají vliv na kalibrační model.*  
Jedná se o geometrické parametry, které nelze kalibrovat z důvodu neidentifikovatelnosti, nicméně jakkoliv neovlivňují kalibrační model. Jinými slovy, ponecháním jejich hodnoty na hodnotě nominální, tedy hodnotě odlišné od hodnoty skutečné, neovlivní správné nakalibrování ostatních parametrů.
- *Neidentifikovatelné parametry, které mají vliv na kalibrační model.*  
Jedná se o geometrické parametry, které nelze kalibrovat z důvodu neidentifikovatelnosti. Pokud jsou tyto parametry nastaveny na skutečné hodnoty, kalibrace ostatních identifikovatelných kalibrovaných parametrů proběhne korektně. Ponecháním těchto parametrů na svých nominálních hodnotách vede na chybné nakalibrování ostatních identifikovatelných kalibrovaných parametrů.

Ke zjištění identifikovatelnosti kalibrovaných parametrů lze s výhodou využít metodu QR rozkladu matice pozorování  $\mathbf{W}$ .

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \quad (46)$$

kde  $\mathbf{Q}$  je  $[p \cdot m \times p \cdot m]$  ortogonální matice  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$  (její sloupce tvoří ortonormální vektory, matice je vždy regulární) a  $\mathbf{R}$  je  $[p \cdot m \times N]$  horní trojúhelníková matice. Pokud má matice  $\mathbf{W}$  plnou hodnotu, tzn.  $\text{rank}(\mathbf{W}) = N$ , její diagonála neobsahuje žádné nulové prvky  $\mathbf{R}[i, i] \neq 0, i = 1 \dots N$ .

Z QR rozkladu lze dále vypořádat, že  $k$ -tý sloupec matice  $\mathbf{W}$  je generován ortonormálními sloupci  $1 \dots k$  matice  $\mathbf{Q}$  (tyto sloupce tvoří ortonormální bázi  $k$ -tého sloupce matice  $\mathbf{W}$ ). Pokud nastane situace, kdy matice  $\mathbf{W}$  bude singulární, existuje alespoň jeden nulový prvek na diagonále matice  $\mathbf{R}$ . Z toho plyne, že některé sloupce matice  $\mathbf{W}$  jsou generovány stejnými ortonormálními bázeovými vektory  $\mathbf{Q}[:, i]$  a lze tedy ukázat, že jsou tyto sloupce lineárně závislé:

Uvažujme příklad kalibrace tří parametrů, QR rozklad matice pozorování  $\mathbf{W}$  tedy bude:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 & \dots & \mathbf{q}_{p \cdot m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

Sloupce matice  $\mathbf{W}$  jsou tedy generovány sloupci matice  $\mathbf{Q}$  prostřednictvím parametrů matice  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_{11} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= a_{12} \mathbf{q}_1 + a_{22} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{w}_3 &= a_{13} \mathbf{q}_1 + a_{23} \mathbf{q}_2 + a_{33} \mathbf{q}_3 \end{aligned}$$

Pokud bude např. diagonální prvek  $a_{33}$  matice  $\mathbf{R}$  roven 0, sloupce  $\mathbf{w}_i, i = 1 \dots 3$  matice  $\mathbf{W}$  budou lineárně závislými vektory, neboť lze ukázat, že platí:

$$\begin{pmatrix} a_{12}a_{23} & -a_{13} \\ a_{11}a_{22} & a_{11} \end{pmatrix} \mathbf{w}_1 + \begin{pmatrix} -a_{23} \\ a_{22} \end{pmatrix} \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = 0$$

Z toho plyne, že např. kalibrovaný parametr odpovídající  $\xi[3]$  nelze identifikovat (poznamenejme, že v tomto případě lze volit i jiný parametr, který musí být z kalibrace vyloučen).

Analýzou matice  $\mathbf{R}$  lze tak stanovit neidentifikovatelné parametry kalibračního modelu a ty z algoritmu kalibrace vyloučit. Špatně identifikovatelné parametry vykazují malá čísla diagonálních prvků matice  $\mathbf{R}$ . Poznamenejme, že analýza identifikovatelnosti parametrů vypovídá korektně o míře jejich pozorovatelnosti pouze za předpokladu normování kalibračního modelu (normování chyby polohy koncového efektoru a kalibrovaných parametrů).

Využitím uvedených poznatků o normování, tlumení, identifikovatelnosti a výpočtu chyby odhadu kalibrovaných parametrů lze Algoritmus 1 zmodifikovat následovně:

◆ **Algoritmus 2 (Obecný algoritmus kalibrace parametrů)**

1. Proveď analýzu identifikovatelnosti geometrických parametrů  $\xi$  pomocí QR rozkladu matice pozorování  $\mathbf{W}$  (vypočítané ze všech geometrických parametrů). Vyluč z procesu kalibrace tolik parametrů, aby zbývající parametry byly identifikovatelné a nezávislé. Redukovaný počet geometrických parametrů podrobených procesu kalibrace označ  $\xi_{\mathbf{R}}$  a jich počet označ  $N_{\mathbf{R}}$ . Vyluč odpovídající sloupce matice pozorování  $\mathbf{W}$ , dostáváme tak redukovanou matici pozorování  $\mathbf{W}_{\mathbf{R}} = [p \cdot m \times N_{\mathbf{R}}]$ .

2. Zvol apriorní (nominální) hodnotu  $\xi_N$  všech geometrických parametrů  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \xi^{(k)} &= \xi_N, \quad k = 0 \\ \xi_{\mathbf{R}}^{(k)} &= \text{výběr odpovídajících prvků z } \xi^{(k)} \end{aligned}$$

3. Pro daných  $m$  měření polohy aktuátorů  $\mathbf{Q}_m^i$  a polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_M^i$  vypočti agregovanou chybu polohy  $\Delta \mathbf{X}_{ag}^{(k)}$  a redukovanou matici pozorování  $\mathbf{W}_R^{(k)}$  pro aktuální hodnoty parametrů  $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ .

4. Proveď normování kalibrovaných parametrů  $\boldsymbol{\xi}_R^{(k)}$  - normování sloupců matice pozorování  $\mathbf{W}_R^{(k)}$ :

$$\mathbf{W}_R^{(k)} = \mathbf{W}_R^{(k)} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \text{diag}(h_1, \dots, h_N), \quad h_i = \|\mathbf{W}_R^{(k)}[:, i]\|^{-1} \quad (47)$$

5. Vypočti optimální přírůstek kalibrovaných parametrů  $\Delta \boldsymbol{\xi}_R^{(k)}$  - včetně normování polohy koncového efektoru a tlumení:

$$\Delta \boldsymbol{\xi}_R^{(k)} = ((\mathbf{W}_R^{(k)})^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{W}_R^{(k)} + \alpha^2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot (\mathbf{W}_R^{(k)})^T \cdot \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{X}_{ag}^{(k)} \quad (48)$$

kde  $\mathbf{L} = \boldsymbol{\Sigma}_v^{(k)}$  (v první iteraci  $\boldsymbol{\Sigma}_v^{(0)} = \mathbf{I}_{p \cdot m \times p \cdot m}$ , ještě neznáme odhad kovarianční matice).

6. Proveď odnormování přírůstku kalibrovaných parametrů  $\boldsymbol{\xi}_r(k)$ :

$$\Delta \boldsymbol{\xi}_R^{(k)} = \mathbf{H} \cdot \Delta \boldsymbol{\xi}_R^{(k)} \quad (49)$$

7. Vypočti novou (opravenou) hodnotu kalibrovaných parametrů a sluč je s parametry, které se neidentifikovaly:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_R^{(k+1)} &= \boldsymbol{\xi}_R^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\xi}_R^{(k)} \\ \boldsymbol{\xi}^{(k+1)} &= \text{nekalibrované složky z } \boldsymbol{\xi}^{(k)} + \text{SLOUČENÍ S kalibrované parametry } \boldsymbol{\xi}_R^{(k+1)} \end{aligned} \quad (50)$$

8. Vypočti statistický odhad rozptylu  $\sigma_v^2$  náhodné veličiny chyby měření  $\mathbf{V}^{(k)}$ :

$$\sigma_v^2 = \frac{\left( \Delta \mathbf{X}_{ag}^{(k)} - \mathbf{W}_R^{(k)} \cdot \Delta \boldsymbol{\xi}_R^{(k)} \right)^T \cdot \left( \Delta \mathbf{X}_{ag}^{(k)} - \mathbf{W}_R^{(k)} \cdot \Delta \boldsymbol{\xi}_R^{(k)} \right)}{p \cdot m - N_R} \Rightarrow \boldsymbol{\Sigma}_v^{(k)} = \sigma_v^2 \cdot \mathbf{I}_{p \cdot m \times 1} \quad (51)$$

9. Vypočti kovarianční matici chyby odhadu:

$$\mathbf{Var}(\mathbf{e}^{(k)}) = \left( (\mathbf{W}^{(k)})^T (\boldsymbol{\Sigma}_v^{(k)})^{-1} \mathbf{W}^{(k)} \right)^{-1} \quad (52)$$

Diagonální prvky kovarianční matice  $\mathbf{Var}(\mathbf{e}^{(k)})$  udávají rozptyl odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů  $\Delta \boldsymbol{\xi}_R^{(k)}$  v každém kroku kalibrace a mimodiagonální prvky potom závislost přírůstku daného kalibrovaného parametru na ostatních.

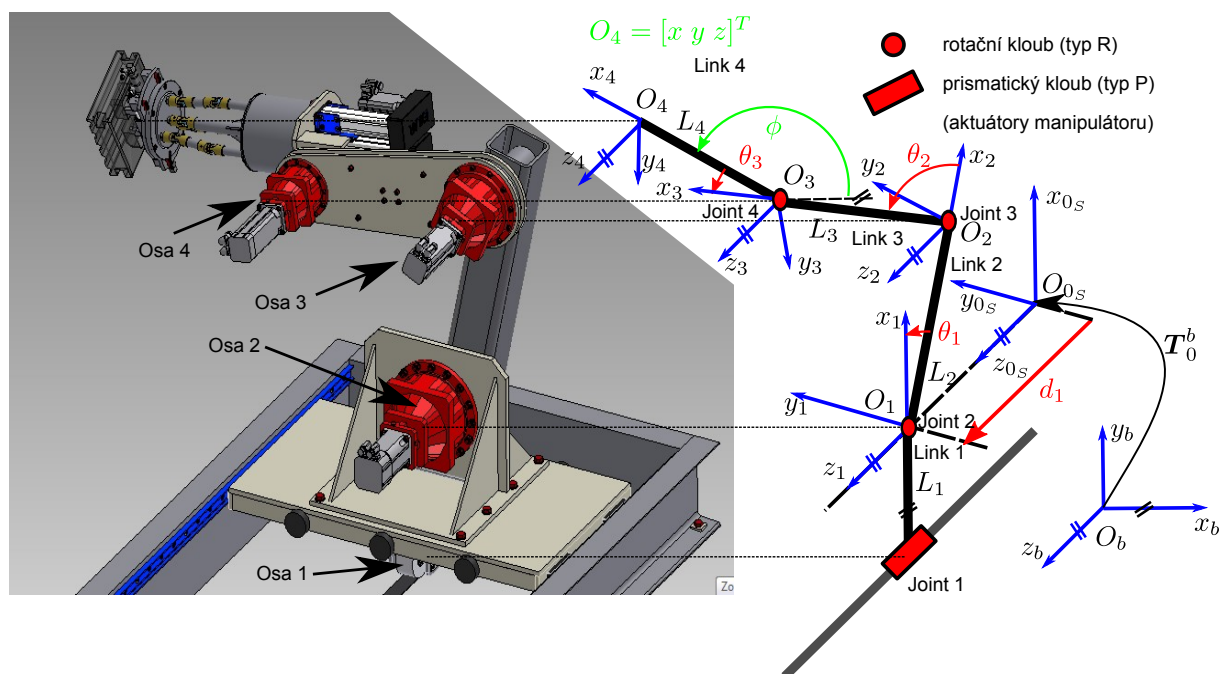
10. Podmínka zastavení algoritmu: Dokud  $\max_{i=1 \dots N_R} \|\Delta \boldsymbol{\xi}_R^{(k)}[i]\| > \epsilon$  potom  $k = k + 1$  a jdi na bod 3, jinak konec algoritmu a výsledná kalibrované parametry jsou:

$$\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}^{(k)} \quad (53)$$

◆

## 6 Simulační model pro část SM manipulátoru AGEBOT

Uvažujme nejprve geometrický popis SM pomocí DH parametrů bez uvažování statických kompenzací základny a koncového efektoru, odvození je velmi podobné jako v [7]<sup>4</sup>. Zavedení s.s. je znázorněno na Obrázku 7. Tabulka 1 udává DH parametry manipulátoru.



Obrázek 7: Geometrický model SM, zavedení s.s. dle DH úmluvy

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$d_1$	0	0	0
2	0	$\theta_2$	$L_2$	0
3	0	$\theta_3$	$L_3$	0
4	0	$\theta_4$	$L_4$	0

Tabulka 1: DH parametry pro SM (tučně vyznačeny geometrické parametry, zbylé parametry jsou považovány za kloubové souřadnice)

Pro účely kalibrace dále uvažujme, že budeme kompenzovat pouze polohu základny manipulátoru, a to pouze její posunutí  $(x_0, y_0, z_0)$ . Transformační matice  $T_0^b$  lze tedy psát jako:

$$T_0^b = \begin{bmatrix} & & & x_0 \\ & \text{Rot}(z, \frac{\pi}{2}) & & y_0 \\ & & & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

kde  $\text{Rot}(z, \frac{\pi}{2})$  reprezentuje natočení s.s.  $F_b$  kolem osy  $z$  o úhel  $\frac{\pi}{2}$  (pevně daná transformace).

Nyní je třeba ze známé kompenzace základny  $T_0^b$  a z aktuálních DH parametrů, Tabulka 1, vypočítat nové DH parametry, které respektují kompenzaci základny, tzn. vypočítat nové parametry

<sup>4</sup>Změna modelu oproti modelu uvedeném literatuře spočívá v odlišném zavedení s.s.  $F_0$  (vypuštění parametru  $L_1$ , který lze zahrnout do kompenzace polohy základny manipulátoru a natočení s.s. kolem osy  $z_0$ )



$d_0, \theta_0, a_0, \alpha_0, d'_1, \theta'_1$  pro transformaci s.s.  $F_b \rightarrow F_0 \rightarrow F_1$ . Toto je možné porovnáním levé a pravé strany rovnice (5), neboť její levou stranu známe díky kompenzační matici  $\mathbf{T}_0^b$  a aktuálním DH parametrům  $\mathbf{T}_1^0 = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_1) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_1) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_1) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_1)$  a pravá strana je funkcí nově hledaných DH parametrů. V našem případě lze ukázat, že hledané DH parametry jsou dány jako:

$$\begin{aligned} d_0 = 0, \quad \alpha_0 = 0, \quad a_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \theta_0 = \text{atan2}\left(\frac{y_0}{a_0}, \frac{x_0}{a_0}\right), \quad d'_1 = z_0 + d_1, \\ \theta'_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \end{aligned} \quad (55)$$

Jelikož,  $d_1$  je kloubová souřadnice manipulátoru, hodnotu posunutí základny  $z_0$  lze chápat jako jednu ze složek offsetu této kloubové souřadnice (lze využít při odhadu nominální hodnoty parametrů). Je zřejmé, že DH parametry  $\theta'_1$  a  $\theta_0$  jsou závislé. Tedy výsledné DH parametry SM respektující kompenzaci polohy základny jsou shrnuty v Tabulce 2. Tučně jsou zvýrazněny geometrické parametry (tyto budou předmětem kalibrace), zbývající DH parametry reprezentují kloubové souřadnice manipulátoru. Poznamenejme, že počet geometrických parametrů je výrazně nižší, pouhých 5 parametrů, než stanovuje rovnice (8),  $N = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 6 = 20$ , neboť neuvažujeme libovolnou polohu základny (pouze translace), neuvažujeme kompenzaci koncového efektoru a osy kloubů nejsou voleny v obecné poloze (jsou navzájem rovnoběžné).

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	0	$\theta_0$	$\mathbf{a}_0$	0
1	$d'_1$	$\frac{\pi}{2} - \theta_0$	0	0
2	0	$\theta_2$	$\mathbf{L}_2$	0
3	0	$\theta_3$	$\mathbf{L}_3$	0
4	0	$\theta_4$	$\mathbf{L}_4$	0

Tabulka 2: Upravené DH parametry pro SM (geometrický parametr  $\frac{\pi}{2} - \theta_0$  se nekalibruje - je závislý)

Definujme kloubové souřadnice manipulátoru jako:

$$\mathbf{Q} = [ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 ]^T = [ d'_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 ]^T \quad (56)$$

Souřadnice aktuátorů manipulátoru lze psát tedy, viz rovnice (9):

$$\mathbf{Q}_m = \text{diag}(\mathbf{K})^{-1} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{off}) = [ q_{m1} \quad q_{m2} \quad q_{m3} \quad q_{m4} ]^T \quad (57)$$

Geometrické návrhové parametry (včetně offsetů a převodových poměrů):

$$\boldsymbol{\xi} = [ q_{1\ off} \quad q_{2\ off} \quad q_{3\ off} \quad q_{4\ off} \quad k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad \theta_0 \quad a_0 ]^T \quad (58)$$

A zobecněné souřadnice (poloha koncového efektoru):

$$\mathbf{X} = [ x \quad y \quad z \quad \phi ]^T \quad (59)$$

Dále předpokládejme, že známe řešení přímé  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$  i inverzní  $\mathbf{Q}_m = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$  kinematické úlohy. Lze ukázat, že obě úlohy lze řešit analyticky [7].

## 7 Metody kalibrace pro SM

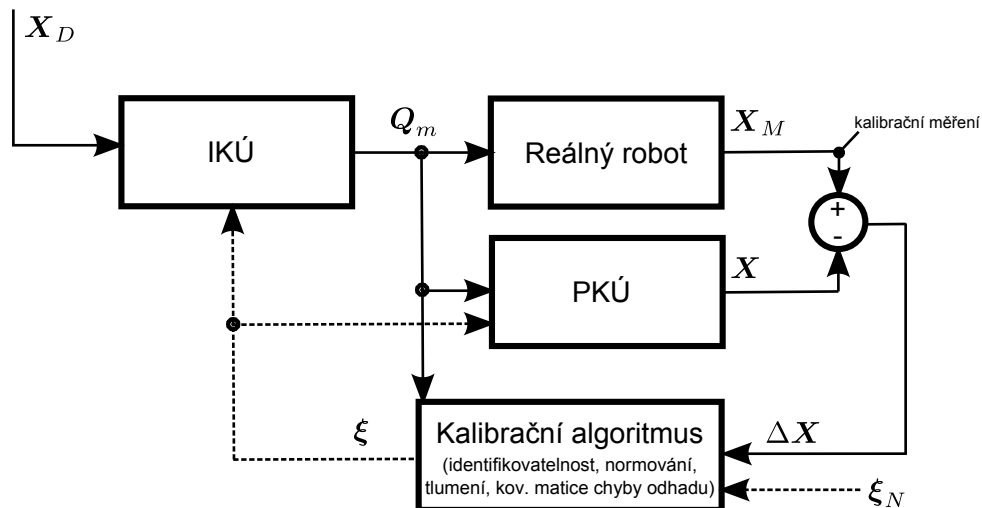
V následujícím textu budou představeny některé z možným metod kalibrace SM. Kalibrační metody se od sebe liší především metodou měření polohy koncového efektoru. Základní metody, jak již bylo nastíněno v Kapitole 3, využívají kompletní či redukované měření polohy koncového efektoru. Existuje však celá řada modifikovaných metod od metod využívajících měření vzdáleností koncového efektoru až po plně autokalibrační metody, které ke své funkci nevyžadují externí kalibrační snímače polohy.

### 7.1 Měření kompletní polohy koncového efektoru

V uvedeném přístupu kalibrace předpokládáme možnost kompletního měření polohy koncového efektoru. Některé z instrumentací, které lze využít pro taková měření lze nalézt např. v [6], [9]. Poznamenejme, že zatímco měření obecné translační polohy v prostoru představuje poměrně komplexní problém (využití theodolitů, trasování koncového efektoru pomocí mobilních laserových snímačů, atd.), k měření orientace lze s výhodou využít v současnosti výrazně rozvíjející se technologie na principu tzv. MEMS snímačů (Micro-Electro-Mechanical Systems) [3].

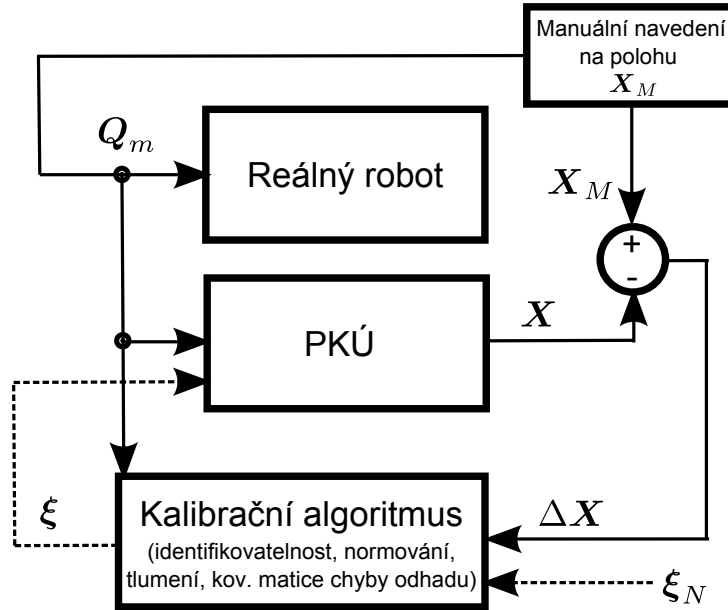
Pro případ kompletního měření polohy koncového efektoru  $p = 4$  lze ke stanovení kalibračního jakobiánu  $\Phi(Q_m, \xi)$  využít přímo rovnici (25), tedy kalibrační jakobián je přímo roven zobecněnému jakobiánu  $\Phi(Q_m, \xi) = \Psi(Q_m, \xi)$ . Matice pozorování  $\mathbf{W}$  (29) je složena z kalibračních jakobiánů  $\Phi(Q_m, \xi)$  pro  $m$  měření polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_M^i$  (a odpovídajících poloh aktátorů  $Q_m^i$ ),  $i = 1 \dots m$ . Obrázek 8 schématicky znázorňuje princip kalibrace pro úplné měření polohy koncového efektoru. Metoda umožňuje kalibrovat všechny geometrické parametry manipulátoru, tedy  $N_R = N = 13$  (všechny parametry jsou identifikovatelné). Minimální počet poloh koncového efektoru, ve kterých je třeba provést měření je dáno rozměrem matice pozorování  $\mathbf{W} = [m \cdot p \times N] \Rightarrow m \geq \frac{N}{p}$ . Experimentálně bylo ukázáno [9], že dostačující počet měření pro dobrou podmíněnost úlohy je cca pětikrát vyšší než minimální hodnota. Tedy  $m = 17$ .

$$m \geq \frac{5N_R}{p} \quad (60)$$



Obrázek 8: Metoda kalibrace: Kompletní měření polohy koncového efektoru.  $\mathbf{X}_D$  jsou požadované polohy koncového efektoru pro měření,  $\xi_N$  jsou nominální hodnoty kalibrovaných parametrů. Složka chyby orientace koncového efektoru je v tomto případě triviální, neboť je dána pouze rozdílem úhlů  $\phi_M - \phi$ , proto lze počítat výslednou chybu polohy koncového efektoru jednoduše jako  $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_M - \mathbf{X}$ .

Alternativním přístupem může být využití přesných kalibračních poloh (např. kalibrační rám), do kterých musí být manuálně koncový efektor naveden. Tím lze eliminovat potřebu přesného kalibračního snímače koncového efektoru.



Obrázek 9: Metoda kalibrace: Využití přesných kalibrovaných poloh kalibračního rámu.  $\mathbf{X}_M$  jsou polohy na kalibračním rámu, kam je koncový efektor manuálně naveden,  $\xi_N$  jsou nominální hodnoty kalibrovaných parametrů.

Výsledky kalibrace parametrů jsou znázorněny v následujících obrázcích. Generované polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_D$  byly generovány náhodně v intervalech:

$$x \in \langle x_0 + 1, x_0 + 1.5 \rangle, \quad y \in \langle y_0 + 0.5, y_0 + 1 \rangle, \\ z \in \langle z_0 - 0.75, z_0 + 0.75 \rangle, \quad \phi \in \left\langle \frac{-20}{180}\pi, \frac{20}{180}\pi \right\rangle$$

kde  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.4$ ,  $z_0 = 0$  jsou skutečné hodnoty posunutí základny manipulátoru (kompenzace základny  $\Rightarrow$  skutečné hodnoty kalibrovaných parametrů  $a_0, \theta_0$ ).

Skutečné hodnoty geometrických návrhových parametrů manipulátoru:

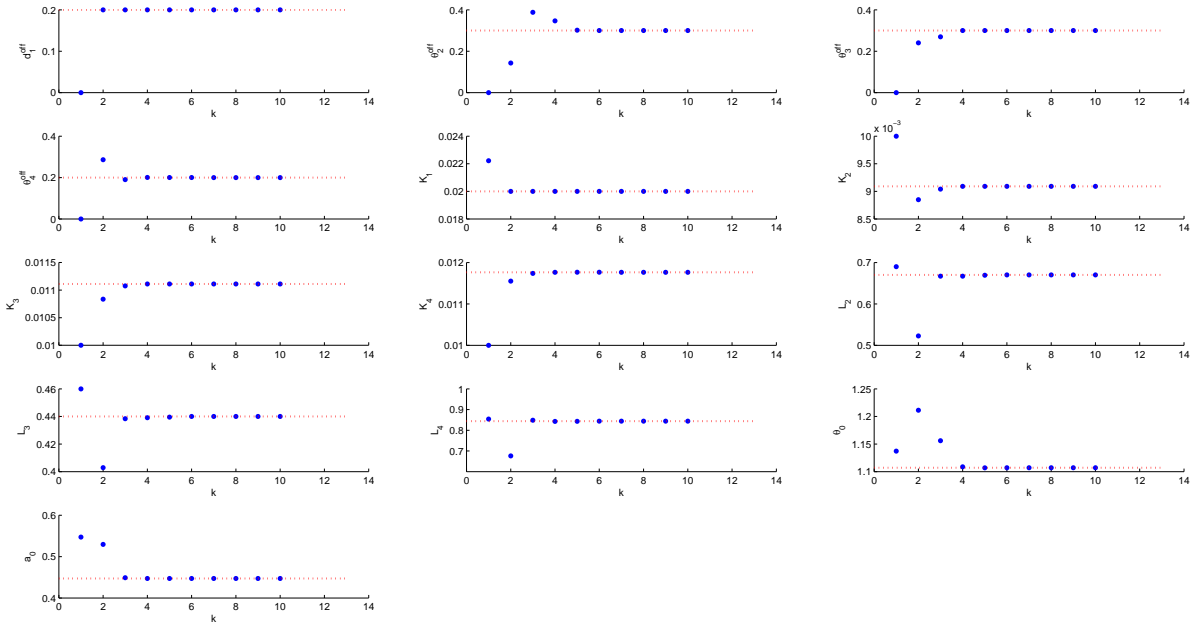
$$\xi^* = \left[ 0.2 \quad 0.3 \quad 0.3 \quad 0.2 \quad \frac{1}{50} \quad \frac{1}{110} \quad \frac{1}{90} \quad \frac{1}{85} \quad 0.67 \quad 0.44 \quad 0.844 \quad 1.1071 \quad 0.44721 \right]^T$$

Nominální hodnoty geometrických návrhových parametrů manipulátoru:

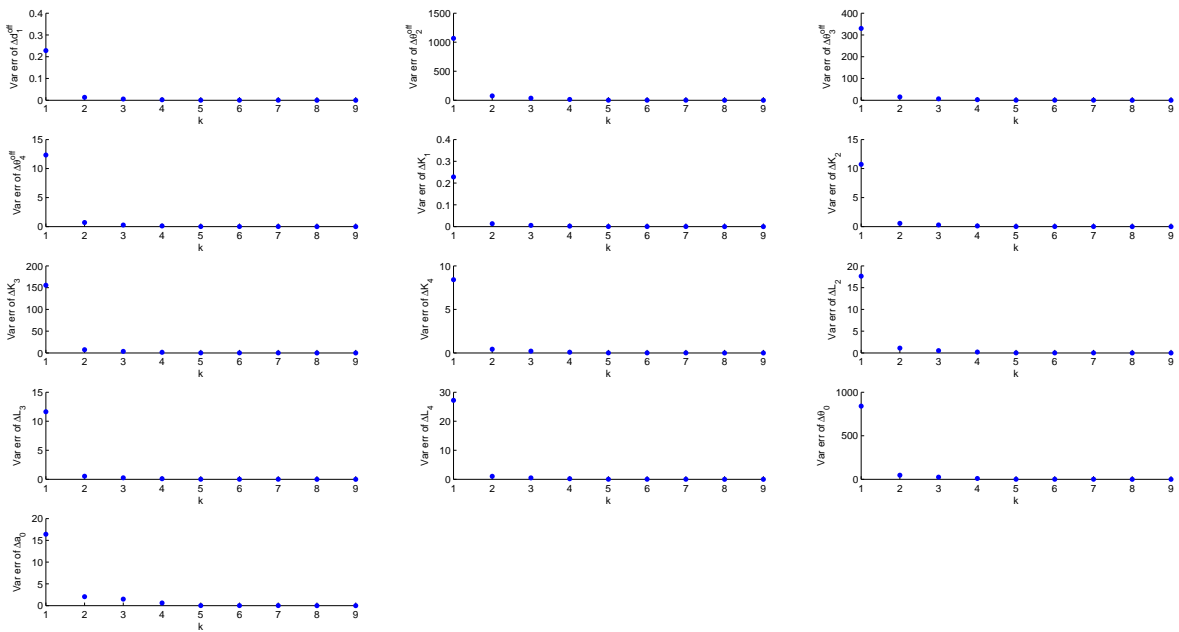
$$\xi_N = \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{45} \quad \frac{1}{100} \quad \frac{1}{100} \quad \frac{1}{100} \quad 0.69 \quad 0.46 \quad 0.854 \quad 1.1371 \quad 0.54721 \right]^T$$

Koeficient tlumení  $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$ . Podmínka zastavení algoritmu  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-10}$ .

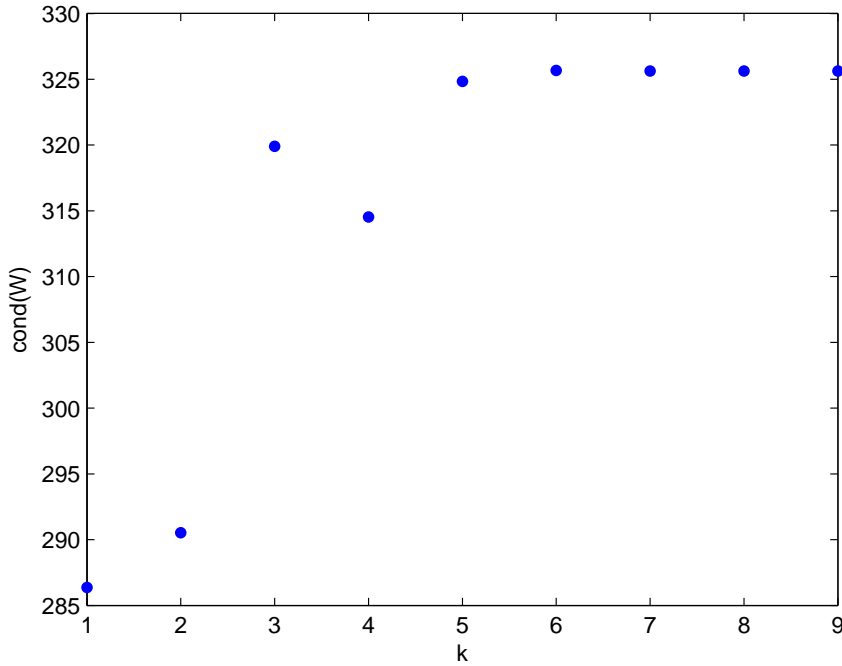
Poznamenejme, že pokud nebude řečeno jinak, uvedené parametry nastavení kalibračního algoritmu zůstávají stejné, pro všechny následující kalibrační metody.



Obrázek 10: Průběh kalibrovaných parametrů  $\hat{\xi}^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\xi^*$ .



Obrázek 11: Průběh rozptylu odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů  $\text{Var}(\hat{e}^{(k)})$



Obrázek 12: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$

## 7.2 Měření vzdálenosti mezi koncovým efektozem a daným referenčním bodem

Uvedená metoda využívá pouze měření vzdálenosti mezi koncovým efektozem  $\mathbf{X}_M[1 : 3]$  a daným referenčním bodem  $\mathbf{X}_{D_{REF}}[1 : 3]$  v prostoru zobecněných souřadnic (pouze translace). Kalibrační snímač vzdálenosti je jedním měřicím koncem uchycen do referenčního bodu  $\mathbf{X}_{D_{REF}}$ . Do tohoto bodu musí být před zahájením automatického sběru dat naveden koncový efektor manipulátoru, aby bylo možné odečíst skutečné hodnoty poloh aktuátorů  $\mathbf{Q}_{m_{REF}}$ . Druhý konec kalibračního snímače vzdálenosti je upevněn na koncový efektor. Během procesu kalibrace je manipulátor postupně naváděn do požadovaných poloh  $\mathbf{X}_D$  prostřednictvím jejich přepočtu na polohu aktuátorů  $\mathbf{Q}_m$  pomocí IKÚ. Princip kalibrace je znázorněn na Obrázku 13.

Nelineární kalibrační model lze vyjádřit následující rovnicí:

$$(\mathbf{X}_M[1 : 3] - \mathbf{X}_{D_{REF}}[1 : 3])^T \cdot (\mathbf{X}_M[1 : 3] - \mathbf{X}_{D_{REF}}[1 : 3]) = \underbrace{\|\mathbf{X}_M[1 : 3] - \mathbf{X}_{D_{REF}}[1 : 3]\|^2}_{D_M^2} \quad (61)$$

kde  $\mathbf{X}_M = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}^*)$ ,  $\mathbf{X}_{D_{REF}} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{m_{REF}}, \boldsymbol{\xi}^*)$  a  $D_M$  je měřená hodnota vzdálenosti mezi aktuální polohou koncového efektoru a referenčním bodem.

Linearizovanou podobu kalibračního modelu lze získat Taylorovým rozvojem levé strany rov-

nice (61) v bodě  $\xi^* = \xi + \Delta\xi$ :

$$\underbrace{(\mathbf{X}[1:3] - \mathbf{X}_{REF}[1:3])^T \cdot (\mathbf{X}[1:3] - \mathbf{X}_{REF}[1:3])}_{D^2} + 2 \cdot (\mathbf{X}[1:3] - \mathbf{X}_{REF}[1:3])^T \cdot \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_M[1:3]}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^*=\xi}}_{\Psi(\mathbf{Q}_m, \xi)[1:3,:]} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{DREF}[1:3]}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^*=\xi}}_{\Psi(\mathbf{Q}_{mREF}, \xi)[1:3,:]} \right) \cdot \Delta\xi = D_M^2 \quad (62)$$

kde  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \xi)$ ,  $\mathbf{X}_{REF} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{mREF}, \xi)$  a  $D$  je rekonstruovaná hodnota vzdálenosti  $D_M$ .

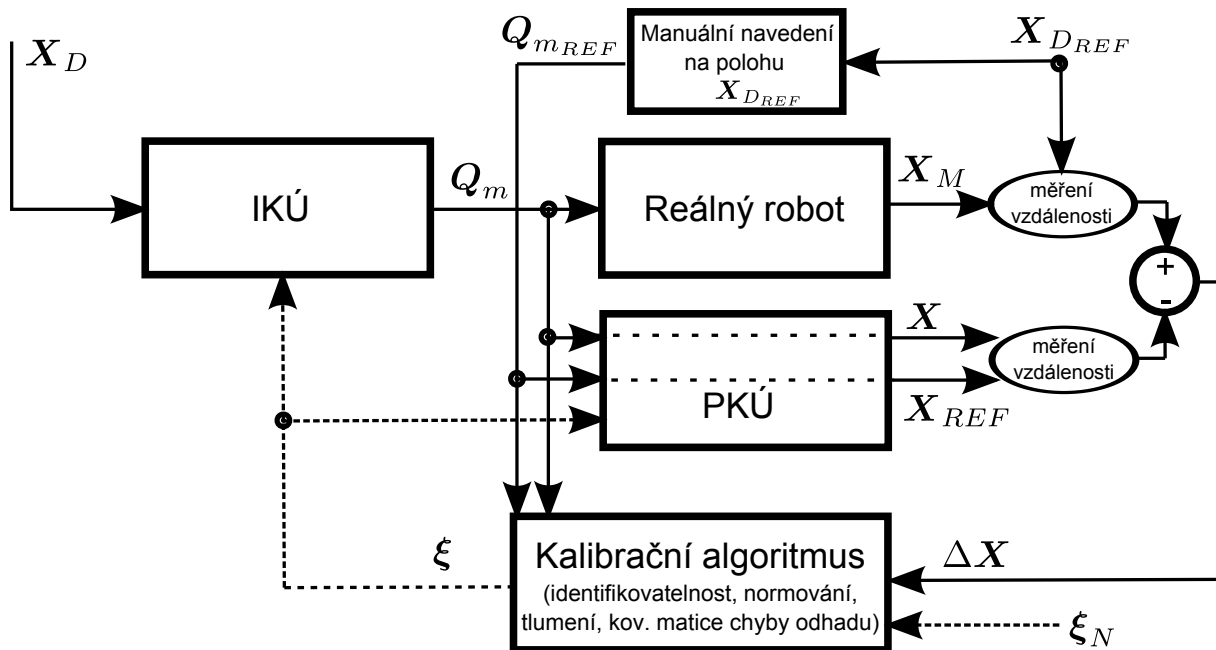
Rovnici (62) lze dále upravit:

$$\underbrace{2 \cdot (\mathbf{X}[1:3] - \mathbf{X}_{REF}[1:3])^T \cdot \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_M[1:3]}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^*=\xi}}_{\Psi(\mathbf{Q}_m, \xi)[1:3,:]} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{DREF}[1:3]}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^*=\xi}}_{\Psi(\mathbf{Q}_{mREF}, \xi)[1:3,:]} \right)}_{\Phi(\mathbf{Q}_m, \mathbf{Q}_{mREF}, \xi)} \cdot \Delta\xi = \underbrace{D_M^2 - D^2}_{\Delta X} \quad (63)$$

Modifikovanou chybu polohy koncového efektoru  $\Delta X$  lze v tomto případě vyčíslit jako rozdíl kvadrátu měřené vzdálenosti referenčního bodu a polohy koncového efektoru (měřeno kalibračním snímačem vzdálenosti) a kvadrátu rekonstruované vzdálenosti prostřednictvím přepočtu poloh aktuátorů pomocí PKÚ. Kalibrační jakobián  $\Phi(\mathbf{Q}_m, \mathbf{Q}_{mREF}, \xi)$  je tedy funkcí prvků zobecněného jakobiánu  $\Psi(\mathbf{Q}_m, \xi)$ ,  $\Psi(\mathbf{Q}_{mREF}, \xi)$  viz (24):

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{Q}_m, \mathbf{Q}_{mREF}, \xi) &= \\ &= 2 \cdot (\mathbf{X}[1:3] - \mathbf{X}_{REF}[1:3])^T \cdot \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_M[1:3]}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^*=\xi}}_{\Psi(\mathbf{Q}_m, \xi)[1:3,:]} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{DREF}[1:3]}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^*=\xi}}_{\Psi(\mathbf{Q}_{mREF}, \xi)[1:3,:]} \right) \end{aligned} \quad (64)$$

Matice pozorování  $\mathbf{W}$  je dána opět rovnicí (29) a agregovaný vektor chyby měření rovnicí (28).

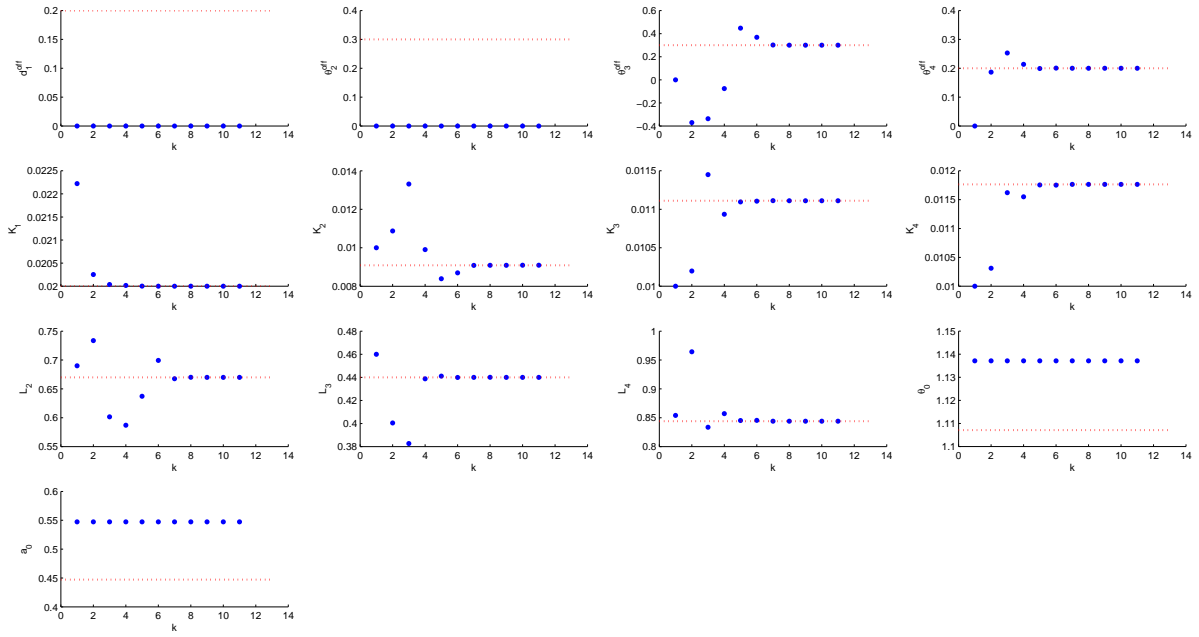


Obrázek 13: Metoda kalibrace: Měření vzdálenosti koncového efektoru od referenční polohy.

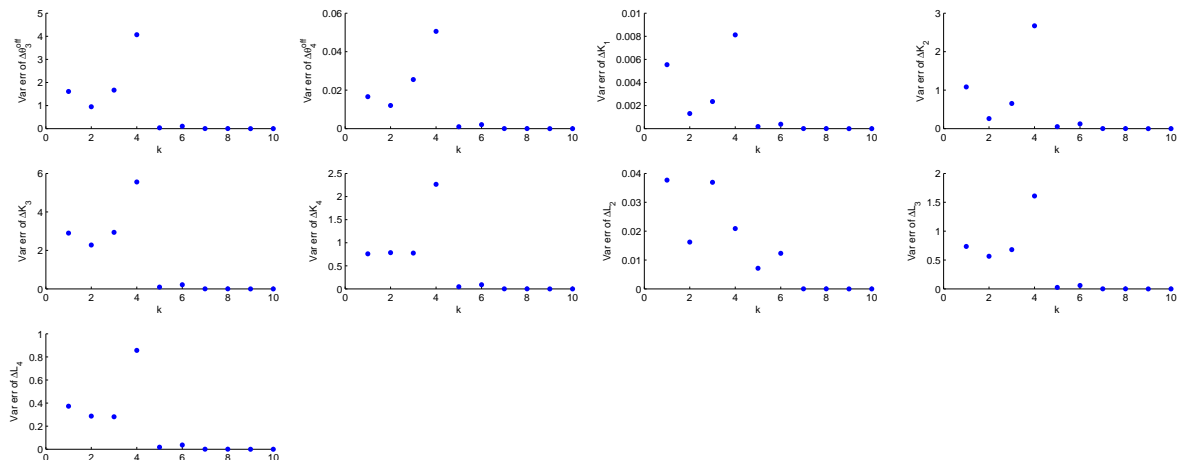
Referenční poloha  $\mathbf{X}_{DREF}$  byla volena následovně: Poznamenejme, že požadované natočení  $\phi$  v zobecněných souřadnicích nemá vliv na kalibraci a může být u referenčního bodu voleno libovolně:

$$\mathbf{X}_{DREF} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Koeficient tlumení byl volen  $\lambda = 1 \cdot 10^{-2}$ . Analýzou matice pozorování  $\mathbf{W}$  lze ukázat, že neidentifikovatelné parametry jsou  $q_{1\ off}$ ,  $q_{2\ off}$ ,  $\theta_0$ ,  $a_0$ , tedy  $N_R = 9$ . Vektor modifikované chyby polohy koncového efektoru  $\Delta \mathbf{X}$  (měření pouze vzdálenosti) je jednodimenzionálním vektorem, tedy  $p = 1$ . Minimální doporučený počet měření je tak dle (60)  $m = 45$ . Výsledky kalibračního algoritmu jsou znázorněny v následujících obrázcích. Je patrné, že přesto, že jsou některé parametry neidentifikovatelné, ostatní parametry manipulátoru jsou nakalibrovány na své skutečné hodnoty.

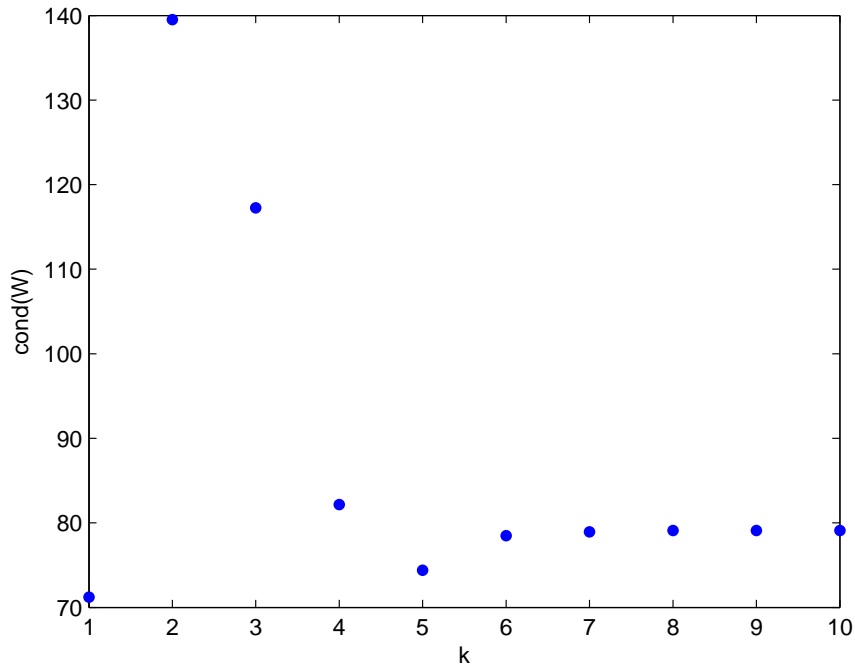


Obrázek 14: Průběh kalibrovaných parametrů  $\hat{\xi}^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\check{\xi}^*$ .



Obrázek 15: Průběh rozptylu odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů  $\text{Var}(e^{(k)})$

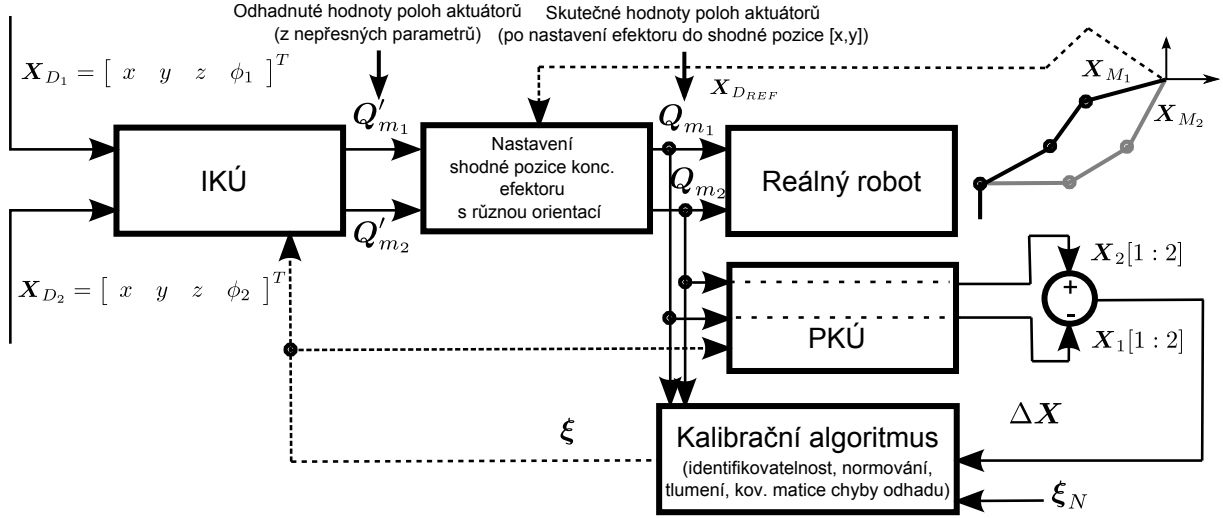




Obrázek 16: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$

### 7.3 Autokalibrační metoda: využití redundance

Redundantním manipulátorem rozumíme takový manipulátor, kde je počet stupňů volnosti koncového efektoru nižší než počet nezávislých aktuátorů. V některých případech lze nahlížet na původně neredundantní manipulátor, v našem případě SM, který má 4 stupně volnosti koncového efektoru (zobecněné souřadnice  $x, y, z, \phi$ ) a 4 nezávislé aktuátory, jako na manipulátor redundantní. Toto lze jednoduše provést za předpokladu, že vypustíme některou ze zobecněných souřadnic, v našem případě souřadnici natočení koncového efektoru  $\phi$ . Pro redundantní manipulátory platí, že mohou libovolnou polohu koncového efektoru dosáhnout nekonečně mnoha způsoby. Pokud budeme nadále uvažovat, že poloha koncového efektoru SM bude popsána pouze svou pozicí  $(x, y, z)$ , může být každá tato poloha dosažena s libovolnou orientací koncového efektoru. Jinými slovy, řešení IKÚ  $\mathbf{F}^{-1} : [x \ y \ z]^T \mapsto \mathbf{Q}_m$  má nekonečně mnoho řešení.



Obrázek 17: Metoda kalibrace: Autokalibrace - využití redundance.

Kalibrační algoritmus je založen na principu navedení koncového efektoru manipulátoru vždy do dvojice stejných pozic  $[x \ y \ z]^T$  s rozdílnou orientací  $\phi$ . Vzhledem k tomu, že zvolené pozice mohou být umístěny libovolně, pro uvedenou kalibrační metodu není zapotřebí jakýkoliv kalibrační senzor polohy koncového efektoru. Realizace měření může být např. založena na principu dotyku koncového efektoru jednoho libovolného bodu v pracovním prostoru při dvou různých orientacích  $\phi \Rightarrow$  získáme dvě hodnoty poloh aktuátorů  $Q_{m_1}, Q_{m_2}$ , tedy  $X_{M_1}[4] \neq X_{M_2}[4]$ . Schéma kalibrace je znázorněno na Obrázku 17. Nelineární kalibrační model tedy musí splňovat:

$$\mathbf{X}_{M_1}[1:3] - \mathbf{X}_{M_2}[1:3] = 0 \quad (65)$$

kde  $\mathbf{X}_{M_1} = \mathbf{F}(Q_{m_1}, \xi^*)$ ,  $\mathbf{X}_{M_2} = \mathbf{F}(Q_{m_2}, \xi^*)$  označují dvě shodné pozice koncového efektoru s různou orientací  $\phi_1$  a  $\phi_2$ .

Taylorovým rozvojem levé strany rovnice (65) v bodě  $\xi^* = \xi + \Delta\xi$  dostáváme:

$$\mathbf{X}_1[1:3] - \mathbf{X}_2[1:3] + \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{M_1}}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^*=\xi}}_{\Psi(Q_{m_1}, \xi)[1:3,:]} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{M_2}}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^*=\xi}}_{\Psi(Q_{m_2}, \xi)[1:3,:]} \right) \cdot \Delta\xi = 0 \quad (66)$$

kde  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{F}(Q_{m_1}, \xi)$ ,  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{F}(Q_{m_2}, \xi)$ .

Rovnici (66) lze dále upravit na:

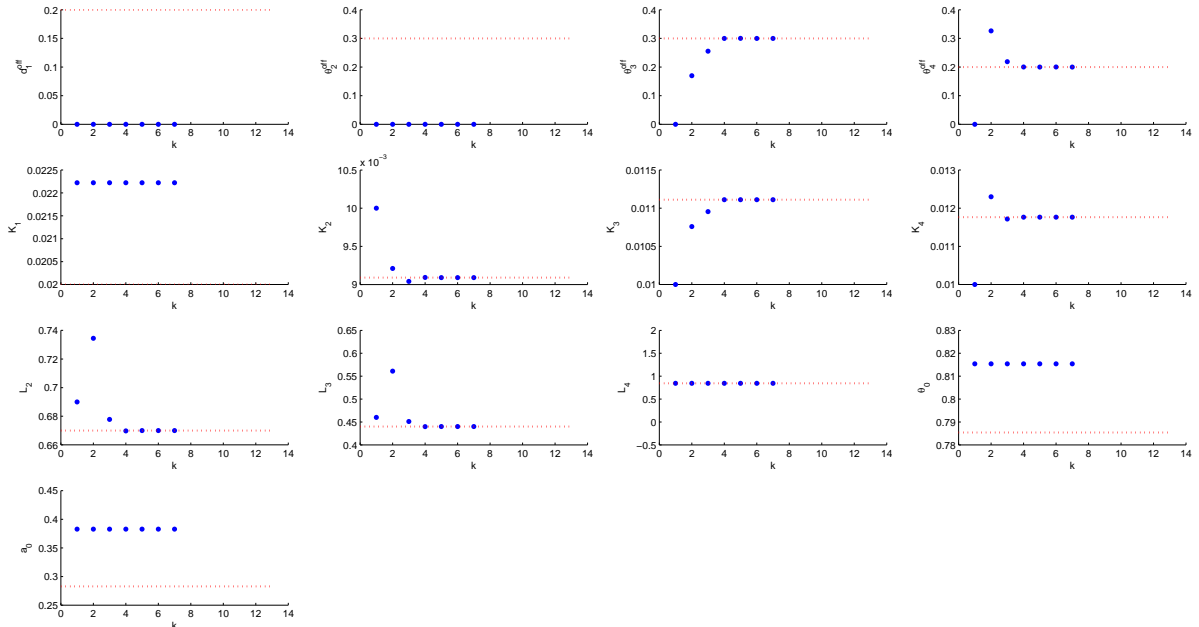
$$\underbrace{\left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{M_1}}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^*=\xi}}_{\Psi(Q_{m_1}, \xi)[1:3,:]} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{M_2}}{\partial \xi^*} \Big|_{\xi^*=\xi}}_{\Psi(Q_{m_2}, \xi)[1:3,:]} \right)}_{\Phi(Q_{m_1}, Q_{m_2}, \xi)} \cdot \Delta\xi = \underbrace{\mathbf{X}_2[1:3] - \mathbf{X}_1[1:3]}_{\Delta\mathbf{X}} \quad (67)$$

Bohužel lze ukázat, že poslední řádek kalibračního jakobiánu  $\Phi(Q_{m_1}, Q_{m_2}, \xi)$  obsahuje pouze jediný nenulový prvek  $Q_{m_1}[1] - Q_{m_2}[1]$ , tedy matice pozorování  $\mathbf{W}$  by byla vždy singulární. Proto musí být kalibrační jakobián zredukován vypuštěním zmíněného řádku, viz rovnice (66). Jinými slovy, autokalibrace je prováděna najetím koncovým efektoem do pozice pouze se stejnými hodnotami souřadnic  $x, y$  s dvěma různými orientacemi  $\phi_1, \phi_2$  bez ohledu na to, jaká je

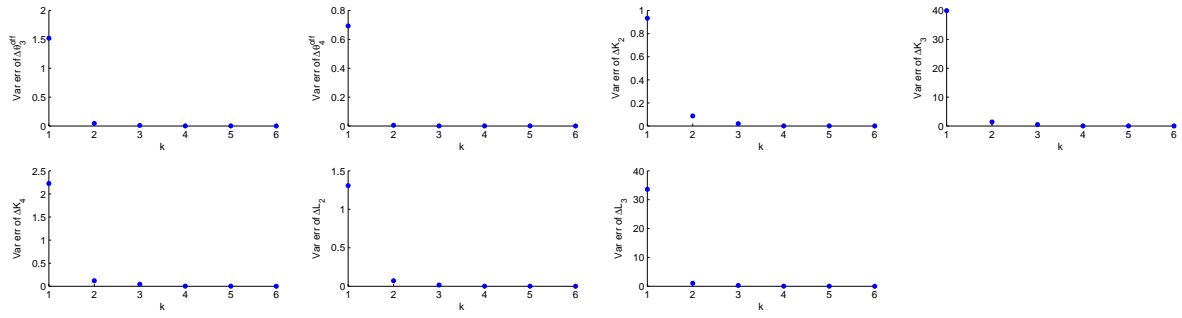
hodnota souřadnice  $z$  (může být konstantní i různá pro všechna měření). Kalibrační jakobián a vektor chyby měření tedy bude:

$$\Phi(\mathbf{Q}_{m_1}, \mathbf{Q}_{m_2}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{M_1}}{\partial \boldsymbol{\xi}^*} |_{\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}}}_{\Psi(\mathbf{Q}_{m_1}, \boldsymbol{\xi})[1:2,:]} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{M_2}}{\partial \boldsymbol{\xi}^*} |_{\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}}}_{\Psi(\mathbf{Q}_{m_2}, \boldsymbol{\xi})[1:2,:]} \\ \Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_2[1:2] - \mathbf{X}_1[1:2] \end{pmatrix}, \quad (68)$$

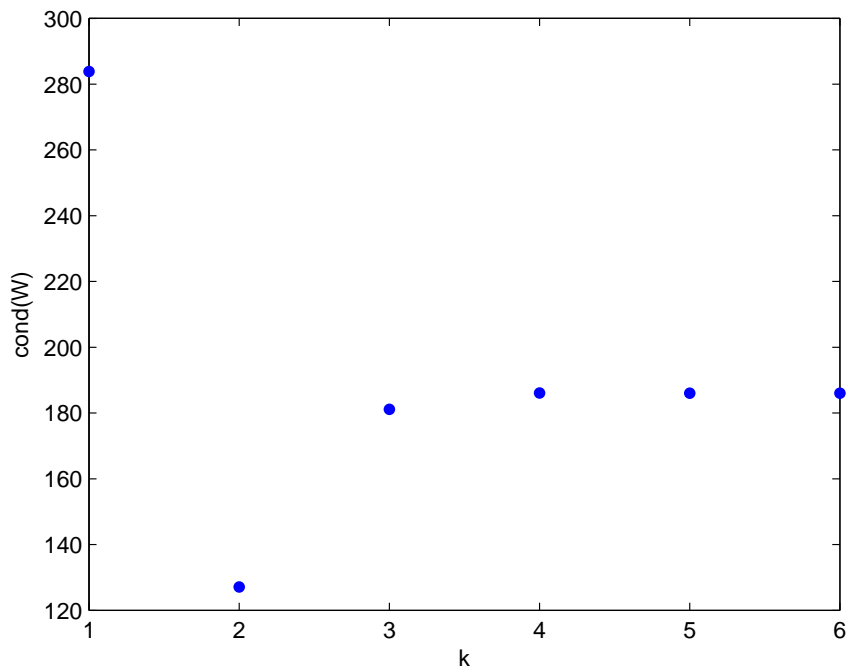
Modifikovaná chyba polohy koncového efektoru  $\Delta \mathbf{X}$  je dána rozdílem pozice koncového efektoru pro dvě požadované orientace. Matice pozorování  $\mathbf{W}$  je dána opět rovnicí (29) a agregovaný vektor chyby měření rovnicí (28). Analýzou matice pozorování  $\mathbf{W}$  lze ukázat, že neidentifikovatelné parametry jsou  $q_{1\ off}$ ,  $q_{2\ off}$ ,  $K_1$ ,  $L_4$ ,  $\theta_0$ ,  $a_0$ , tedy  $N_R = 7$ . Vektor modifikované chyby polohy koncového efektoru má dvě složky,  $p = 2$ , tedy minimální doporučený počet měření je dle (60)  $m = 18$ . Na Obrázcích 18-20 jsou znázorněny výsledky kalibračního algoritmu za předpokladu, že hodnotu geometrického parametru  $L_4$  známe přesně. V tomto případě proběhne kalibrace korektně a všechny identifikovatelné parametry jsou nakalibrovány na správné hodnoty. Obrázek 21 ukazuje případ, kdy neznáme přesně správnou hodnotu geometrického neidentifikovatelného parametru  $L_4$  (parametr je ponechán na své nominální hodnotě, viz Kapitola 7.1). Je patrné, že parametr ovlivňuje kalibrační model a kalibrace ostatních identifikovatelných parametrů skončí na nesprávných hodnotách. Tento fakt vyplývá z podstaty kalibrační metody, neboť ostatní parametry jsou nakalibrovány na takové hodnoty, aby platila rovnice (65). Tedy pro hodnoty aktuátorů  $\mathbf{Q}_{m_1}$  a  $\mathbf{Q}_{m_2}$  dostáváme stejnou hodnotu pozice  $(x,y)$  koncového efektoru, nicméně tato pozice bude odlišná od pozice, kterou by dosáhl *reálný* manipulátor, jehož hodnota parametru  $L_4$  je odlišná a pevně dána nezávisle na hodnotě nominální. Jinými slovy, simulační model manipulátoru je „překalibrován“ na odlišný model, který vyhovuje kalibrační metodě, nicméně s reálným manipulátorem nekoresponduje. Uvedená metoda kalibrace je tak pro reálné aplikace v podstatě nepoužitelná.



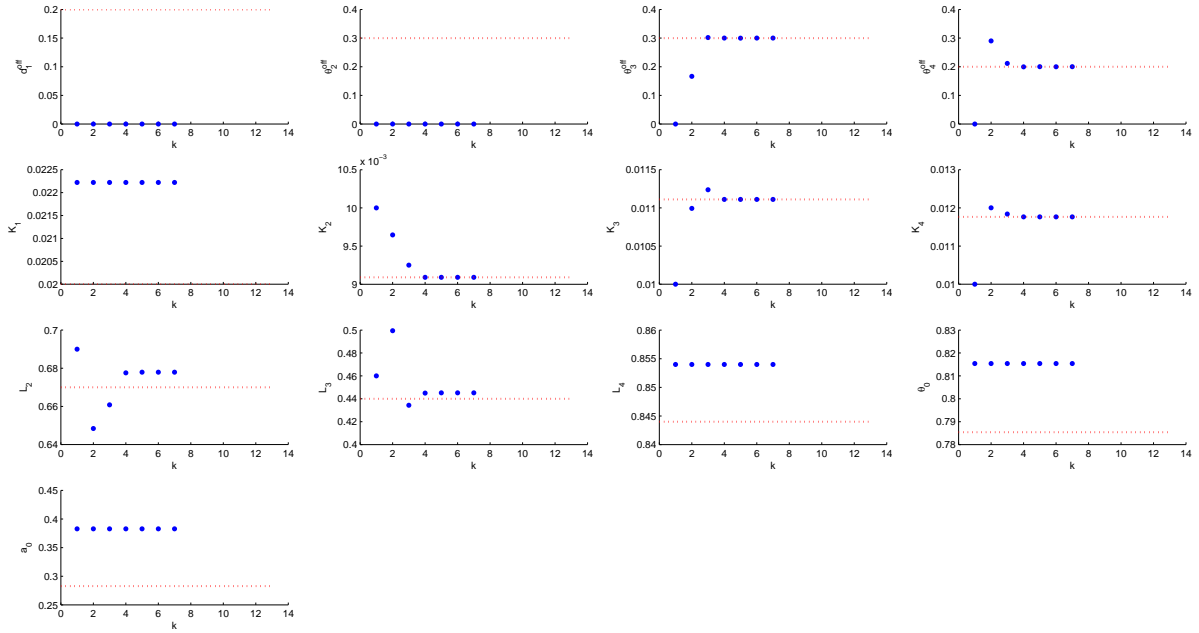
Obrázek 18: Průběh kalibrování parametrů  $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\boldsymbol{\xi}^*$ . Neidentifikovatelný parametr  $L_4$  je znám přesně.



Obrázek 19: Průběh rozptylu odhadu přírůstků kalibrovaných parametrů  $\text{Var}(e^{(k)})$ . Neidentifikovatelný parametr  $L_4$  je znám přesně.



Obrázek 20: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$ . Neidentifikovatelný parametr  $L_4$  je znám přesně.

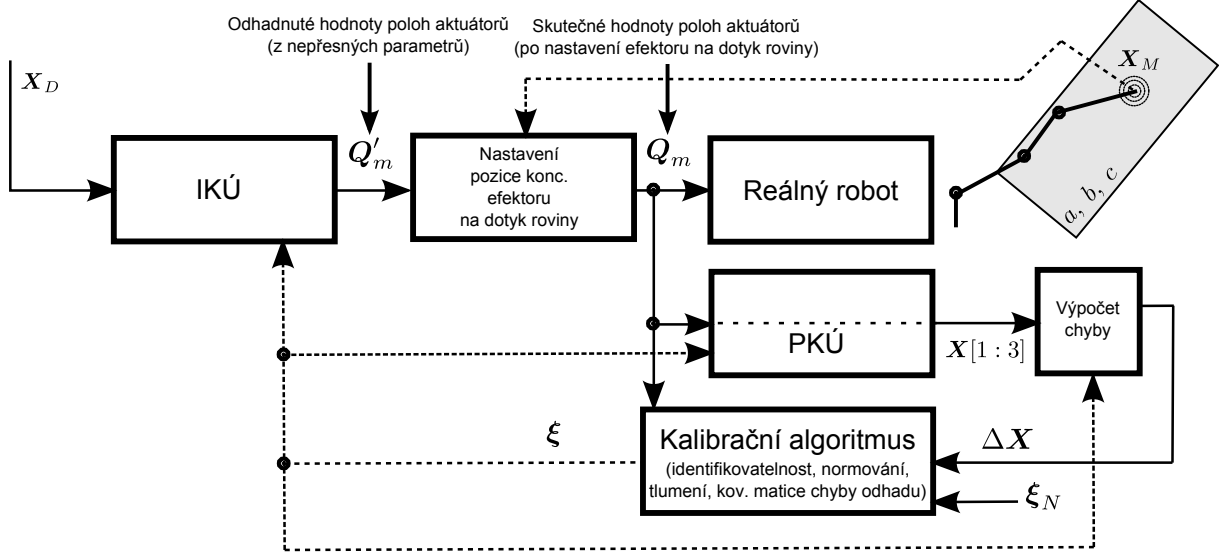


Obrázek 21: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\xi^*$ . Neidentifikovatelný parametr  $L_4$  je ponechán na nominální hodnotě.

#### 7.4 Metoda kalibrace využívající omezení pohybu koncového efektoru

Tato metoda kalibrace tvoří jakýsi kompromis mezi kompletním měřením přesné polohy koncového efektoru, viz Kapitola 7.1 a autokalibračními metodami, jejichž zástupce je představen v Kapitole 7.3. Zatímco v prvním případě musíme znát přesnou polohu koncového efektoru, případně mít k dispozici *přesné* (kalibrované) body dotyku (kalibrační rám), na které musí být manipulátor naveden, u autokalibrační metody je nutné navádět koncový efektor do jedné *libovolné* pozice  $(x, y)$  v pracovním prostoru vždy ve dvou různých orientacích  $\phi$ . Základní myšlenkou uvedené metody je omezit pohyb koncového efektoru na pohyb po nějaké nadploše pracovního prostoru. V našem případě předpokládáme, že pohyb koncového efektoru manipulátoru je omezen na pohyb po rovinné ploše dané parametry  $a, b, c$ . Schéma kalibračního algoritmu je znázorněno na Obrázku 22. Vzhledem k tomu, že v obecném případě neznáme parametry roviny, lze je zahrnout do vektoru kalibrovaných parametrů  $\xi$ . Nový vektor kalibrovaných parametrů je tedy dán jako:

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ \xi \end{bmatrix} \quad (69)$$



Obrázek 22: Metoda kalibrace: Omezení pohybu koncového efektoru.

Nelineární kalibrační model je tak odvozen z podmínky, že skutečná pozice koncového efektoru musí vždy splňovat rovnici roviny daných parametrů:

$$\begin{aligned} [a^* \quad b^* \quad c^*] \cdot \mathbf{X}_M[1:3] + 1 &= 0 \\ \bar{\xi}^*[1:3]^T \cdot \mathbf{X}_M[1:3] + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (70)$$

kde  $\mathbf{X}_M = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \bar{\xi}^*)$ .

Taylorovým rozvojem levé strany rovnice (70) v bodě  $\bar{\xi}^* = \bar{\xi} + \Delta\bar{\xi}$  dostáváme:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}[1:3] \cdot \mathbf{X}[1:3] + 1 + \frac{\partial (\bar{\xi}^*[1:3]^T \cdot \mathbf{X}_M[1:3] + 1)}{\partial \bar{\xi}^*} \Big|_{\bar{\xi}^* = \bar{\xi}} \cdot \Delta\bar{\xi} &= 0 \\ \bar{\xi}[1:3] \cdot \mathbf{X}[1:3] + 1 + [\mathbf{X}[1:3]^T \quad \mathbf{0}_{1 \times 13}] \cdot \Delta\bar{\xi} + \bar{\xi}[1:3]^T \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_M[1:3]}{\partial \bar{\xi}^*}}_{[0_{3 \times 3} \quad \Psi(\mathbf{Q}_m, \xi)]} \Big|_{\bar{\xi}^* = \bar{\xi}} \cdot \Delta\bar{\xi} &= 0 \\ \bar{\xi}[1:3] \cdot \mathbf{X}[1:3] + 1 + [[\mathbf{X}[1:3]^T \quad \mathbf{0}_{1 \times 13}] + \bar{\xi}[1:3]^T \cdot [0_{3 \times 3} \quad \Psi(\mathbf{Q}_m, \xi)]] \cdot \Delta\bar{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (71)$$

kde  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \bar{\xi})$ .

Rovnici (71) lze dále upravit následovně:

$$\underbrace{[\mathbf{X}[1:3]^T \quad \bar{\xi}[1:3]^T \cdot \Psi(\mathbf{Q}_m, \xi)]}_{\Phi(\mathbf{Q}_m, \bar{\xi})} \cdot \Delta\bar{\xi} = \underbrace{-\bar{\xi}[1:3] \cdot \mathbf{X}[1:3] - 1}_{\Delta\mathbf{X}} \quad (72)$$

kde  $\bar{\xi}[1:3] = [a \quad b \quad c]^T$  představují parametry roviny a  $\Psi(\mathbf{Q}_m, \xi)$  je známý zobecněný jakobián manipulátoru.

Výsledný kalibrační jakobián a modifikovaný vektor chyby polohy koncového efektoru lze psát jako:

$$\Phi(\mathbf{Q}_m, \bar{\xi}) = [\mathbf{X}[1:3]^T \quad \bar{\xi}[1:3]^T \cdot \Psi(\mathbf{Q}_m, \xi)], \quad \Delta\mathbf{X} = -\bar{\xi}[1:3] \cdot \mathbf{X}[1:3] - 1 \quad (73)$$

Kalibrační algoritmus spočívá k manuálnímu či automatickému (využití taktilních senzorů) navedení manipulátoru do poloh  $\mathbf{X}_D$ , kdy se koncový efektor dotýká rovinné plochy (s libovolnou

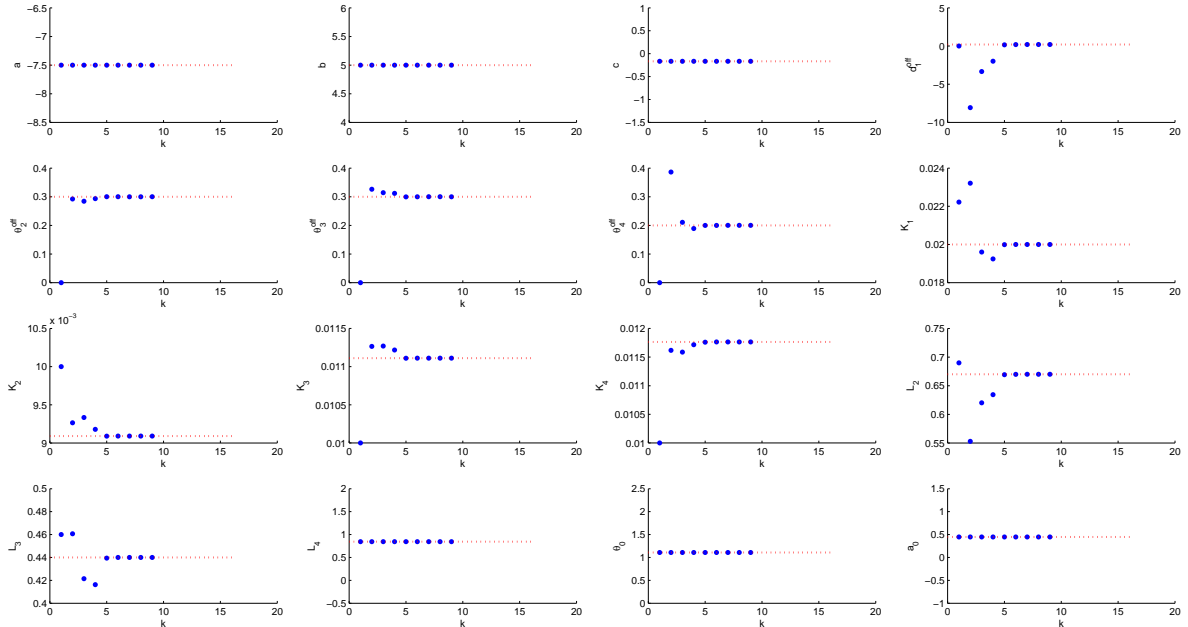
orientací), polohy  $\mathbf{X}_D$  jsou však neměřitelné. Na manipulátoru je pak pro každou takovou polohu možné odměřit hodnoty poloh aktuátorů  $\mathbf{Q}_m$ . Před započítím kalibračního algoritmu je zapotřebí stanovit nominální hodnoty neznámých parametrů roviny  $a, b, c$  využitím právě odměřených hodnot  $\mathbf{Q}_m$ , neboť ze znalosti nominálních hodnot geometrických parametrů manipulátoru  $\xi_N$  lze prostřednictvím PKÚ určit odhad bodů dotyku koncového efektoru  $\mathbf{X}$  s rovinou. Předpokládáme-li, že máme k dispozici  $m$  měření, lze z rovnice roviny (70) vytvořit agregovanou soustavu rovnic a vypočítat odhad parametrů roviny  $\bar{\xi}_N[1:3]$  prostřednictvím metody nejmenších čtverců:

$$\mathbf{X}^i = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m^i, \xi_N)$$

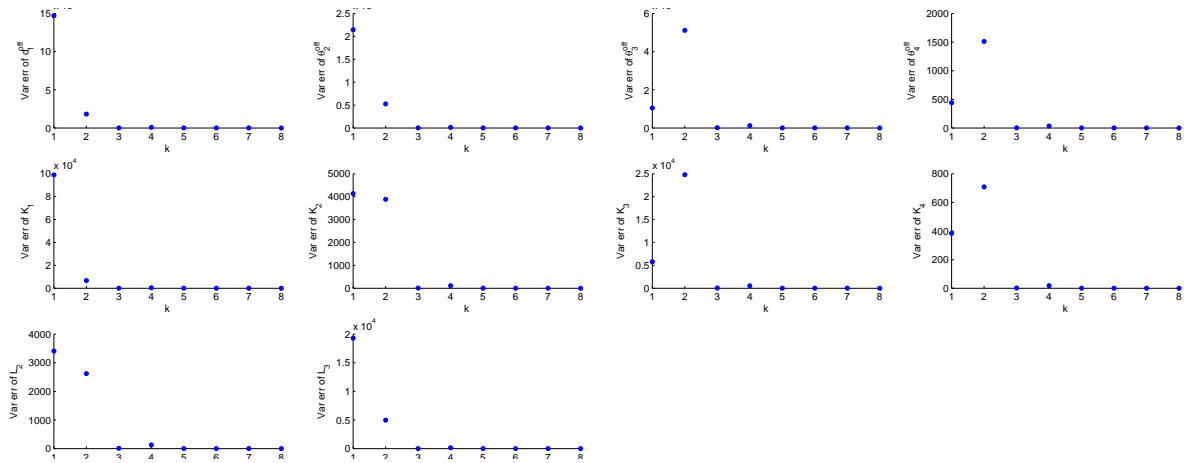
$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{X}^1[1:3])^T \\ \vdots \\ (\mathbf{X}^m[1:3])^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{ag}} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -\mathbf{I}_{m \times 1}$$

$$\Rightarrow \bar{\xi}_N[1:3] = \begin{bmatrix} a_N \\ b_N \\ c_N \end{bmatrix} = -(\mathbf{X}_{ag}^T \cdot \mathbf{X}_{ag})^{-1} \cdot \mathbf{X}_{ag}^T \cdot \mathbf{I}_{m \times 1} \quad (74)$$

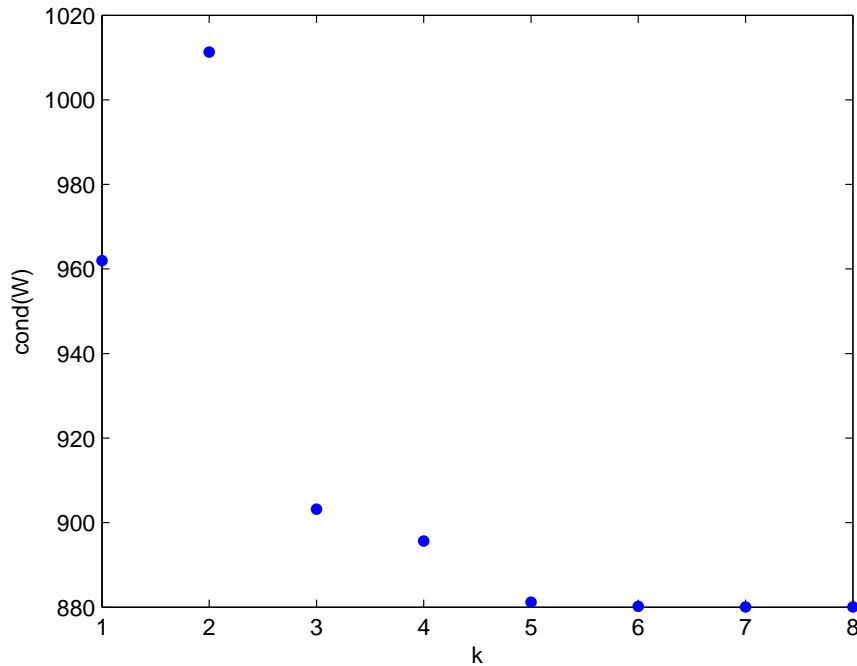
Matice pozorování  $\mathbf{W}$  je dána opět rovnicí (29) a agregovaný vektor chyby měření rovnicí (28). Bohužel analýzou matice pozorování  $\mathbf{W}$  lze ukázat, že neidentifikovatelné parametry jsou parametry roviny  $a, b, c$  a parametry  $L_4, \theta_0, a_0$ , tedy  $N_R = 10$ . Navíc neznáme-li skutečné hodnoty těchto parametrů dochází k chybnému nakalibrování některých ze zbývajících identifikovatelných geometrických parametrů, analogicky jako v Kapitole 7.3. Metoda je tedy pro praktické nasazení při kalibraci manipulátoru v podstatě nepoužitelná. Vektor  $\Delta \mathbf{X}$  je jednosložkovým vektorem,  $p = 1$ . Minimální doporučený počet měření je tak dle rovnice (60)  $m = 50$ . Výsledky kalibračního algoritmu jsou znázorněny na následujících obrázcích.



Obrázek 23: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\xi^*$ . Jsou známy skutečné hodnoty parametrů  $a, b, c, L_4, \theta_0, a_0$ .



Obrázek 24: Průběh rozptylu odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů  $\text{Var}(\mathbf{e}^{(k)})$ . Jsou známy skutečné hodnoty parametrů  $a, b, c, L_4, \theta_0, a_0$ .

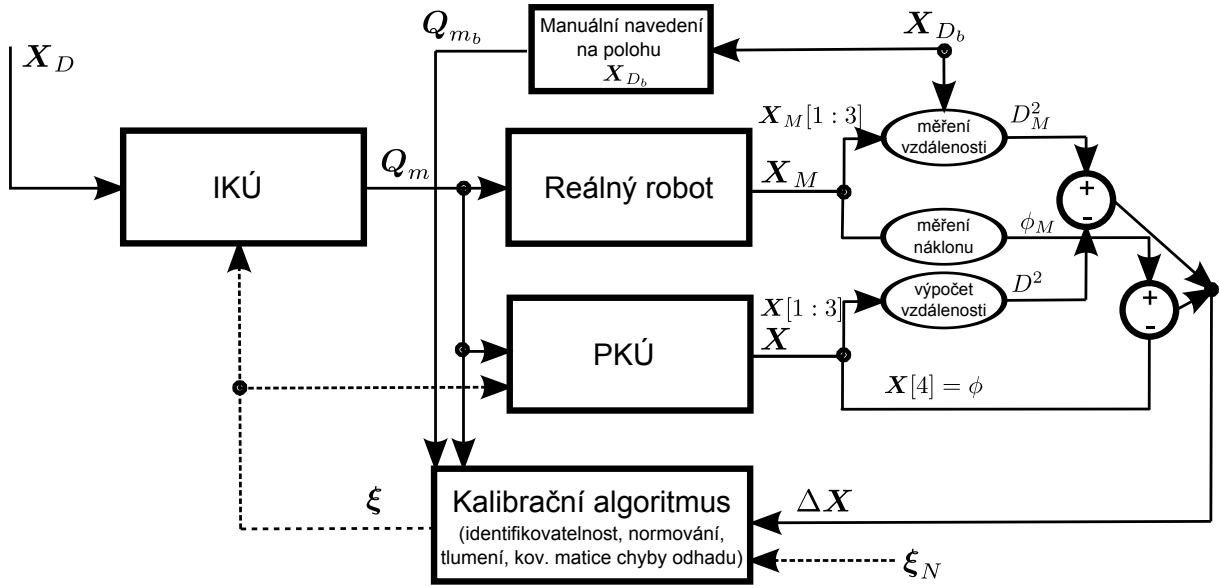


Obrázek 25: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$ . Jsou známy skutečné hodnoty parametrů  $a, b, c, L_4, \theta_0, a_0$ .

## 7.5 Kombinovaná metoda s modifikací kompenzace základny

Předložená metoda kalibrace využívá principu měření vzdálenosti koncového efektoru od daného referenčního bodu, viz Kapitola 7.2. Referenční bod však zastupuje roli požadovaného počátku  $\mathbf{O}_b$  s.s. základny manipulátoru  $F_b$ . Metoda navíc vyžaduje měření natočení koncového efektoru  $\phi$ , což je možné poměrně jednoduše zajistit pomocí kalibračního senzoru natočení (např. inklinometry na principu MEMS technologie, [3]). Schéma kalibrace je znázorněno na Obrázku 26. Postup kalibrace je následující:





Obrázek 26: Metoda kalibrace: Měření vzdálenosti koncového efektoru od zvoleného počátku s.s.  $\bar{F}_b$  + měření náklonu  $\phi$ .

Robot je manuálně naveden do takové polohy, kdy pozice koncového efektoru  $[x \ y \ z]^T$  odpovídá požadovanému počátku  $O_b$  s.s. základny manipulátoru  $F_b$ , požadovanou hodnotu označme jako (robot může být naveden do počátku s libovolnou orientací  $\phi$ ):

$$\mathbf{X}_{D_b} = [x_{D_b} \ y_{D_b} \ z_{D_b}]^T, \text{ požadujeme } \mathbf{O}_b \stackrel{!}{=} \mathbf{X}_{D_b}$$

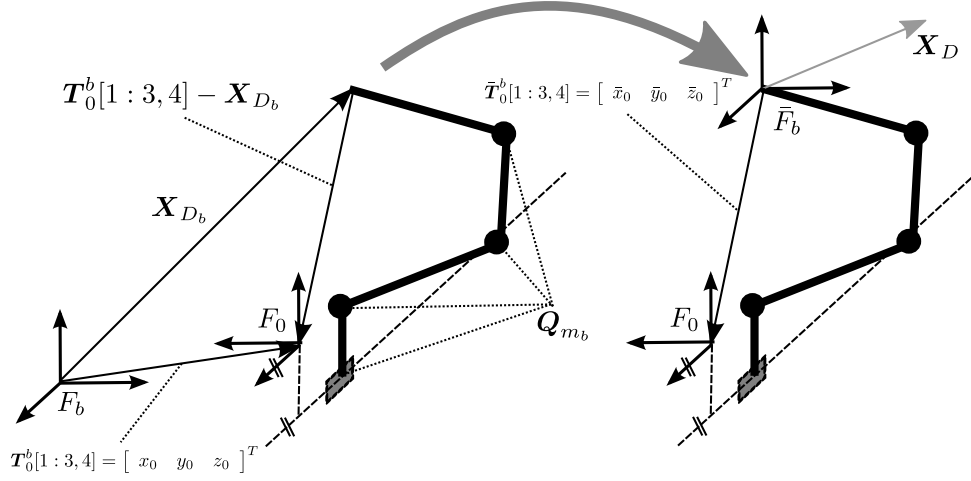
Odměření potom dostáváme hodnoty poloh aktuátorů  $\mathbf{Q}_{m_b}$  odpovídající požadovanému počátku s.s.  $F_b$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{D_b} \\ \phi \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{m_b}, \boldsymbol{\xi}^*) \quad (75)$$

Situace je znázorněna na Obrázku 27. Je zřejmé, že posunutím s.s.  $F_b$  budou změněny nominální hodnoty geometrických parametrů  $\theta_0 = \boldsymbol{\xi}_N$ [12],  $a_0 = \boldsymbol{\xi}_N$ [13], neboť právě tyto parametry ovlivňují transformaci  $\mathbf{T}_0^b$  mezi s.s.  $F_b$  a  $F_0$ . Nové hodnoty translace  $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$  s.s.  $F_0$  vzhledem k novému s.s.  $\bar{F}_b$  lze vyjádřit:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - \mathbf{X}_{D_b} \quad (76)$$

kde  $x_0, y_0, z_0$  jsou skutečné hodnoty kompenzace polohy základny manipulátoru.



Obrázek 27: Princip odhadu nominálních parametrů kompenzace posunutě základny manipulatoru.

Bohužel, hodnoty  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  ani požadovanou hodnotu  $\mathbf{X}_{D_b}$  neznáme přesně, známe pouze odměřené hodnoty poloh aktuátorů  $\mathbf{Q}_{m_b}$  a nominální hodnoty geometrických parametrů  $\boldsymbol{\xi}_N$ . Vzhledem k tomu, že známe řešení PKÚ a IKÚ, lze stanovit odhad hodnot  $\bar{x}_0$ ,  $\bar{y}_0$ ,  $\bar{z}_0$ , rovnice (76) lze přepsat do tvaru:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \\ \bar{z}_0 \end{bmatrix}_{approx} = \mathbf{T}_0^b(\boldsymbol{\xi}_N)[1:3,4] - \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{Q}_{m_b}, \boldsymbol{\xi}_N)[1:3] \quad (77)$$

kde  $\mathbf{T}_0^b(\boldsymbol{\xi}_N)$  je známá matice z řešení PKÚ, daná jako:

$$\mathbf{T}_0^b(\boldsymbol{\xi}_N) = \text{Rot}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_N[12]) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_N[13])$$

Nyní již lze pomocí rovnice (55) znovu vypočítat nové nominální hodnoty geometrických parametrů  $\bar{\theta}_0$ ,  $\bar{a}_0$  a  $\bar{d}'_1$  pro transformaci s.s.  $F_b \rightarrow F_0 \rightarrow F_1$  jelikož známe nominální hodnotu nové translace kompenzace základny  $[\bar{x}_0 \ \bar{y}_0 \ \bar{z}_0]_{approx}^T$  z rovnice (77). Ve vektoru nominálních geometrických parametrů  $\boldsymbol{\xi}_N$  budou původní parametry  $\theta_0$ ,  $a_0$  nahrazeny novými  $\bar{\theta}_0$ ,  $\bar{a}_0$ . Vypočítanou hodnotu  $\bar{d}'_1$  lze chápat jako odhad offsetu kloubové souřadnice  $q_1$ . Původní nominální hodnotu offsetu  $q_{1\ off} = \boldsymbol{\xi}[1]$  lze tak nahradit odhadem  $\bar{d}'_1$ . Poznamenejme, že uvedená úprava nominálních hodnot geometrických parametrů  $\theta_0$ ,  $a_0$ ,  $d'_1 \rightarrow \bar{\theta}_0$ ,  $\bar{a}_0$ ,  $\bar{d}'_1$  nemusí být provedena, nicméně výrazně ovlivní průběh kalibrace vlivem přesnějšího odhadu nominálního modelu (přibližně dvojnásobné snížení počtu iterací kalibračního algoritmu).

Kalibrační snímač vzdálenosti je jedním svým koncem umístěn do bodu požadovaného počátku s.s.  $\bar{F}_b$ , tedy do bodu  $\mathbf{X}_{D_b}$ , do kterého je manipulátor manuálně naveden před započítáním kalibrace. Druhý konec kalibračního snímače vzdálenosti je připojen na koncový efektor. Jak již bylo zmíněno, náklon koncového efektoru je měřen přídatným inklinometrem. Během procesu kalibrace je manipulátor opět postupně naváděn do požadovaných poloh  $\mathbf{X}_D$  prostřednictvím přepočtu pomocí IKÚ na hodnoty poloh aktuátorů  $\mathbf{Q}_m$ . Uvažujme nejprve nelineární kalibrační model vzhledem k měření vzdálenosti bez uvažování přídatného měření náklonu  $\phi$ :

$$\mathbf{X}_M[1:3]^T \cdot \mathbf{X}_M[1:3] = \underbrace{\|\mathbf{X}_M[1:3]\|}_{D_M}^2 \quad (78)$$

kde  $\mathbf{X}_M = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}^*)$  a  $D_M$  je měřená hodnota vzdálenosti mezi aktuální polohou koncového efektoru a zvoleným počátkem s.s.  $\bar{F}_b$ .

Linearizovaná podoba kalibračního modelu bude potom ve tvaru, analogicky k (78):

$$\underbrace{\mathbf{X}[1:3]^T \cdot \mathbf{X}[1:3]}_{D^2} + 2 \cdot \mathbf{X}[1:3]^T \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_M[1:3]}{\partial \boldsymbol{\xi}^*}}_{\Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})[1:3,:]} \Big|_{\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}} \cdot \Delta \boldsymbol{\xi} = D_M^2 \quad (79)$$

kde  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$  a  $D$  je rekonstruovaná hodnota vzdálenosti  $D_M$ .

Rovnici (79) lze dále upravit:

$$2 \cdot \mathbf{X}[1:3]^T \cdot \Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})[1:3,:] \cdot \Delta \boldsymbol{\xi} = D_M^2 - D^2 \quad (80)$$

Z rovnice (25) je zřejmé, že pro změnu orientace koncového efektoru  $\Delta \phi = \Delta \mathbf{X}[4]$  vlivem změny parametrů  $\Delta \boldsymbol{\xi}$  platí:

$$\Delta \phi = \Delta \mathbf{X}[4] = \Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})[4,:] \cdot \Delta \boldsymbol{\xi}, \quad \text{pro} \quad \Delta \phi = \phi_M - \phi \quad (81)$$

kde  $\phi_M$  je měřená hodnota náklonu inklinometrem a  $\phi = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})[4,:]$  je rekonstruovaná hodnota natočení  $\phi_M$ .

Sloučením měření vzdálenosti a měření náklonu, tedy rovnice (80) a (81) dostáváme výsledný linearizovaný kalibrační model:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbf{X}[1:3]^T \cdot \Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})[1:3,:] \\ \Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})[4,:] \end{bmatrix}}_{\Phi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})} \cdot \Delta \boldsymbol{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} D_M^2 - D^2 \\ \phi_M - \phi \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{X}} \quad (82)$$

Kalibrační jakobián a modifikovaný vektor chyby měření má tak následující tvar:

$$\Phi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} 2 \cdot \mathbf{X}[1:3]^T \cdot \Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})[1:3,:] \\ \Psi(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})[4,:] \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} D_M^2 - D^2 \\ \phi_M - \phi \end{bmatrix} \quad (83)$$

Modifikovaná chyba polohy koncového efektoru  $\Delta \mathbf{X}$  je nyní vektorem chyby z metody měření vzdálenosti v Kapitole 7.2 doplněným o rozdíl měřeného natočení (inklinometrem) koncového efektoru a jeho rekonstruovanou hodnotou prostřednictvím PKÚ.

Matice pozorování  $\mathbf{W}$  je dána opět rovnicí (29) a agregovaný vektor chyby měření rovnicí (28). Požadované umístění základny manipulátoru  $\mathbf{X}_{D_b}$  (počátek měření vzdálenosti) bylo voleno:

$$\mathbf{X}_{D_b} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Koeficient tlumení byl volen  $\lambda = 1 \cdot 10^{-2}$ . Generované polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_D$  byly voleny s ohledem na umístění s.s.  $\bar{F}_b$  jako (poloha koncového efektoru je nyní uvažována vzhledem k umístění počátku s.s.  $\bar{F}_b$ , viz Obrázek 27):

$$\begin{aligned} x &\in \langle -0.25, 0.25 \rangle, & y &\in \langle -0.25, 0.25 \rangle, \\ z &\in \langle -0.75, 0.75 \rangle, & \phi &\in \langle \frac{-20}{180}\pi, \frac{20}{180}\pi \rangle \end{aligned}$$

Analýza matice pozorování  $\mathbf{W}$  ukazuje, že uvedená kalibrační metoda umožňuje určit všechny geometrické parametry manipulátoru,  $N = N_R = 13$ . Vektor modifikované chyby polohy koncového efektoru  $\Delta \mathbf{X}$  má dvě složky,  $p = 2$ , tedy minimální doporučený počet měření je dle (60)

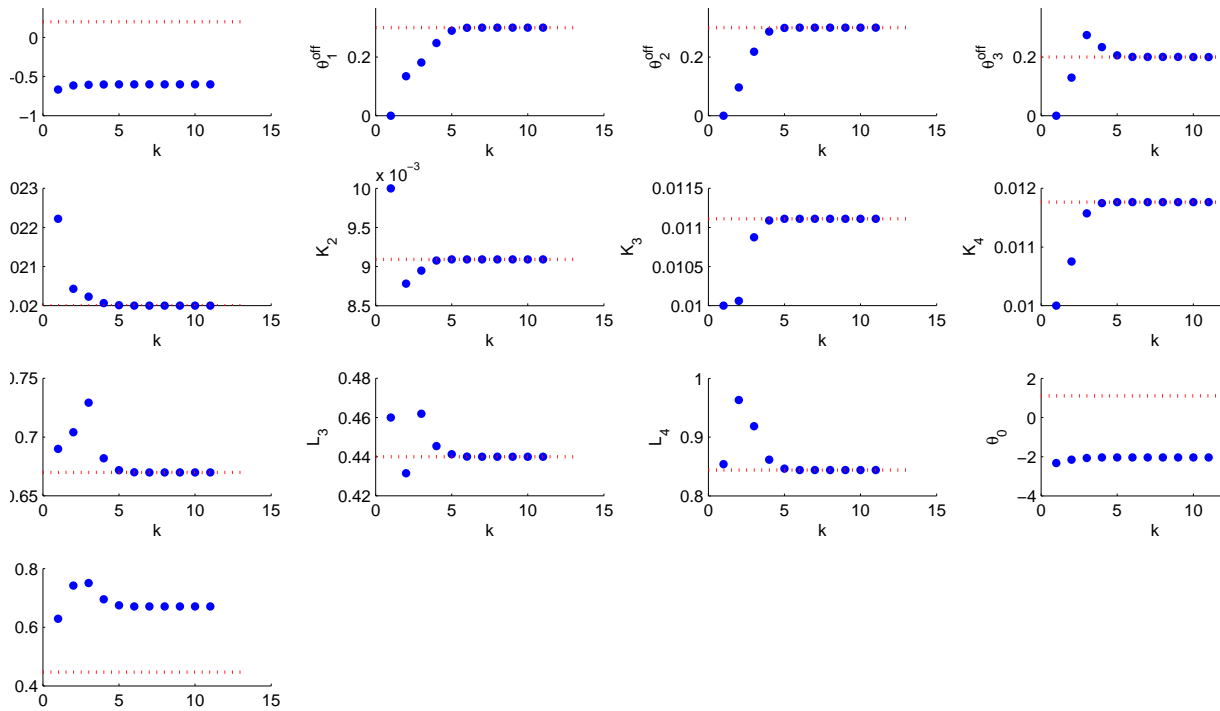
$m = 33$ . Na následujících obrázcích jsou znázorněny výsledky kalibračního algoritmu. Z průběhů kalibrovaných parametrů je patrné, že všechny geometrické parametry, kromě parametrů  $q_{1\ off}$ ,  $\theta_0$ ,  $a_0$  jsou nakalibrovány správně. Je zřejmé, že parametry  $\theta_0$ ,  $a_0$  musí být změněny, neboť předpokládáme jiné umístění základny manipulátoru, respektive jejího počátku, který je shodný s požadovanou hodnotou  $\mathbf{X}_{D_b}$ . Offset  $d_{1\ off}$  je překalibrován na jinou hodnotu ze stejného důvodu, neboť dochází k posunu základny manipulátoru i v ose  $z$ , což je směr odpovídající poloze aktuátoru  $q_1$  (parametry  $\theta_0$ ,  $a_0$  ovlivní posun základny manipulátoru pouze ve směru os  $x$ ,  $y$ ). Označíme-li tedy parametry získané kalibrací  $\hat{\xi}^*$ , tedy  $\hat{\xi}^* \neq \xi^*$ , lze ukázat že pro libovolnou polohu koncového efektoru  $\mathbf{X}_D$  vztaženou k umístění s.s.  $\bar{F}_b$  platí (vzhledem ke splnění rovnice (78)):

- Výpočet požadovaných poloh aktuátorů pro požadovanou polohu koncového efektoru  $\mathbf{X}_D$  vzhledem k novému s.s.  $\bar{F}_b$ :

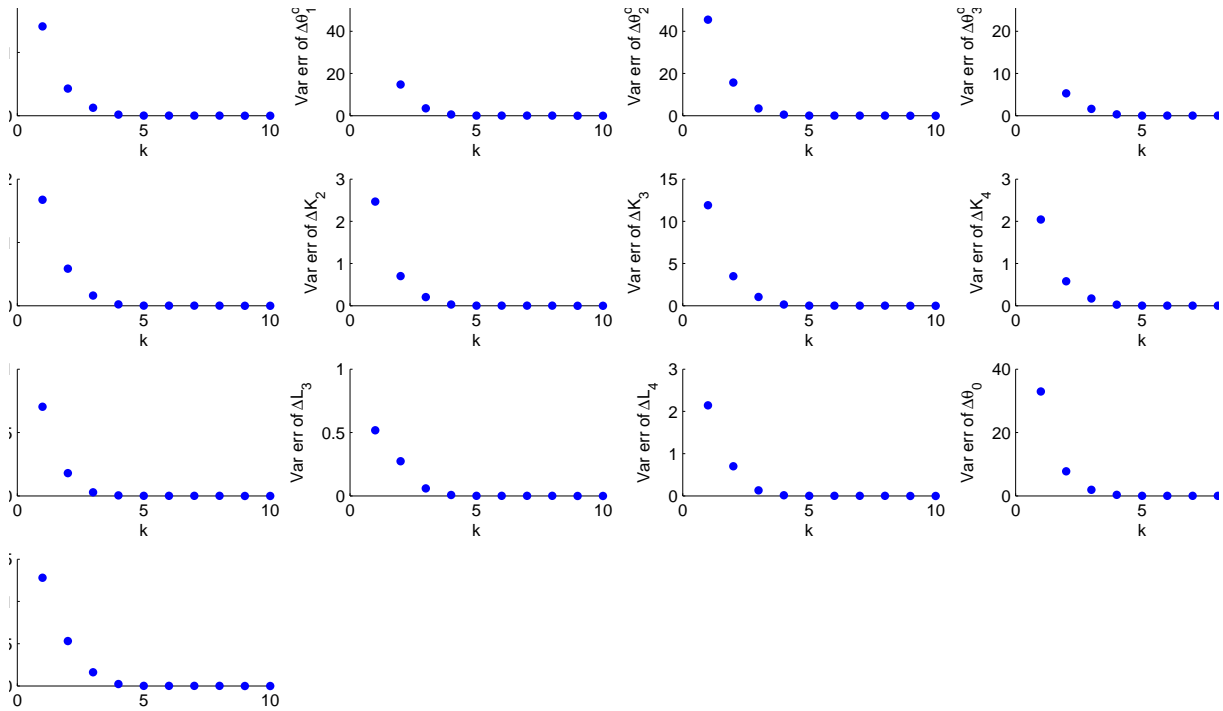
$$\mathbf{Q}_m = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}_D, \hat{\xi}^*)$$

- Reálná poloha koncového efektoru vzhledem k původnímu s.s.  $F_b$ , tzn. vzhledem k reálnému umístění manipulátoru:

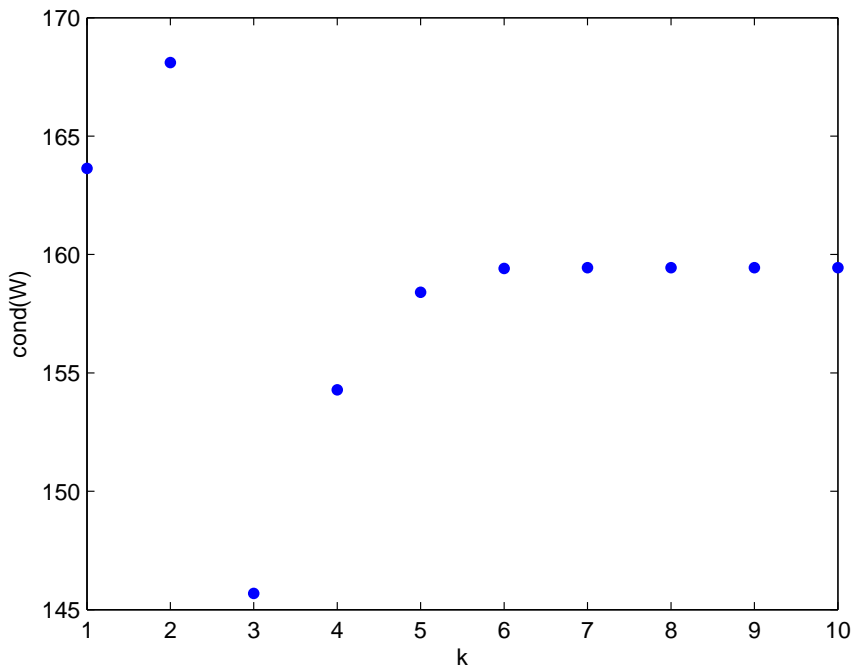
$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \hat{\xi}^*)[1:3] = \mathbf{X}_{D_b} + \mathbf{X}_D[1:3], \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \hat{\xi}^*)[4] = \mathbf{X}_D[4]$$



Obrázek 28: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\xi^*$ .



Obrázek 29: Průběh rozptylu odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů  $\text{Var}(e^{(k)})$ .



Obrázek 30: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$ .

## 7.6 Shrnutí uvedených kalibračních metod pro SM

V Tabulce 3 jsou shrnuty výsledky uvedených kalibračních metod. Jako nejvhodnější metoda s ohledem na technickou náročnost kalibračního měření a identifikovatelnosti parametrů se jeví

v pořadí poslední metoda, viz Kapitola 7.5. Numerická stabilita a počet iterací kalibračních algoritmů může být drasticky vylepšena právě metodami normování (někdy též metody vyvažování) a využitím tlumení metody nejmenších čtverců (využití apriorního odhadu, tedy hodnot nominálních parametrů). Průběhy kalibračního algoritmu jsou demonstrovány na poslední uvedené kalibrační metodě, viz Kapitola 7.5. Obrázek 31 ukazuje průběh kalibrace bez tlumení metody nejmenších čtverců ( $\lambda = 0$ ). V případě, že kalibrační polohy  $\mathbf{X}_D$  koncového efektoru jsou vybrány (náhodně) ne zcela vhodně, může dojít k výraznému snížení podmíněnosti úlohy, viz Obrázek 32, a kalibrační algoritmus konverguje vlivem numerických chyb k nesprávným hodnotám. V případě vypuštění normování chyby polohy koncového efektoru, viz Obrázek 33, 34 ( $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ ) dochází k výraznému navýšení počtu iterací kalibračního algoritmu (při zachování požadované přesnosti) z původního počtu přibližně 10 iterací na přibližně 500 iterací. Vliv vypuštění normování kalibrovaných parametrů ( $\mathbf{H} = \mathbf{I}$ ) je znázorněn na Obrázku 35, 36. Kalibrační algoritmus vlivem špatné podmíněnosti úlohy v podstatě totálně selhává.

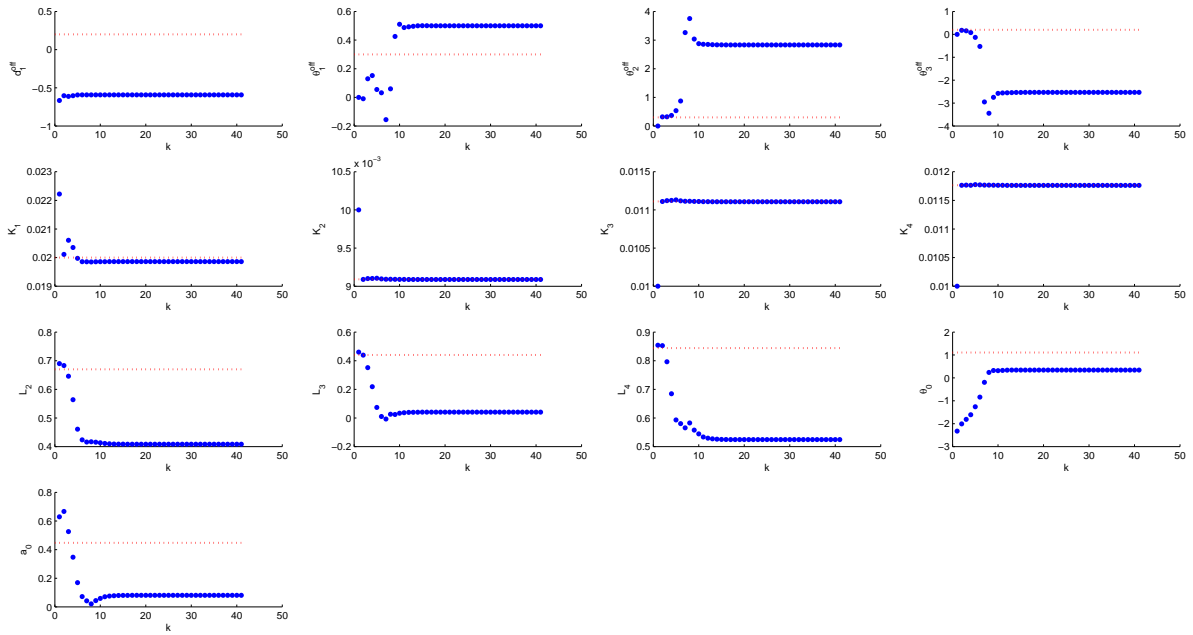
		kalibrované parametry													Výhody/nevýhody			
		ofsety kloubů (za převodovkou)			převodové poměry převodovek						kinematické parametry						parametry roviny	
Metoda kalibrace		d1_off	Theta2_off	Theta3_off	Theta4_off	K1	K2	K3	K4	L2	L3	L4	Theta0	a0	a	b	c	
1	Úplné měření polohy koncového efektoru	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	-	-	-	možno kalibrovat všechny parametry nutno měřit kompletní polohu koncového efektoru, případně využít přesný kalibrační rám
2	Měření vzdálenosti mezi dvěma libovolnými polohami	0	0	P	P	P	P	P	P	P	P	P	0	0	-	-	-	libovolná volba referenčního bodu, nelze kalibrovat všechny parametry, nelze kalibrovat všechny parametry
3	Autokalibrační metoda: najetí koncového efektoru do identické polohy s různou orientací	0	0	P	P	0	P	P	P	P	P	n	0	0	-	-	-	nelze kalibrovat všechny parametry, neznalost přesné hodnoty parametru L4 ovlivní kalibrační model
4	Autokalibrační metoda: Omezení pohybu koncového efektoru po ploše (plain constraint)	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	n	n	n	n	n	n	nutno polohovat koncový efektor pro pohyb po rovině, nelze kalibrovat všechny parametry (ani parametry definující rovinu), některé neidentifikovatelné parametry ovlivní kalibrační model
5	Volba počátku bazového s.s. + měření vzdálenosti mezi počátkem a konc. Efektorem a náklonu posledního ramene	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	-	-	-	nutno měřit jen vzdálenost koncového efektoru od referenčního bodu a náklon posledního ramene, možnost volby počátku s.s. základny manipulátoru

**Vysvětlivky:**

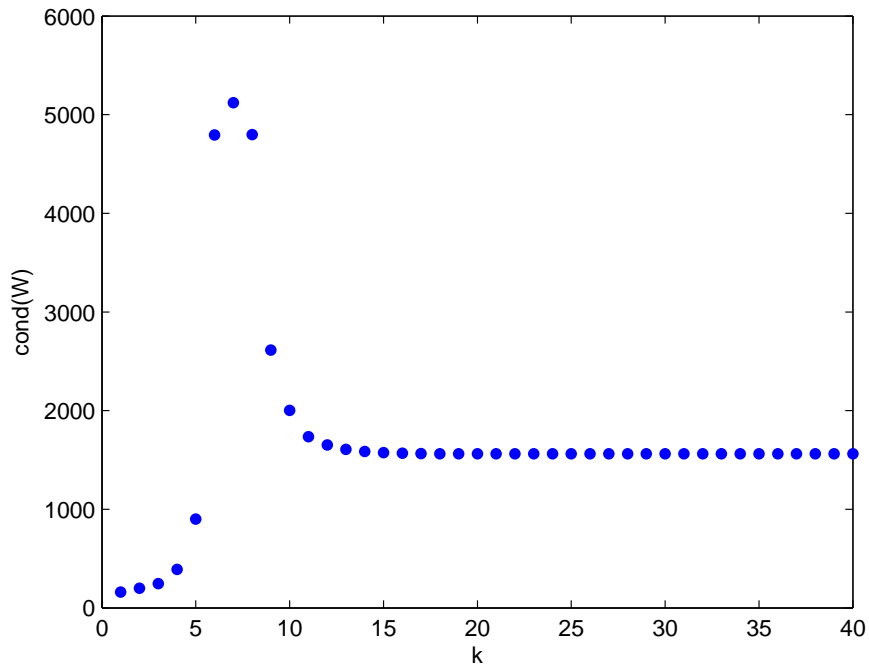
**P** - identifikovatelný parametr  
**n** - neidentifikovatelný parametr, ale má vliv na kalibrační model => pokud je nominální parametr odlišný od reálného modelu, kalibrační metoda identifikuje nesprávné hodnoty ostatních parametrů, neboť neidentifikovatelný parametr je závislý na některém z dalších (lineární závislost sloupců v matici pozorování)

**0** - neidentifikovatelný parametr, který nemá vliv na kalibrační model, tzn. i pokud jsou nominální hodnoty tohoto parametru odlišné od reálných, parametr se nenakalibruje, ale dojde ke správnému nakalibrování ostatních parametrů modelu

Tabulka 3: Shrnutí kalibračních metod

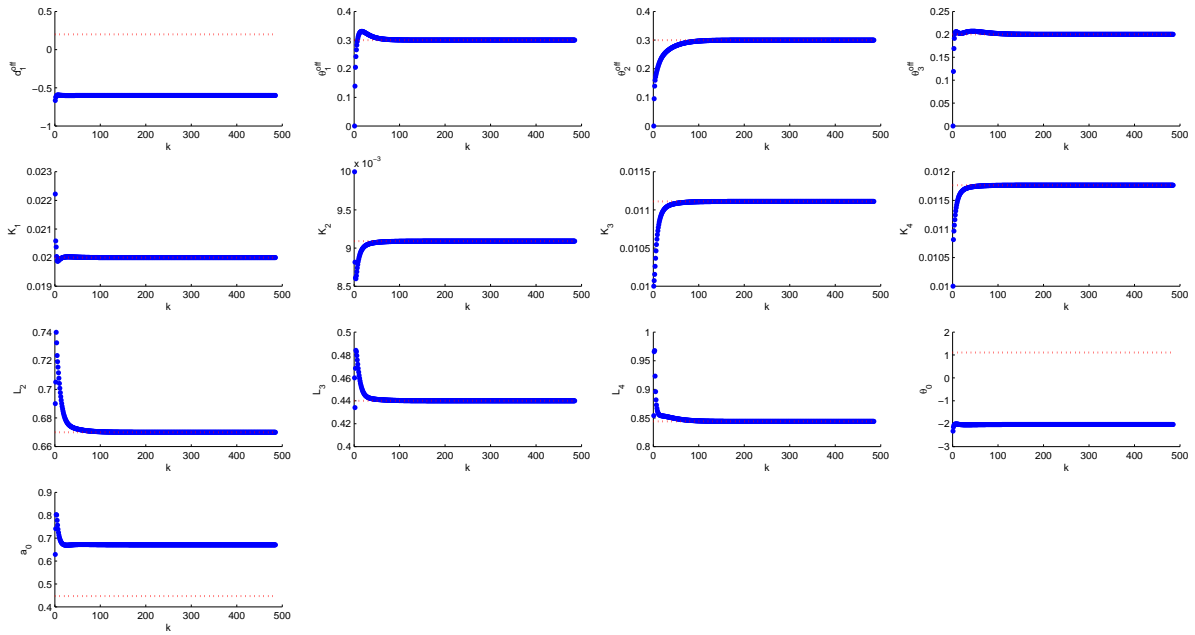


Obrázek 31: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Bez tlumení metody nejmenších čtverců.

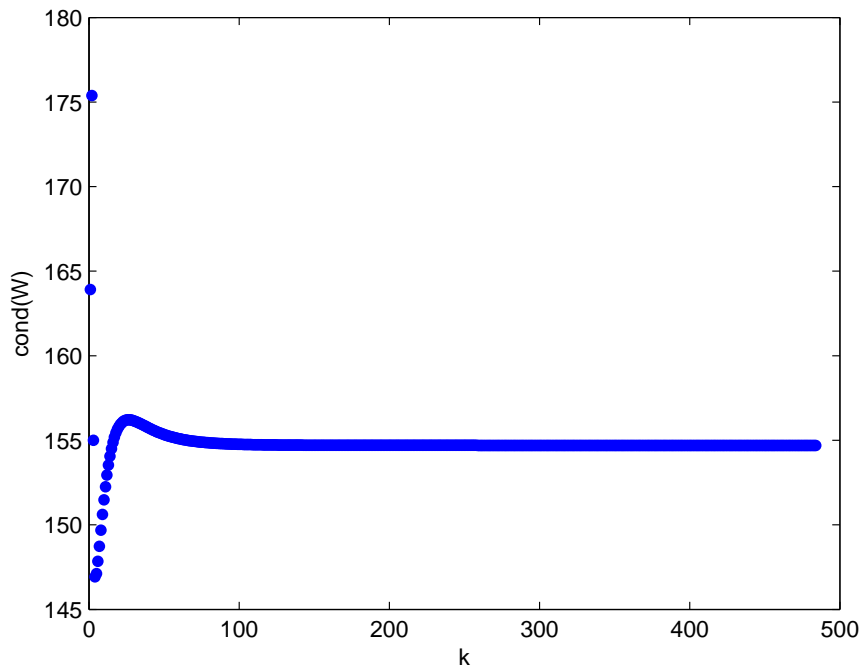


Obrázek 32: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$ . Bez tlumení metody nejmenších čtverců.

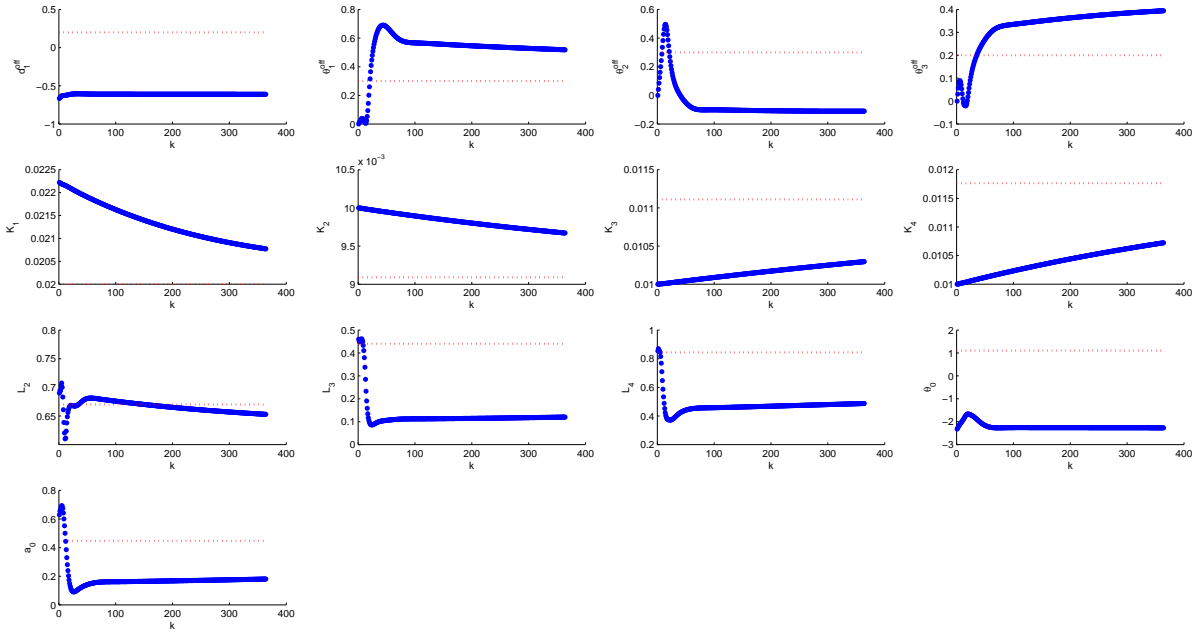




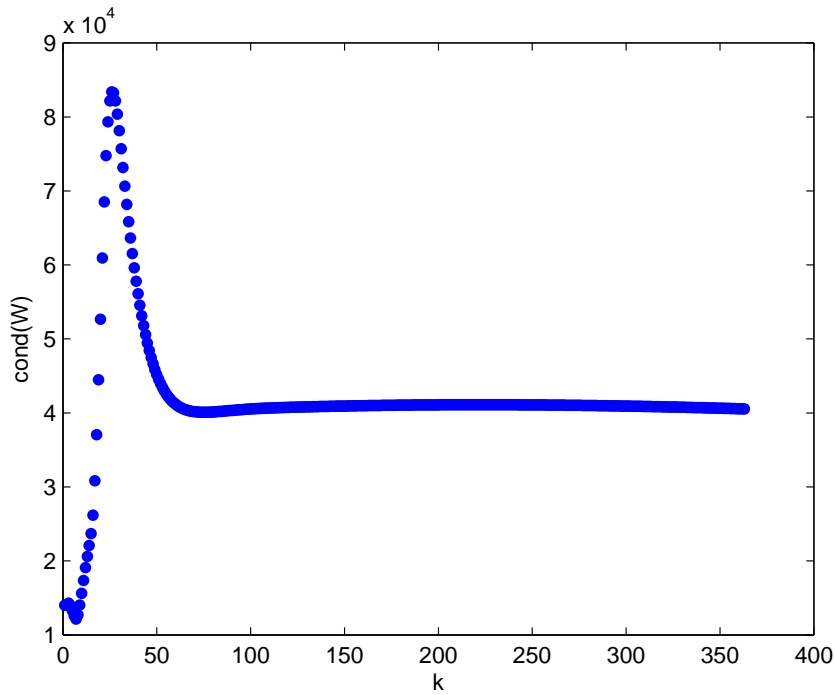
Obrázek 33: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Bez normování chyby polohy koncového efektoru.



Obrázek 34: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$ . Bez normování chyby polohy koncového efektoru.



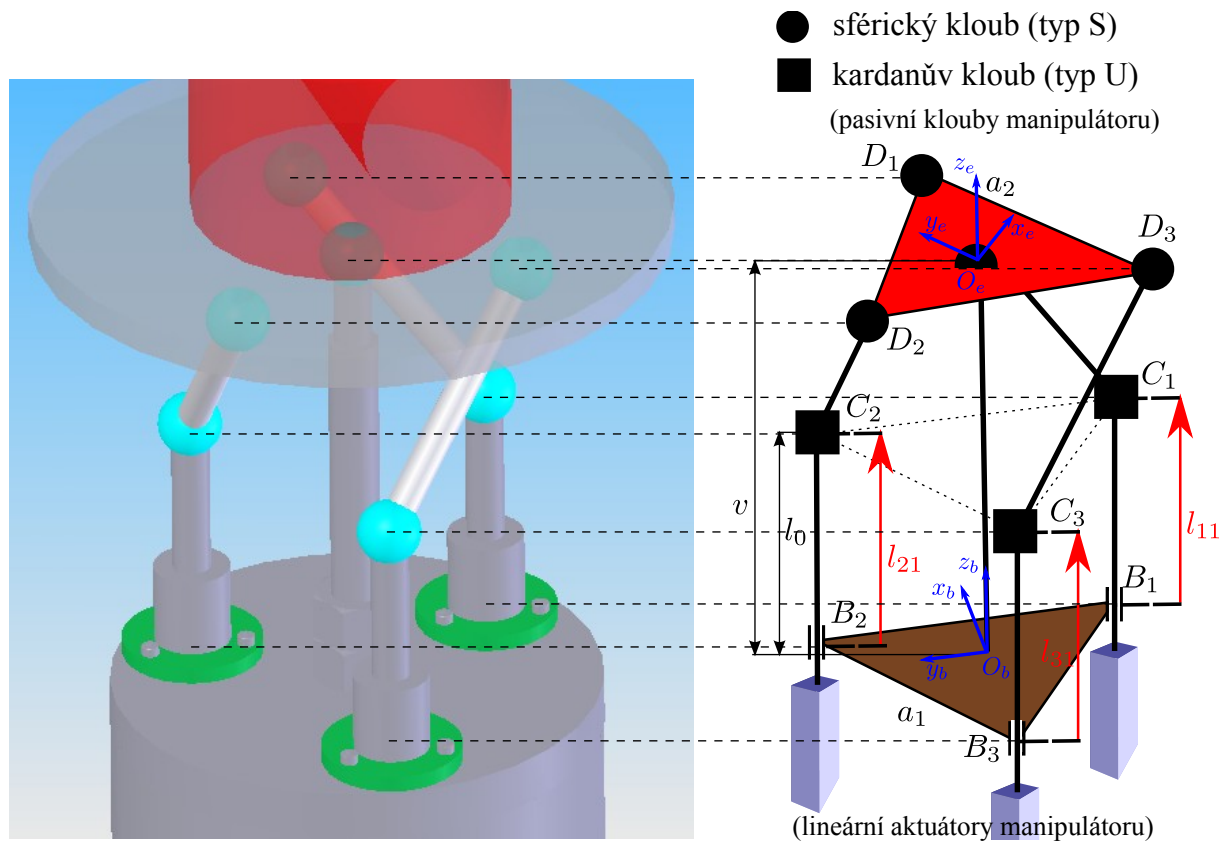
Obrázek 35: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Bez normování kalibrovaných parametrů.



Obrázek 36: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$ . Bez normování kalibrovaných parametrů.

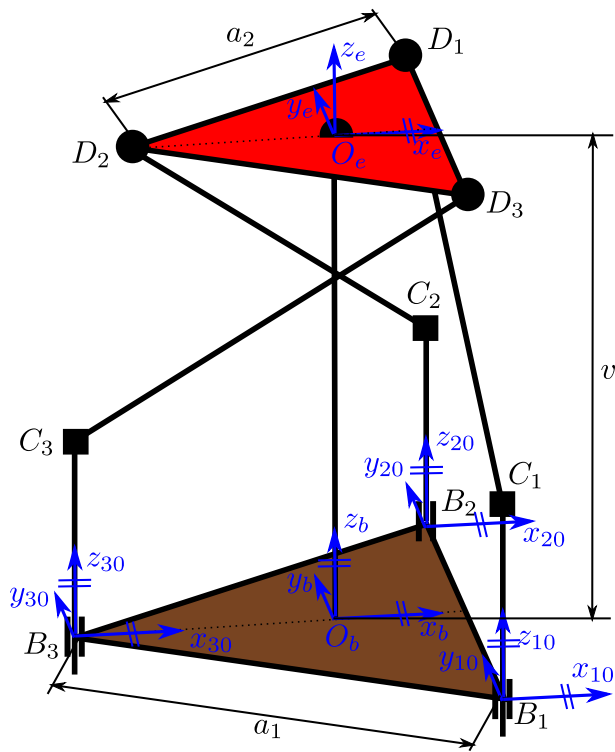
## 8 Simulační model pro část PM manipulátoru AGEBOT

Popis kinematické architektury PM lze tedy stanovit dle [7]. PM spadá do skupiny neredundantních paralelních manipulátorů a je tvořen třemi nezávislými kinematickými řetězci typu **PUS** (jeden lineární aktuátor na každý kinematický řetězec) a jedním kinematickým řetězcem typu **S**, který tvoří pasivní stabilizační element a omezuje tak počet stupňů volnosti koncového efektoru na 3 rotační DoF. Obrázek 37 znázorňuje 3D CAD výkres a příslušné schématické uspořádání manipulátoru.

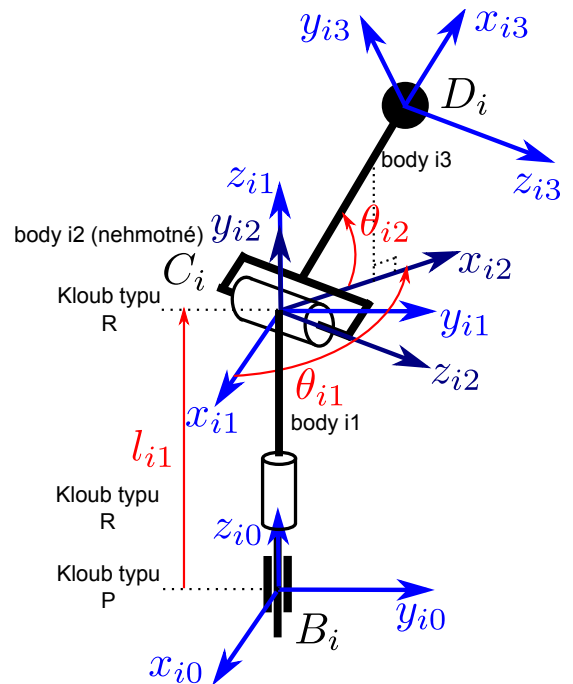


Obrázek 37: Schéma PM včetně výkresu v 3D CAD

PM manipulátor lze dekomponovat na tři nezávislé kinematické řetězce  $B_i C_i D_i$ , které tvoří v podstatě samostatné sériové manipulátory s jednoznačně definovanou sadou geometrických parametrů, které jsou zavedeny opět dle již zmíněné DH úmluvy. Pro zjednodušení simulačního modelu pro PM předpokládejme, že nebudeme uvažovat statické transformace kompenzace polohy základny a koncového efektoru manipulátoru. Dekompozici PM se zavedenými s.s. znázorňuje Obrázek 38. Kloub typu **S** lze nahradit dvěma nezávislými klouby typu **R** s kolnými osami rotace. Přípojně body kinematických řetězců  $D_i$  reprezentují střed sférických kloubů **S** připojených na platformu (koncový efektor manipulátoru).



(a) Umístění kinematických řetězců na základně manipulátoru



(b) Umístěný s.s. kin. řetězce dle DH úmluvy

Obrázek 38: Dekompozice paralelního manipulátoru na kin. řetězce

**Definujme nejprve vlastnosti  $i$ -tého kinematického řetězce:**

Kloubové souřadnice kin. řetězce:

$$\mathbf{Q}_i = [ l_{i1} \quad \theta_{i1} \quad \theta_{i2} ]^T \quad (84)$$

kde  $\theta_{i1}$ ,  $\theta_{i2}$  označujeme jako pasivní kloubové souřadnice.

Zobecněné souřadnice kin. řetězce:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{D}_i \quad (85)$$

Geometrické návrhové parametry kin. řetězce:

$$\xi_i = \|\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i\| = l_{i2} \quad (86)$$

Budeme-li dále předpokládat, že všechny kinematické řetězce PM jsou identické, lze vlastnosti celého PM psát následovně:<sup>5</sup>

Kloubové souřadnice PM:

$$\mathbf{Q} = [ q_1 \quad q_2 \quad q_3 ]^T = [ l_{11} \quad l_{21} \quad l_{31} ]^T \quad (87)$$

Souřadnice aktuátorů manipulátoru lze psát analogicky jako pro SM v Kapitole 6:

$$\mathbf{Q}_m = \text{diag}(\mathbf{K})^{-1} \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{off}) = [ q_{m1} \quad q_{m2} \quad q_{m3} ]^T \quad (88)$$

<sup>5</sup>Označení stejnými proměnnými jako v případě SM bylo voleno záměrně kvůli přehlednosti.

Geometrické návrhové parametry (včetně offsetů a převodových poměrů):

$$\boldsymbol{\xi} = [a_1 \ a_2 \ l \ v \ q_{1 \text{ off}} \ q_{2 \text{ off}} \ q_{3 \text{ off}} \ k_1 \ k_2 \ k_3]^T \quad (89)$$

kde  $a_1$  respektive  $a_2$  je délka strany rovnostranného trojúhelníka reprezentující základnu respektive koncový efektor manipulátoru,  $l = l_{12} = l_{22} = l_{32}$  je dáno parametry kin. řetězců a  $v$  je výška manipulátoru.

Zobecněné souřadnice (orientace koncového efektoru) jsou dány jako:

$$\mathbf{X} = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T \quad (90)$$

kde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  reprezentují Eulerovy úhly podle schématu XYZ (postupná rotace kolem od s.s. základny manipulátoru  $F_b$ ).

Dále předpokládáme, že známe analytické řešení IKÚ  $\mathbf{Q}_m = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$  (platí obecně pro paralelní manipulátory se sériovými kinematickými řetězci, pro které je IKÚ řešitelná analyticky, což je případ drtivé většiny paralelních architektur v průmyslové praxi). Řešení PKÚ  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$  je známé, nicméně lze řešit pouze numerickými iteračními algoritmy, neboť rozborem úlohy lze dokázat, že její řešení vede na polynom 16 stupně s 8 dvojnásobnými kořeny (tedy redukcí řádu lze získat minimální polynom 8 stupně). Pro dané hodnoty poloh aktuátorů existuje tedy až 8 různých možných poloh koncového efektoru. Popis řešení IKÚ i PKÚ lze najít v [7], podrobněji pak v [8].

## 9 Kalibrační model pro PM

Cílem získání kalibračního modelu je opět stanovit vztah mezi změnou kalibrovaných parametrů  $\Delta \boldsymbol{\xi}$  a chybou polohy koncového efektoru  $\Delta \mathbf{X}$  (v případě využití kalibrační metody založené na PKÚ) nebo chybou polohy kloubových souřadnic  $\Delta \mathbf{Q}$  (v případě využití kalibrační metody založené na IKÚ).

Zabývejme se nejprve stanovením kalibračního modelu založeného na řešení IKÚ, tedy nelineárním kalibračním modelem rozumíme rovnici IKÚ ve tvaru:

$$\mathbf{Q}_M = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi}^*) \quad (91)$$

kde  $\mathbf{Q}_M$  představuje měřené hodnoty kloubových souřadnic a  $\mathbf{X}_M$  představuje skutečnou polohu koncového efektoru měřenou kalibračním snímačem.

Taylorovým rozvojem pravé strany rovnice (91) v bodě  $\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi} + \Delta \boldsymbol{\xi}$ , kde  $\boldsymbol{\xi}^*$  označuje správné (reálné) hodnoty geometrických parametrů PM, dostáváme linearizovanou podobu kalibračního modelu:

$$\underbrace{\mathbf{Q}_M - \mathbf{Q}}_{\Delta \mathbf{Q}} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi}^*)}{\partial \boldsymbol{\xi}^*}}_{\boldsymbol{\Psi}^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})} \Big|_{\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{\xi}^* - \boldsymbol{\xi})}_{\Delta \boldsymbol{\xi}} \quad (92)$$

kde  $\mathbf{Q} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$  je rekonstruovaná hodnota kloubových souřadnic pro měřenou polohu koncového efektoru  $\mathbf{X}_M$  a aktuálními hodnotám geometrických parametrů  $\boldsymbol{\xi}$ . Matici  $\boldsymbol{\Psi}^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$  nazýváme opět *zobecněným jakobiánem* (přesto, že se liší od zobecněného jakobiánu odvozeného v předchozích kapitolách, neboť vztahuje chybu geometrických parametrů k chybě kloubových souřadnic  $\Leftarrow$  využití IKÚ). Vektor  $\Delta \mathbf{Q}$  nazýváme vektorem chyby měření.

## Odvození zobecněného jakobiánu $\Psi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$

Pro PM je situace složitější než v případě SM, neboť koncový efektor je připojen k základně více kinematickými řetězci. Využijeme princip dekompozice PM na tři nezávislé kinematické řetězce, které jsou ke koncovému efektoru připojeny v přípojných bodech  $\mathbf{D}_i$  prostřednictvím sférického kloubu (typ  $\mathbf{S}$ ), tedy připojení není jakkoliv ovlivněno vzájemnou orientací koncového efektoru a posledního ramena kinematického řetězce. Z Obrázku 38(b) je zřejmé, že geometrické parametry lze rozdělit na parametry, které souvisejí s geometrií kinematických řetězců, v tomto případě se jedná o jediný parametr  $l_{i2}$  a parametry, které souvisejí s geometrií základny a koncového efektoru manipulátoru, v tomto případě  $a_1$ ,  $a_2$  a  $v$ . Offsets a převodové poměry pohonů zatím neuvažujeme.

Zaměříme se nejprve na analýzu  $i$ -tého kinematického řetězce  $B_i C_i D_i$ :

### Analýza chyby polohy přípojného bodu $\mathbf{D}_i$ vlivem chyby geometrického parametru kinematického řetězce:

Zavedeme-li souřadné systémy  $i$ -tého kinematického řetězce pomocí DH úmluvy, viz Obrázek 38(b), DH parametry budou dané Tabulkou 4. Poznamenejme, že poloha koncového efektoru kinematického řetězce je dána polohou přípojného bodu  $\mathbf{D}_i$  vzhledem k s.s.  $F_{i0}$ , kloubové souřadnice kinematického řetězce jsou  $l_{i1}$ ,  $\theta_{i1}$ ,  $\theta_{i2}$  a s.s.  $F_{i0}$  reprezentuje základnu kinematického řetězce.

$j$	$d_j$	$\theta_j$	$a_j$	$\alpha_j$
1	$l_{i1}$	0	0	0
2	0	$\theta_{i1}$	0	$\frac{\pi}{2}$
3	0	$\theta_{i2}$	$l_{i2}$	0

Tabulka 4: DH parametry pro sériový kinematický řetězec (tučně vyznačen geometrický parametr, zbylé parametry jsou považovány za kloubové souřadnice)

Pomocí DH parametrů lze pro kinematický řetězec sestavit homogenní transformační matice  $\mathbf{T}_{i0}^{i1}(l_{i1})$ ,  $\mathbf{T}_{i2}^{i1}(\theta_{i1})$ ,  $\mathbf{T}_{i3}^{i2}(\theta_{i2})$  popisující transformace s.s. řetězce. Předpokládejme dále, že známe řešení PKÚ  $\mathbf{D}_i^{i0} = \mathbf{F}_i(\mathbf{Q}_i, \boldsymbol{\xi}_i)$  i IKÚ  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{F}_i^{-1}(\mathbf{D}_i^{i0}, \boldsymbol{\xi}_i)$ , viz [7]. Analogickým postupem jako v Kapitole 2 lze sestavit zobecněný jakobián  $\Psi_i(\mathbf{Q}_i, \boldsymbol{\xi}_i)$   $i$ -tého kinematického řetězce, viz rovnice (16) respektive (18) pro DH parametr  $d_1$  respektive  $a_3$  z Tabulky 4.

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D}_i^{i0} \\ \Delta \mathbf{X}_{i_r} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_{l_{i1}}^{i0} & \Psi_{l_{i2}}^{i0} \end{bmatrix}}_{\Psi_i(\mathbf{Q}_i, \boldsymbol{\xi}_i)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta l_{i1} \\ \Delta l_{i2} \end{bmatrix} \quad (93)$$

kde  $\Delta \mathbf{D}_i^{i0}$  odpovídá chybě pozice přípojného bodu  $\mathbf{D}_i$  vzhledem k s.s.  $F_0$  a  $\Delta \mathbf{X}_{i_r}$  je chyba orientace koncového efektoru sériového kinematického řetězce, tedy s.s.  $F_{i3}$ , kterou nadále nepotřebujeme znát, neboť na orientaci bodu připojení kinematického řetězce nezáleží.

Vzhledem k faktu, že nás zajímá pouze chyba pozice koncového efektoru  $\Delta \mathbf{D}_i^{i0}$  způsobená geometrickým parametrem  $l_{i2}$  PM ( $l_{i1}$  je kloubová souřadnice PM), lze z rovnice (93) získat následující relaci:

$${}^{l_{i2}}\Delta \mathbf{D}_i^{i0} = \Psi_{l_{i2}}^{i0} \cdot \Delta l_{i2} \quad (94)$$

kde  ${}^{l_{i2}}\Delta \mathbf{D}_i^{i0}$  označuje chybu polohy přípojného bodu  $\mathbf{D}_i$  vlivem chyby geometrického parametru  $l_{i2}$ .

### Analýza chyby polohy přípojného bodu $\mathbf{D}_i$ vlivem chyby geometrických parametrů základny a koncového efektoru:

Zabývejme se dále vlivem chyby geometrických parametrů  $a_1$ ,  $a_2$  a  $v$  na chybu přípojného bodu  $\mathbf{D}_i$   $i$ -tého kinematického řetězce. Z geometrie PM lze ukázat, viz [7], [5], že poloha přípojného bodu  $\mathbf{D}_i$  lze vzhledem k příslušnému s.s.  $F_{i0}$  vyjádřit jako, viz Obrázek 38(a):

$${}^*\mathbf{D}_i^{i0} = {}^*\mathbf{O}_e^{i0} + \mathbf{R}_e^{i0} \cdot {}^*\mathbf{D}_i^e \quad (95)$$

kde  ${}^*\mathbf{O}_e^{i0}$  je poloha počátku s.s. koncového efektoru  $F_e$  vzhledem k s.s.  $F_i$   $i$ -tého kinematického řetězce (index  $*$  opět značí skutečné hodnoty geometrických parametrů):

$${}^*\mathbf{O}_e^{10} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6}a_1^* & \frac{a_1^*}{2} & v^* \end{bmatrix}^T, \quad {}^*\mathbf{O}_e^{20} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6}a_1^* & -\frac{a_1^*}{2} & v^* \end{bmatrix}^T, \quad {}^*\mathbf{O}_e^{30} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}a_1^* & 0 & v^* \end{bmatrix}^T$$

Umístění přípojných bodů  ${}^*\mathbf{D}_i^e$  vzhledem k s.s. koncového efektoru  $F_e$  (konstantní hodnoty) lze vyjádřit jako:

$${}^*\mathbf{D}_1^e = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}a_2^* & \frac{a_2^*}{2} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad {}^*\mathbf{D}_2^e = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3}a_2^* & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad {}^*\mathbf{D}_3^e = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6}a_2^* & -\frac{a_2^*}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$$

Matice rotace  $\mathbf{R}_e^{i0} = \mathbf{R}_e^b(\alpha, \beta, \gamma)$  je známá matice, která je dána polohou koncového efektoru  $\mathbf{X}$  jako matice postupných rotací podle schématu XYZ o úhly  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ :

$$\mathbf{R}_e^b = \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix}$$

kde  $s_\alpha = \sin(\alpha)$ ,  $c_\alpha = \cos(\alpha)$ ,  $s_\beta = \sin(\beta)$ ,  $c_\beta = \cos(\beta)$ ,  $s_\gamma = \sin(\gamma)$ ,  $c_\gamma = \cos(\gamma)$  jsou známé konstanty závislé na poloze koncového efektoru  $\mathbf{X}$ .

Taylorovým rozvojem pravé strany rovnice (95) v bodě skutečných hodnot geometrických parametrů

$$\begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & v^* \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & v \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \Delta a_1 & \Delta a_2 & \Delta v \end{bmatrix}^T$$

dostáváme linearizovaný model:

$$\underbrace{{}^*\mathbf{D}_i^{i0} - \mathbf{D}_i^{i0}}_{\Delta \mathbf{D}_i^{i0}} = \frac{\partial {}^*\mathbf{D}_i^{i0}}{\partial \begin{bmatrix} a_1^* & a_2^* & v^* \end{bmatrix}^T} \bigg|_{\begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ v \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad (96)$$

kde  $\mathbf{D}_i^{i0} = \mathbf{O}_e^{i0} + \mathbf{R}_e^{i0} \cdot \mathbf{D}_i^e$  je odhad polohy přípojného bodu  $\mathbf{D}_i$  pro parametry  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $v$ .

Rovnici (96) lze dále upravit na:

$${}_{a_1, a_2, v} \Delta \mathbf{D}_i^{i0} = \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{\partial {}^*\mathbf{D}_i^{i0}}{\partial a_1^*} \big|_{a_1^*=a_1}}_{\Psi_{a_1}^{i0}} & \underbrace{\frac{\partial {}^*\mathbf{D}_i^{i0}}{\partial a_2^*} \big|_{a_2^*=a_2}}_{\Psi_{a_2}^{i0}} & \underbrace{\frac{\partial {}^*\mathbf{D}_i^{i0}}{\partial v^*} \big|_{v^*=v}}_{\Psi_v^{i0}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad (97)$$

kde vektor  $\Delta \mathbf{D}_i^{i0}$  byl nahrazen formálně vektorem s označením  ${}_{a_1, a_2, v} \Delta \mathbf{D}_i^{i0}$ , neboť udává, analogicky jako v (94), chybu pozice přípojného bodu  $\mathbf{D}_i$  danou vlivem chyby geometrických parametrů základny a koncového efektoru manipulátoru  $\Delta a_1$ ,  $\Delta a_2$ ,  $\Delta v$ . Poznamenejme, že sloupce zobecněného jakobiánu  $\Psi_{a_1}^{i0}$ ,  $\Psi_{a_2}^{i0}$ ,  $\Psi_v^{i0}$  je nutné vypočítat přímým parciálním derivováním rovnice (95). Složitost této rovnice je však dána pouze geometrickým uspořádáním přípojných bodů koncového efektoru vzhledem k s.s.  $F_e$  a uspořádáním počátku koncového efektoru (s.s.  $F_e$ ) vzhledem k s.s.  $F_{i0}$  a je tak většinou jednoduše řešitelná. Např. v uvedeném případě PM pro 1. – 3. kinematický řetězec platí:

$$\Psi_{a_1}^{10} = \begin{bmatrix} -1/6\sqrt{3} \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_{a_2}^{10} = \begin{bmatrix} 1/6 cb cg \sqrt{3} - 1/2 cb sg \\ 1/6 (sa sb cg + ca sg) \sqrt{3} + 1/2 ca cg - 1/2 sa sb sg \\ -1/6 (ca sb cg - sa sg) \sqrt{3} + 1/2 sa cg + 1/2 ca sb sg \end{bmatrix}, \quad \Psi_v^{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{a_1}^{20} = \begin{bmatrix} -1/6 \sqrt{3} \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_{a_2}^{20} = \begin{bmatrix} -1/3 cb cg \sqrt{3} \\ -1/3 (sa sb cg + ca sg) \sqrt{3} \\ 1/3 (ca sb cg - sa sg) \sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \Psi_v^{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{a_1}^{30} = \begin{bmatrix} 1/3 \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_{a_2}^{30} = \begin{bmatrix} 1/6 cb cg \sqrt{3} + 1/2 cb sg \\ 1/6 \sqrt{3} sa sb cg + 1/6 \sqrt{3} ca sg + 1/2 sa sb sg - 1/2 ca cg \\ -1/6 (ca sb cg - sa sg) \sqrt{3} - 1/2 sa cg - 1/2 ca sb sg \end{bmatrix}, \quad \Psi_v^{30} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Analýza chyby polohy přípojného bodu  $D_i$  vlivem chyby kloubových souřadnic kinematického řetězce:**

Vhledem k faktu, že chceme určit zobecněný jakobián  $\Psi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$  z rovnice (92), je nutné stanovit ještě chybu polohy koncového efektoru  ${}^i\Delta\mathbf{D}_i^{i0}$   $i$ -tého kinematického řetězce v závislosti na chybě jeho kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}_i$ . Obecně platí, že tato relace lze pro sériový kinematický řetězec vyjádřit vztahem:

$${}^i\Delta\mathbf{D}_i^{i0} = \mathbf{J}_{i3}^{i0} \cdot \Delta\mathbf{Q}_i = \mathbf{J}_{i3}^{i0} \cdot \begin{bmatrix} \Delta l_{i1} \\ \Delta\theta_{i1} \\ \Delta\theta_{i2} \end{bmatrix} \quad (98)$$

kde

$$\mathbf{J}_{i3}^{i0} = \begin{bmatrix} 0 & -s_{i1} l_{i2} c_{i2} & -c_{i1} l_{i2} s_{i2} \\ 0 & c_{i1} l_{i2} c_{i2} & -s_{i1} l_{i2} s_{i2} \\ 1 & 0 & l_{i2} c_{i2} \end{bmatrix}$$

je kinematický jakobián  $i$ -tého kinematického řetězce závislý na jeho kloubových souřadnicích, neboť platí  $s_{i1} = \sin(\theta_{i1})$ ,  $c_{i1} = \cos(\theta_{i1})$ ,  $s_{i2} = \sin(\theta_{i2})$ ,  $c_{i2} = \cos(\theta_{i2})$ . Poznamenejme, že výpočet kinematického jakobiánu je shodný s postupem uvedeným v Kapitole 2 v rovnici (22). Více o výpočtu kinematických jakobiánů lze nalézt v [7].

Vzhledem k tomu, že v přípojném bodě  $D_i$  musí být kinematický řetězec napojen na koncový efektor, musí platit, že chyba v poloze koncového efektoru kinematického řetězce, tedy chyba  ${}^{i2}\Delta\mathbf{D}_i^{i0}$  (vliv chyby geometrického parametru  $l_{i2}$ ) a chyba  ${}^i\Delta\mathbf{D}_i^{i0}$  (vliv chyby aktivních kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}_i$ ) musí být rovna chybě v poloze přípojného bodu na koncovém efektoru  ${}^{a_1, a_2, v}\Delta\mathbf{D}_i^{i0}$  (vliv chyby geometrických parametrů  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $v$ ):

$${}^{i2}\Delta\mathbf{D}_i^{i0} + {}^i\Delta\mathbf{D}_i^{i0} \stackrel{!}{=} {}^{a_1, a_2, v}\Delta\mathbf{D}_i^{i0} \quad (99)$$

Dosažením rovnic (94, 98, 97) dostáváme:

$$\Psi_{l_{i2}}^{i0} \cdot \Delta l_{i2} + \mathbf{J}_{i3}^{i0} \cdot \begin{bmatrix} \Delta l_{i1} \\ \Delta\theta_{i1} \\ \Delta\theta_{i2} \end{bmatrix} = [\Psi_{a_1}^{i0} \quad \Psi_{a_2}^{i0} \quad \Psi_v^{i0}] \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta l_{i1} \\ \Delta\theta_{i1} \\ \Delta\theta_{i2} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_{i3}^{i0})^{-1} \cdot [\Psi_{a_1}^{i0} \quad \Psi_{a_2}^{i0} \quad -\Psi_{l_{i2}}^{i0} \quad \Psi_v^{i0}] \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta l_{i2} \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad (100)$$

Rovnice (100) nám tedy udává závislosti mezi chybou geometrických parametrů  $i$ -tého kinematického řetězce, základny a koncového efektoru a chybou kloubových souřadnic tohoto kinematického řetězce.

**Vliv offsetů a převodových poměrů aktuátorů:**



Vztah mezi kloubovými souřadnicemi PM a polohami aktuátorů lze vyjádřit dle rovnice (88) jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_M &= \text{diag}(\mathbf{K}^*) \cdot \mathbf{Q}_m + \mathbf{Q}_{off}^* \\ (\text{po složkách}): \quad q_{M_i} &= k_i^* \cdot q_{m_i} + q_{i\ off}^* \end{aligned} \quad (101)$$

kde  $\mathbf{Q}_M$  je skutečná měřená poloha kloubových souřadnic.

Taylorovým rozvojem pravé strany rovnice (101) v bodě skutečných parametrů  $k_i^* = k_i + \Delta k_i$ ,  $q_{i\ off}^* = q_{i\ off} + \Delta q_{i\ off}$  dostáváme:

$$\underbrace{q_{M_i} - q_i}_{k_i, q_{i\ off} \Delta q_i} = [1 \quad q_{m_i}] \cdot \begin{bmatrix} \Delta q_{i\ off} \\ \Delta k_i \end{bmatrix} \quad (102)$$

kde  $q_i = k_i \cdot q_{m_i} + q_{i\ off}$  a  ${}^{k_i, q_{i\ off}} \Delta q_i$  je chyba kloubových souřadnic způsobená vlivem chyby parametrů převodovek  $\Delta q_{i\ off}$ ,  $\Delta k_i$ .

Budeme-li nyní předpokládat, že všechny kinematické řetězce PM jsou identické, tedy  $l_{12} = l_{22} = l_{32} = l$  a aktivní kloubové souřadnice kinematických řetězců tvoří kloubové souřadnice PM,  $l_{i1} = q_i$ , viz rovnice (87), rovnici (100) lze psát ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} \Delta q_i \\ \Delta \theta_{i1} \\ \Delta \theta_{i2} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_{i3}^{i0})^{-1} \cdot [\Psi_{a_1}^{i0} \quad \Psi_{a_2}^{i0} \quad -\Psi_l^{i0} \quad \Psi_v^{i0}] \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta l \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad (103)$$

A chybu aktivní kloubové souřadnice  $q_i$  potom jako:

$$\Delta q_i = (\mathbf{J}_{i3}^{i0})^{-1} [1, :] \cdot [\Psi_{a_1}^{i0} \quad \Psi_{a_2}^{i0} \quad -\Psi_l^{i0} \quad \Psi_v^{i0}] \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta l \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad (104)$$

Je zřejmé, že chyba  ${}^{k_i, q_{i\ off}} \Delta q_i$  parametrů převodovek bude opět přičtena k chybě aktivní kloubové souřadnice  $\Delta q_i$ :

$$\begin{aligned} \Delta q_i + {}^{k_i, q_{i\ off}} \Delta q_i &= (\mathbf{J}_{i3}^{i0})^{-1} [1, :] \cdot [\Psi_{a_1}^{i0} \quad \Psi_{a_2}^{i0} \quad -\Psi_l^{i0} \quad \Psi_v^{i0}] \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta l \\ \Delta v \end{bmatrix} \\ \Delta q_i &= \left[ (\mathbf{J}_{i3}^{i0})^{-1} [1, :] \cdot [\Psi_{a_1}^{i0} \quad \Psi_{a_2}^{i0} \quad -\Psi_l^{i0} \quad \Psi_v^{i0}] \quad -1 \quad -q_{m_i} \right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta l \\ \Delta v \\ \Delta q_{i\ off} \\ \Delta k_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (105)$$

Rovnice (105) vyjadřuje kompletní vztah pro chybu aktivní kloubové souřadnice  $q_i$  PM způsobenou chybou geometrických parametrů, včetně charakteristických vlastností převodovek. Výsledný zobecněný jakobián  $\Psi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$  lze získat vyjádřením chyb všech kloubových souřadnic PM

z rovnice (105) pro  $i = 1 \dots 3$ , tedy:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \end{bmatrix}}_{\Delta Q} = \Psi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \xi) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta l \\ \Delta v \\ \Delta q_{1 \text{ off}} \\ \Delta q_{2 \text{ off}} \\ \Delta q_{3 \text{ off}} \\ \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \end{bmatrix}}_{\Delta \xi} \quad (106)$$

kde zobecněný jakobián PM je:

$$\Psi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \xi) = \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_{13}^{10})^{-1} [1, :] \cdot [\Psi_{a_1}^{10} & \Psi_{a_2}^{10} & -\Psi_l^{10} & \Psi_v^{10}] & -1 & 0 & 0 & -q_{m_1} & 0 & 0 \\ (\mathbf{J}_{23}^{20})^{-1} [1, :] \cdot [\Psi_{a_1}^{20} & \Psi_{a_2}^{20} & -\Psi_l^{20} & \Psi_v^{20}] & 0 & -1 & 0 & 0 & -q_{m_2} & 0 \\ (\mathbf{J}_{33}^{30})^{-1} [1, :] \cdot [\Psi_{a_1}^{30} & \Psi_{a_2}^{30} & -\Psi_l^{30} & \Psi_v^{30}] & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -q_{m_3} \end{bmatrix}$$

## 10 Metody kalibrace PM

Zatímco u sériových manipulátorů obecně platí, že PKÚ je vždy a bez výjimky řešitelná jednoznačně a analyticky, v případě paralelních manipulátorů je PKÚ řešitelná analyticky pouze v omezeném množství specializovaných architektur manipulátorů a v mnoha případech vykazují větší počet možných řešení. Z tohoto důvodu jsou všechny uvedené metody kalibrace pro SM, viz Kapitola 7, založeny na rekonstruování chyby v poloze koncového efektoru, ať už se jedná o úplné měření polohy či o metody využívající restrikcí úplné polohy koncového efektoru na jednodušší měření, např. měření vzdálenosti. Polohu koncového efektoru na základě zadaných poloh aktuátorů lze totiž řešit prostřednictvím PKÚ velmi snadno. V případě PM se však z důvodu jednodušší řešitelnosti IKÚ nabízí jiný, opačný přístup, a to využít rekonstrukci chyby v poloze aktuátorů z vypočtených a odměřených poloh a využít tak výhradně IKÚ<sup>6</sup>. Metoda kalibrace PM s využitím IKÚ bude podrobně vysvětlena v Kapitole 10.1. Z důvodů, které budou vysvětleny dále se však budeme zabývat i metodou kalibrace PM založenou na využití právě složitější PKÚ, viz Kapitola 10.2.

### 10.1 Kalibrace PM - využití IKÚ

Uvedená kalibrační metoda využívá právě linearizovaného vztahu (106) z Kapitoly 9. Uvažujeme-li opět  $m$  měření (měření polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_M$  kalibračním snímačem polohy a odpovídající měření poloh aktuátorů  $\mathbf{Q}_{m_M}$ ). Výsledný linearizovaný kalibrační model je dán analogicky jako v Kapitole 2, rovnice (28).

$$\Delta Q_{ag} = \mathbf{W} \cdot \Delta \xi + \mathbf{V} \quad (107)$$

kde agregovaný vektor chyby měření:  $\Delta Q_{ag}$  a matice pozorování  $\mathbf{W}$  budou:

$$\Delta Q_{ag} = \begin{bmatrix} \Delta Q^1 \\ \vdots \\ \Delta Q^m \end{bmatrix} = [p \cdot m \times 1], \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \Phi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M^1, \xi) \\ \vdots \\ \Phi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M^m, \xi) \end{bmatrix} = [p \cdot m \times 1]$$

<sup>6</sup>Poznamenejme, že takový přístup by byl pochopitelně možný i u SM, nicméně by musela být řešena obecně složitější IKÚ.

kde  $\Delta \mathbf{Q}^i = \mathbf{Q}_M^i - \mathbf{Q}^i$  bude chyba polohy **kloubových souřadnic** pro  $i$ -té měření (rozdíl mezi skutečnou měřenou hodnotou kloubových souřadnic a jejich rekonstruovanou hodnotou prostřednictvím IKÚ), kde  $\mathbf{Q}_M^i = \bar{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{X}_M^i, \boldsymbol{\xi}^*)$ ,  $\mathbf{Q}^i = \bar{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{X}_M^i, \boldsymbol{\xi})$ . Funkce

$$\bar{\mathbf{F}}^{-1} : \mathbf{Q} = \bar{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{X}, [a_1 \ a_2 \ l \ v]^T)$$

označuje řešení IKÚ, kde výstupem funkce jsou hodnoty kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}$  PM (nikoliv polohy aktuátorů  $\mathbf{Q}_m$ , funkce je přirozeně nezávislá na parametrech převodovek).  $\mathbf{V} = [p \cdot m \times 1]$  je vektor chyby rovnice. Kalibrační jakobián je přímo roven zobecněnému jakobiánu z rovnice (106):

$$\Phi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi}) = \Psi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$$

Bohužel, reálným měřením na aktuátorech manipulátoru většinou nelze získat přímo hodnoty poloh kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}_M$ , ale pouze hodnoty měření polohy aktuátorů  $\mathbf{Q}_{m_M}$ , kde platí:

$$\mathbf{Q}_M = \begin{bmatrix} q_{1 \text{ off}}^* \\ q_{2 \text{ off}}^* \\ q_{3 \text{ off}}^* \end{bmatrix} + \text{diag}([k_1^* \ k_2^* \ k_3^*]^T) \cdot \mathbf{Q}_{m_M} \quad (108)$$

kde  $\mathbf{Q}_{m_M} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi}^*)$  je dána známou IKÚ.

Skutečné geometrické parametry však nejsou známy, tedy rekonstruovaná hodnota polohy kloubových souřadnic je dána jako:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{1 \text{ off}} \\ q_{2 \text{ off}} \\ q_{3 \text{ off}} \end{bmatrix} + \text{diag}([k_1 \ k_2 \ k_3]^T) \cdot \mathbf{Q}_m \quad (109)$$

kde  $\mathbf{Q}_m = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$  je dána známou IKÚ.

Budeme-li předpokládat, že skutečné a nominální parametry jsou přibližně shodné  $q_{i \text{ off}}^* \approx q_{i \text{ off}}$ ,  $k_i^* \approx k_i$ , lze rekonstruovat chybu polohy kloubových souřadnic stanovit odečtením rovnic (108, 109):

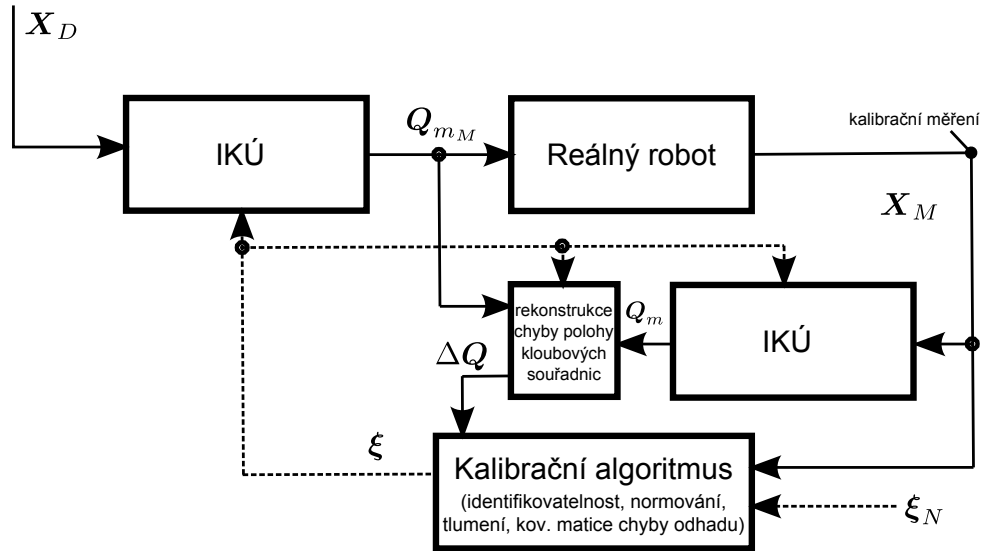
$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_M - \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{1 \text{ off}}^* \\ q_{2 \text{ off}}^* \\ q_{3 \text{ off}}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_{1 \text{ off}} \\ q_{2 \text{ off}} \\ q_{3 \text{ off}} \end{bmatrix} + \quad (110)$$

$$+ \text{diag}([k_1^* \ k_2^* \ k_3^*]^T) \cdot \mathbf{Q}_{m_M} - \text{diag}([k_1 \ k_2 \ k_3]^T) \cdot \mathbf{Q}_m$$

$$\Delta \mathbf{Q} \approx \text{diag}([k_1 \ k_2 \ k_3]^T) \cdot (\mathbf{Q}_{m_M} - \mathbf{Q}_m) \quad (111)$$

kde  $\mathbf{Q}_{m_M}$  jsou měřené hodnoty poloh aktuátorů a  $\mathbf{Q}_m = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$  je jejich rekonstruovaná hodnota.

Výsledný kalibrační algoritmus je analogický k Algoritmu 2 (agregovaná chyby polohy koncového efektoru  $\Delta \mathbf{X}_{ag}$  je nahrazena agregovanou chybou polohy kloubových souřadnic  $\Delta \mathbf{Q}_{ag}$ ). Schéma kalibrace je znázorněno na Obrázku 39.



Obrázek 39: Metoda kalibrace: založena na řešení IKÚ, nutno měření kompletní polohy koncového efektoru.  $\mathbf{X}_D$  jsou požadované polohy koncového efektoru pro měření. V algoritmu je třeba počítat pouze jednodušší IKÚ.

Výsledky kalibračního algoritmu jsou znázorněny na následujících obrázcích. Generované polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_D$  byly generovány náhodně v intervalech:

$$\alpha \in \left\langle \frac{-20}{180}\pi, \frac{20}{180}\pi \right\rangle, \quad \beta \in \left\langle \frac{-20}{180}\pi, \frac{20}{180}\pi \right\rangle, \quad \gamma \in \left\langle \frac{-20}{180}\pi, \frac{20}{180}\pi \right\rangle$$

Skutečné hodnoty geometrických návrhových parametrů manipulátoru:

$$\xi^* = \left[ 0.1298 \quad 0.10108 \quad 0.1465 \quad 0.278 \quad 0.02 \quad 0.01 \quad -0.01 \quad \frac{1}{12000} \quad \frac{1}{8000} \quad \frac{1}{9000} \right]^T$$

Nominální hodnoty geometrických návrhových parametrů manipulátoru:

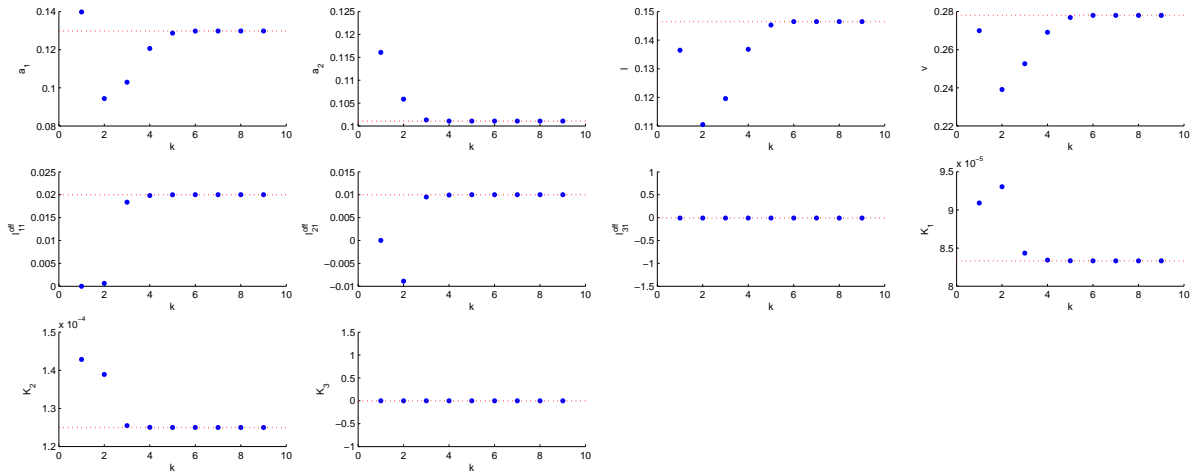
$$\xi_N = \left[ 0.1398 \quad 0.1608 \quad 0.1365 \quad 0.270 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{11000} \quad \frac{1}{7000} \quad \frac{1}{10000} \right]^T$$

Koeficient tlumení  $\lambda = 1 \cdot 10^{-4}$ . Podmínka zastavení algoritmu  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-10}$ .

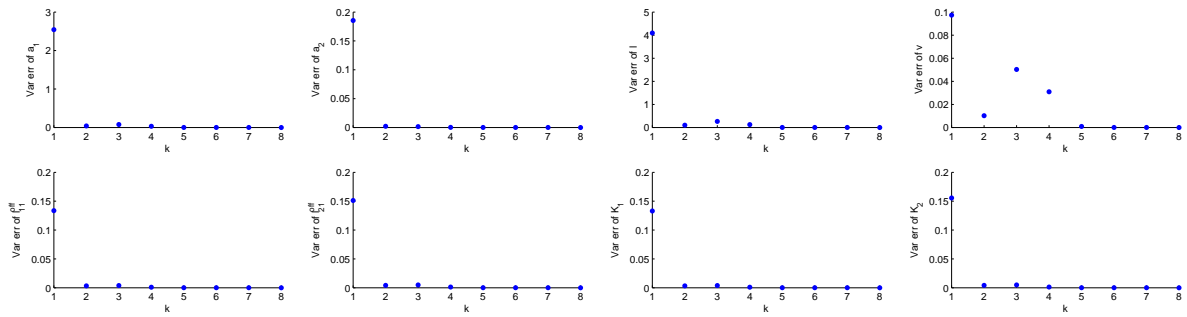
Analýza matice pozorování  $\mathbf{W}$  ukazuje, že kalibrační metoda obsahuje dva neidentifikovatelné parametry  $q_{13 \text{ off}}$  a  $k_3$ , tedy  $N_R = 8$ . Vektor chyby polohy aktuátorů má tři složky,  $p = 3$ , tedy minimální doporučený počet měření je analogicky k (60)  $m = 14$ .

Obrázky 40 - 42 znázorňují průběh kalibračního algoritmu v případě, že známe přesné hodnoty neidentifikovatelných parametrů (jejich nominální hodnoty jsou rovny skutečným).

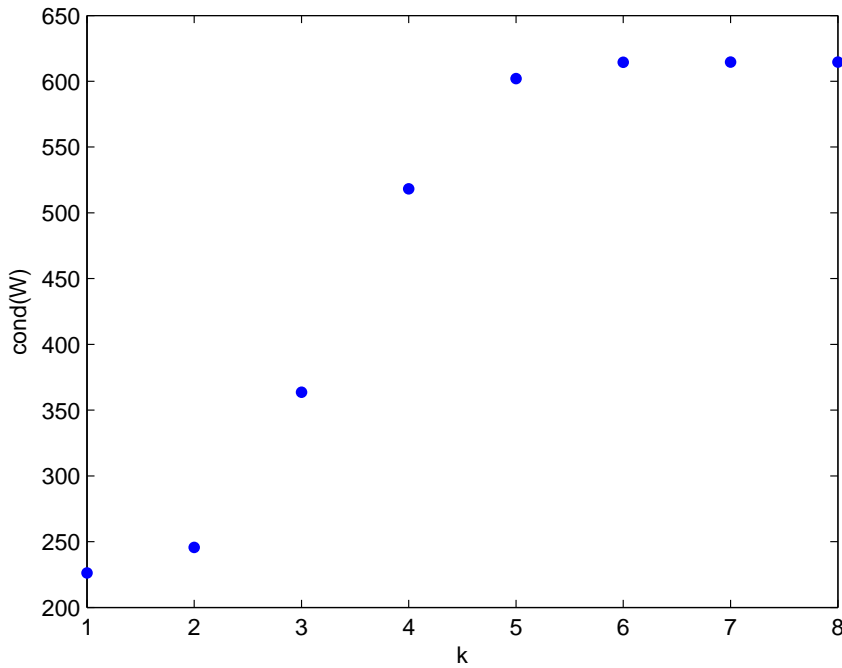
$$q_{3 \text{ off}_N} = q_{3 \text{ off}}^*, \quad k_{3_N} = k_3^*$$



Obrázek 40: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\xi^*$ .



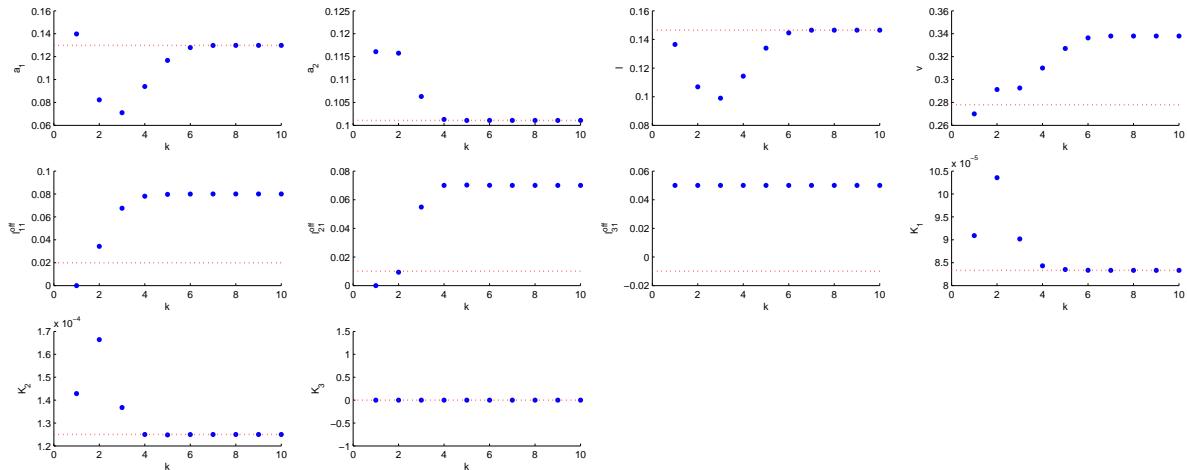
Obrázek 41: Průběh rozptylu odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů  $\text{Var}(e^{(k)})$ .



Obrázek 42: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $W$ .

Předpokládejme dále několik možných situací volby nominálních hodnot neidentifikovatelných parametrů:

1. Offset  $q_{3\ off}$  není znám přesně:  $q_{3\ off_N} \neq q_{3\ off}^*$



Obrázek 43: Průběh kalibrovaných parametrů  $\hat{\xi}^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\xi^*$ .  $q_{3\ off_N} = 0.05$ .

Z Obrázku 43 je zřejmé, že dojde k překalibrování parametrů  $v$ ,  $q_{1\ off}$ ,  $q_{2\ off}$  na hodnoty odlišné od hodnot skutečných. Vzhledem k faktu, že geometrické uspořádání PM je dáno výhradně parametry  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $l$ ,  $v$ , dochází tak ke změně podoby kinematického modelu manipulátoru, viz Obrázek 44, a tedy pro danou polohu koncového efektoru  $\mathbf{X}$  dostáváme i jiné hodnoty odpovídajících **kloubových** souřadnic  $q_i$ . Toto připomíná situaci při použití

kalibračních metod SM z Kapitoly 7.3, 7.4, kde neznalost skutečných hodnot některých neidentifikovatelných parametrů vedla ke špatnému nakalibrování ostatních identifikovatelných parametrů manipulátoru a výsledný kinematický model tak nekorespondoval s reálným manipulátorem. V případě PM je situace odlišná. V uvedeném příkladě lze totiž snadno vidět, že nesprávná nominální hodnota geometrického parametru  $q_{13\ off}$  je zcela vykompenzována změnou ostatních offsetů  $q_{2\ off}$ ,  $q_{3\ off}$  a změnou výšky manipulátoru  $v$ .

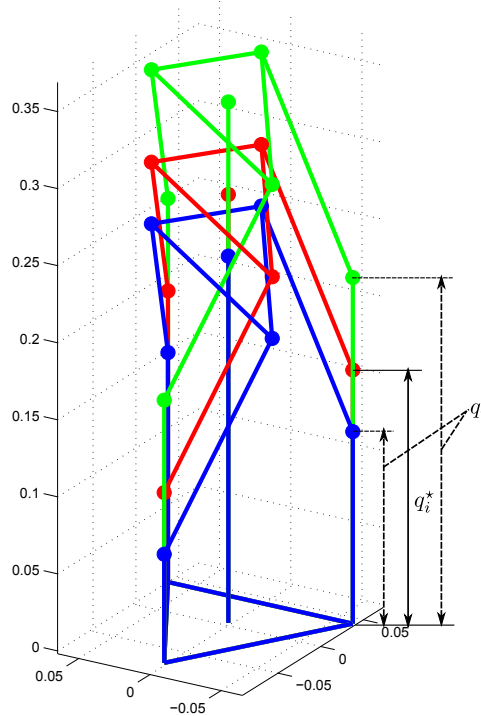
Nechť  $\xi^*$  jsou skutečné parametry manipulátoru a  $\xi$  výsledné parametry manipulátoru po kalibraci pro které zřejmě platí  $\xi^* \neq \xi$ , potom lze ukázat následující rovnost:

$$\mathbf{Q}^* = \bar{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{X}, [a_1^* \ a_2^* \ l^* \ v^*]^T), \quad \mathbf{Q} = \bar{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{X}, [a_1 \ a_2 \ l \ v]^T), \quad \mathbf{Q}^* \neq \mathbf{Q} \quad (112)$$

Ale výsledné řešení IKÚ, které vrací hodnoty poloh aktuátorů  $\mathbf{Q}_m$  (hodnota, kterou jsou řízeny skutečné pohony manipulátoru) je shodné pro skutečné  $\xi^*$  i kalibrované parametry  $\xi$ :

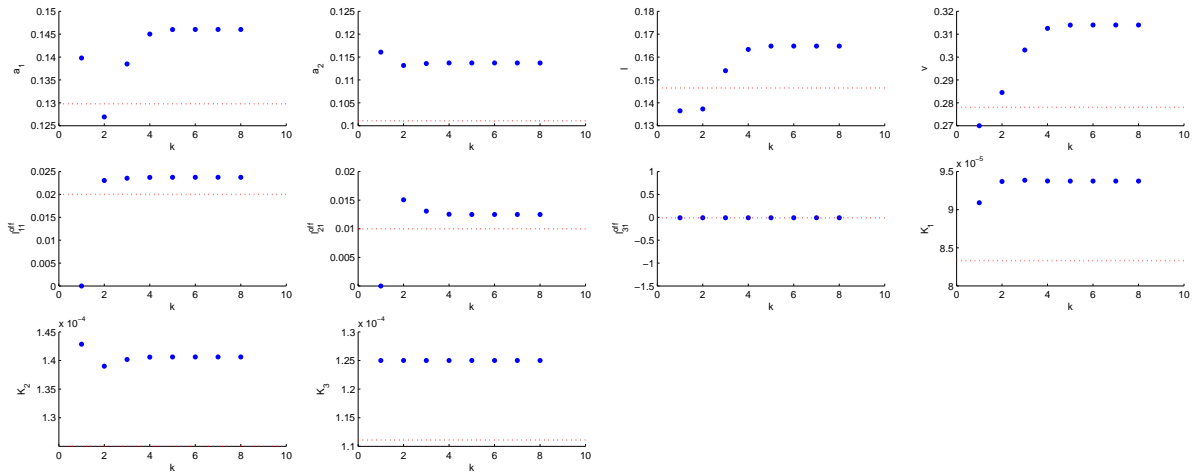
$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_m^* &= \underbrace{\text{diag}([k_1^* \ k_2^* \ k_3^*]^T)^{-1} \cdot (\mathbf{Q}^* - [q_{1\ off}^* \ q_{2\ off}^* \ q_{3\ off}^*]^T)}_{\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, \xi^*)} \\ \mathbf{Q}_m &= \underbrace{\text{diag}([k_1 \ k_2 \ k_3]^T)^{-1} \cdot (\mathbf{Q} - [q_{1\ off} \ q_{2\ off} \ q_{3\ off}]^T)}_{\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, \xi)} \\ \mathbf{Q}_m^* &= \mathbf{Q}_m \end{aligned} \quad (113)$$

Tedy IKÚ pro kalibrované hodnoty geometrických parametrů  $\xi$  vrací správné hodnoty poloh aktuátorů  $\mathbf{Q}_m$  pro požadované umístění koncového efektoru  $\mathbf{X}$ .



Obrázek 44: Geometrický model PM. Skutečné hodnoty parametrů  $q_{3\ off_N} = q_{3\ off}^*$  (červeně),  $q_{3\ off_N} = 0.05$  (zeleně),  $q_{3\ off_N} = -0.05$  (modře). Požadovaná poloha koncového efektoru  $\mathbf{X} = [\frac{\pi}{4} \ 0 \ -\frac{\pi}{4}]^T$ . Schématicky znázorněny polohy kloubových souřadnic.

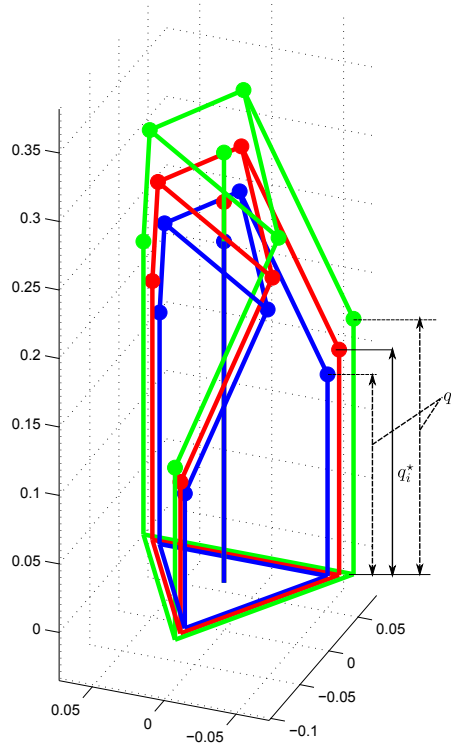
## 2. Převodový poměr $k_3$ není znám přesně: $k_{3N} \neq k_3^*$



Obrázek 45: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\xi^*$ .  $k_{3N} = \frac{1}{8000}$ .

Z Obrázku 45 je patrné, že dojde k překalibrování všech parametrů (vyjma  $q_{3\ off}$ , který známe přesně) na hodnoty odlišné od skutečných. Vlivem změny parametrů  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $l$ ,  $v$  opět dochází ke změně geometrického uspořádání PM, viz Obrázek 46. Nicméně, vztahy dané rovnicemi (112, 113) opět zůstávají v platnosti, tedy neznalost skutečné hodnoty parametru  $k_3$  je vykompenzována ostatními geometrickými parametry manipulátoru tak, že IKÚ vrací shodné hodnoty poloh aktuátorů pro skutečné i kalibrované hodnoty geometrických parametrů.





Obrázek 46: Geometrický model PM. Skutečné hodnoty parametrů  $k_{3N} = k_3^*$  (červeně),  $k_{3N} = \frac{1}{8000}$  (zeleně),  $k_{3N} = \frac{1}{10000}$  (modře). Požadovaná poloha koncového efektoru  $\mathbf{X} = \left[\frac{\pi}{4} \ 0 \ -\frac{\pi}{4}\right]^T$ . Schématicky znázorněny polohy kloubových souřadnic.

Přesto, že představená metoda kalibrace s využitím IGM konverguje při neznalosti přesných hodnot neidentifikovatelných parametrů k jinému geometrickému modelu PM, je tato změna vykompenzována změnou charakteristických vlastností převodovek. Nalezené geometrické parametry lze tedy použít pro řízení reálného manipulátoru, neboť „překalibrovaný“ model vrací korektní hodnoty požadovaných poloh aktuátorů pro danou hodnotu polohy koncového efektoru. Jinými slovy lze říci, že k reálnému PM existuje nekonečné množství jeho modelů, parametrizovaných volnou nominální hodnotou offsetu a převodového poměru třetího aktuátoru. Poznamenejme, že korektní model lze získat i při volbě obou těchto parametrů mimo jejich skutečné hodnoty.

## 10.2 Kalibrace PM - využití PKÚ

Metoda kalibrace PM s využitím IKÚ z Kapitoly 10.1 lze s výhodou využít díky relativně jednoduchým relacím v řešení IKÚ. Nicméně metoda předpokládá měřitelnost všech složek polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}$  (nutné pro řešení právě IKÚ  $\mathbf{Q}_m = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ ). V případě uvažovaného PM to znamená, že kalibrační snímač polohy musí být schopen měřit úhel natočení ve všech třech osách  $x, y, z$ . Metodou kalibrace založené na řešení PKÚ lze tuto nevýhodu odstranit a kalibrační algoritmus může využívat jen některé složky měření polohy koncového efektoru podobným způsobem jako u kalibrace SM.

Linearizovaný kalibrační model je dán Taylorovým rozvojem PKÚ:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}) \quad (114)$$

a má formálně shodný tvar s linearizovaným kalibračním modelem SM, viz rovnice (14):

$$\Delta \mathbf{X} = \boldsymbol{\Psi}^{\text{PKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\xi} \quad (115)$$

kde  $\Psi^{\text{PKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$  je zobecněný jakobián využívající PKÚ.

Zobecněný jakobián  $\Psi^{\text{PKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$  lze odvodit s pomocí již známého zobecněného jakobiánu využívající IKÚ  $\Psi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$ , viz rovnice (106). V případě PM je možné stanovit vztah mezi chybou polohy zobecněných souřadnic (polohy koncového efektoru)  $\Delta \mathbf{X}$  a chybou polohy kloubových souřadnic  $\Delta \mathbf{Q}$  prostřednictvím tzv. analytického jakobiánu  $\mathbf{J}_e^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi})$ :

Analytický jakobián obecně vyjadřuje vztah mezi rychlostmi kloubových souřadnic a rychlostí koncového efektoru (v našem případě PM se jedná o rychlosti Eulerových úhlů  $\alpha, \beta, \gamma$  dle schématu XYZ):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_e^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (116)$$

Pro paralelní manipulátory (typu uvažovaného PM) lze prostřednictvím systematické geometrické metody (bez nutnosti derivací polohových závislostí, tedy PKÚ) odvodit tzv. inverzní kinematický jakobián  $\mathbf{J}_{e_k}^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi})^{-1}$ , který dává do souvislosti opět rychlosti kloubových souřadnic  $\dot{\mathbf{Q}}$  ovšem nikoliv s rychlostmi Eulerových úhlů *boldsymbolsymbol* $\mathbf{X}$ , ale s vektorem úhlové rychlosti koncového efektoru  $\boldsymbol{\omega}_e^e$  (vektor úhlové rychlosti s.s.  $F_e$  vzhledem k s.s.  $F_b$ ).

$$\boldsymbol{\omega}_e^e = \mathbf{J}_{e_k}^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (117)$$

V případě uvažovaného PM lze konkrétní tvar inverzního kinematického jakobiánu  $\mathbf{J}_{e_k}^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi})^{-1}$  nalézt v [7].

Vztah mezi vektorem úhlové rychlosti a příslušnými rychlostmi Eulerových úhlů dle daného schématu rotace lze získat pomocí tzv. Eulerových kinematických rovnic. V případě schématu rotace XYZ lze ukázat, že platí:

$$\boldsymbol{\omega}_e^e = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \cdot \cos \beta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \cdot \cos \beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}(\mathbf{X})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{X}}} \quad (118)$$

Z rovnic (117, 118) lze stanovit tvar analytického jakobiánu:

$$\mathbf{J}_e^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{J}_{e_k}^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}) \quad (119)$$

Rovnici (116) lze přepsat do tvaru chyb polohy kloubových souřadnic a koncového efektoru:

$$\Delta \mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{X}} = \mathbf{J}_e^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{X} \quad (120)$$

kde  $\Delta \mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{X}}$  označuje chybu polohy kloubových souřadnic vlivem chyby polohy koncového efektoru  $\Delta \mathbf{X}$ .

Vztah (106) lze interpretovat jako chybu kloubových souřadnic  $\Delta \mathbf{Q}_{\Delta \boldsymbol{\xi}}$  způsobenou chybami geometrických parametrů  $\Delta \boldsymbol{\xi}$ :

$$\Delta \mathbf{Q}_{\Delta \boldsymbol{\xi}} = \Psi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\xi} \quad (121)$$

Opět z podmínky uzavření kinematické struktury PM musí platit, že chyba kloubových souřadnic  $\Delta \mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{X}}$  způsobená vlivem chyby polohy koncového efektoru musí být kompenzována chybou kloubových souřadnic  $\Delta \mathbf{Q}_{\Delta \boldsymbol{\xi}}$  způsobenou vlivem chyby geometrických parametrů, tedy:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q}_{\Delta \mathbf{X}} + \Delta \mathbf{Q}_{\Delta \boldsymbol{\xi}} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \mathbf{J}_e^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{X} + \Psi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi}) \cdot \Delta \boldsymbol{\xi} &= 0 \\ \Delta \mathbf{X} &= -\underbrace{\mathbf{J}_e^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \Psi^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})}_{\Psi^{\text{PKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})} \cdot \Delta \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (122)$$

kde hodnoty kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}$  lze získat z polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_M$  řešením IKÚ ve tvaru  $\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$ .

Výsledný zobecněný jakobián pro kalibraci PM pomocí metody založené na PKÚ je tedy dán jako:

$$\boldsymbol{\Psi}^{\text{PKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{J}_e^b(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\Psi}^{\text{IKU}}(\mathbf{X}_m, \boldsymbol{\xi}) \quad (123)$$

Výsledný linearizovaný kalibrační model je opět analogický k rovnici (28):

$$\Delta \mathbf{X}_{ag} = \mathbf{W} \cdot \Delta \boldsymbol{\xi} + \mathbf{V} \quad (124)$$

kde agregovaný vektor chyby měření:  $\Delta \mathbf{X}_{ag}$  a matice pozorování  $\mathbf{W}$  bude:

$$\Delta \mathbf{X}_{ag} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{X}^1 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{X}^m \end{bmatrix} = [p \cdot m \times 1], \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{\text{PKU}}(\mathbf{X}_M^1, \boldsymbol{\xi}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi}^{\text{PKU}}(\mathbf{X}_M^m, \boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} = [p \cdot m \times 1]$$

kde  $\Delta \mathbf{X}^i = \mathbf{X}_M^i - \mathbf{X}^i$  bude chyba polohy koncového efektoru pro  $i$ -té měření (rozdíl mezi skutečnou měřenou hodnotou polohy koncového efektoru a jeho rekonstruovanou hodnotou prostřednictvím PKÚ), kde  $\mathbf{X}_M = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}^*)$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$ .  $\mathbf{V} = [p \cdot m \times 1]$  je vektor chyby rovnice.

V uvažované kalibrační metodě lze nyní využít buď kompletní měření polohy koncového efektoru kalibračním snímačem polohy, nebo pouze některých jeho složek. Uvažujme následující případy:

### 1. Kompletní měření polohy koncového efektoru:

Kalibrační jakobián:

$$\boldsymbol{\Phi}^{\text{PKU}}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Psi}^{\text{PKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi}) \quad (125)$$

Analýzou matice pozorování  $\mathbf{W}$  lze ukázat, že opět získáváme dva neidentifikovatelné parametry  $q_{13 \text{ off}}$  a  $k_3$ , tedy  $N_R = 8$ . Chyba měření polohy koncového efektoru je vektorem o třech složkách, tedy  $p = 3$ . Minimální doporučený počet měření je dle (60)  $m = 14$ .

### 2. Měření pouze složek $\alpha, \beta$ polohy koncového efektoru:

Kalibrační jakobián:

$$\boldsymbol{\Phi}^{\text{PKU}}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Psi}^{\text{PKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})[1 : 2] \quad (126)$$

Analýzou matice pozorování  $\mathbf{W}$  lze ukázat, že opět získáváme dva neidentifikovatelné parametry  $q_{13 \text{ off}}$  a  $k_3$ , tedy  $N_R = 8$ . Chyba měření polohy koncového efektoru je vektorem o dvou složkách, tedy  $p = 2$ . Minimální doporučený počet měření je dle (60)  $m = 20$ .

### 3. Měření pouze složek $\alpha$ polohy koncového efektoru:

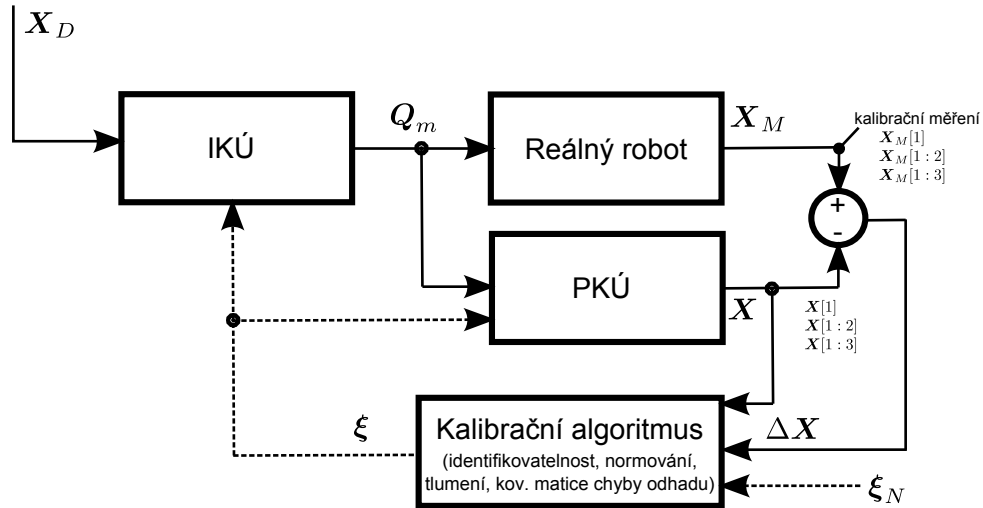
Kalibrační jakobián:

$$\boldsymbol{\Phi}^{\text{PKU}}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\Psi}^{\text{PKU}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})[1] \quad (127)$$

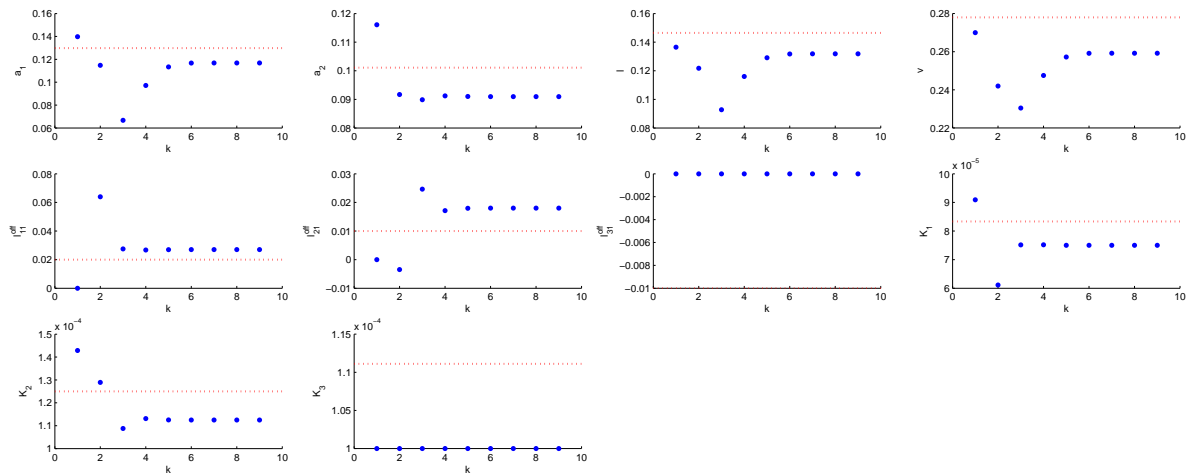
Analýzou matice pozorování  $\mathbf{W}$  lze ukázat, že opět získáváme dva neidentifikovatelné parametry  $q_{13 \text{ off}}$  a  $k_3$ , tedy  $N_R = 8$ . Chyba měření polohy koncového efektoru je jednosložkovým vektorem, tedy  $p = 1$ . Minimální doporučený počet měření je dle (60)  $m = 40$ .

Schéma kalibračního algoritmu je znázorněno na Obrázku 47. Výsledky kalibračního algoritmu jsou znázorněny na následujících obrázcích pro volbu nominálních parametrů stejnou jako v Kapitole 10.1. Výsledkem kalibrace jsou opět hodnoty geometrických parametrů, které se liší od skutečných, avšak vykazují správné chování kinematického modelu jako bylo ukázáno v Kapitole 10.1, rovnice (112, 113). Je zřejmé, že kalibrační metoda založená na PKÚ je reálně použitelná

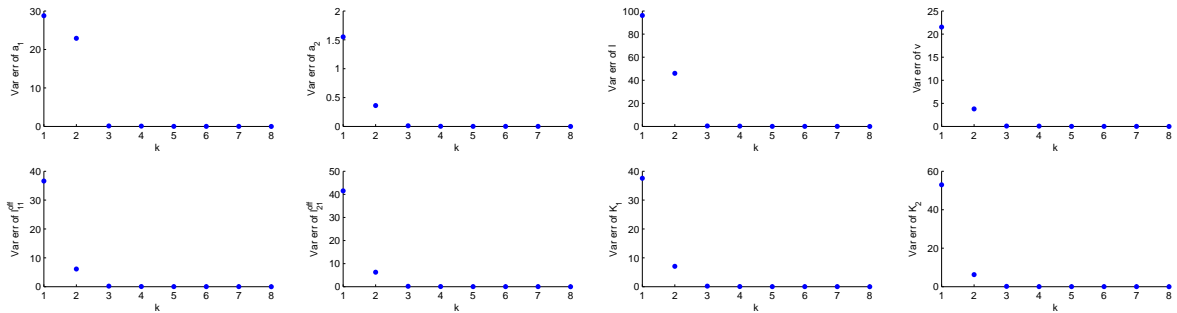
dokonce pouze pro měření jedné složky polohy koncového efektoru. Poznamenejme, že k výpočtu zobecněného jakobiánu  $\Psi^{\text{PKÚ}}(\mathbf{X}_M, \boldsymbol{\xi})$  z rovnice (123) potřebujeme znát měřené hodnoty polohy koncového efektoru  $\mathbf{X}_M$ . Pokud tyto měřené hodnoty nejsou k dispozici z důvodu nekompletního měření polohy koncového efektoru, lze k výpočtu použít rekonstruované hodnoty  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_m, \boldsymbol{\xi})$  z měření poloh aktuátorů.



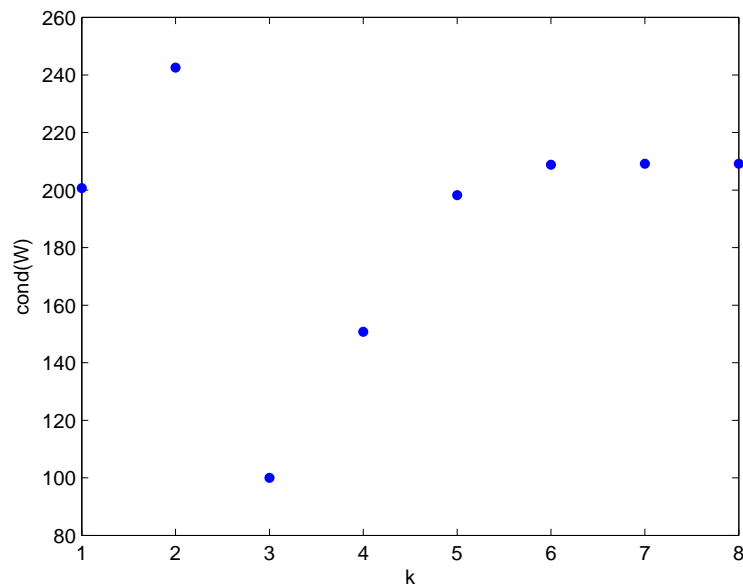
Obrázek 47: Metoda kalibrace: založena na řešení PKÚ, není nutné měření kompletní polohy koncového efektoru.  $\mathbf{X}_D$  jsou požadované polohy koncového efektoru pro měření. V algoritmu je zapotřebí počítat obecně složitou PKÚ.



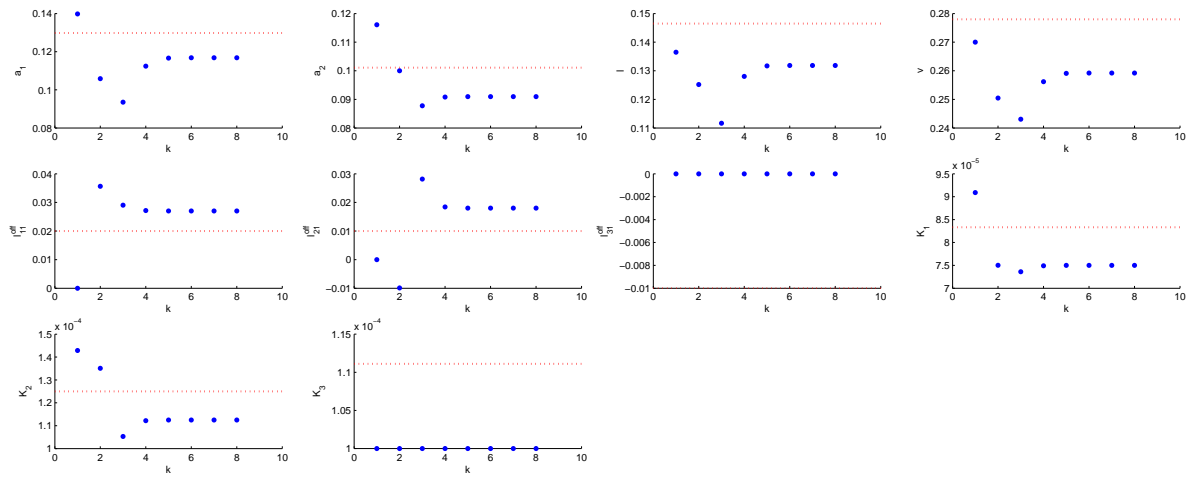
Obrázek 48: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\xi^*$ . Měření kompletní polohy koncového efektoru.



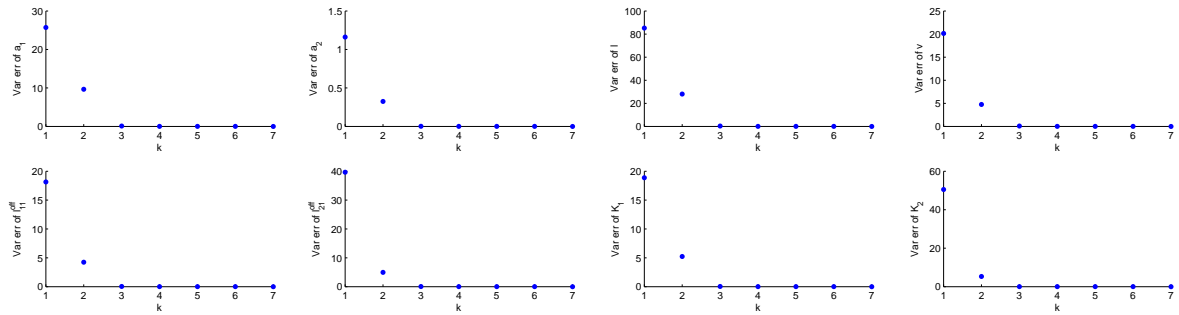
Obrázek 49: Průběh rozptylu odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů  $\text{Var}(e^{(k)})$ . Měření kompletní polohy koncového efektoru.



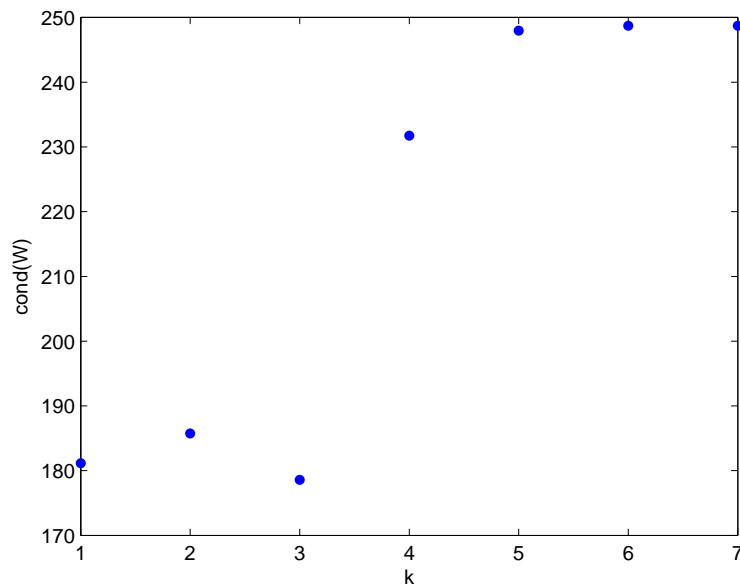
Obrázek 50: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$ . Měření kompletní polohy koncového efektoru.



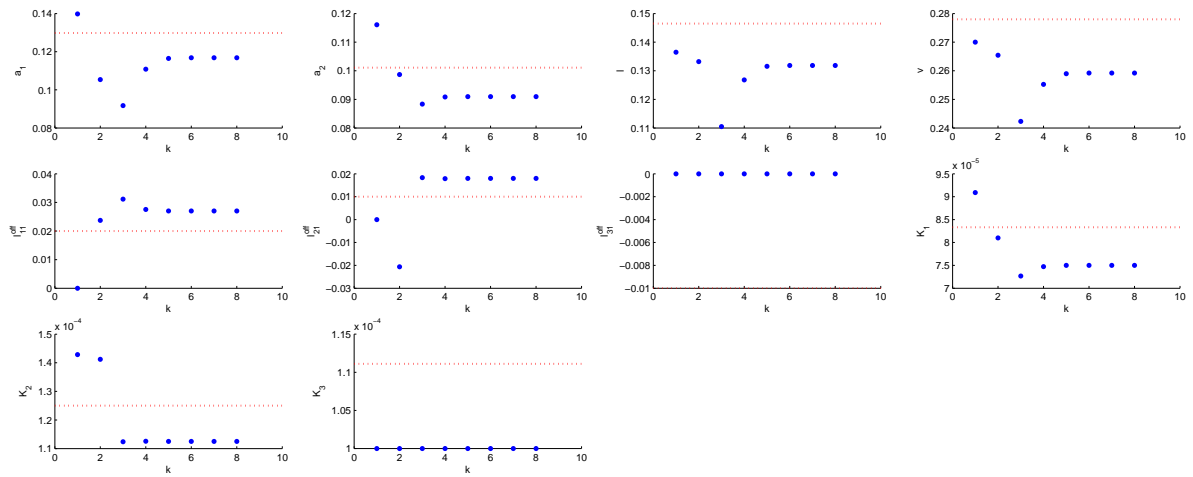
Obrázek 51: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\xi^*$ . Měření pouze úhlů  $\alpha, \beta$  z polohy koncového efektoru.



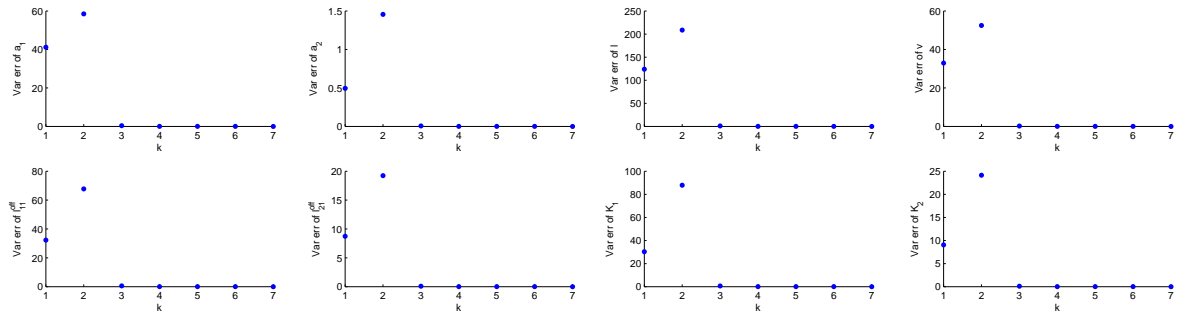
Obrázek 52: Průběh rozptylu odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů  $\text{Var}(e^{(k)})$ . Měření pouze úhlů  $\alpha, \beta$  z polohy koncového efektoru.



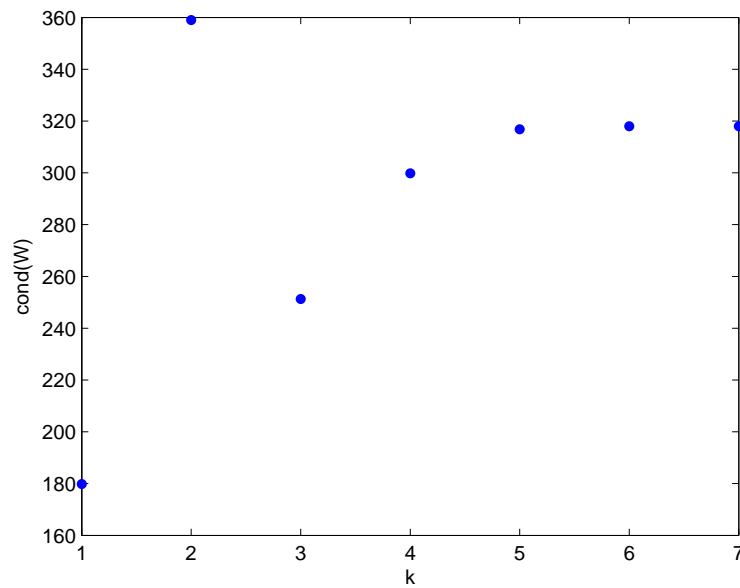
Obrázek 53: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$ . Měření pouze úhlů  $\alpha, \beta$  z polohy koncového efektoru.



Obrázek 54: Průběh kalibrovaných parametrů  $\xi^{(k)}$ . Červeně jsou vyznačeny správné hodnoty parametrů  $\xi^*$ . Měření pouze úhlu  $\alpha$  z polohy koncového efektoru.



Obrázek 55: Průběh rozptylu odhadu přírůstku kalibrovaných parametrů  $\text{Var}(e^{(k)})$ . Měření pouze úhlu  $\alpha$  z polohy koncového efektoru.



Obrázek 56: Číslo podmíněnosti matice pozorování  $\mathbf{W}$ . Měření pouze úhlu  $\alpha$  z polohy koncového efektoru.

## 11 Závěr

Náplní předložené zprávy byla analýza základních přístupů ke kinematické kalibraci sériových a paralelních manipulátorů. Uvedené postupy byly demonstrovány na modelu sério-paralelního manipulátoru AGEBOT, který byl reálně vyvíjen na katedře kybernetiky, ZČU v Plzni v rámci projektu MPO VaV 2009 č. FR-TI1/174. Důraz byl kladen na průzkum standardních metod kalibrace využívající linearizovaných kalibračních modelů (lineární vztah mezi přírůstky měřených souřadnic a kalibrovaných geometrických parametrů). Linearizované kalibrační modely byly pak přímo využívány v iterační metodě hledání skutečných geometrických parametrů manipulátoru v závislosti na měřených vnějších projevech manipulátoru (měření polohy koncového efektoru, polohy aktuátorů, atd.).

Základem uvedených iterační metody je lokální linearizace obecně nelineárního problému kinematické kalibrace manipulátoru s využitím hledání řešení lokálně linearizovaného modelu metodou lineárních nejmenších čtverců, viz Kapitola 2. S využitím principů normování měřených veličin, kalibrovaných parametrů a tlumení metody nejmenších čtverců bylo ukázáno, viz Kapitola 3, že uvedená iterační metoda je numericky stabilní i pro náhodný výběr kalibračních poloh a počet iterací vedoucí k uspokojivé přesnosti kalibrace jsou řádově desítky. Součástí výsledného kalibračního algoritmu byla analýza identifikovatelnosti geometrických parametrů manipulátoru vzhledem ke konkrétní použité kalibrační metodě, viz Kapitola 5 a odhad variance chyby kalibrovaných parametrů, viz Kapitola 4. Lze ukázat, že odhad přírůstku kalibrovaných parametrů v lokálním kroku iteračního algoritmu je považován za nejlepší lineární nestranný estimátor s minimální variancí chyby odhadu.

Geometrické parametry určující kinematický model manipulátoru (délky ramen, polohy os kloubů, atd.) byly doplněny o parametry definující převody mezi polohami kloubových souřadnic manipulátoru a polohami vlastních aktuátorů. Takový předpoklad je v technické praxi rozumný, neboť hodnoty převodových poměrů převodovek a jejich počátečních offsetů (uvažujeme-li pouze lineární převodovou funkci) hrají klíčovou úlohu v přesnosti celého manipulátoru.

V případě kalibrace sériového manipulátoru, Kapitola 7 byly testovány čtyři základní metody kalibrace:

První metoda, viz Kapitola 7.1, využívala kompletního měření polohy koncového efektoru. Metoda umožňuje kalibrovat všech 13 geometrických parametrů manipulátoru, nicméně její praktické využití naráží na potřebu přesného kalibračního snímače, alternativně využití přesného kalibračního rámu. Bohužel technologická prostředky vykazující dostatečnou přesnost a opakovatelnost při měření obecné pozice (translace) v prostoru jsou pro účely experimentálního vývoje manipulátorů příliš drahá a komplexní zařízení, často založená na optickém snímání bodu v prostoru prostřednictvím theodolitů, robotických laserových trasovacích systém, atd. Možnosti snímání obecné orientace v prostoru se zdají být oproti tomu méně problematická vzhledem k rapidnímu vývoji inklinometrů založených na technologiích MEMS, viz [3].

Druhá metoda, viz 7.2, byla založena na měření pouze vzdálenosti koncového efektoru od daného referenčního bodu v pracovním prostoru manipulátoru. V tomto případě bylo ukázáno, že lze kalibrovat pouze 9 geometrických parametrů, které jsou identifikovatelné (nelze kalibrovat neidentifikovatelné parametry  $q_{1\ off}$ ,  $q_{2\ off}$ ,  $\theta_0$ ,  $a_0$ ). Všechny identifikovatelné parametry lze však nakalibrovat i za předpokladu neznalosti skutečných hodnot parametrů neidentifikovatelných.

Třetí metoda, viz ?? byla jedna ze zástupců tzv. autokalibračních metod, v našem případě metody založené na využití redundance manipulátoru. V případě manipulátoru AGEBOT lze toto zajistit, pokud vezmeme do úvahy pouze tři (pozice koncového efektoru) z původních čtyřech zobecněných souřadnic manipulátoru. Lze ukázat, že manipulátor může potom dosáhnout dané pozice  $(x, y, z)$  v pracovním prostoru s libovolnou orientací  $(\phi)$ . Postupné naváděním koncového efektoru do jedné dané pozice s dvěma libovolnými hodnotami orientací lze využít při



tvorbě vhodného kalibračního modelu. Výhodou této metody je bezpochyby fakt, že kalibrační algoritmus nevyžaduje žádné externí kalibrační snímače polohy. Bohužel, metoda nevykazuje dobré výsledky, neboť umožňuje kalibrovat pouze 7 identifikovatelných geometrických parametrů (nelze kalibrovat neidentifikovatelné parametry  $q_{1\ off}$ ,  $q_{2\ off}$ ,  $K_1$ ,  $L_4$ ,  $\theta_0$ ,  $a_0$ ). Navíc pokud neznáme přesně skutečnou hodnotu parametru  $L_4$ , dochází k chybnému nakalibrování i ostatních parametrů a výsledný kalibrační model nekoresponduje s reálným manipulátorem. Pravděpodobným důvodem této situace je fakt, že vlivem nepřesné délky  $L_4$  ramena manipulátoru, kterou nelze identifikovat dojde k překalibrování ostatních identifikovatelných parametrů tak, aby bylo splněno omezení dané kalibračním modelem, tzn. manipulátor s nesprávně nakalibrovanými parametry dosáhne stejné pozice koncového efektoru pro dvě různé orientace, ale tato pozice je odlišná od pozice, kterou by manipulátor dosáhl se skutečnými parametry  $\Rightarrow$  shoda kalibračního modelu, které nekoresponduje s reálným manipulátorem. Metoda je tak, v uvedené podobě, pro praktické využití v podstatě nepoužitelná.

Na čtvrtou metodu kalibrace, viz 7.4 lze nahlížet jako na odlehčenou verzi metody předcházející. Metoda využívá cíleného omezení pohybu koncového efektoru manipulátoru po nějaké dané nadploše, v našem případě požadujeme pohyb koncového efektoru po rovinné ploše. Nepotřebujeme tedy znát konkrétní polohu koncového efektoru měřenou kalibračním snímačem, ale pouze parametry dané nadplochy, v našem případě parametry roviny ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ). Pokud tyto parametry nejsou známy přesně, lze je zahrnout do kalibračního modelu a odhadovat jejich hodnoty spolu s ostatními geometrickými parametry manipulátoru. Udržení pohybu koncového efektoru na dané nadrovině lze provést buď ručně, nebo automaticky, např. s využitím informací s taktilních čidel. Metoda bohužel opět nevykazuje dostačující výsledky, umožňuje kalibrovat pouze 10 identifikovatelných geometrických parametrů, z 16 (13 původních + 3 parametry roviny) (nelze kalibrovat neidentifikovatelné parametry  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $L_4$ ,  $\theta_0$ ,  $a_0$ ). Navíc zde nastává opět problém s nesprávnou kalibrací identifikovatelných parametrů při neznalosti skutečných hodnot parametrů neidentifikovatelných. Metoda je tedy jen stěží v praxi použitelná.

Vzhledem k faktu, že stávající metody kalibrace SM nevykazují dostačující výsledky, neboť buď požadují možnost měření kompletní polohy koncového efektoru, nebo nejsou schopny identifikovat všechny geometrické parametry kinematického modelu manipulátoru, bylo třeba přistoupit k návrhu specifické metody kalibrace sériové části manipulátoru AGEBOT. Kalibrační metoda, viz Kapitola 7.5, využívá kombinace měření vzdálenosti koncového efektoru od referenčního bodu a orientace  $\phi$ . Referenční bod je navíc volen libovolně najetím koncovým efektoem manipulátoru do tohoto bodu před započítáním vlastního procesu kalibrace a je považován za nový počátek s.s. základny manipulátoru (zobecněné souřadnice kalibrovaného manipulátoru jsou nadále uvažovány v s.s. s takto posunutým počátkem a stejnou orientací jako původní s.s. základny). Takový přístup eliminuje problém, kdy je počátek s.s. základny manipulátoru pevně stanoven při návrhu a lze intuitivní cestou měnit jen velmi obtížně (umístění počátku na reálném zařízení může být těžko identifikovatelné, navíc může být umístěno v místech kam není možné připojit jeden konec kalibračního snímače vzdálenosti.) Navržená metoda umožňuje kalibrovat všechny geometrické parametry a na rozdíl od metody využívající úplného měření polohy koncového efektoru požaduje pouze měření vzdálenosti a náklonu. Lze tedy mluvit o kompromisu mezi výše předloženými metodami kalibrace (potřeba komplexního měření polohy koncového efektoru versus identifikovatelnost geometrických parametrů).

Poznamenejme, že všechny uvedené metody pro kalibraci SM jsou založeny na řešení PKÚ a rekonstrukce chyby polohy koncového efektoru.

Kalibrace paralelních manipulátorů byla soustředěna na paralelní část manipulátoru AGEBOT, tzv. paralelní sférické zápěstí, pro jednoduchost nebyla uvažována kompenzace polohy základny. Jedná se o prostorový neredundantní paralelní manipulátor, který splňuje podmínku, že jeho koncový efektor je připojen k nezávislým kinematickým řetězcům sférickými klouby, tudíž nezávisle na vzájemné orientaci kinematický řetězec - koncový efektor. Takový předpoklad umožňuje

přeformulovat systematický matematický postup odvození linearizovaného kalibračního modelu pro sériový manipulátor i pro manipulátor paralelní. S pomocí vhodné kinematické dekompozice lze získat kalibrační model pro PM ve dvou variantách:

Linearizovaný kalibrační model využívající řešení IKÚ, viz Kapitola 10.1. Výhoda předložené metody je právě využití jednodušší IKÚ, která lze řešit analyticky pro známou IKÚ sériových kinematických řetězců PM (tento předpoklad je často splněn). Metoda přirozeně využívá principu rekonstrukce chyby polohy kloubových souřadnic manipulátoru. Odtud však vyplývá její hlavní nevýhoda, neboť vyžaduje možnost měření kompletní polohy koncového efektoru (kvůli nutnosti řešení IKÚ). Metoda umožňuje kalibrovat všech 10 geometrických parametrů PM.

Linearizovaný kalibrační model využívající řešení PKÚ, viz Kapitola 10.2. Bohužel PKÚ je pro paralelní manipulátory obecně mnohem složitější a často nevykazuje analytické řešení (i v případě uvažovaného PM). Nicméně použití této kalibrační metody vede, podobně jako u kalibračních metod pro sériové manipulátory, k rekonstrukci chyby polohy koncového efektoru a lze tudíž použít jen některé složky měření polohy koncového efektoru. Je ukázáno, že předložená metoda umožňuje také kalibrovat všech 10 geometrických parametrů PM, a to dokonce i pro měření nekompletní polohy koncového efektoru (natočení kolem osy  $x$ ,  $y$  a pouze natočení kolem osy  $x$ ).

Z předloženého textu lze pozorovat, že všechny algoritmy výpočtů lze získat relativně jednoduše pouze ze znalosti prvků homogenních transformačních matic popisujících aktuální polohu manipulátorů a předpokladu, že je možné stanovit PKÚ a IKÚ. Postupy tak redukuje nutnost provádět parciální derivace složitých transcendentních rovnic. Domnívám se, že popsání algoritmy je možné aplikovat na libovolné neredundantní sériové manipulátory s klouby typu  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{R}$  a neredundantní paralelní manipulátory, u kterých připojení koncového efektoru a kinematických řetězců není ovlivněno jejich vzájemnou orientací (klouby typu  $\mathbf{S}$  v prostoru a klouby typu  $\mathbf{R}$  v rovině). Díky takovým vlastnostem jsou předložené algoritmy vhodnými kandidáty do softwarových nástrojů automatické analýzy robotických architektur.

### **Potenciální směry dalšího rozvoje oblasti kalibrace manipulátorů:**

V uvedeném textu byly představeny metody kalibrace manipulátorů, které vycházejí ze zjednodušeného kinematického modelu, kde byly uvažovány jen základní návrhové geometrické parametry. Např. v případě SM byly geometrickými parametry, nebudeme-li uvažovat vlastnosti převodovek, pouze délky ramen manipulátoru a parametry popisující kompenzaci polohy (pouze translace) základny. Mlčky se předpokládalo, že manipulátor splňuje jistá omezení, konkrétně např. paralelní osy rotace kloubů, pravoúhlé uložení manipulátoru vzhledem k lineárnímu pojezdu, ramena kloubů ležící v jedné rovině, žádná kompenzace polohy koncového efektoru. Tyto předpoklady mají za následek specifické hodnoty (nulové, násobky  $\frac{\pi}{2}$ , atd.) většiny DH parametrů v kinematickém modelu. Korektní přístup by byl se od těchto předpokladů odprostit, zahrnout do procesu kalibrace všechny DH parametry a získat tak možnost jejich identifikace, tedy možnost korekce v podstatě libovolných parametrických chyb reálného manipulátoru.

- Zahrnutí korekce geometrických parametrů do algoritmu řízení. Toto je snadno proveditelné v případě, že PKÚ i IKÚ jsou určeny přímo kalibrovanými geometrickými parametry. Nicméně, pokud budeme uvažovat, jak bylo zmíněno výše, že reálný manipulátor se kinematicky odlišuje od modelové situace a kalibrací budeme identifikovat i dříve neuvažované geometrické parametry, PKÚ i IKÚ by musely být upraveny. Z toho však plyne, že z původních relativně jednoduchých kinematických závislostí dostáváme kinematické úlohy řešící v podstatě obecný případ manipulátoru (potenciální možnost složitých neanalytických výpočtů, které nelze reálně implementovat do real-time řídicích algoritmů). V takovém případě je nutné se uchýlit k metodám korekce a kompenzace původních kinematických modelů na základě nově získaných kalibrovaných parametrů, viz např. [9].

- Automatizace procesu výběru identifikovatelných geometrických parametrů a vyhodnocení kvality podmíněnosti úlohy.
- Analýzy robustnosti metod vzhledem k šumu měření kalibračních snímačů polohy koncového efektoru a snímačů měření poloh aktuátorů.
- Zahrnutí kompenzací polohy základny a koncového efektoru pro sériové i paralelní manipulátory.
- Analýza vlivu neparametrických chyb v kinematických závislostech manipulátoru (excentricita kloubů, nelinearity převodovek, atd.) a chyb způsobených statickými a dynamickými projevy (průhyby ramen vlivem gravitace, tíže břemene, zrychlení ramen manipulátoru). Např. korelační analýzy náhodných veličin chyby kalibrovaných parametrů  $\Rightarrow$  výzkum opravných kalibračních závislostí.
- Výzkum nových postupů kalibrace s důrazem na minimalizaci potřeby přesných složitých měřících aparatur (průzkum možnosti autokalibračních metod, omezení pohybu koncového efektoru, atd.)
- Analýza možností výběru vhodných kalibračních poloh z hlediska optimalizace (např. zajištění podmíněnosti) průběhu kalibračního algoritmu.

## Reference

- [1] J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *J. Appl. Mechanics*, June 1955, 22:215–221, 1955.
- [2] L. Everett, M. Driels, and B. Mooring. Kinematic modelling for robot calibration. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on*, volume 4, pages 183 – 189, mar 1987.
- [3] <https://www.memsnet.org>. *An information portal for the MEMS and Nanotechnology community*.
- [4] B. Siciliano L. Sciavicco. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, 2 edition, 2000.
- [5] J. P. Merlet. *Parallel robots*. Springer, 2006.
- [6] Benjamin Mooring, Morris Driels, and Zvi Roth. *Fundamentals of Manipulator Calibration*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1991.
- [7] M. Švejda. Inverzní kinematická a statická úloha manipulátoru agebot. Technical report, katedra kybernetiky, FAV, ZČU Plzeň, 2011.
- [8] Martin Švejda. *Kinematika robotických architektur*. PhD thesis, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, 2011.
- [9] E Dombre W. Khalil. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Butterworth-Heinemann, 2004.