

Průběžná zpráva

Název projektu:

Výzkum, vývoj a validace univerzální technologie pro potřeby moderních ultrazvukových kontrol svarových spojů komplexních potrubních systémů jaderných elektráren

(Číslo projektu: TA01020457)

Název zprávy:

Výběr architektury manipulátoru, plánování trajektorií



Technická agentura
České republiky

Zapsáno (místo, datum):

KKY, 16. ledna 2013

Autor:

Martin Švejda

Tento dokument je součástí projektu TAČR Alfa TA01020457 „Výzkum, vývoj a validace univerzální technologie pro potřeby moderních ultrazvukových kontrol svarových spojů komplexních potrubních systémů jaderných elektráren“ realizovaného za finanční spoluúčasti Technologické agentury České republiky.



Technologická agentura
České republiky



Alfa

Obsah

1	Úvod	4
2	Kinematický model manipulátoru ve variantě 3	9
2.1	Přímý geometrický model (DGM)	9
2.2	Inverzní geometrický model (IGM)	10
2.3	Přímá a inverzní okamžitá kinematická úloha (POKÚ, IOKÚ)	12
3	Generátory trajektorií uvažovaných testovaných svarů	14
3.1	Generátor časově optimální trajektorie ujeté dráhy $s(t)$ a jejích časových derivací	15
3.2	Parametrizace trajektorie svarů parametrem φ a generování časových průběhů parametru φ	17
3.2.1	Obvodový svar	17
3.2.2	Podélný svar	21
3.2.3	Podélný svar v kolenu	24
3.2.4	Svar nátrubku	25
4	Simulace, vyhodnocení simulačních výsledků, volba finální architektury manipulátoru	30
4.1	Volba výsledné varianty manipulátoru a simulační analýza:	33
5	Závěrečné zhodnocení	42

1 Úvod

Technická zpráva navazuje na technickou zprávu z 30. 12. 2011 s názvem „Kinematická a dynamická analýza robotických architektur pro potřeby moderních ultrazvukových kontrol svarových spojů komplexních potrubních systémů jaderných elektráren“, viz [4]. Cílem zprávy je popsat postup výběru vhodné architektury manipulátoru pro účely NDT zkoušení svarů komplexních potrubních systémů JE. Výsledný vhodný manipulátor byl vybírán z následujících kandidátů:

Manipulátor varianta 1

- 4 DoF koncového efektoru (3 DoF translační, 1 DoF rotační)
- aktuátory:
 - virtuální \mathbf{R} kloub - pojezd po potrubí
 - 3 identické \mathbf{R} klouby
- zobecněné souřadnice (poloha koncového efektoru)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_4^0 \\ \phi \end{bmatrix}$$

kde \mathbf{O}_i^j je poloha počátku souřadného systému (s.s.) F_i vyjádřená v souřadnicích F_j -tého s.s. ϕ je natočení s.s. F_4 vzhledem k s.s. F_1 okolo osy \mathbf{z}_1 .

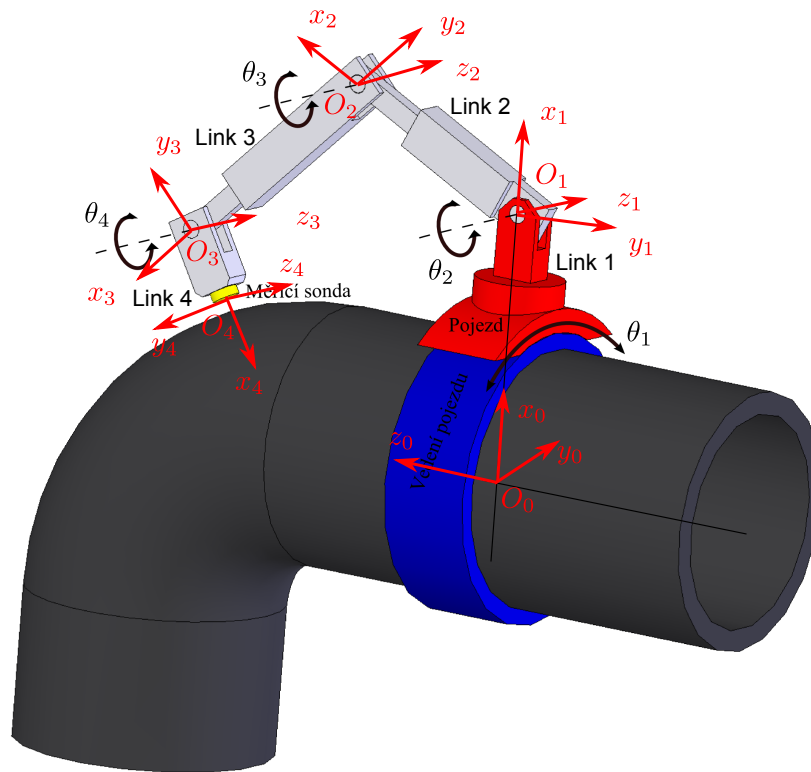
- kloubové souřadnice (polohy aktuátorů)

$$\mathbf{Q} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4]^T$$

- návrhové parametry:

$$\boldsymbol{\xi} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T$$

kde $a_1 = \|\mathbf{O}_0\mathbf{O}_1\|$, $a_2 = \|\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2\|$, $a_3 = \|\mathbf{O}_2\mathbf{O}_3\|$, $a_4 = \|\mathbf{O}_3\mathbf{O}_4\|$



Obrázek 1: 3D CAD schéma a zavedení s.s. pro manipulátor ve variantě 1

Manipulátor varianta 2

- 4 DoF koncového efektoru (3 DoF translační, 1 DoF rotační)
- aktuátory:
 - virtuální \mathbf{R} kloub - pojezd po potrubí
 - 2 identické \mathbf{R} klouby
 - 1 P kloub
- zobecněné souřadnice (poloha koncového efektoru)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_4^0 \\ \phi \end{bmatrix}$$

kde \mathbf{O}_i^j je poloha počátku souřadného systému (s.s.) F_i vyjádřená v souřadnicích F_j -tého s.s. ϕ je natočení s.s. F_4 vzhledem k s.s. F_1 okolo osy z_1 .

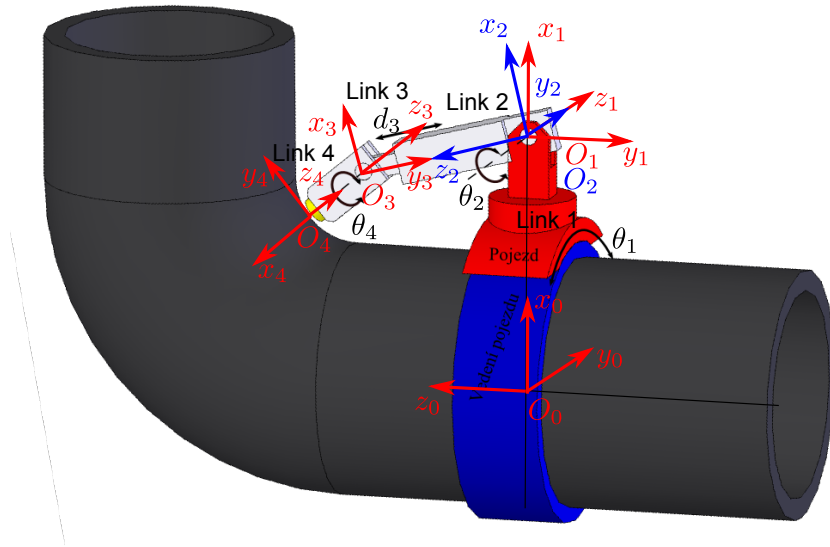
- kloubové souřadnice (polohy aktuátorů)

$$\mathbf{Q} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad d_3 \quad \theta_4]^T$$

- návrhové parametry:

$$\boldsymbol{\xi} = [a_1 \quad a_4]^T$$

kde $a_1 = \|\mathbf{O}_0\mathbf{O}_1\|$, $a_4 = \|\mathbf{O}_3\mathbf{O}_4\|$



Obrázek 2: 3D CAD schéma a zavedení s.s. pro manipulátor ve variantě 2

Manipulátor varianta 3

- univerzální manipulátor se všemi 6 DoF koncového efektoru (3 DoF translační, 3 DoF rotační)
- aktuátory:
 - virtuální \mathbf{R} kloub - pojezd po potrubí
 - 5 identických \mathbf{R} kloubů
- zobecněné souřadnice (poloha koncového efektoru)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_6^0 \\ \mathbf{R}_6^0 \end{bmatrix}$$

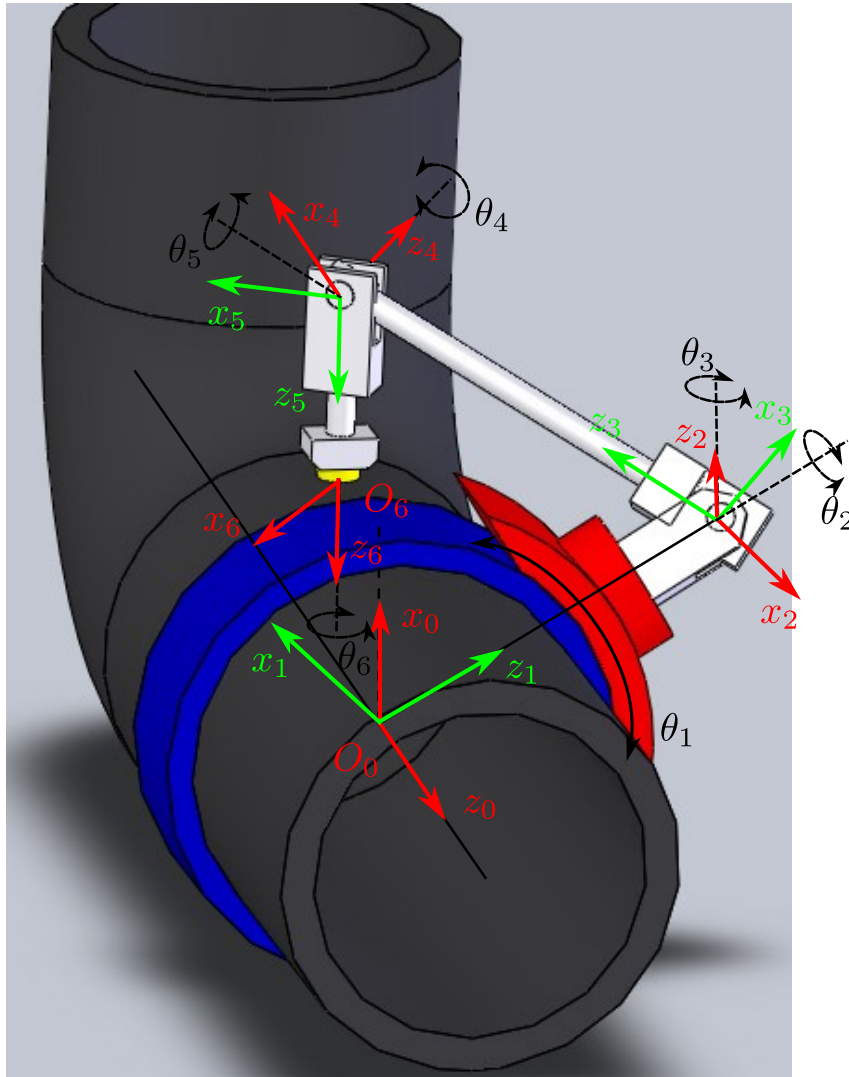
kde \mathbf{O}_i^j je poloha počátku souřadného systému (s.s.) F_i vyjádřená v souřadnicích F_j -tého s.s. a \mathbf{R}_i^j je matice rotace s.s. F_i vzhledem k s.s. F_j

- kloubové souřadnice (polohy aktuátorů)

$$\mathbf{Q} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6]^T$$

- návrhové parametry:

$$\boldsymbol{\xi} = [d_2 \quad d_4 \quad d_6]^T$$



Obrázek 3: 3D CAD schéma a zavedení s.s. pro manipulátor ve variantě 3

Poznámky k výběru vhodného manipulátoru s ohledem na cíle projektu

Důvody k hledání nových architektur manipulátorů pro NDT zkoušení potrubních svarů jsou následující:

- v současnosti se využívá pouze jednoduchých manipulátorů s omezenou možností pohybu (např. testování pouze jednoho typu svaru)
- většinou obtížná rekonfigurovatelnost zařízení pro komplexní svarové spoje
- často nutno používat speciální jednoúčelové doplňky pro usazení manipulátorů na potrubí (vodící lišty, atd.)
- Cíl projektu:
 - vyvinout univerzálnější zařízení použitelné pro danou třídu testovaných svarů
 - zařízení schopné požadovaných pohybů s ohledem na svou prostorovou náročnost (fyzický pracovní prostor)

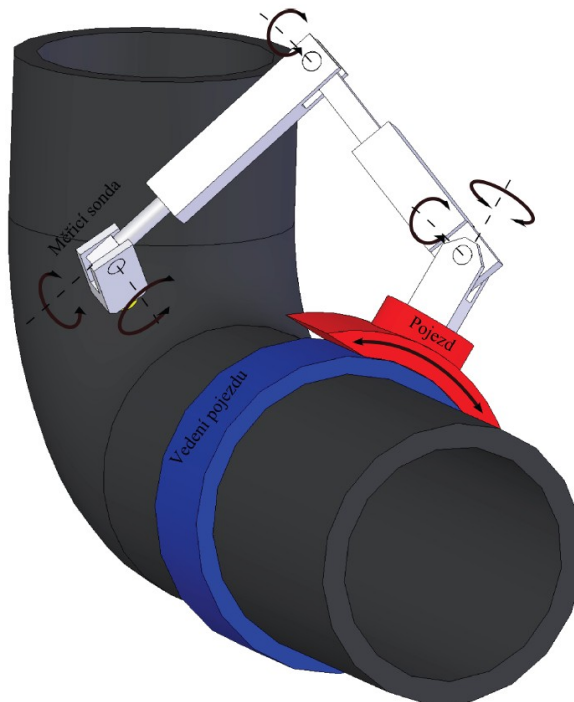
- Není cílem projektu:
 - vyvinout komplexní univerzální manipulátor pro všechno

Problematika řešená v technické zprávě [4] (30. 11. 2011)

V technické zprávě [4] byly řešeny následující body, se kterými se dále nebudeme zabývat:

- Přímý a inverzní geometrický model manipulátorů (DGM, IGM) ve variantě 1 a 2 (tzn. výpočet polohy koncového efektoru z poloh aktuátorů a naopak) - řešení získáno v analytickém tvaru
- Přímá a inverzní okamžitá kinematická úloha manipulátorů (POKÚ, IOKÚ) ve variantě 1 a 2 (tzn. výpočet rychlostí a zrychlení koncového efektoru z rychlostí a zrychlení aktuátorů a naopak)
- simulační modely manipulátorů v prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics

V technické zprávě [4] byl manipulátor ve variantě 3 navržen v mírně jiném uspořádání kloubů a ramen, viz Obrázek 4. Bohužel, jak bylo ukázáno, takový manipulátor neobsahuje ve svém kinematickém řetězci tzv. sférické zápěstí (trojice \mathbf{R} kloubů se společným průsečíkem svých rotačních os). Z toho vyplývají poměrně závažná omezení na řešení IGM, neboť již není možné nalézt řešení v analytickém tvaru. Z tohoto důvodu byly provedena modifikace architektury manipulátoru, viz Obrázek 3.



Obrázek 4: 3D CAD schéma původně uvažovaného manipulátoru ve variantě 3

Problematika řešená v aktuální zprávě

V předkládané technické zprávě jsou řešeny následující klíčové problémy, které jsou nutné ke kompletní realizaci simulačních modelů všech tří architektur manipulátorů.

1. DGM, IGM a POKŮ, IOKŮ modifikovaného manipulátoru ve variantě 3 \Rightarrow společně s výsledky z technické zprávy [4] dostáváme **kompletní virtuální simulační modely trojice předkládaných architektur manipulátorů** s následujícími vlastnostmi:
 - všechny architektury prioritně navrženy s uvažováním obvodového pojezdu po potrubí
 - simulační modely manipulátorů ve variantě 1 a 2 (4 DoF konc. efektoru)
 - omezená pohyblivost X jednodušší mechanická konstrukce
 - simulační model manipulátoru ve verzi 3 (6 DoF koncového efektoru)
 - univerzální pohyblivost X nutno využít 6 aktuátorů - složitější mech. konstrukce
2. Generátory trajektorií uvažovaných testovaných svarů
 - parametrizace trajektorie svarů (daným parametrem, např. φ)
 - primárně uvažován požadavek: konc. efektor manipulátoru (měřící sondy) se bude ve fázi NDT zkoušení pohybovat podél zkoušeného svaru s konstantní rychlostí
 - \Rightarrow generování časových průběhů parametru φ s ohledem na omezení na maximální tečnou rychlost a zrychlení pohybu koncového efektoru (tzv. *feed rate control*)
3. Simulace, vyhodnocení simulačních výsledků a volba finální architektury manipulátoru

2 Kinematický model manipulátoru ve variantě 3

Kinematický model manipulátoru ve variantě 3 byl vytvořen na základě modelování pomocí transformace souřadných systémů pevně spojených s rameny manipulátoru, viz Obrázek 3. Umístění jednotlivých souřadných systémů manipulátoru je dáno dle Denavit-Hartenbergovy (D-H) úmluvy, viz [4] a D-H parametry jsou shrnuty v Tabulce 1

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	θ_1	0	$\frac{\pi}{2}$
2	d_2	θ_2	0	$\frac{\pi}{2}$
3	0	θ_3	0	$-\frac{\pi}{2}$
4	d_4	θ_4	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	θ_4	0	$\frac{\pi}{2}$
6	d_6	θ_4	0	0

Tabulka 1: D-H parametry manipulátoru - varianta 3

2.1 Přímý geometrický model (DGM)

Formulace problému: Jaká bude poloha konc. efektoru manipulátoru, zobecněné souřadnice \mathbf{X} , pro dané polohy aktuátorů, kloubové souřadnice \mathbf{Q} .

Homogenní transformační matice mezi s.s. F_i a F_{i-1}

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_i^{i-1} & \mathbf{R}_i^{i-1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

je postupně složena z elementárních transformací (dvě rotace určené D-H parametry θ_i a α_i , dvě translace určené D-H parametry d_i , a_i)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{i-1} &= \mathbf{T}_{i'}^{i-1} \cdot \mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

DGM lze tak přímo formulovat jako postupné násobení homogenních transformačních matic \mathbf{T}_i^{i-1} :

$$\mathbf{T}_6^0 = \prod_{i=1}^6 \mathbf{T}_i^{i-1} \Rightarrow \mathbf{X} = [\mathbf{R}_6^0 \quad \mathbf{O}_6^0] = [\mathbf{T}_6^0[1:3, 1:3] \quad \mathbf{T}_6^0[1:3, 4]] \quad (3)$$

2.2 Inverzní geometrický model (IGM)

Formulace problému: Jaké budou polohy aktuátorů, kloubové souřadnice \mathbf{Q} , pro danou polohu konc. efektoru manipulátoru, zobecněné souřadnice \mathbf{X} .

Vzhledem k vhodnému uspořádání kloubů a ramen manipulátoru, kde poslední tři \mathbf{R} klouby tvoří tzv. sférické zápěstí (společný průsečík os rotace), lze dekomponovat řešení IGM na dvě části: *translační* a *rotační*.

Translační část:

Z Obrázku 3 je zřejmé, že počátek \mathbf{O}_4 s.s. F_4 nezávisí na natočení posledních tří kloubů sférického zápěstí a lze vyjádřit přímo ze známé polohy konc. efektoru jako:

$$\mathbf{O}_4^0 = \mathbf{O}_6^0 - d_6 \cdot \mathbf{R}_6^0[1:3, 3] = \begin{bmatrix} o_{40}^x \\ o_{40}^y \\ o_{40}^z \end{bmatrix} \quad (4)$$

Symbolické vyjádření počátku \mathbf{O}_4^0 s.s. F_4 vzhledem k s.s. F_0 je dáno násobením hom. transform. matic jako:

$$\mathbf{O}_4^0 = \mathbf{T}_4^0[1:3, 3], \quad \mathbf{T}_4^0 = \prod_{i=1}^4 \mathbf{T}_i^{i-1}$$

Tedy:

$$\mathbf{O}_4^0 = \begin{bmatrix} -d_4 s_3 c_1 c_2 + d_4 c_3 s_1 + s_1 d_2 \\ -d_4 s_3 s_1 c_2 - d_4 c_3 c_1 - c_1 d_2 \\ -d_4 s_2 s_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Porovnáním rovnic (4) a (5) dostáváme soustavu rovnic pro neznámé θ_1 , θ_2 , θ_3 řešící translační část manipulátoru:

$$\begin{aligned} -d_4 s_3 c_1 c_2 + d_4 c_3 s_1 + s_1 d_2 &= o_{40}^x \\ -d_4 s_3 s_1 c_2 - d_4 c_3 c_1 - c_1 d_2 &= o_{40}^y \\ -d_4 s_2 s_3 &= o_{40}^z \end{aligned} \quad (6)$$

Umocněním a sečtením levých a pravých stran soustavy (6) dostáváme přímo řešení pro souřadnici $\theta_3 = \text{atan2}(s_3, c_3)$:

$$2d_4c_3d_2 + d_2^2 + d_4^2 = (o_{40}^x)^2 + (o_{40}^y)^2 + (o_{40}^z)^2 \Rightarrow \begin{aligned} c_3 &= \frac{(o_{40}^x)^2 + (o_{40}^y)^2 + (o_{40}^z)^2 - d_2^2 + d_4^2}{2d_4d_2} \\ s_3 &= \pm\sqrt{1 - c_3^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Z poslední rovnice soustavy (6) lze nyní vyjádřit řešení pro souřadnici $\theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$:

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{-o_{40}^z}{d_4s_3} \\ c_2 &= \pm\sqrt{1 - s_2^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Dosazením nyní známých hodnot s_3, c_3, s_2, c_2 do prvních dvou rovnic soustavy dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé s_1, c_1 . Řešením této soustavy získáme přímo souřadnici $\theta_1 = \text{atan2}(s_1, c_1)$:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{-d_4c_3o_{40}^x + d_4s_3c_2o_{40}^y - d_2o_{40}^x}{d_4^2s_3^2c_2^2 + d_4^2c_3^2 + 2d_4c_3d_2 + d_2^2} \\ c_1 &= -\frac{d_4c_3o_{40}^y + d_2o_{40}^y + o_{40}^x d_4s_3c_2}{d_4^2s_3^2c_2^2 + d_4^2c_3^2 + 2d_4c_3d_2 + d_2^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Z řešení (8, 7) je zřejmé, že IKÚ má právě 4 různá možná řešení translační části manipulátoru (tzn. kloubových souřadnic $\theta_1, \theta_2, \theta_3$)

Rotační část:

Vzhledem k faktu, že nyní známe první tři kl. souřadnice $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, známe tedy i homogenní transformační matici $\mathbf{T}_3^0 = \prod_{i=1}^3 \mathbf{T}_i^{i-1}$. Společně se znalostí polohy konc. efektoru dané hom. transform. maticí \mathbf{T}_6^0 lze stanovit numerické hodnoty transformace ze s.s. F_3 do s.s. F_6 jako:

$$\mathbf{T}_6^3 = (\mathbf{T}_3^0)^{-1} \cdot \mathbf{T}_6^0 \Rightarrow \mathbf{R}_6^3 = \mathbf{T}_6^3[1 : 3, 1 : 3] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Symbolické vyjádření hom. transform. matice \mathbf{T}_6^3 lze psát jako:

$$\mathbf{T}_6^3 = \prod_{i=3}^6 \mathbf{T}_i^{i-1} \quad (11)$$

Matici rotace mezi s.s. F_3 a F_6 lze pak symbolicky vyjádřit jako:

$$\mathbf{R}_6^3 = \mathbf{T}_6^3[1 : 3, 1 : 3] = \begin{bmatrix} c_6c_4c_5 - s_6s_4 & -s_6c_4c_5 - c_6s_4 & -c_4s_5 \\ c_6s_4c_5 + s_6c_4 & -s_6s_4c_5 + c_6c_4 & -s_4s_5 \\ s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Umocněním a sečtením příslušných prvků v rovnici (12, 10) získáváme přímo hodnoty souřadnic $\theta_3 = \text{atan2}(s_3, c_3), \theta_4 = \text{atan2}(s_4, c_4), \theta_5 = \text{atan2}(s_5, c_5)$:

$$s_5 = \pm\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, \quad c_5 = r_{33} \quad (13)$$

Zbývající kl. souřadnice lze psát jako:

$$s_4 = \frac{-r_{23}}{s_5}, \quad c_4 = \frac{-r_{13}}{s_5} \quad (14)$$

$$s_6 = \frac{r_{32}}{s_5}, \quad c_6 = \frac{r_{3,1}}{s_5} \quad (15)$$

Z řešení (13) je tedy zřejmé, že IKÚ má právě 2 různá možná řešení rotační části manipulátoru (tzn. kloubových souřadnic $\theta_4, \theta_5, \theta_6$).

IKÚ pro celý manipulátor ve variantě 3 lze tedy řešit analyticky a obsahuje celkem $4 \cdot 2 = 8$ různých izolovaných řešení nastavení kloubových souřadnic pro danou polohu koncového efektoru.

2.3 Přímá a inverzní okamžitá kinematická úloha (POKÚ, IOKÚ)

Formulace problému:

POKÚ: Jaké budou rychlosti $\dot{\mathbf{X}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}$ koncového efektoru manipulátoru pro dané rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}$ kloubových souřadnic.

IOKÚ: Jaké budou rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}$ kloubových souřadnic manipulátoru pro dané rychlosti $\dot{\mathbf{X}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}$ koncového efektoru.

Rychlosti a zrychlení zobecněných souřadnic manipulátoru zavedeme v následující podobě:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_6^0 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \ddot{\boldsymbol{\omega}}_6^0 \end{bmatrix}$$

POKÚ lze stanovit prostřednictvím odvozené geometrické metody [6], [2], [5] následujícím způsobem:

$$\text{Pro rychlosti: } \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \text{Pro zrychlení: } \ddot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J} \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \quad (16)$$

kde \mathbf{J} je tzv. kinematický jakobián jehož sloupce lze složit přímo z prvků homogenních transformačních matic \mathbf{T}_i^j následujícím způsobem:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_1^P & \mathbf{j}_2^P & \dots & \mathbf{j}_j^P & \dots & \mathbf{j}_i^P \\ \mathbf{j}_1^O & \mathbf{j}_2^O & \dots & \mathbf{j}_j^O & \dots & \mathbf{j}_i^O \end{bmatrix}, \quad i = 6 \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_j^P \\ \mathbf{j}_j^O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \sigma_j + (\mathbf{z}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0) \cdot \bar{\sigma}_j \\ \mathbf{z}_{j-1}^0 \cdot \bar{\sigma}_j \end{bmatrix}, \quad j = 1 \dots i \quad (18)$$

a zároveň

$$\sigma_j = 0 \dots \text{pokud Joint } j \text{ je typu } \mathbf{R} \ (q_j = \theta_j)$$

$$\sigma_j = 1 \dots \text{pokud Joint } j \text{ je typu } \mathbf{P} \ (q_j = d_j)$$

$$\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$$

kde prvky sloupců kinematického jakobiánu lze psát jako:

$$\mathbf{z}_{j-1}^0 = \mathbf{T}_{j-1}^0[1:3,3], \quad \mathbf{T}_{j-1}^0 = \prod_{k=1}^j \mathbf{T}_k^{k-1}(q_k)$$

$$\mathbf{r}_{j-1,i}^0 = \mathbf{O}_i^0 - \mathbf{O}_{j-1}^0 = \mathbf{T}_i^0[1:3,4] - \mathbf{T}_{j-1}^0[1:3,4]$$

Derivace kinematického jakobiánu lze opět složit přímo z prvků homogenních transformačních matic T_i^j následujícím způsobem:

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} \dot{J}_1^P & \dot{J}_2^P & \cdots & \dot{J}_j^P & \cdots & \dot{J}_i^P \\ \dot{J}_1^O & \dot{J}_2^O & \cdots & \dot{J}_j^O & \cdots & \dot{J}_i^O \\ \dot{J}_1 & \dot{J}_2 & \cdots & \dot{J}_j & \cdots & \dot{J}_i \end{bmatrix}, \quad i = 6 \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{J}_j^P \\ \dot{J}_j^O \\ \dot{J}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_{j-1}^0 \cdot \sigma_j + \left[(\dot{z}_{j-1}^0 \times \mathbf{r}_{j-1,i}^0) + (\mathbf{z}_{j-1}^0 \times \dot{\mathbf{r}}_{j-1,i}^0) \right] \cdot \bar{\sigma}_j \\ \dot{z}_{j-1}^0 \cdot \bar{\sigma}_j \end{bmatrix}, \quad j = 1 \dots i \quad (20)$$

kde $\dot{\mathbf{r}}_{j-1,i}^0 = \dot{\mathbf{O}}_i^0 - \dot{\mathbf{O}}_{j-1}^0$

Translační rychlosti $\dot{\mathbf{O}}_i^0$ počátků s.s. a jejich úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_i^0$ lze získat z relací (16, 17, 18) pro $i = 1 \dots 6$ (postupné vyjádření rychlostí s.s.)

Čas. derivaci \mathbf{z}_i^0 lze vyjádřit jako:

$$\dot{\mathbf{z}}_i^0 = \boldsymbol{\omega}_i^0 \times \mathbf{z}_i^0$$

IOKÚ lze poté stanovit následujícím postupem:

- Výpočet rychlostí kl. souřadnic:

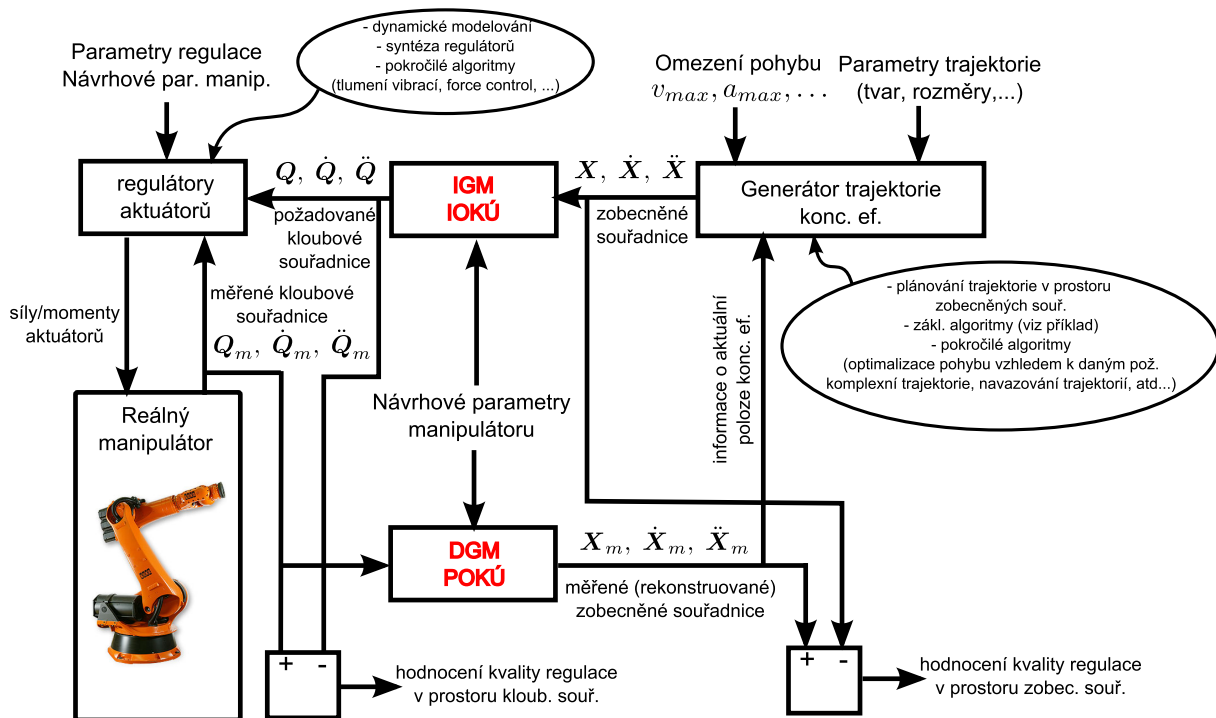
$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (21)$$

- Výpočet zrychlení kl. souřadnic:

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \right) \quad (22)$$

Nyní máme k dispozici všechny klíčové algoritmy potřebné ke koordinovanému řízení manipulátorů. Tzn. přímý a inverzní geometrický model (DGM, IGM) a přímou a inverzní okamžitou kinematickou úlohu (POKÚ, IOKÚ). Poznamenejme, že IGM a IOKÚ hraje klíčovou roli při řízení manipulátorů, neboť pohyb manipulátoru je výhradně plánován v prostoru jeho zobecněných souřadnic \mathbf{X} , $\dot{\mathbf{X}}$, $\ddot{\mathbf{X}}$, které je potom nutné přepočítat na kloubové souřadnice \mathbf{Q} , $\dot{\mathbf{Q}}$, $\ddot{\mathbf{Q}}$ (požadované polohy, rychlosti a zrychlení aktuátorů manipulátoru). Obrázek 5 znázorňuje zařazení uvedených algoritmů do řídicího systému manipulátoru.

V následující kapitole se budeme zabývat algoritmy plánování pohybu koncového efektoru manipulátoru s ohledem na požadovaný pohyb po testovaných svarech a požadovaná omezení.



Obrázek 5: Zařazení a klíčový význam DGM, IGM, POKÚ, IOKÚ v řídicím systému průmyslového manipulátoru

3 Generátory trajektorií uvažovaných testovaných svarů

Cílem je vytvoření kompletních generátorů pohybu koncového efektoru manipulátoru (tzn. polohy, rychlosti i zrychlení) pro danou množinu uvažovaných testovaných svarových spojů potrubních systémů. Na vyvinuté algoritmy generátorů byly kladeny následující požadavky, které budou dále uvažovány:

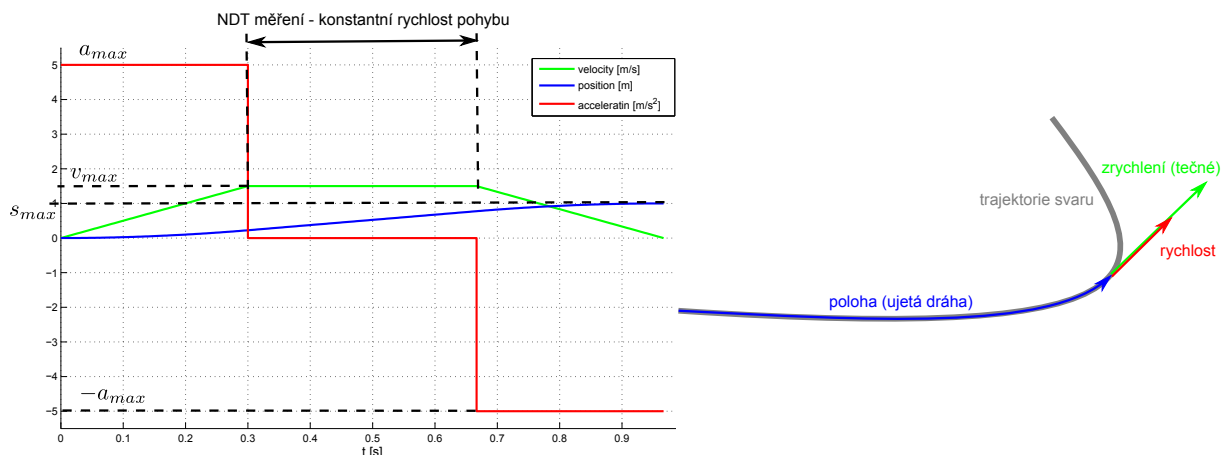
Množina uvažovaných svarů potrubí:

- obvodový svar potrubí
- podélný svar potrubí
- podélný svar potrubí v kolenu
- svar nátrubku

Omezení kladené na pohyb manipulátoru:

- Pohyb koncového efektoru manipulátoru musí být během fáze měření plynulý \Rightarrow předpokládáme, že během měřicí fáze se bude konc. efektor pohybovat konstantní rychlostí po naplánované trajektorii svaru.
- S ohledem na zajištění plynulosti pohybu bude uvažováno omezení na maximální rychlost v_{max} a zrychlení (tečné) a_{max} pohybu konc. efektoru po naplánované trajektorii svaru.
- Výše uvedené omezení se týkají translačního pohybu konc. efektoru. Orientace koncového efektoru bude volena adekvátně k možnostem manipulátoru, tedy s ohledem na možné DoF.

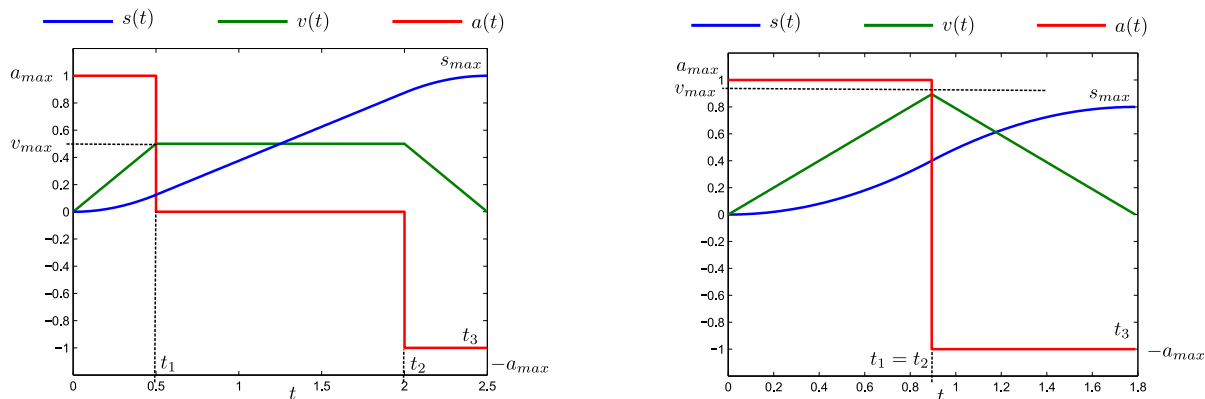
Obrázek 6 znázorňuje průběhy ujeté dráhy s , rychlosti v a tečného zrychlení a po trajektorii svaru. Celkově ujetá dráha po trajektorii je označena s_{max} , tzn. $s \in \langle 0, s_{max} \rangle$.



Obrázek 6: Časové průběhy ujeté dráhy s , rychlosti v a zrychlení a konc. efektoru po trajektorii svaru

3.1 Generátor časově optimální trajektorie ujeté dráhy $s(t)$ a jejích časových derivací

Vzhledem k faktu, že pro plánování ujeté dráhy s po trajektorii svaru předpokládáme využití maximálního možného zrychlení $a = a_{max}$, lze ukázat (Pontrjaginův princip minima), že průběhy znázorněné na Obrázku 6 jsou časově optimální ve smyslu dosažení požadované celkové ujeté dráhy s_{max} za minimální čas při respektování omezení v_{max}, a_{max} . Obecně lze časové průběhy ujeté dráhy s rozdělit na dvě možnosti, vzhledem k časovým okamžikům přepnutí mezi $a = \{-a_{max}, 0, +a_{max}\}$, viz Obrázek 7.



(a) **Varianta 1:** Zrychlení a_{max} je dostatečné, aby $v(t)$ dosáhlo maximální rychlosti v_{max}

(b) **Varianta 2:** Zrychlení a_{max} není dostatečné, aby $v(t)$ dosáhlo maximální rychlosti v_{max}

Obrázek 7: 2 varianty typického časově optimálního průběhu vývoje $s(t)$

Lze ukázat, že časové varianty průběhu ujeté dráhy a jejích časových derivací lze vypočítat následovně:

Varianta 1 $\Rightarrow t_1 < t_2 < t_3$

Časové průběhy $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$:

- Pro $t \in \langle 0, t_1 \rangle$:

$$a(t) = a_{max}, \quad v(t) = a_{max}t, \quad s(t) = \frac{1}{2}a_{max}t^2 \quad (23)$$

- Pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$:

$$a(t) = 0, \quad v(t) = a_{max}t_1, \quad s(t) = a_{max}t_1t - \frac{1}{2}a_{max}t_1^2 \quad (24)$$

- Pro $t \in \langle t_2, t_3 \rangle$:

$$a(t) = -a_{max}, \quad v(t) = -a_{max}t + a_{max}(t_1 + t_2), \\ s(t) = -\frac{1}{2}a_{max}t^2 + a_{max}(t_1 + t_2)t - \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2) \quad (25)$$

Varianta 2 $\Rightarrow t_1 = t_2 < t_3$

Časové průběhy $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$:

- Pro $t \in \langle 0, t_1 = t_2 \rangle$:

$$a(t) = a_{max}, \quad v(t) = a_{max}t, \quad s(t) = \frac{1}{2}a_{max}t^2 \quad (26)$$

- Pro $t \in \langle t_1 = t_2, t_3 \rangle$:

$$a(t) = -a_{max}, \quad v(t) = -a_{max}t + 2a_{max}t_1, \\ s(t) = -\frac{1}{2}a_{max}t^2 + 2a_{max}t_1t - a_{max}t_1^2 \quad (27)$$

Z Obrázku 7 a rovnic (23 - 27) popisující časový vývoj $s(t)$, $v(t)$ lze odvodit hodnoty časových okamžiků t_1 , t_2 , t_3 :

Varianta 1:

$$t_1 = \frac{v_{max}}{a_{max}}, \quad t_2 = \frac{s_{max}}{v_{max}}, \quad t_3 = t_1 + t_2 \quad (28)$$

Varianta 2:

$$t_1 = \sqrt{\frac{s_{max}}{a_{max}}}, \quad t_3 = 2t_1 \quad (29)$$

Rozhodnutí o variantě plánování trajektorie $s(t)$ lze psát jako:

- Pro $\frac{\dot{s}_{max}}{a_{max}} < \sqrt{\frac{s_{max}}{a_{max}}}$ (rychlost $v(t)$ dojde na \dot{s}_{max}) \Rightarrow **Varianta 1**
- Pro $\frac{\dot{s}_{max}}{a_{max}} \geq \sqrt{\frac{s_{max}}{a_{max}}}$ (rychlost $v(t)$ nedojede na \dot{s}_{max}) \Rightarrow **Varianta 2**

3.2 Parametrizace trajektorie svarů parametrem φ a generování časových průběhů parametru φ

Za účelem generování požadované trajektorie konc. efektoru s omezením na průběh ujeté dráhy $s(t)$, její rychlosti $v(t)$ a zrychlení $a(t)$, viz Kapitola 3.1, je nyní zapotřebí řešit dva základní úkoly:

- parametrizace trajektorie svaru parametrem $\varphi(t)$
 \Rightarrow požadovaná poloha, rychlost a zrychlení konc. efektoru manipulátoru:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{R}_e^0 \quad \mathbf{O}_e^0], \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_e^0 \\ \boldsymbol{\omega}_e^0 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_e^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_e^0 \end{bmatrix}$$

kde

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\varphi), \quad \dot{\mathbf{X}} = \dot{\mathbf{X}}(\varphi, \dot{\varphi}), \quad \ddot{\mathbf{X}} = \ddot{\mathbf{X}}(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$$

- generování časových průběhů $\varphi(t)$ a příslušných časových derivací ze známých časových průběhů ujeté dráhy $s(t)$ a příslušných časových derivací

3.2.1 Obvodový svar

Obvodový svar potrubí je znázorněn na Obrázku 8 a charakteristické parametry jsou dány následovně:

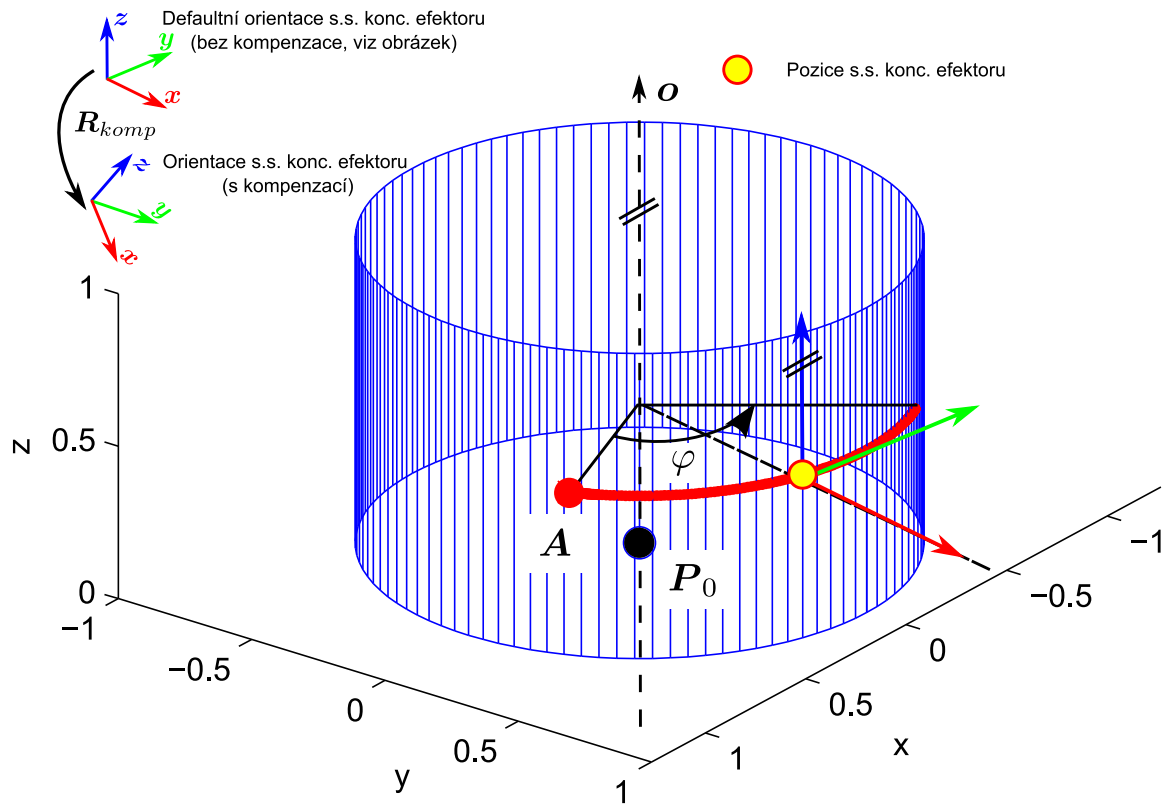
\mathbf{o} osa kružnice reprezentující obvodový svar (osa potrubí)

\mathbf{P}_0 bod ležící na ose \mathbf{o}

\mathbf{A} počáteční bod svaru

φ_{max} ... úhel posunu po svaru

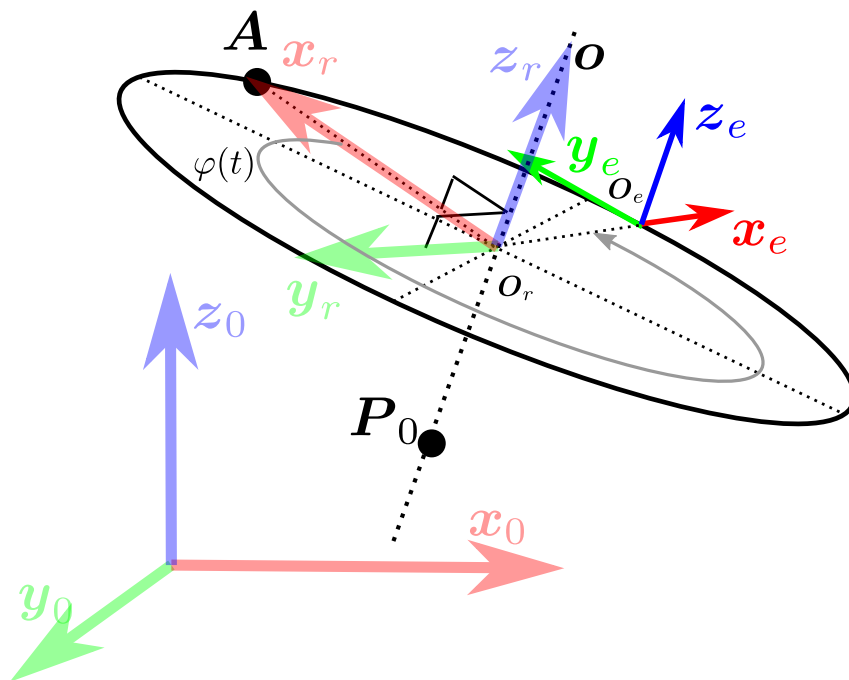
\mathbf{R}_{komp} . matice rotace udávající pootočení defaultního s.s. (tzn. s.s., který je znázorněn na Obrázku 8)
 - kompenzace orientace s.s. konc. efektoru (kompenzace orientace UZ sondy)



Obrázek 8: Schématické znázornění obvodového svaru

Parametrizace trajektorie svaru parametrem $\varphi(t)$

Pro stanovení parametrizace trajektorie zavedme dva s.s., pevný pomocný s.s. F_r a s.s. koncového efektoru manipulátoru F_e .



Obrázek 9: Schématické znázornění obvodového svaru

Transformace mezi s.s. základny F_0 a s.s. F_r a F_e lze psát jako:

Transformace $F_0 \rightarrow F_r$:

- Počátek O_r^0 s.s. F_r vzhledem k s.s. F_0 (střed kružnice):

$$\mathbf{O}_r^0 = (\mathbf{o}^0)^T \cdot \frac{[(\mathbf{A}^0)^T - (\mathbf{P}_0^0)^T] \cdot \mathbf{o}^0}{(\mathbf{o}^0)^T \cdot \mathbf{o}^0} + \mathbf{P}_0^0 \quad (30)$$

- Matice rotace \mathbf{R}_r^0 s.s. F_r vzhledem k s.s. F_0

$$\mathbf{R}_r^0 = [\mathbf{x}_r^0 \quad \mathbf{y}_r^0 \quad \mathbf{z}_r^0], \quad \mathbf{z}_r^0 = \frac{\mathbf{o}^0}{\|\mathbf{o}^0\|}, \quad \mathbf{x}_r^0 = \frac{\mathbf{A}^0 - \mathbf{O}_r^0}{\|\mathbf{A}^0 - \mathbf{O}_r^0\|}, \quad \mathbf{y}_r^0 = \frac{\mathbf{z}_r^0 \times \mathbf{x}_r^0}{\|\mathbf{z}_r^0 \times \mathbf{x}_r^0\|} \quad (31)$$

- Výsledná homogenní transformační matice:

$$\mathbf{T}_r^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_r^0 & \mathbf{O}_r^0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Transformace $F_r \rightarrow F_e$ (parametrizace kružnice v rovině x_r, y_r):

- Počátek O_e^r s.s. F_e vzhledem k s.s. F_r :

$$\mathbf{O}_e^r = \begin{bmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

- Matice rotace \mathbf{R}_e^r s.s. F_e vzhledem k s.s. F_r

$$\mathbf{R}_e^r = [\mathbf{x}_e^r \quad \mathbf{y}_e^r \quad \mathbf{z}_e^r] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

kde $\varphi \in \{0, \varphi_{max}\}$ je parametrizační parametr a poloměr kružnice $R = \|\mathbf{A}^0 - \mathbf{O}_r^0\|$

- Výsledná homogenní transformační matice:

$$\mathbf{T}_e^r = \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ & & & & & \mathbf{O}_e^r \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Výsledná parametrizace obvodového svaru lze psát s uvažováním skládání transformací jako:

- **Parametrizace polohy koncového efektoru (včetně kompenzace orientace \mathbf{R}_{komp}):**

$$\mathbf{T}_e^0 = \mathbf{T}_r^0 \cdot \mathbf{T}_e^r \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e_{\text{komp}}}^0 & \mathbf{O}_e^0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{e_{\text{komp}}}^0 &= \mathbf{R}_r^0 \cdot \mathbf{R}_e^r \cdot \mathbf{R}_{\text{komp}} = \mathbf{T}_e^0[1:3, 1:3] \cdot \mathbf{R}_{\text{komp}} \\ \mathbf{O}_e^0 &= \mathbf{R}_r^0 \cdot \mathbf{O}_e^r + \mathbf{O}_r^0 = \mathbf{T}_e^0[1:3, 4] \end{aligned}$$

- **Parametrizace rychlosti koncového efektoru (parametr $\varphi = \varphi(t)$, včetně kompenzace orientace \mathbf{R}_{komp}):**

Časová derivace matice rotace $\mathbf{R}_{e_{\text{komp}}}^0$:

$$\dot{\mathbf{R}}_{e_{\text{komp}}}^0 = \mathbf{R}_r^0 \cdot \dot{\mathbf{R}}_e^r \cdot \mathbf{R}_{\text{komp}} = \mathbf{R}_r^0 \cdot \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \sin(\varphi) & -\dot{\varphi} \cos(\varphi) & 0 \\ \dot{\varphi} \cos(\varphi) & -\dot{\varphi} \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{\text{komp}} \quad (37)$$

Vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0$ lze získat z matice rotace $\mathbf{R}_{e_{\text{komp}}}^0$ a její časové derivace prostřednictvím antisymetrické matice $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)$:

$$\dot{\mathbf{R}}_{e_{\text{komp}}}^0 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0) \cdot \mathbf{R}_{e_{\text{komp}}}^0 \Rightarrow \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0) = \dot{\mathbf{R}}_{e_{\text{komp}}}^0 \cdot (\mathbf{R}_{e_{\text{komp}}}^0)^T \quad (38)$$

Vzhledem k tvaru antisymetrické matice $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)$, lze získat přímo vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0) &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0 &= \left[\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)[3, 2] \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)[1, 3] \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)[2, 1] \right]^T \end{aligned} \quad (39)$$

Translační rychlost $\dot{\mathbf{O}}_e^0$ plyne přímo z (36):

$$\dot{\mathbf{O}}_e^0 = \mathbf{R}_r^0 \cdot \dot{\mathbf{O}}_e^r = \mathbf{R}_r^0 \cdot \begin{bmatrix} -R \cdot \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \\ R \cdot \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

- **Parametrizace zrychlení koncového efektoru (parametr $\varphi = \varphi(t)$, včetně kompenzace orientace \mathbf{R}_{komp}):**

Z formální časové derivace (38) a rovnice (39) získáme předpis pro úhlové zrychlení $\dot{\omega}_{e_{komp}}^0$

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega_{e_{komp}}^0) &= \ddot{R}_{e_{komp}}^0 \cdot (R_{e_{komp}}^0)^T + \dot{R}_{e_{komp}}^0 \cdot (\dot{R}_{e_{komp}}^0)^T \\ \Rightarrow \dot{\omega}_{e_{komp}}^0 &= \left[\dot{S}(\omega_{e_{komp}}^0)[3, 2] \quad \dot{S}(\omega_{e_{komp}}^0)[1, 3] \quad \dot{S}(\omega_{e_{komp}}^0)[2, 1] \right]^T \end{aligned} \quad (41)$$

kde $\ddot{R}_{e_{komp}}^0$ plyne z (37):

$$\dot{R}_{e_{komp}}^0 = R_r^0 \cdot \begin{bmatrix} -\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) & -\ddot{\varphi} \cos(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) & 0 \\ \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) & -\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot R_{komp} \quad (42)$$

Translační zrychlení \ddot{O}_e^0 plyne přímo z (40)

$$\ddot{O}_e^0 = R_r^0 \cdot \begin{bmatrix} -R \cdot \sin(\varphi) \cdot \ddot{\varphi} - R \cdot \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 \\ R \cdot \cos(\varphi) \cdot \ddot{\varphi} - R \cdot \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Nyní známe kompletní parametrizaci obvodového svaru, tedy požadovanou polohu $\mathbf{X} = [R_{e_{komp}}^0, O_e^0]$,

rychlost $\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{O}_e^0 \\ \dot{\omega}_{e_{komp}}^0 \end{bmatrix}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{O}_e^0 \\ \ddot{\omega}_{e_{komp}}^0 \end{bmatrix}$ koncového efektoru manipulátoru, které závisí na poloze φ , rychlosti $\dot{\varphi}$ a zrychlení $\ddot{\varphi}$ parametru vystupujícího v parametrizačních vztazích.

Generování časových průběhů $\varphi(t)$ a příslušných časových derivací ze známých časových průběhů ujeté dráhy $s(t)$ a příslušných časových derivací:

V případě parametrizace dráhy koncového efektoru po kružnici je vztah mezi ujetou dráhou po trajektorii $s(t)$ a parametrem $\varphi(t)$ lineární, neboť platí:

$$s(t) = R \cdot \varphi(t) \text{ a zároveň } v(t) = R \cdot \dot{\varphi}(t), \quad a(t) = R \cdot \ddot{\varphi}(t)$$

Vzhledem k tomu, že známe požadovaný časový průběh $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$, viz 3.1, neboť $s_{max} = R \cdot \varphi_{max}$, v_{max} , a_{max} známe ze zadání, lze generovat průběhy parametrizačního parametru φ a jeho čas. derivací jako:

$$\varphi(t) = \frac{1}{R} \cdot s(t), \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{1}{R} \cdot v(t), \quad \ddot{\varphi}(t) = \frac{1}{R} \cdot a(t) \quad (44)$$

3.2.2 Podélný svar

Podélný svar potrubí je znázorněn na Obrázku 10 a charakteristické parametry jsou dány následovně:

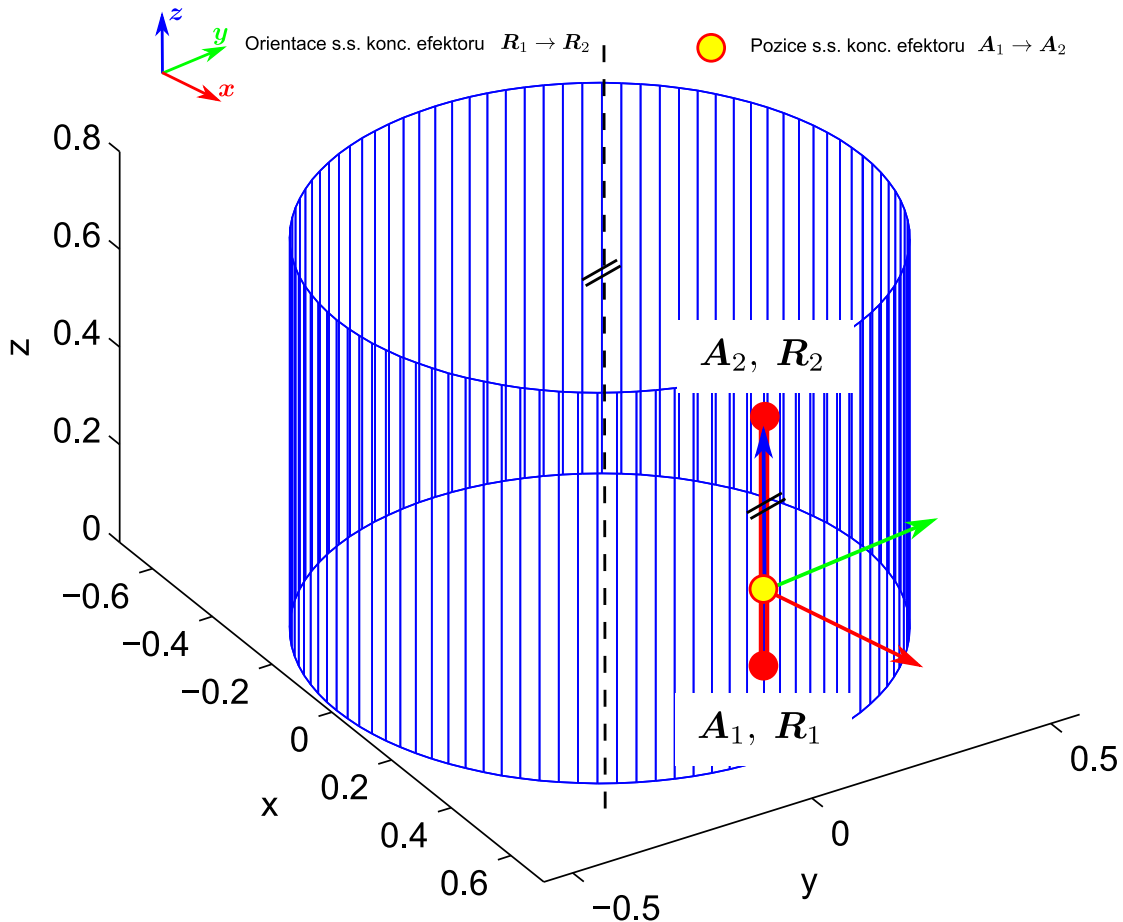
A počáteční bod svaru

R₁ počáteční orientace s.s.

B koncový bod svaru

R₂ koncová orientace s.s.

R_{komp} . matice rotace udávající pootočení defaultního s.s. (tzn. s.s., který je znázorněn na Obrázku 10)
- kompenzace orientace s.s. konc. efektoru (kompenzace orientace UZ sondy)



Obrázek 10: Schématické znázornění podélného svaru

Parametrizace trajektorie svaru parametrem $\varphi(t)$

- **Parametrizace polohy koncového efektoru:**

Parametrizace pohybu bodu po přímce je triviální, neboť platí:

$$\mathbf{O}_e^0 = \mathbf{A}^0 + (\mathbf{B}^0 - \mathbf{A}^0) \cdot \varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 1 \rangle \quad (45)$$

Orientace s.s. se musí měnit z počáteční orientace dané maticí rotace \mathbf{R}_1 do konečné orientace dané maticí rotace \mathbf{R} . Stejný postup jako při parametrizaci translačního pohybu zřejmě nelze použít, neboť matice rotace musí zachovávat své specifické vlastnosti. Nabízejí se tak v podstatě dvě možnosti:

1. **Převod matice rotace na XYZ Eulerovy úhly a jejich parametrizace (lineární), viz Obrázek 11(a)**

Předpokládejme XYZ Eulerovy úhly:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &\Rightarrow \mathbf{EA}_1 = [\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1]^T \\ \mathbf{R}_2 &\Rightarrow \mathbf{EA}_2 = [\alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2]^T \end{aligned}$$

Parametrizace Eulerových úhlů a převod zpět na matici rotace \mathbf{R}_e^0 :

$$\mathbf{EA} = \mathbf{EA}_1 + (\mathbf{EA}_2 - \mathbf{EA}_1) \cdot \varphi, \quad \mathbf{EA} \Rightarrow \mathbf{R}_e^0 \quad (46)$$

Taková parametrizace však trpí jistými nevýhodami, např.:

- převod matice rotace na Eulerovy úhly (nejednoznačnost - singularity v reprezentaci)
- nepřirozené otáčení s.s. z počáteční do koncové orientace, viz Obrázek 11(a).

2. **Přímý pohyb osy z s.s. z počáteční do koncové polohy (rotace kolem os x a y + dopočítání příslušné rotace kolem osy z), viz Obrázek 11(b)**

Nejprve provedeme transformaci počátečního s.s. F_1 do s.s. F_Z . S.s. F_Z bude mít osu \mathbf{x}_Z zarovnanou s osou \mathbf{z}_1 (počáteční orientace s.s. daná \mathbf{R}_1) a osa \mathbf{z}_Z bude kolmá k osám \mathbf{z}_1 a \mathbf{z}_2 (koncová orientace s.s. daná \mathbf{R}_2).

Matice rotace z F_1 do F_Z :

$$\mathbf{z}_Z^0 = \mathbf{z}_1^0 \times \mathbf{z}_2^0, \quad \mathbf{x}_Z^0 = \mathbf{z}_1^0, \quad \mathbf{y}_Z^0 = \mathbf{z}_Z^0 \times \mathbf{x}_Z^0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_Z^0 = [\mathbf{x}_Z^0 \quad \mathbf{y}_Z^0 \quad \mathbf{z}_Z^0] \quad (47)$$

Úhel svírající \mathbf{z}_1 a \mathbf{z}_2 :

$$\varphi_z = \frac{\mathbf{z}_1^T \cdot \mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_1\| \|\mathbf{z}_2\|} \quad (48)$$

Matice rotace z F_Z do s.s. F_z (zarovnání os \mathbf{x}_Z a \mathbf{z}_2 , elementární rotace kolem osy \mathbf{z}_Z):

$$\mathbf{R}_z^Z = \text{Rot}(\mathbf{z}, \varphi_z) \quad (49)$$

Tedy první část transformace: S.s. F_1 daný maticí \mathbf{R}_1^0 (vzhledem k F_0) transformujeme do s.s. F_Z , otočíme jej okolo \mathbf{z} o úhel φ_z (matice rotace \mathbf{R}_z^Z) a vrátíme zpět do s.s. F_0 :

$$\text{Transformace: } \mathbf{R}_{\text{komp } 1}^0 = \mathbf{R}_Z^0 \cdot \mathbf{R}_z^Z \cdot (\mathbf{R}_Z^0)^T \cdot \mathbf{R}_1^0, \quad \mathbf{R}_{\text{komp } 1}^0 = \mathbf{R}_{\text{komp } 1}^0(\varphi_z) \quad (50)$$

kde $\mathbf{R}_{\text{komp } 1}^0$ reprezentuje otočení osy \mathbf{z}_1 do směru osy \mathbf{z}_2 .

V okamžiku, kdy jsou zarovnány osy \mathbf{z}_1 a \mathbf{z}_2 , zbývá zarovnat s.s. F_1 a F_2 rotací okolo osy \mathbf{z}_1 . Zřejmě tedy platí:

$$\mathbf{R}_{\text{komp } 1}^0(\varphi_z) \cdot \mathbf{R}_{\text{komp } 2}^0(\bar{\varphi}_z) = \mathbf{R}_2^0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{\text{komp } 2}^0(\bar{\varphi}_z) = (\mathbf{R}_{\text{komp } 1}^0(\varphi_z))^T \cdot \mathbf{R}_2^0$$

kde platí: $\mathbf{R}_{\text{komp } 2}^0(\bar{\varphi}_z) = \text{Rot}(\mathbf{z}, \bar{\varphi}_z)$ (51)

Úhel $\bar{\varphi}_z$ otočení kolem osy \mathbf{z} lze získat přímo z prvků matice $\mathbf{R}_{\text{komp } 2}^0(\bar{\varphi}_z)$ jako:

$$\bar{\varphi}_z = \text{atan2}(\mathbf{R}_{\text{komp } 2}^0[2, 1], \mathbf{R}_{\text{komp } 2}^0[1, 1]) \quad (52)$$

Tedy druhá část transformace: Poté, co je zarovnána osa \mathbf{z}_1 s.s. F_1 s osou \mathbf{z}_2 s.s. F_2 je osa \mathbf{x}_1 zarovnána s osou \mathbf{x}_2 rotací kolem osy \mathbf{z} o úhel $\bar{\varphi}$:

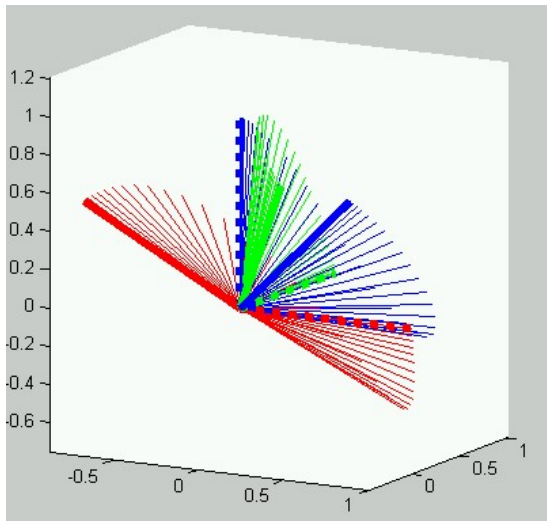
$$\text{Transformace: } \mathbf{R}_{\text{komp } 2}^0 = \mathbf{R}_{\text{komp } 2}^0(\bar{\varphi}_z) \quad (53)$$

Výsledná parametrizace orientace koncového efektoru z \mathbf{R}_1 do \mathbf{R}_2 je tak dána jako:

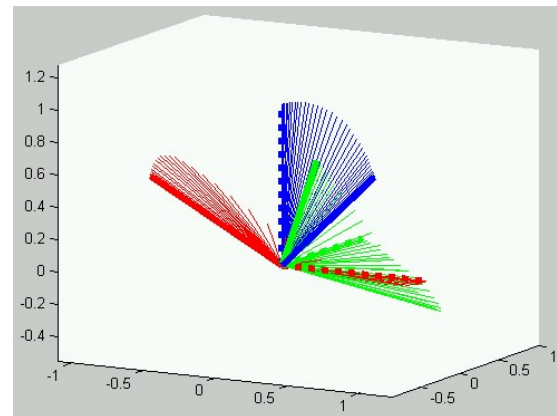
$$\mathbf{R}_e^0 = \mathbf{R}_{\text{komp } 1}^0(\varphi'_z) \cdot \mathbf{R}_{\text{komp } 2}^0(\bar{\varphi}'_z) \quad (54)$$

kde pro parametrizační parametry platí (závislé na parametru φ parametrizující translaci \mathbf{O}_e^0 konc. efektoru):

$$\varphi'_z = \varphi_z \cdot \varphi, \quad \bar{\varphi}'_z = \bar{\varphi}_z \cdot \varphi \quad (55)$$



(a) Parametrizace prostřednictvím Eulerových úhlů (jejich lineární interpolace)



(b) Přímý pohyb osy z po kružnici z počáteční do cílové polohy

Obrázek 11: Průběh parametrizace orientace: osa x ... červená, y ... zelená, z ... modrá, počáteční orientace (tučně, čárkovaně), koncová orientace (tučně)

- **Parametrizace rychlosti a zrychlení koncového efektoru (parametr $\varphi = \varphi(t)$):**

Odvozeno z časových derivací analogicky jako v případě obvodového svaru z Kapitoly 3.2.1.

Nyní známe kompletní parametrizaci podélného svaru, tedy požadovanou polohu $\mathbf{X} = [\mathbf{R}_{e_{\text{komp}}}^0, \mathbf{O}_e^0]$, rychlost $\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_e^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{e_{\text{komp}}}^0 \end{bmatrix}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_e^0 \\ \ddot{\boldsymbol{\omega}}_{e_{\text{komp}}}^0 \end{bmatrix}$ koncového efektoru manipulátoru, které závisí na poloze φ , rychlosti $\dot{\varphi}$ a zrychlení $\ddot{\varphi}$ parametru vystupujícího v parametrizačních vztazích.

Generování časových průběhů $\varphi(t)$ a příslušných časových derivací ze známých časových průběhů ujeté dráhy $s(t)$ a příslušných časových derivací:

V případě parametrizace dráhy koncového efektoru po přímce je vztah mezi ujetou dráhou po trajektorii $s(t)$ a parametrem $\varphi(t)$ opět lineární, neboť platí:

$$s(t) = \|\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0\| \cdot \varphi(t) \text{ a zároveň } v(t) = \|\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0\| \cdot \dot{\varphi}(t), \quad a(t) = \|\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0\| \cdot \ddot{\varphi}(t)$$

Vzhledem k tomu, že známe požadovaný časový průběh $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$, viz 3.1, neboť $s_{\text{max}} = \|\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0\|$ a v_{max} , a_{max} známe ze zadání, lze generovat průběhy parametrizačního parametru φ a jeho čas. derivací jako:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\|\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0\|} \cdot s(t), \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0\|} \cdot v(t), \quad \ddot{\varphi}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0\|} \cdot a(t) \quad (56)$$

3.2.3 Podélný svar v kolenu

Analogický svar k obvodovému svaru, viz Kapitola 3.2.1 \Rightarrow analogická parametrizace.

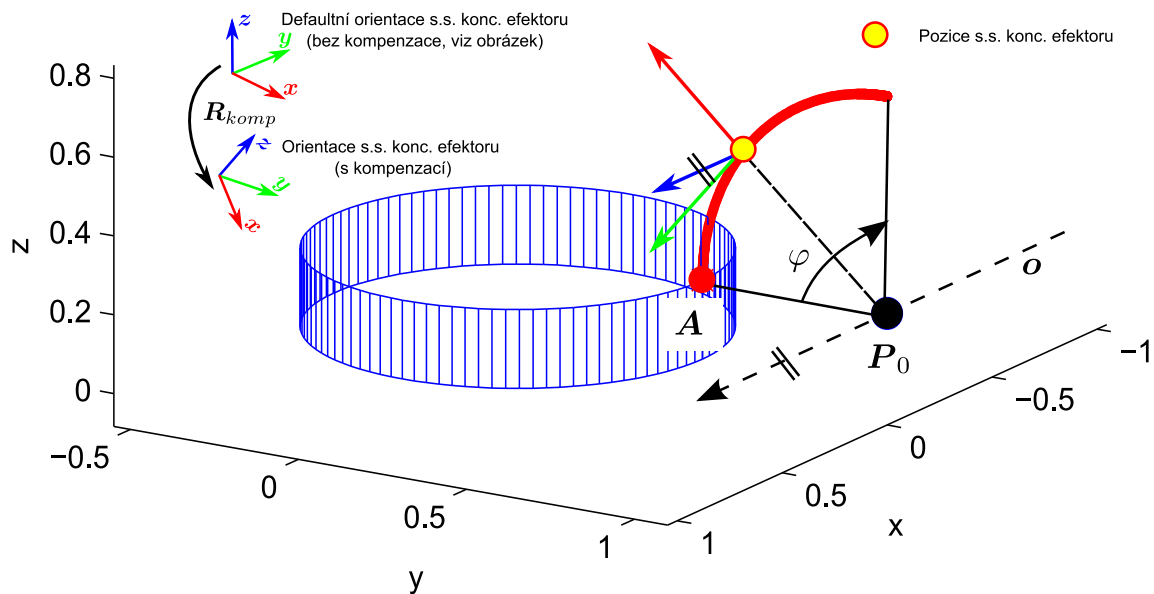
\mathbf{o} osa kružnice reprezentující radius podélného svaru v kolenu

P_0 bod ležící na ose \mathbf{o}

A počáteční bod svaru

φ_{max} ... úhel posunu po svaru

R_{komp} . matice rotace udávající pootočení defaultního s.s. (tzn. s.s., který je znázorněn na Obrázku 8)
- kompenzace orientace s.s. konc. efektoru (kompenzace orientace UZ sondy)



Obrázek 12: Schématické znázornění podélného svaru v kolenu

3.2.4 Svar nátrubku

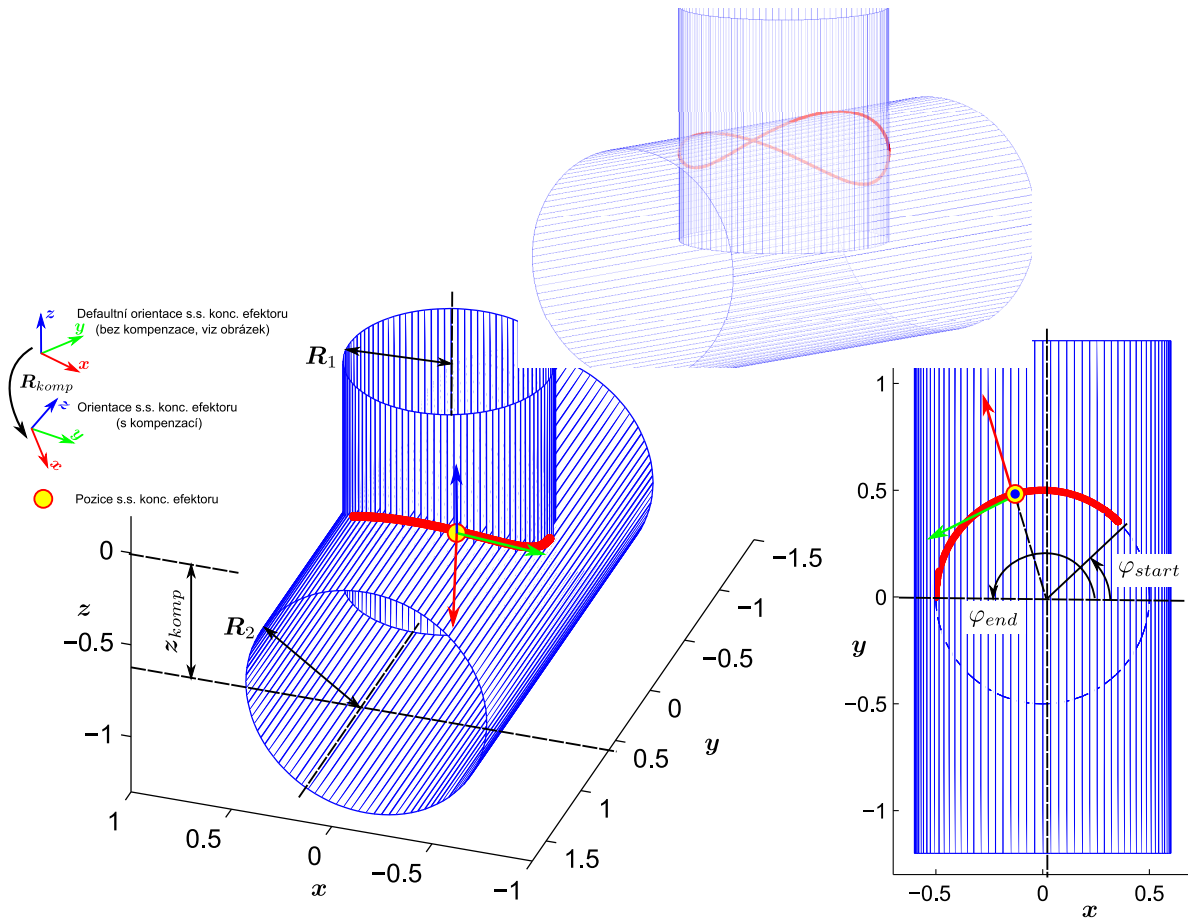
Jedná se o svar dvou potrubí s poloměry $R_1 \leq R_2$, která jsou do sebe vsazena pod úhlem 90° .

R_1, R_2 poloměr potrubí

z_{komp} posunutí trajektorie ve směru osy z

$\varphi_{start}, \varphi_{end}$.. počátek a konec pohybu (svaru)

R_{komp} matice rotace udávající pootočení defaultního s.s. (tzn. s.s., který je znázorněn na Obrázku 8)
- kompenzace orientace s.s. konc. efektoru (kompenzace orientace UZ sondy)



Obrázek 13: Schématické znázornění podélného svaru v kolenu

Parametrizace specifické trajektorie nátrubku, tzv. *Steinmetzova křivka* ze psát ve tvaru:

- **Parametrizace polohy koncového efektoru (včetně kompenzace orientace \mathbf{R}_{komp})**

$$\mathbf{O}_e^0 = \begin{bmatrix} R_1 \cos(\varphi) \\ R_1 \sin(\varphi) \\ \sqrt{R_2^2 - R_1^2 + R_1^2 \sin^2(\varphi)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{e_{komp}}^0 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{komp} \quad (57)$$

- **Parametrizace rychlosti koncového efektoru (parametr $\varphi = \varphi(t)$, včetně kompenzace orientace \mathbf{R}_{komp}):**

Časová derivace matice rotace $\mathbf{R}_{e_{komp}}^0$:

$$\dot{\mathbf{R}}_{e_{komp}}^0 = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \sin(\varphi) & -\dot{\varphi} \cos(\varphi) & 0 \\ \dot{\varphi} \cos(\varphi) & -\dot{\varphi} \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{komp} \quad (58)$$

Vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_{e_{komp}}^0$ lze získat z matice rotace $\mathbf{R}_{e_{komp}}^0$ a její časové derivace opět prostřednictvím antisymetrické matice $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{komp}}^0)$:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{komp}}^0) = \dot{\mathbf{R}}_{e_{komp}}^0 \cdot (\mathbf{R}_{e_{komp}}^0)^T \quad (59)$$

A tedy:

$$\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)[3, 2] & \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)[1, 3] & \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)[2, 1] \end{bmatrix}^T \quad (60)$$

Translační rychlost $\dot{\mathbf{O}}_e^0$ plyne přímo z (57):

$$\dot{\mathbf{O}}_e^0 = \underbrace{\begin{bmatrix} -R_1 \cdot \sin(\varphi) \\ R_1 \cdot \cos(\varphi) \\ \frac{1}{\sqrt{R_2^2 - R_1^2 + R_1^2 \sin^2(\varphi)}} R_1^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathbf{O}_e^0}{\partial \varphi}} \cdot \dot{\varphi} \quad (61)$$

- **Parametrizace zrychlení koncového efektoru (parametr $\varphi = \varphi(t)$, včetně kompenzace orientace \mathbf{R}_{komp}):**

Analogicky jako v případě obvodového svaru v Kapitole 3.2.1

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0) &= \ddot{\mathbf{R}}_{e_{\text{komp}}}^0 \cdot (\mathbf{R}_{e_{\text{komp}}}^0)^T + \dot{\mathbf{R}}_{e_{\text{komp}}}^0 \cdot (\dot{\mathbf{R}}_{e_{\text{komp}}}^0)^T \\ \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}}_{e_{\text{komp}}}^0 &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)[3, 2] & \dot{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)[1, 3] & \dot{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\omega}_{e_{\text{komp}}}^0)^0[2, 1] \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (62)$$

kde

$$\dot{\mathbf{R}}_{e_{\text{komp}}}^0 = \mathbf{R}_r^0 \cdot \begin{bmatrix} -\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) & -\ddot{\varphi} \cos(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) & 0 \\ \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) & -\ddot{\varphi} \sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{\text{komp}} \quad (63)$$

Translační zrychlení $\ddot{\mathbf{O}}_e^0$ plyne přímo z časové derivace (57)

$$\ddot{\mathbf{O}}_e^0 = \mathbf{K}_1(\varphi, \dot{\varphi}) + \mathbf{K}_2(\varphi) \cdot \ddot{\varphi} \quad (64)$$

kde

pro $R_1 < R_2$ platí:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -R_1 \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 \\ -R_1 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 \\ -\frac{R_1^4 (\sin(\varphi))^2 (\cos(\varphi))^2 \dot{\varphi}^2}{(R_2^2 - R_1^2 (\cos(\varphi))^2)^{3/2}} + \frac{R_1^2 (\cos(\varphi))^2 \dot{\varphi}^2}{\sqrt{R_2^2 - R_1^2 (\cos(\varphi))^2}} - \frac{R_1^2 (\sin(\varphi))^2 \dot{\varphi}^2}{\sqrt{R_2^2 - R_1^2 (\cos(\varphi))^2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -R_1 \sin(\varphi) \\ R_1 \cos(\varphi) \\ \frac{R_1^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\sqrt{R_2^2 - R_1^2 (\cos(\varphi))^2}} \end{bmatrix}$$

pro $R_1 = R_2$ platí:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -R_2 \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 \\ -R_2 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 \\ \frac{(-1 + (\cos(\varphi))^2) \dot{\varphi}^2 R_2^2}{\sqrt{-R_2^2 (-1 + (\cos(\varphi))^2)}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -R_2 \sin(\varphi) \\ R_2 \cos(\varphi) \\ \frac{R_2^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{\sqrt{-R_2^2 (-1 + (\cos(\varphi))^2)}} \end{bmatrix}$$

Generování časových průběhů $\varphi(t)$ a příslušných časových derivací ze známých časových průběhů ujeté dráhy $s(t)$ a příslušných časových derivací:

V předchozích případech parametrizace trajektorií (obvodový svar, podélný svar a podélný svar v kolenu, viz Kapitola 3.2.1 - 3.2.3) se trajektorie (translace) koncového efektoru skládaly výhradně z přímků a kružnic. Takové trajektorie jsou přirozeně parametrizovatelné, tzn. lze stanovit **lineární vztah** mezi dráhou $s(t)$ ujetou po plánované trajektorii a parametrizačním parametrem $\varphi(t)$ (a tedy i všemi vyššími čas. derivacemi - rychlost, zrychlení), viz rovnice (44, 56). Toto bohužel již neplatí v případě trajektorie zadané jako Steinmetzova křivka.

Je známo, že dráha $s(t)$ ujetá po trajektorii \mathcal{O}_e^0 parametrizované parametrem $\varphi(t)$ lze vypočítat jako:

$$s(\varphi(t)) = \int_0^{\varphi(t)} \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{O}_e^0[1](\varphi(t))}{\partial \varphi(t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{O}_e^0[2](\varphi(t))}{\partial \varphi(t)}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{O}_e^0[3](\varphi(t))}{\partial \varphi(t)}\right)^2} d\varphi$$

Tedy dosazením (57) dostáváme:

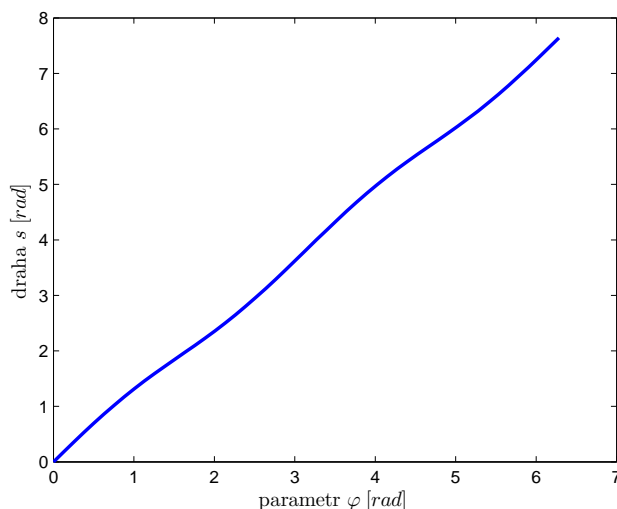
$$s(t) = \int_0^{\varphi(t)} \sqrt{\frac{(-R_2^2 + \cos(\varphi)^4 R_1^2) R_1^2}{-R_2^2 + R_1^2 \cos(\varphi)^2}} d\varphi \quad (65)$$

Lze ukázat, že integrál (65) je Eliptickým integrálem a nelze jej analyticky vypočítat, tedy vztah mezi $s(t)$ a $\varphi(t)$ nelze vyjádřit analyticky a je nutné využít numerických metod. Jedním z přístupů, jak je možné řešit problém generování parametrizačního parametru $\varphi(t)$ na základě znalosti ujeté dráhy $s(t)$ po trajektorii je aproximace funkce $s(t) = F(\varphi(t))$. Některé další metody mohou být nalezena např. v [3].

Aproximace funkce $s(t) = F(\varphi(t))$

K výpočtu integrálu (65) bylo využito rekurzivní adaptivní Simpsonovy metody, které umožňuje numericky počítat integrál zadané funkce s libovolnou definovanou přesností. Metoda je standardně implementována v prostředí Matlab pod názvem *quad*, [1].

Aproximační funkce F ujeté dráhy s byla vypočtena prostřednictvím funkce *quad* v diskretních okamžicích $\varphi_k = \frac{2\pi}{K} \cdot k$ pro $k = 1 \dots K$, kde K je počet vzorků. Diskretizovaný aproximovaný průběh funkce je znázorněn na Obrázku 14.



Obrázek 14: Diskretizovaná funkce $s_k = F(\varphi_k)$ pro $R_1 = R_2 = 1$, $K = 50$

Z podrobné analýzy Obrázku 14 je patrné, že diskretizovaná funkce F je možné poměrně dobře aproximovat lineární funkcí, na které bude superponována funkce periodická. Poznamenejme, že aproximace diskretizované funkce F hraje klíčovou roli, neboť je nutné nalézt především funkci inverzní F^{-1} , která umožní vypočítat hodnoty parametrizačního parametru φ na základě znalost uražené dráhy s po trajektorii.

Aproximace diskretizované funkce F byla proto volena v následujícím tvaru:

$$s = F(\varphi) = g\varphi + \sum_{j=1}^L a_j \sin(2j\varphi) \quad (66)$$

kde g je zesílení lineární funkce a a_j je L Fourierových parametrů (postačují pouze sudé harmonické složky ve funkci $\cos(2j\varphi)$, ostatní členy Fourierova rozvoje jsou pro danou aproximovanou funkci zanedbatelné).

Hledaný vektor parametrů aproximované funkce je tedy:

$$\Phi = [g \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_L] \quad (67)$$

Vzhledem k tomu, že máme k dispozici K diskrétních vzorků hledané funkce F , lze vektor parametrů nalézt pomocí metody nejmenších čtverců jako:

$$\Phi = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{Y}; \quad (68)$$

kde pro $K \geq L$ platí:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \sin(2\varphi_1) & \sin(4\varphi_1) & \dots & \sin(2L\varphi_1) \\ \varphi_2 & \sin(2\varphi_2) & \sin(4\varphi_2) & \dots & \sin(2L\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_K & \sin(2\varphi_K) & \sin(4\varphi_K) & \dots & \sin(2L\varphi_K) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = [s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_k]^T$$

Tím získáváme *aproximativní analytické* vyjádření funkce $s = F(\varphi)$.

Aproximace funkce F lze považovat za uspokojivou neboť dosahuje relativní chyby r v řádu 10^{-7} pro $K = 500$ a $L = 50$:

$$r = \max_{k=1\dots K} \frac{s_k - F(\varphi_k)}{s_{max}} \quad (69)$$

kde s_{max} je celková ujetá dráha pro $\varphi = 2\pi$.

Inverzi aproximované funkce $s = F(\varphi)$ lze určit následujícím postupem:

- Vzhledem k povaze funkce F lze snadno odhadnout přibližnou hodnotu φ pro danou hodnotu ujeté dráhy s , neboť fce F je téměř lineární.

Počáteční odhad φ_0 :

$$\varphi_0 = \frac{s}{g} \quad (70)$$

- Skutečná hodnota φ je nalezena numerickým iteračním algoritmem s počáteční podmínkou φ_0 (v Matlabu funkce *fzero*, řešící rovnici $F(\varphi) - s = 0$ pro p.p. φ_0)

Převod mezi požadovanou tečnou rychlostí v na rychlost $\dot{\varphi}$ parametrizačního parametru je lineární funkcí (pochopitelně závislé na aktuální poloze s resp. φ). Velikost tečné rychlosti je dána normou vektoru $\dot{\mathbf{O}}_e^0$, viz (61), která musí odpovídat požadované v :

$$\|\dot{\mathbf{O}}_e^0\|^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{O}_e^0}{\partial \varphi} \right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{O}_e^0}{\partial \varphi} \cdot \dot{\varphi}^2 \stackrel{!}{=} v^2 \quad (71)$$

Transformace $v \rightarrow \dot{\varphi}$ je tedy zřejmá:

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\partial \mathbf{O}_e^0}{\partial \varphi} \right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{O}_e^0}{\partial \varphi}}} \cdot v \quad (72)$$

Z Obrázku 6 je zřejmé, že jsou kladena omezení pouze na tečné zrychlení translace koncového efektoru. Tečné zrychlení translace koncového efektoru $^{tecne}\ddot{\mathbf{O}}_e^0$ je průmět celkového zrychlení $\ddot{\mathbf{O}}_e^0$ do směru vektoru rychlosti $\dot{\mathbf{O}}_e^0$. Tedy platí:

$$^{tecne}\ddot{\mathbf{O}}_e^0 = \ddot{\mathbf{O}}_e^0 \cdot \frac{\partial \mathbf{O}_e^0}{\partial \varphi} \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{O}_e^0}{\partial \varphi} \right\|^{-1} \stackrel{!}{=} a \quad (73)$$

Dosazením rovnice (64) dostáváme transformaci $a \rightarrow \ddot{\varphi}$:

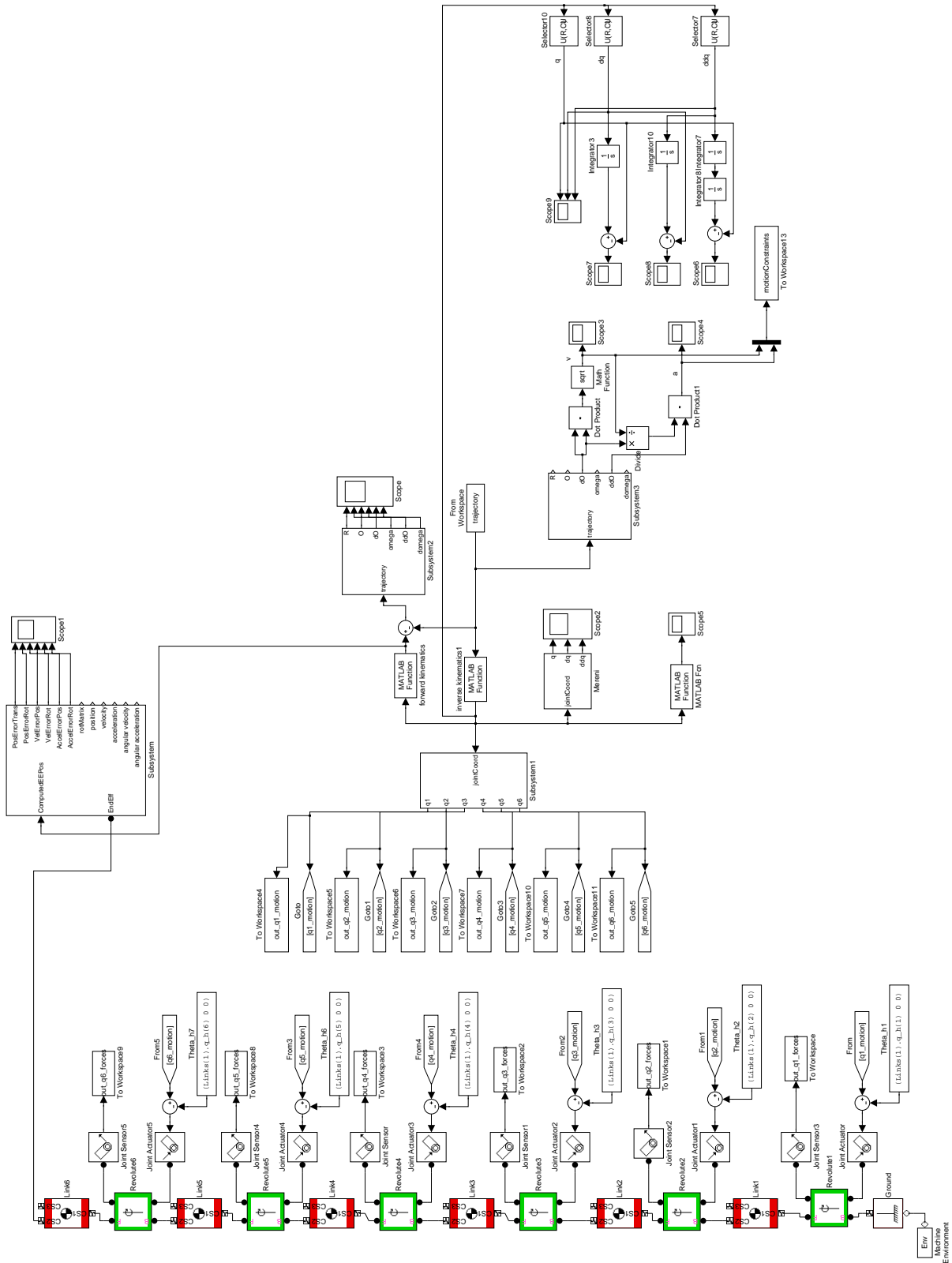
$$\ddot{\varphi} = \frac{a \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{O}_e^0}{\partial \varphi} \right\| - \mathbf{K}_1^T \cdot \frac{\partial \mathbf{O}_e^0}{\partial \varphi}}{\mathbf{K}_2^T \cdot \frac{\partial \mathbf{O}_e^0}{\partial \varphi}} \quad (74)$$

4 Simulace, vyhodnocení simulačních výsledků, volba finální architektury manipulátoru

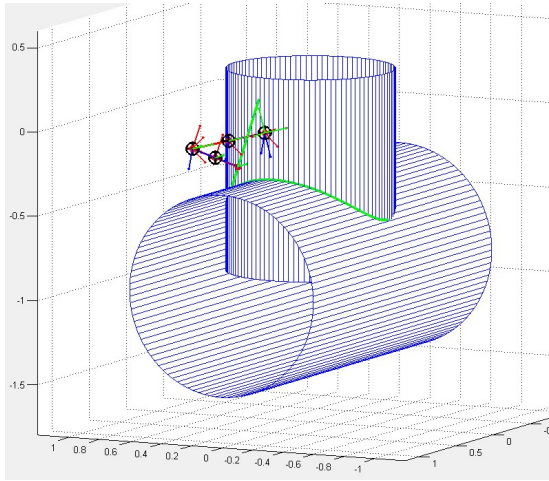
Nyní máme k dispozici kompletní kinematický model manipulátoru a potřebné generátory trajektorií koncového efektoru dle požadované množiny testovaných svarů.

Kinematické modely byly dále použity k vytvoření kompletního dynamického modelu jednotlivých verzí manipulátoru v prostředí Matlab/Simulink/SimMechanic. Byl využit simulační mód inverzní dynamiky, který nám umožňuje ze znalosti polohy, rychlosti a zrychlení jednotlivých aktuátorů manipulátoru rekonstruovat požadované síly/momenty na těchto aktuátorech. Požadované polohy, rychlosti a zrychlení aktuátorů byly vypočítány ze známých generovaných poloh, rychlostí a zrychlení koncového efektoru prostřednictvím IGM a IOKÚ.

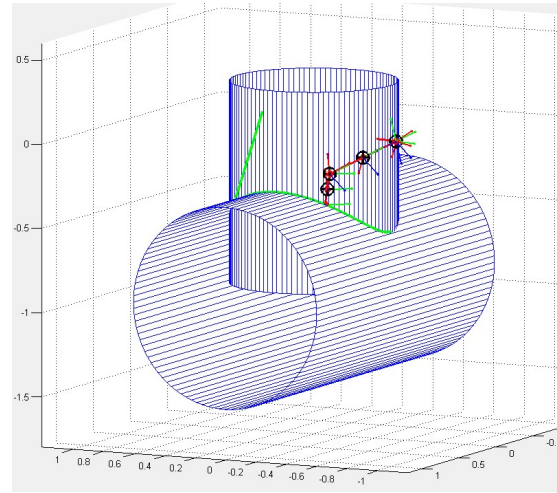
Ilustrativní příklad modelu manipulátoru ve variantě 3 v prostředí SimMechanics je znázorněno na Obrázku 15. Odpovídající časové průběhy poloh, rychlostí, zrychlení a silových momentů na aktuátorech manipulátoru společně s průběhy tečné rychlosti a zrychlení koncového efektoru pro sledování trajektorie nátrubku jsou znázorněny na Obrázcích 17, 18, 19. Poznamenejme, že uvedené průběhy pochopitelně závisí na návrhových parametrech manipulátoru (kinematických, dynamických), parametrech trajektorie nátrubku a požadavcích na max. tečnou rychlost a zrychlení. Tato data zde nejsou záměrně uvedena (pro demonstrativní účely nejsou podstatná). Obrázek 16 znázorňuje simulační prostředí SimMechanics s modelem manipulátoru ve variantě 3 při pohybu po zadané trajektorii. Trajektorie se skládá z přibližovací fáze (posun po přímkové trajektorii z počátečního bodu manipulátoru do počátečního bodu na testovaném svaru, analogické plánování trajektorie jako pro podélný svar) a z vlastní trajektorie testovaného svaru (svar nátrubku).



Obrázek 15: Simulační model v SimMechanics - manipulátor ve variantě 3

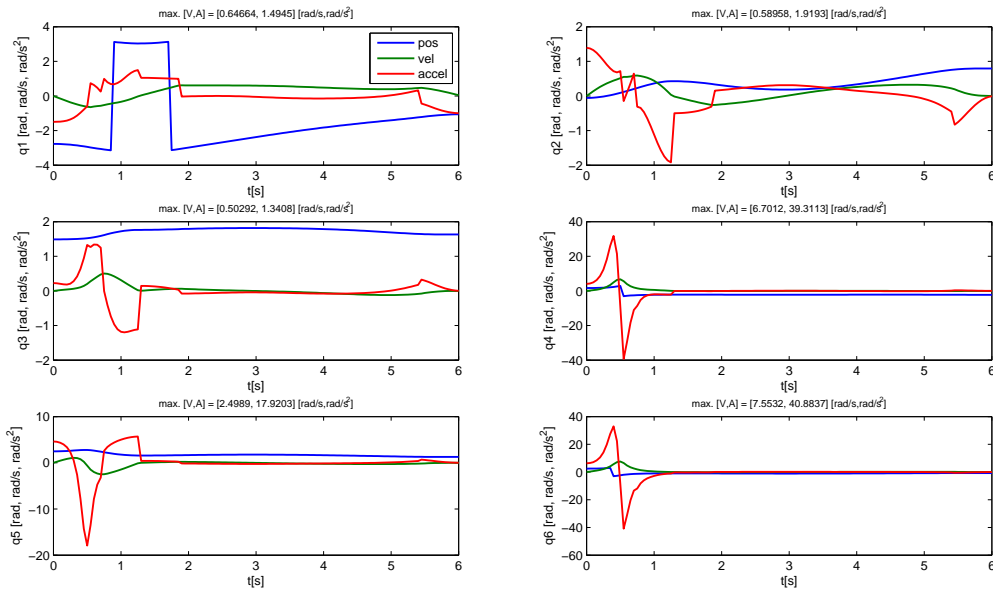


(a) Přibližovací fáze (pohyb po přímce)

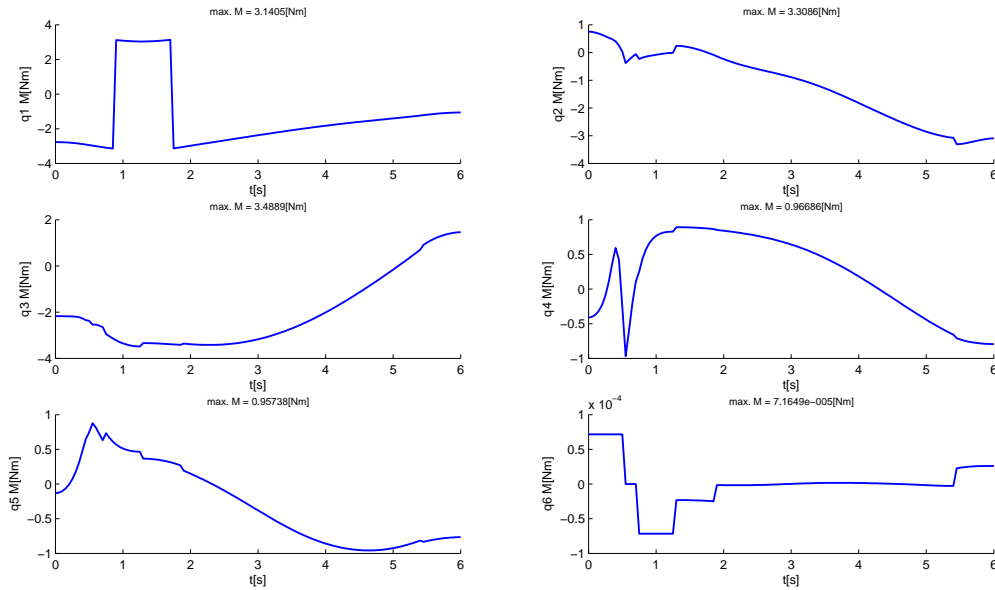


(b) Fáze testování (pohyb po trajektorii odpovídající svaru nátrubku)

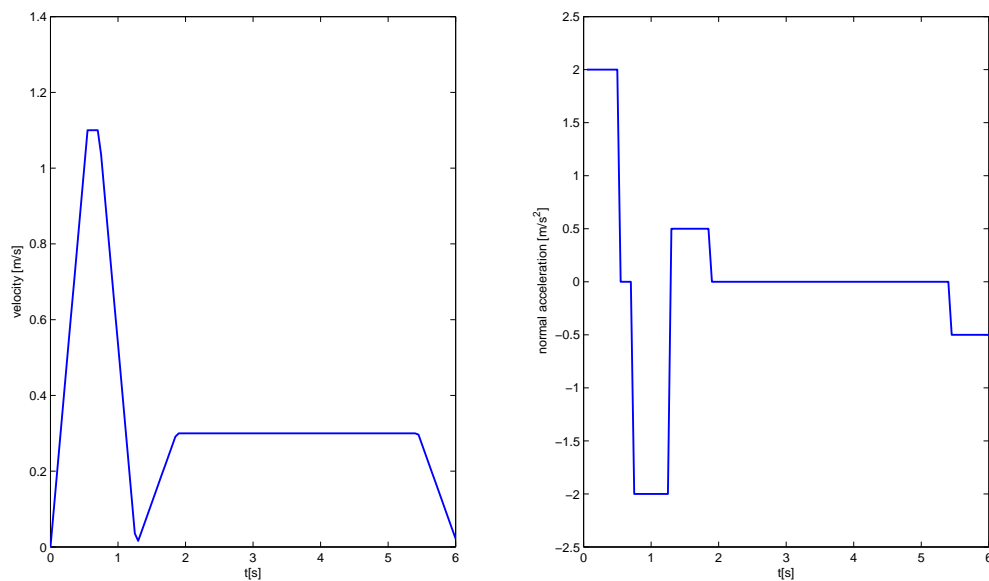
Obrázek 16: Vizualizace pohybu manipulátoru v Simmechanics - manipulátor ve variantě 3



Obrázek 17: Průběhy poloh, rychlostí a zrychlení na aktuátorech manipulátoru ve variantě 3 pro pohyb po trajektorii odpovídající svaru nátrubku



Obrázek 18: Průběhy silových momentů na aktuátorech manipulátoru ve variantě 3 pro pohyb po trajektorii odpovídající svaru nátrubku



Obrázek 19: Odměřené průběhy tečné rychlosti a zrychlení koncového efektoru manipulátoru ve variantě 3 pro pohyb po trajektorii odpovídající svaru nátrubku (konstantní rychlost při testování)

4.1 Volba výsledné varianty manipulátoru a simulační analýza:

Pro každou variantu manipulátoru byly vyhodnoceny potenciální výhody ve srovnání s konstrukčními požadavky. Výsledky lze shrnout následovně:

1. Manipulátor varianta 1

- + identické klouby typu **R**
- + \Rightarrow relativně jednoduchá konstrukce
- + přirozené orientování NDT sondy (pouze 1 rotační DoF konc. efektoru)
 - omezený počet DoF konc. efektoru
 - **relativně velké prostorové požadavky** díky uspořádání prvních dvou ramen

2. Manipulátor varianta 2

- + přirozené orientování NDT sondy (pouze 1 rotační DoF konc. efektoru)
- + díky **P** kloubu **výrazně omezeny prostorové požadavky**
 - omezený počet DoF konc. efektoru
 - komplikovanější konstrukce díky lineárnímu pohonu

3. Manipulátor varianta 3

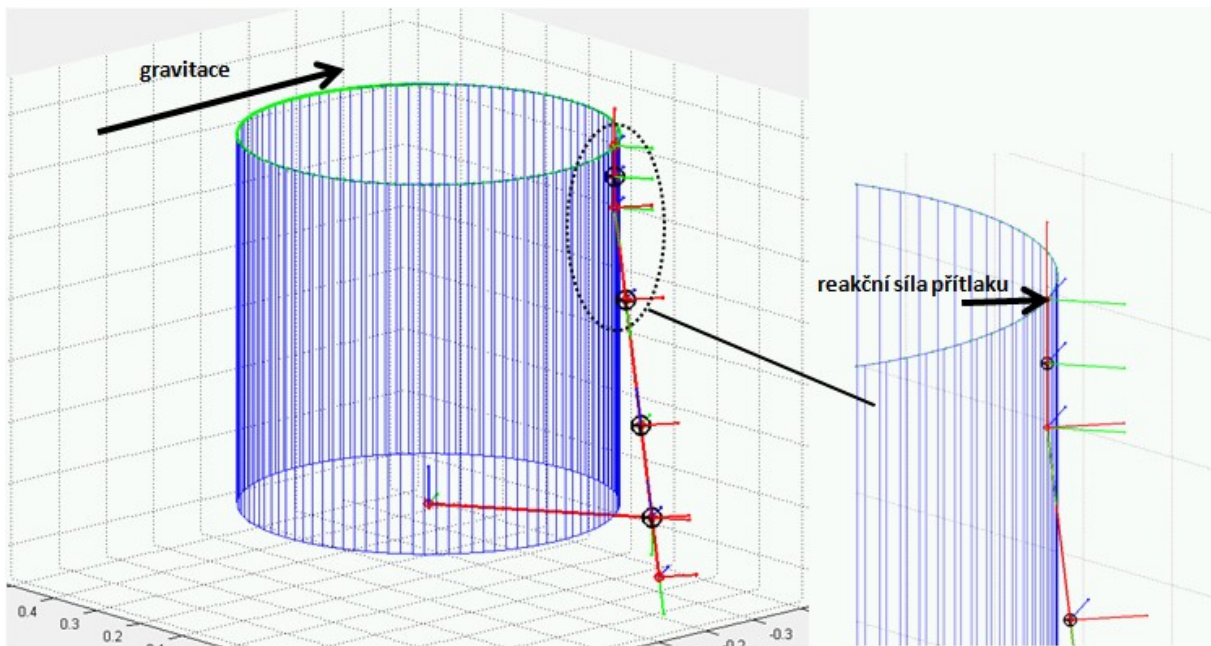
- + všech 6 DoF - možnost dosáhnout libovolné orientace NDT sondy
- + univerzální použití pro testování svarů (v podstatě libovolných tvarů)
 - nutnost osadit 6 aktuátorů \Rightarrow komplikované, drahé

Jako nejlepší kompromis mezi výše uvedenými variantami manipulátorů byl nakonec vybrán manipulátor ve variantě 2. Za účelem podrobné analýzy chování manipulátoru při testování uvedených typů svarů byla zpracována podrobná studie. Pro jednoduchost byly obě části lin. aktuátoru a poslední rameno uvažovány jako tyče s příslušnou délkou, poloměrem 0.02m a materiálem ze železa (hustota $\rho = 7800[\text{kg}/\text{m}^3]$). Hmotnosti aktuátorů nebyly uvažovány. Záměrem studie nebylo konkrétní stanovení požadovaných parametrů aktuátorů manipulátoru (tzn. potřebné rychlosti, zrychlení, momenty), ale především principiální odhad chování těchto vlastností pro definovanou množinu svarů při změnách poloměrů potrubí, na nichž byly manipulátorem testovány příslušné svary. V simulacích bylo dále předpokládán požadavek na přítlačnou sílu sondy k testovanému svaru 4.5 kg a hmotnost vozíku byly uvažovány 5 kg.

Obvodový svar:

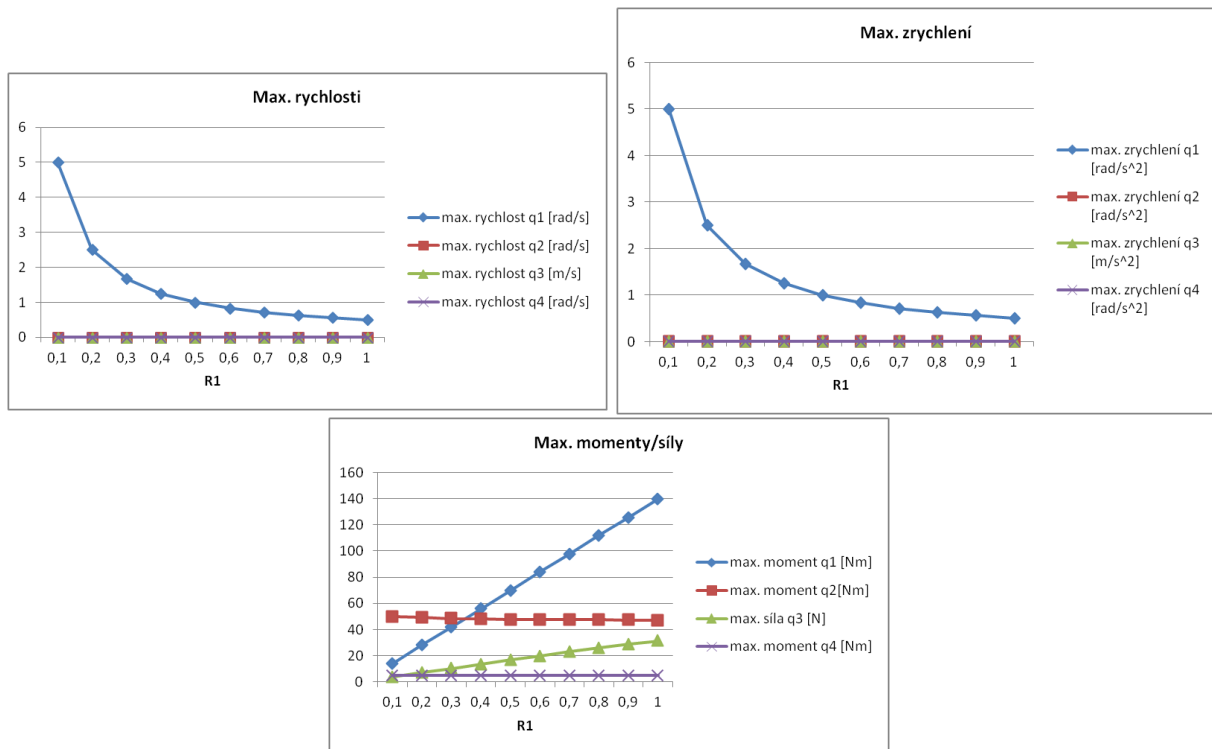
Parametry simulace:

- $R1$ poloměr potrubí
- omezení na rychlost a zrychlení $v_{max} = 0.5[m/s]$, $a_{max} = 0.5[m/s^2]$
- délka posledního ramena $0.1[m]$
- délka prvního ramena $1.2 * R1[m]$
- délka lin. akt. $0.6[m]$ (délka pevné a pohyblivé části = $0.3[m]$) - není nutno měnit



Obrázek 20: Manipulátor ve variantě 3: analýza pro testování obvodového svaru

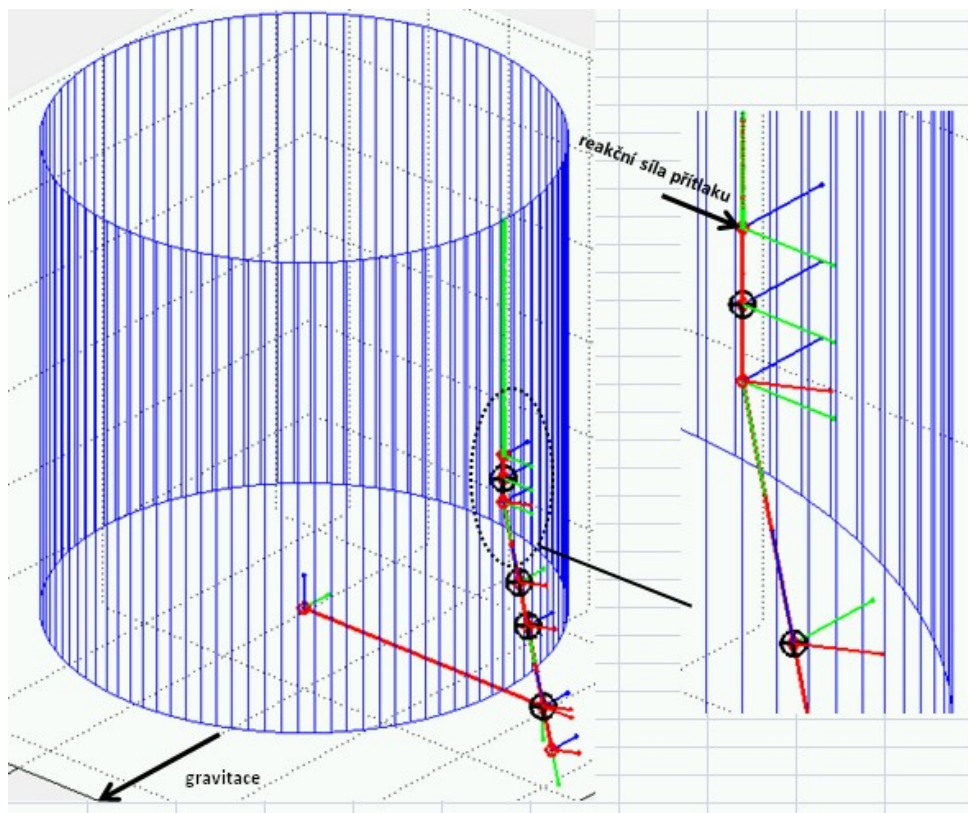
Simulační výsledky (obvodový svar):



Obrázek 21: Manipulátor ve variantě 3: analýza pro testování obvodového svaru - průběhy požadovaných rychlostí, zrychlení a sil/momentů aktuátorů a maximálního požadovaného výsuvu lineárního aktuátoru

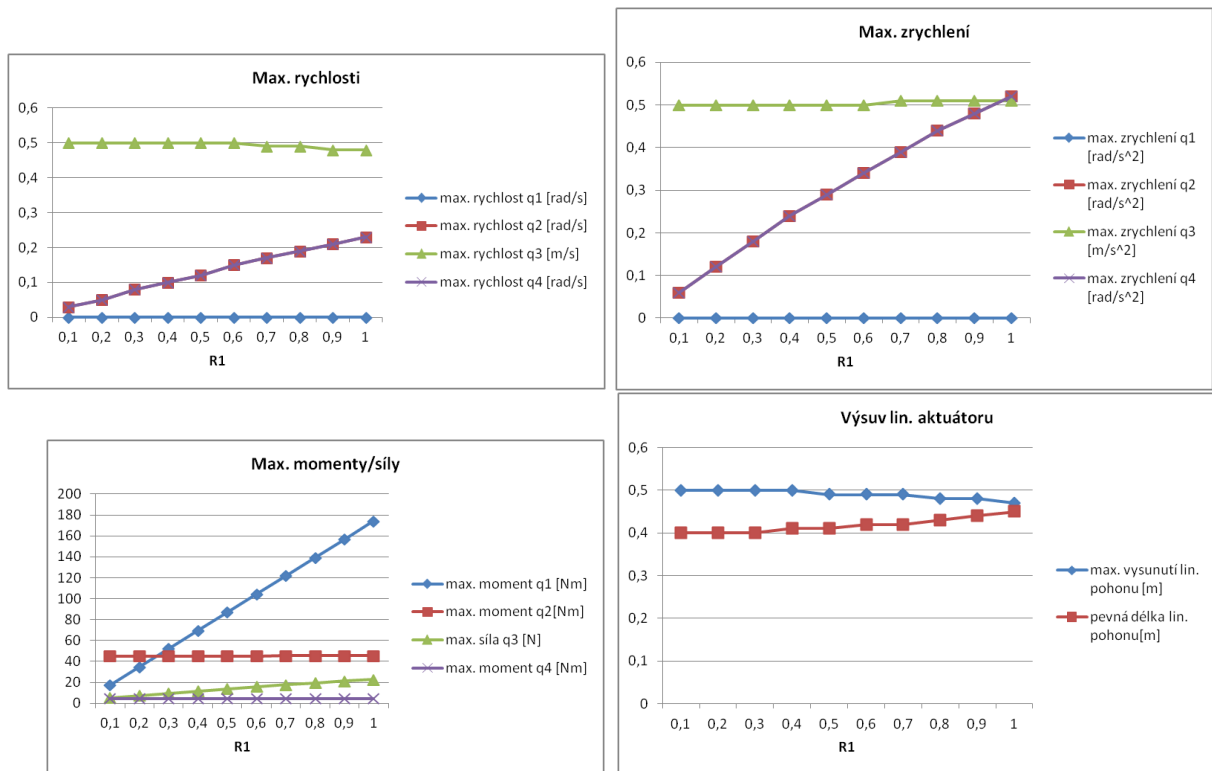
Podélný svar:**Parametry simulace:**

- $R1$ poloměr potrubí
- omezení na rychlost a zrychlení $v_{max} = 0.5[m/s]$, $a_{max} = 0.5[m/s^2]$
- délka posledního ramena $0.1[m]$
- délka prvního ramena $1.2 * R1[m]$
- délka podélného svaru $0.5[m]$
- $LL = 1[m]$ (vzdálenost pojezdu od začátku svaru)



Obrázek 22: Manipulátor ve variantě 3: analýza pro testování podélného svaru

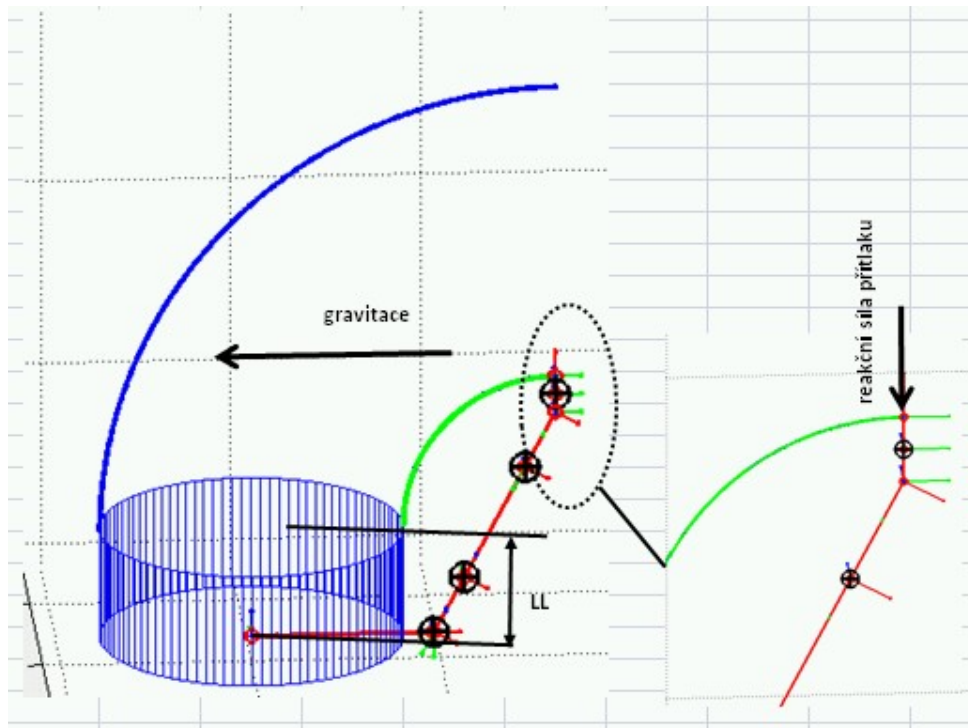
Simulační výsledky (podélný svar):



Obrázek 23: Manipulátor ve variantě 3: analýza pro testování podélného svaru - průběhy požadovaných rychlostí, zrychlení a sil/momentů aktuátorů a maximálního požadovaného výsuvu lineárního aktuátoru

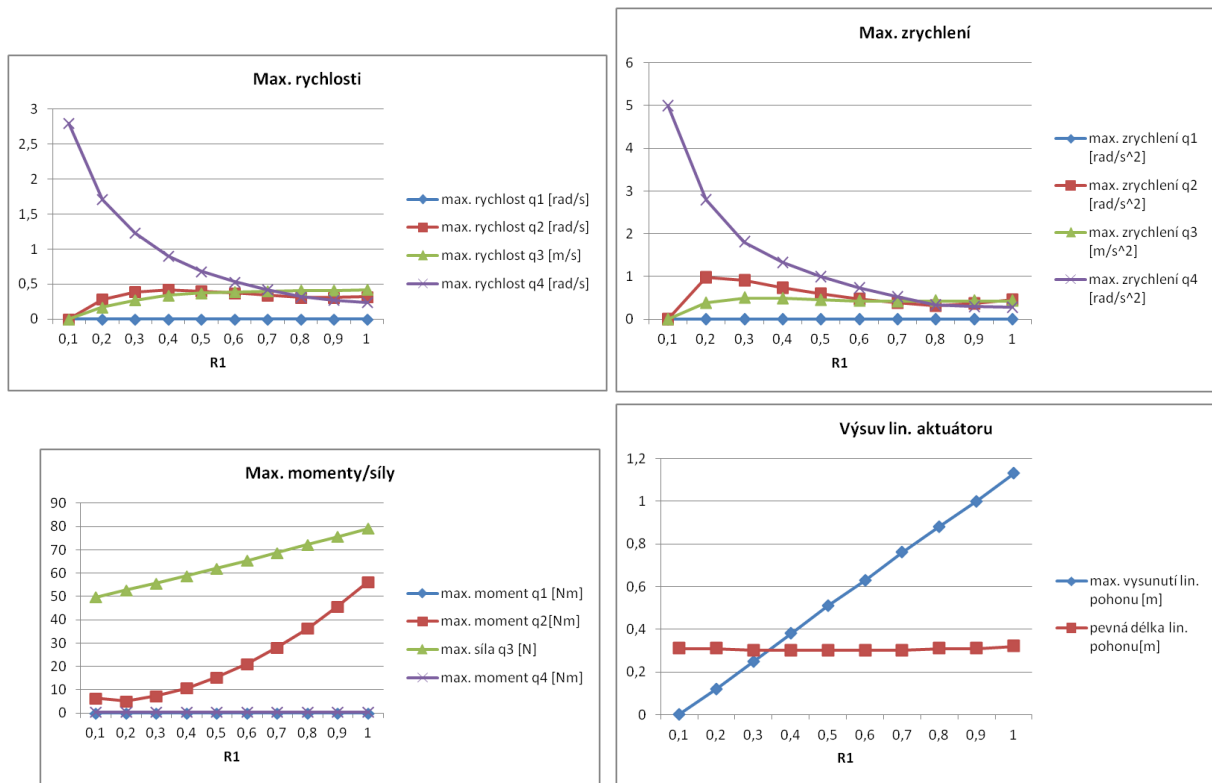
Podélný svar v kolenu:**Parametry simulace:**

- $R1$ poloměr potrubí
- omezení na rychlost a zrychlení $v_{max} = 0.5[m/s]$, $a_{max} = 0.5[m/s^2]$
- délka posledního ramena $0.1[m]$
- délka prvního ramena $1.2 * R1[m]$
- délka lin. akt. $\sqrt{(0.8 * R1)^2 + (R1 - 0.1 + 0.3)^2}$ [m] (délka pevné a pohyblivé části = $\sqrt{(0.8 * R1)^2 + (R1 - 0.1 + 0.3)^2}/2$ [m])
- $LL = 0.3[m]$ (vzdálenost pojezdu od začátku svaru)



Obrázek 24: Manipulátor ve variantě 3: analýza pro testování podélného svaru v kolenu

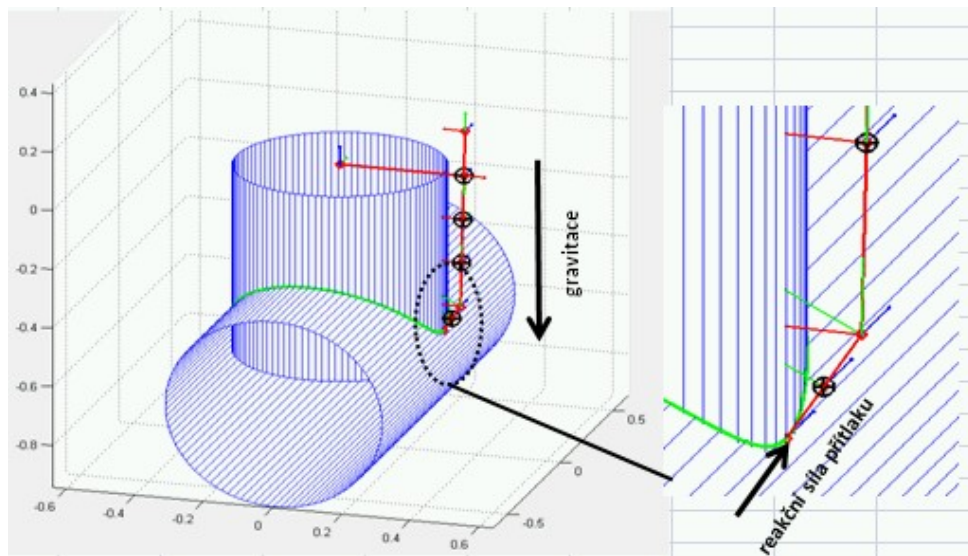
Simulační výsledky (podélný svar v kolenu):



Obrázek 25: Manipulátor ve variantě 3: analýza pro testování podélného svaru v kolenu - průběhy požadovaných rychlostí, zrychlení a sil/momentů aktuátorů a maximálního požadovaného výsuvu lineárního aktuátoru

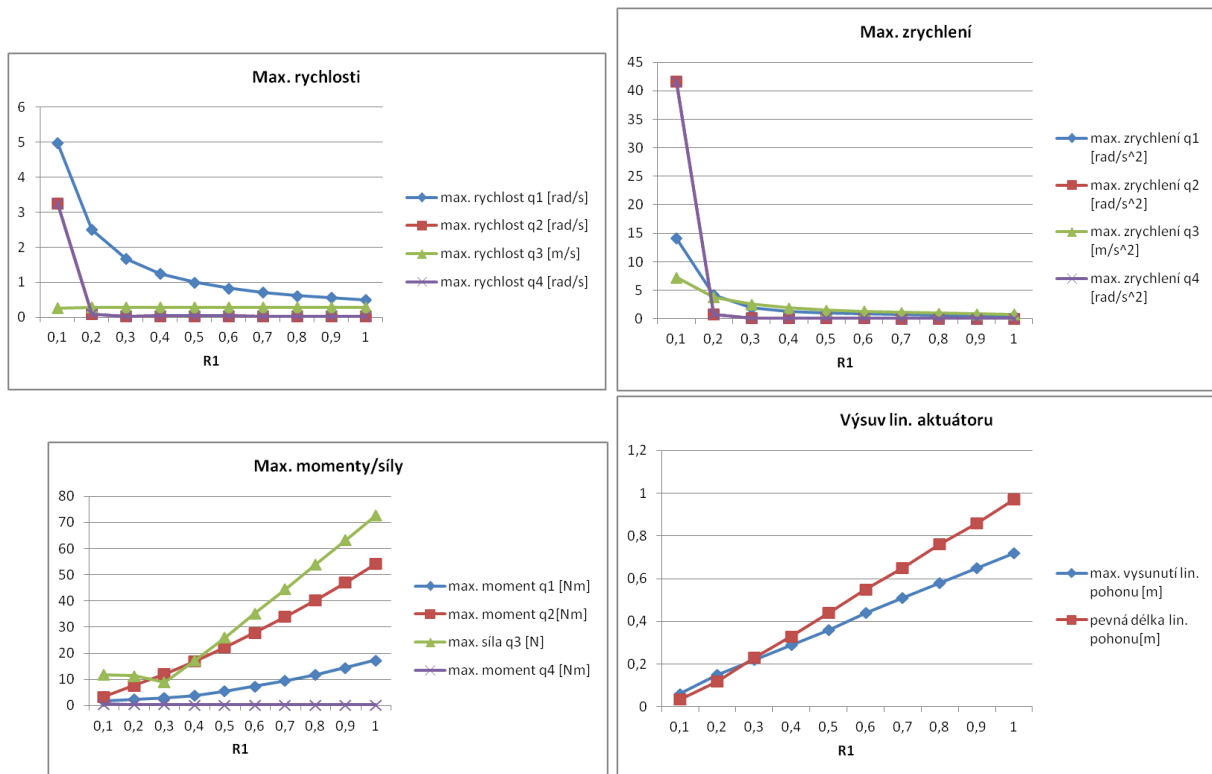
Svar nátrubku:**Parametry simulace:**

- svar nátrubku, $R2 = 1.05 * R1$, $R1$ (potrubí s pojezdem), $R2$ (připojené potrubí)
- omezení na rychlost a zrychlení $v_{max} = 0.5[m/s]$, $a_{max} = 0.5[m/s^2]$
- délka posledního ramena $0.1[m]$
- délka prvního ramena $1.2 * R1[m]$
- délka lin. akt. $2 * R1[m]$ (délka pevné a pohyblivé části = $R1[m]$)



Obrázek 26: Manipulátor ve variantě 3: analýza pro testování svaru nátrubku

Simulační výsledky (svar nátrubku):



Obrázek 27: Manipulátor ve variantě 3: analýza pro testování svaru nátrubku - průběhy požadovaných rychlostí, zrychlení a sil/momentů aktuátorů a maximálního požadovaného výsuvu lineárního aktuátoru

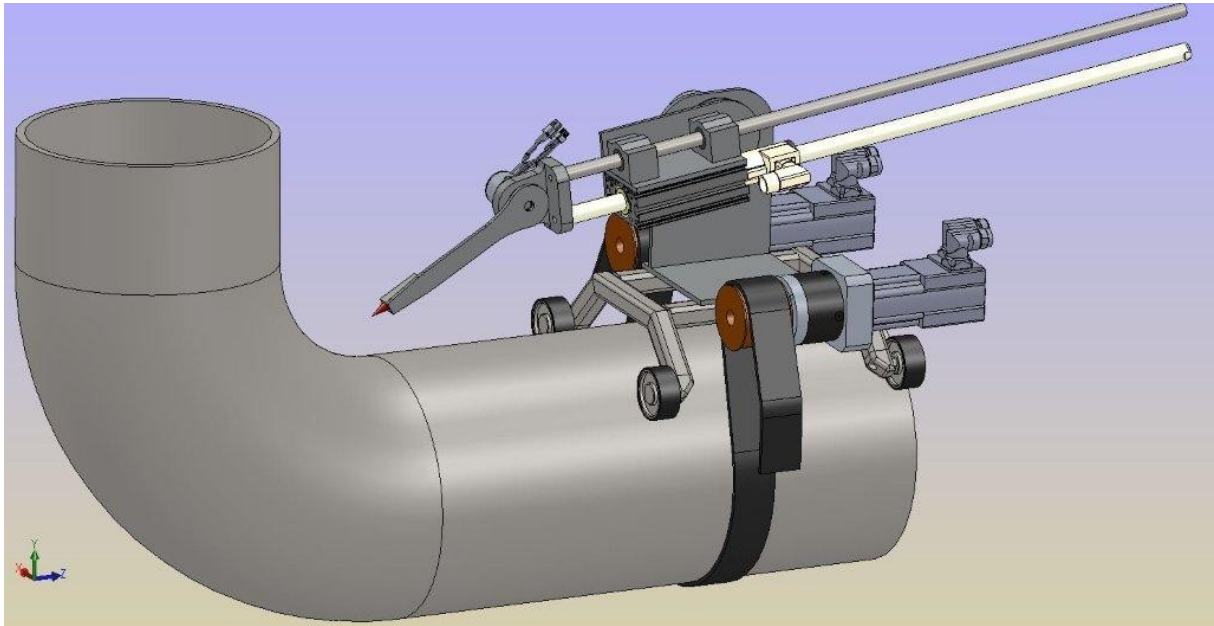
5 Závěrečné zhodnocení

Předložená technická zpráva doplňuje a rozšiřuje technickou zprávu [4]. Její součástí je odvození kompletního kinematického modelu manipulátoru ve variantě 3 pro NDT zkoušení potrubních svarů. Důležitou částí zprávy je teoretické odvození a sestavení simulačních modelů pro generátory příslušných trajektorií koncového efektoru manipulátoru odpovídající požadované množině potrubních svarů. Generátory trajektorií byly odvozeny v obecné rovině (generování všech 6 DoF - rotace i translace) a pro manipulátory ve variantě 1 a 2 (pouze 1 rotační DoF koncového efektoru) byly provedena příslušná restrikce na orientaci koncového efektoru. Poznamenejme, že generátory trajektorií byly navrženy takovým způsobem, aby byly zajištěny požadavky na plynulost pohybu po trajektorii s omezením na maximální možnou rychlost a zrychlení v tečném směru.

Ve druhé části zprávy byly provedeny simulační experimenty již vybrané architektury manipulátoru (varianta 2). Tyto experimenty ukazují strukturální vývoj časových průběhů požadovaných rychlostí, sil, sil/silových momentů a požadavků na maximální výsuv. lin. aktuátoru v závislosti na testování svarů na potrubích různých průměru. Tento výsledek hraje klíčovou roli při volbě korektních aktuátorů manipulátoru a při procesech stanovování pracovních podmínek a možností manipulátoru.

V současné době je již navržen první technologický výkres prototypového řešení manipulátoru, viz Obrázek 28. Technologický výkres je vytvořen firmou ATEGA s.r.o. a s její pomocí bude

nadále rozvíjen. Poznamenejme, že řešení pojezdového ústrojí manipulátoru po potrubí je ve stavu návrhu a bude podrobně popsáno v následujících technických zprávách.



Obrázek 28: Prototypové řešení manipulátoru ve variantě 2 navržené firmou ATEGA, s.r.o.

Reference

- [1] The MathWorks, Matlab. <http://www.mathworks.com/>.
- [2] L. Sciavicco, B. S.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, druhé vydání, 2000, ISBN 978-1-85233-221-1.
- [3] M. Schlegel, M. v., M. Goubaj: Úvod do mechatroniky, robotiky a systémů řízení pohybu. Skriptum pro studenty doktorských programů v oboru automatické řízení, Katedra kybernetiky, FAV, ZČU v Plzni, 2012.
- [4] Švejda, M.: Kinematická a dynamická analýza robotických architektur pro potřeby moderních ultrazvukových kontrol svarových spojů komplexních potrubních systémů jaderných elektráren. Technická zpráva, katedra kybernetiky, FAV, ZČU Plzeň, 2011.
- [5] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Práce ke státní doktorské zkoušce, Katedra kybernetiky, FAV, ZČU v Plzni, 2011.
- [6] W. Khalil, E. D.: *Modeling, Identification and Control of Robots*. Butterworth-Heinemann, 2004, ISBN 190399666X.

Seznam matematických symbolů a značení

$F_i = \mathbf{O}_i - \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i \mathbf{z}_i$	souřadný systém s počátkem v bodě \mathbf{O}_i a souřadnicovými osami $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i$
$\mathbf{O}_i^j, \mathbf{v}_i^j$	bod \mathbf{O}_i , vektor \mathbf{v}_i jejichž souřadnice jsou vyjádřeny v s.s. F_j
\mathbf{P}, \mathbf{R} kloub	základní 1 DoF prizmatický a 1 DoF rotační kloub
\mathbf{R}_i^j	matice rotace mezi s.s. F_i a F_j
$\text{Trans}(\mathbf{z}, d_i)$	homogenní transformační matice elementární transformace translace podél osy \mathbf{z} o vzdálenost d_i
$\text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i)$	homogenní transformační matice elementární transformace rotace okolo osy \mathbf{z} o úhel θ_i
$\mathbf{T}_6^0[i : j, l : m]$	submatice/subvektor z matice \mathbf{T}_6^0 obsahující její i -tý až j -tý řádek a l -tý až m -tý sloupec
s_i, c_i	zkratka pro výraz $\sin(\theta_i), \cos(\theta_i)$
$\dot{\mathbf{O}}_i^j, \ddot{\mathbf{O}}_i^j$	translační rychlost (zrychlení) počátku s.s. F_i vzhledem k s.s. F_j (vyjádřená v s.s. F_j)
$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^j, \ddot{\boldsymbol{\omega}}_i^j$	úhlová rychlost (zrychlení) s.s. F_i vzhledem k s.s. F_j (vyjádřená v s.s. F_j)