Technická zpráva
Katedra kybernetiky, Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

Přímá a inverzní kinematika manipulátoru pro NDT (implementační poznámky) (varianta 2: RRPR manipulátor)

22. 2. 2013

Martin Švejda
msvejda@kky.zcu.cz

Obsah

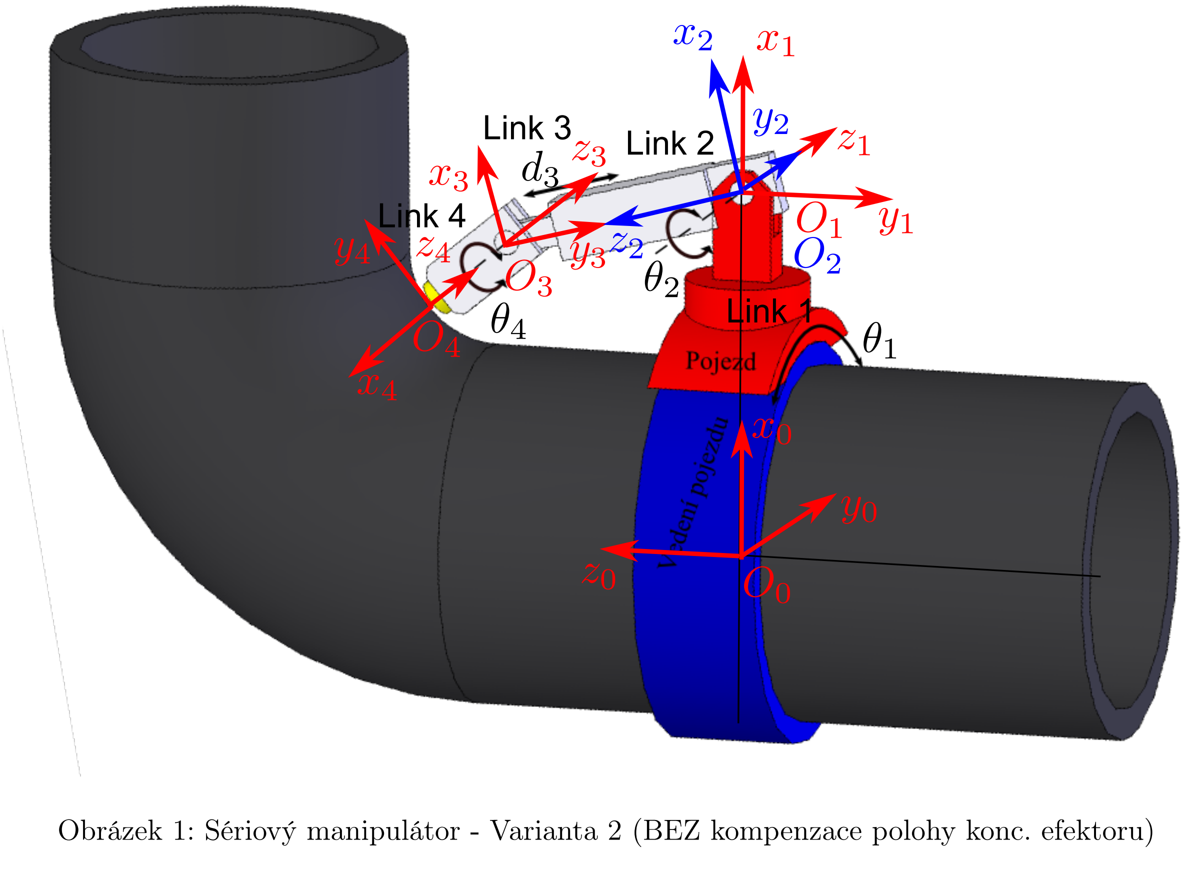
1 Popis manipulátoru

Sériový manipulátor v druhé variantě je tvořen třemi rotačními aktuátory a jedním aktuátorem prizmatickým (manipulátor typu **RRPR**). První kloub manipulátoru opět reprezentuje pojezd po potrubí kruhového průřezu. Koncový efektor manipulátoru opět umožňuje posunutí UZ sondy libovolně v prostoru (3 translační DoF) a její orientaci vzhledem k svislé ose pojezdu (1 rotační DoF). Obrázek 1 znázorňuje schématické uspořádání manipulátoru včetně zavedených souřadných systémů dle D-H úmluvy.

D-H parametry manipulátoru pro vzájemnou polohu zavedených s.s. na Obrázku 1 lze stanovit následovně:

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	θ_1	a_1	$-\frac{\pi}{2}$
2	0	θ_2	0	$\frac{\pi}{2}$
3	d_3	0	0	$-\frac{\pi}{2}$
4	0	θ_4	a_4	0

Tabulka 1: D-H parametry manipulátoru - Varianta 2



Obrázek 1: Sériový manipulátor - Varianta 2 (BEZ kompenzace polohy konc. efektoru)

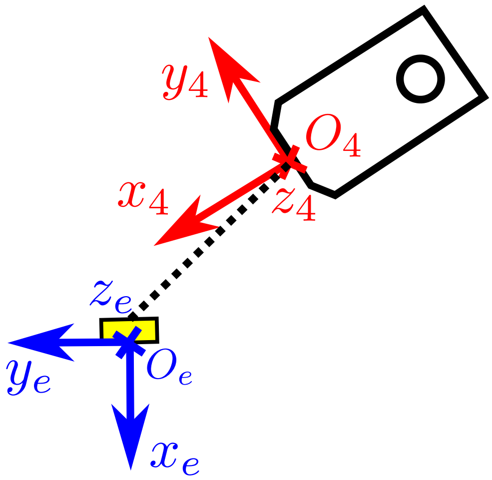
Kompenzace polohy koncového efektoru:

Vzhledem k tomu, že se předpokládá umístění UZ sondy v nějaké definované poloze, která nemusí být identická s umístěním posledního s.s. manipulátoru F_4, zavádíme tzv. kompenzaci polohy koncového efektoru T_e^4. Jedná se o transformaci z polohy s.s. F_4 (posledního ramena manipulátoru) na s.s. F_e (s.s. koncového efektoru = s.s. UZ sondy), viz Obrázek 2.

Transformační matice $\boldsymbol{T}_e^4$:

$$\boldsymbol{T}_e^4 = \left[\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{R}_e^4 & & \boldsymbol{O}_e^4 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \text{ kde } \boldsymbol{R}_e^4 = \begin{bmatrix} \cos(\phi_k) & -\sin(\phi_k) & 0 \\ \sin(\phi_k) & \cos(\phi_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{O}_e^4 = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \tag{1}$$

kde x_k, y_k, z_k definují posunutí s.s. konc. efektoru F_e vzhledem k s.s. posledního ramene manipulátoru F_4 a ϕ je úhel natočení s.s. F_e vzhledem k s.s. F_4 okolo osy $\boldsymbol{z}_4$.



Obrázek 2: Kompenzace polohy konc. efektoru

Polohy kloubů manipulátoru jsou určeny kloubovými souřadnicemi $\boldsymbol{Q}$ jako:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & d_3 & \theta_4 \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

Návrhové parametry manipulátoru $\boldsymbol{\xi}$ představují délky jednotlivých ramen a parametry kompenzace polohy koncového efektoru:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & x_k & y_k & z_k & \phi_k \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

kde $a_1 = \|\boldsymbol{O}_0\boldsymbol{O}_1\|$, $a_4 = \|\boldsymbol{O}_3\boldsymbol{O}_4\|$ a x_k, y_k, z_k a ϕ_k jsou parametry kompenzace polohy konc. efektoru (umístění NDT sondy), viz dále.

Poloha koncového efektoru lze popsat zobecněnými souřadnicemi $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & \phi \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

kde x, y, z jsou souřadnice bodu $\boldsymbol{O}_e$ vzhledem k s.s. F_0 a ϕ je vzájemné natočení s.s. F_e a F_1 okolo osy $\boldsymbol{z}_1$, tedy matice rotace $\boldsymbol{R}_e^1 = \mathrm{rot}(\boldsymbol{z}, \phi)$.

2 Přímá (PKÚ) a inverzní (IKÚ) kinematická úloha

2.1 PKÚ: $\{\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4\} \rightarrow \{X, Y, Z, \phi\}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X & Y & Z & \phi \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

$$X = ((-y_k \cos(\theta_4) + (-x_k - a_4)\sin(\theta_4) + d_3)\sin(\theta_2) + \\ + ((x_k + a_4)\cos(\theta_4) - \sin(\theta_4)\, y_k)\cos(\theta_2) + a_1)\cos(\theta_1) - \sin(\theta_1)\, z_k$$

$$Y = ((-y_k \cos(\theta_4) + (-x_k - a_4)\sin(\theta_4) + d_3)\sin(\theta_2) + \\ + ((x_k + a_4)\cos(\theta_4) - \sin(\theta_4)\, y_k)\cos(\theta_2) + a_1)\sin(\theta_1) + \cos(\theta_1)\, z_k$$

$$Z = (-y_k \cos(\theta_4) + (-x_k - a_4)\sin(\theta_4) + d_3)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_2)\,((x_k + a_4)\cos(\theta_4) - \sin(\theta_4)\, y_k)$$

$$\phi = \theta_2 + \theta_4 + \phi_k$$

2.2 IKÚ:

Kloubová souřadnice θ_1:

$$\theta_1 = \mathrm{atan2}(Y\left(\pm\sqrt{X^2 + Y^2 - z_k^2}\right) - X z_k, X\left(\pm\sqrt{X^2 + Y^2 - z_k^2}\right) + Y z_k) \tag{6}$$

$$w_x = ((-x_k - a_4)\cos(\phi) + \sin(\phi)\, y_k)\cos(\phi_k) + \\ + (-\cos(\phi)\, y_k - \sin(\phi)\,(x_k + a_4))\sin(\phi_k) + \sin(\theta_1)\, Y - a_1 + X\cos(\theta_1)) \tag{7}$$

$$w_y = (-\cos(\phi)\, y_k - \sin(\phi)\,(x_k + a_4))\cos(\phi_k) + ((x_k + a_4)\cos(\phi) - \\ - \sin(\phi)\, y_k)\sin(\phi_k) - Z \tag{8}$$

Kloubová souřadnice d_3:

$$d_3 = \pm\sqrt{w_x^2 + w_y^2} \tag{9}$$

Kloubová souřadnice θ_2:

$$\theta_2 = \mathrm{atan2}(\frac{w_x}{d_3}, \frac{-w_y}{d_3}) \tag{10}$$

Kloubová souřadnice θ_4:

$$\theta_4 = \phi - \theta_2 - \phi_k \tag{11}$$

3 Přímá okamžitá (PKÚ) a inverzní okamžitá (IKÚ) kinematická úloha

Kinematický jakobián je definován v závislosti na známé poloze kloubových souřadnic $\boldsymbol{Q}$ (potažmo poloze konc. efektoru $\boldsymbol{X}$, viz **IKÚ**) jako:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} j_{1,1} & j_{1,2} & j_{1,3} & j_{1,4} \\ j_{2,1} & j_{2,2} & j_{2,3} & j_{2,4} \\ j_{3,1} & j_{3,2} & j_{3,3} & j_{3,4} \\ j_{4,1} & j_{4,2} & j_{4,3} & j_{4,4} \end{bmatrix} \tag{12}$$

kde

$$j_{1,1} = -1/2\, a_4 \sin(-\theta_4 + \theta_1 - \theta_2) - 1/2\, d_3 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1/2\, a_4 \sin(\theta_4 + \theta_1 + \theta_2) + 1/2\, d_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + 1/2\, \big((2\, \sin(\theta_4)\, y_k - 2\, x_k \cos(\theta_4)) \cos(\theta_2) - 2\, a_1 + {} + 2\, y_k \sin(\theta_2) \cos(\theta_4) + 2\, x_k \sin(\theta_2) \sin(\theta_4)\big) \sin(\theta_1) - \cos(\theta_1)\, z_k$$

$$j_{1,2} = 1/2\, a_4 \sin(-\theta_4 + \theta_1 - \theta_2) + 1/2\, d_3 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1/2\, a_4 \sin(\theta_4 + \theta_1 + \theta_2) + 1/2\, d_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1) \big((y_k \cos(\theta_4) + x_k \sin(\theta_4)) \cos(\theta_2) + {} + \sin(\theta_2) (-\sin(\theta_4)\, y_k + x_k \cos(\theta_4))\big)$$

$$j_{1,3} = 1/2\, \sin(\theta_1 + \theta_2) - 1/2\, \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$j_{1,4} = 1/2\, a_4 \sin(-\theta_4 + \theta_1 - \theta_2) - 1/2\, a_4 \sin(\theta_4 + \theta_1 + \theta_2) + \big((-x_k \sin(\theta_4) - y_k \cos(\theta_4)) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) (\sin(\theta_4)\, y_k - x_k \cos(\theta_4))\big) \cos(\theta_1)$$

$$j_{2,1} = 1/2\, a_4 \cos(-\theta_4 + \theta_1 - \theta_2) - 1/2\, d_3 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 1/2\, a_4 \cos(\theta_4 + \theta_1 + \theta_2) + 1/2\, d_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + 1/2\, \big((2\, x_k \cos(\theta_4) - 2\, \sin(\theta_4)\, y_k) \cos(\theta_2) + 2\, a_1 - {} - 2\, y_k \sin(\theta_2) \cos(\theta_4) - 2\, x_k \sin(\theta_2) \sin(\theta_4)\big) \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1)\, z_k$$

$$j_{2,2} = -1/2\, a_4 \cos(-\theta_4 + \theta_1 - \theta_2) + 1/2\, d_3 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 1/2\, a_4 \cos(\theta_4 + \theta_1 + \theta_2) + 1/2\, d_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \big((-x_k \sin(\theta_4) - y_k \cos(\theta_4)) \cos(\theta_2) + {} + \sin(\theta_2) (\sin(\theta_4)\, y_k - x_k \cos(\theta_4))\big) \sin(\theta_1)$$

$$j_{2,3} = 1/2\, \cos(\theta_1 - \theta_2) - 1/2\, \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$j_{2,4} = -1/2\, a_4 \cos(-\theta_4 + \theta_1 - \theta_2) + 1/2\, a_4 \cos(\theta_4 + \theta_1 + \theta_2) + \big((-x_k \sin(\theta_4) - y_k \cos(\theta_4)) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) (\sin(\theta_4)\, y_k - x_k \cos(\theta_4))\big) \sin(\theta_1)$$

$$j_{3,1} = 0$$

$$j_{3,2} = -a_4 \cos(\theta_2 + \theta_4) + (-d_3 + y_k \cos(\theta_4) + x_k \sin(\theta_4)) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) (\sin(\theta_4) y_k - x_k \cos(\theta_4))$$

$$j_{3,3} = \cos(\theta_2)$$

$$j_{3,4} = -a_4 \cos(\theta_2 + \theta_4) + y_k \sin(\theta_2) \cos(\theta_4) + y_k \cos(\theta_2) \sin(\theta_4) - x_k \cos(\theta_2) \cos(\theta_4) + x_k \sin(\theta_2) \sin(\theta_4)$$

$$j_{4,1} = 0$$

$$j_{4,2} = 1$$

$$j_{4,3} = 0$$

$$j_{4,4} = 1$$

Časová derivace kinematického jakobiánu lze vyjádřit následovně, v závislosti na poloze $\boldsymbol{Q}$ a rychlosti $\dot{\boldsymbol{Q}}$ kloubových souřadnic:

$$\dot{\boldsymbol{J}} = \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) = \begin{bmatrix} \dot{j}_{1,1} & \dot{j}_{1,2} & \dot{j}_{1,3} & \dot{j}_{1,4} \\ \dot{j}_{2,1} & \dot{j}_{2,2} & \dot{j}_{2,3} & \dot{j}_{2,4} \\ \dot{j}_{3,1} & \dot{j}_{3,2} & \dot{j}_{3,3} & \dot{j}_{3,4} \\ \dot{j}_{4,1} & \dot{j}_{4,2} & \dot{j}_{4,3} & \dot{j}_{4,4} \end{bmatrix} \tag{13}$$

kde časové derivace jednotlivých prvků kinematického jakobiánu zde nejsou vypsány. V příloze dokumentu jsou zpracovány v zápisu Matlabu.

3.1 POKÚ:

Pro rychlosti:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Pro zrychlení:

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{Q}} + \dot{\boldsymbol{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{d}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \dot{\boldsymbol{J}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \tag{15}$$

3.2 IOKÚ:

Pro rychlosti:

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{J}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Pro zrychlení:

$$\ddot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{J}^{-1} \cdot \left(\ddot{\boldsymbol{X}} - \dot{\boldsymbol{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}} \right) \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{d}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} - \dot{\boldsymbol{J}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \right) \tag{17}$$

4 Singulární polohy, pracovní prostor manipulátoru

Manipulátor se může pro některé polohy koncového efektoru nacházet v tzv. singulárních polohách. V těchto polohách dochází ke ztrátě hodnosti matice kinematického jakobiánu $\boldsymbol{J}$:

$$\mathrm{Rank}(\boldsymbol{J}) < \min(m, n) \quad \text{nebo ekvivalentně} \quad \det(\boldsymbol{J}) = 0 \tag{18}$$

kde m resp. n je počet řádků resp. sloupců matice $\boldsymbol{J}$.

Tzn., existují nenulové rychlosti kloubových souřadnic manipulátoru $\dot{\boldsymbol{Q}}$, při kterých je výsledná rychlost koncového efektoru nulová $\dot{\boldsymbol{X}}$. Jinými slovy, manipulátor v těchto polohách ztrácí (lokálně) DoF koncového efektoru, resp. pro manipulátor v singulární poloze existují směry v prostoru zobecněných souřadnic, ve kterých se koncový efektor nemůže pohybovat s uvažováním konečných rychlostí pohybu aktuátorů. V blízkosti singulárních poloh můžou tak nastávat situace, kdy malé rychlosti zobecněných souřadnic vyvolají nerealizovatelně vysoké požadavky na rychlosti aktuátorů.

Z podmínky $\det(\boldsymbol{J}) = 0$ lze dva případy pro robot nacházející se v singulární poloze:

Singularita 1:

$$d_3 = 0$$

Lineární aktuátor je vysunut na nulovou délku, tzn. rotační osy kloubů *Joint* 2 a *joint* 4 jsou ztotožněny.

Vzhledem k faktu, že plánování pohybu manipulátoru je prováděno při koordinovaném pohybu výhradně v prostoru zobecněných souřadnic, je rozumné zobrazit singularitu nikoliv v prostoru kloubových, ale v prostoru zobecněných souřadnic. Dosazením podmínky pro singulární polohu $d_3 = 0$ a podmínky závislosti kloubových a zobecněných souřadnic (viz. PKÚ resp.IKÚ) $\theta_2 + \theta_4 = \phi - \phi_k$, dostáváme parametrický předpis pro polohu koncového efektoru manipulátoru $\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ při známé orientaci ϕ, který definuje podmnožinu pracovního prostoru manipulátoru, pro kterou je manipulátoru v singularitě 1.

$$\boldsymbol{X}_{\text{sing1}} = \begin{bmatrix} R \cdot \cos(\alpha) \\ R \cdot \sin(\alpha) \\ -x_k \sin(\phi - \phi_k) - y_k \cos(\phi - \phi_k) - a_4 \sin(\phi - \phi_k) \end{bmatrix} \tag{19}$$

kde $\alpha \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$ a

$$\begin{aligned} R = {} & (x_k + a_4 + y_k)(x_k + a_4 - y_k)(\cos(\phi - \phi_k))^2 + \\ & + 2\,(x_k + a_4)(a_1 - y_k \sin(\phi - \phi_k)) \cos(\phi - \phi_k) + {z_k}^2 + {a_1}^2 + {y_k}^2 - 2\, y_k \sin(\phi - \phi_k)\, a_1 \end{aligned} \tag{20}$$

Podmnožina poloh koncového efektoru má tedy tvar kružnice, jejíž parametry jsou výhradně určeny návrhovými parametry manipulátoru $\boldsymbol{\xi}$ a aktuální požadovanou orientací koncového efektoru ϕ.

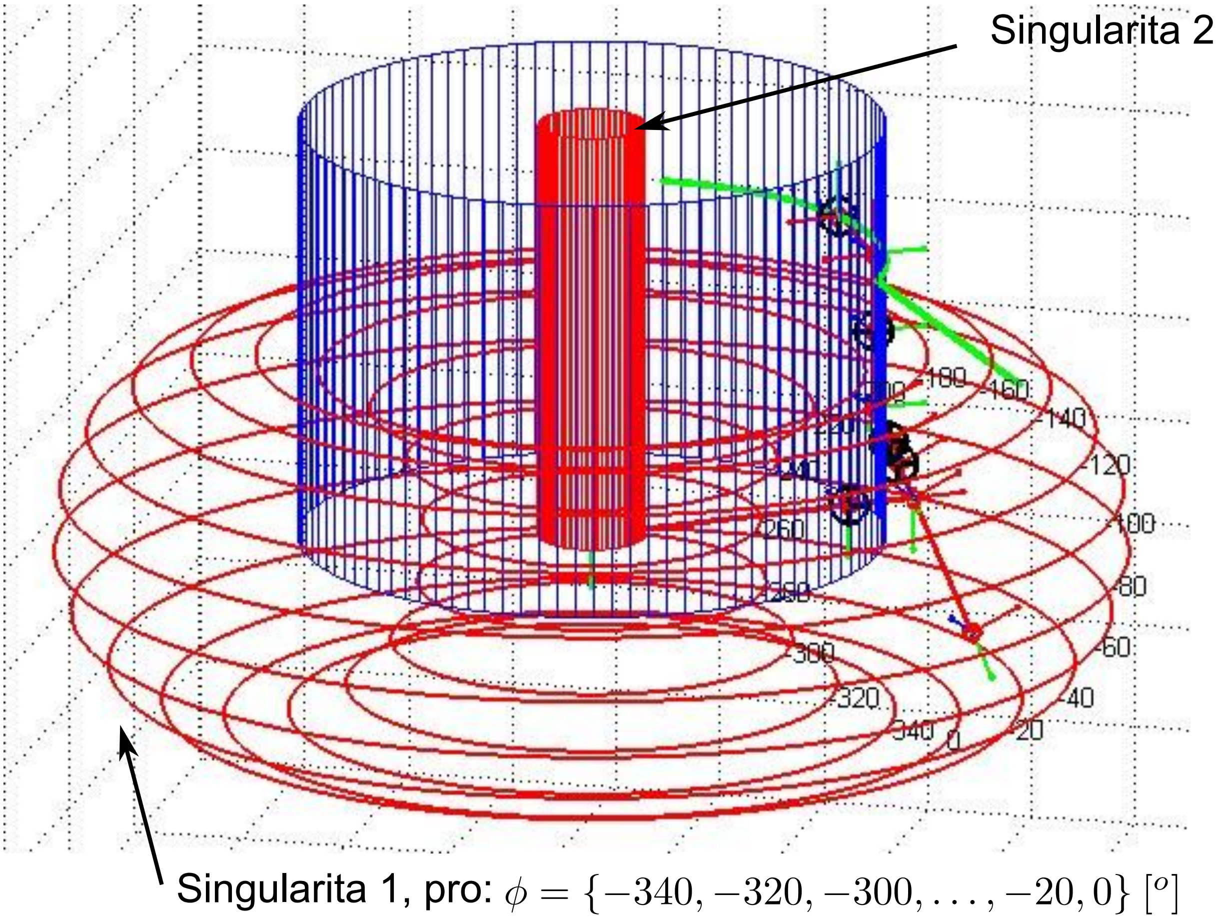
Singularita 2:

$$d_3 = \frac{(y_k \cos(\theta_4) + \sin(\theta_4)(x_k + a_4)) \sin(\theta_2) + ((-x_k - a_4) \cos(\theta_4) + y_k \sin(\theta_4)) \cos(\theta_2) - a_1}{\sin(\theta_2)}$$

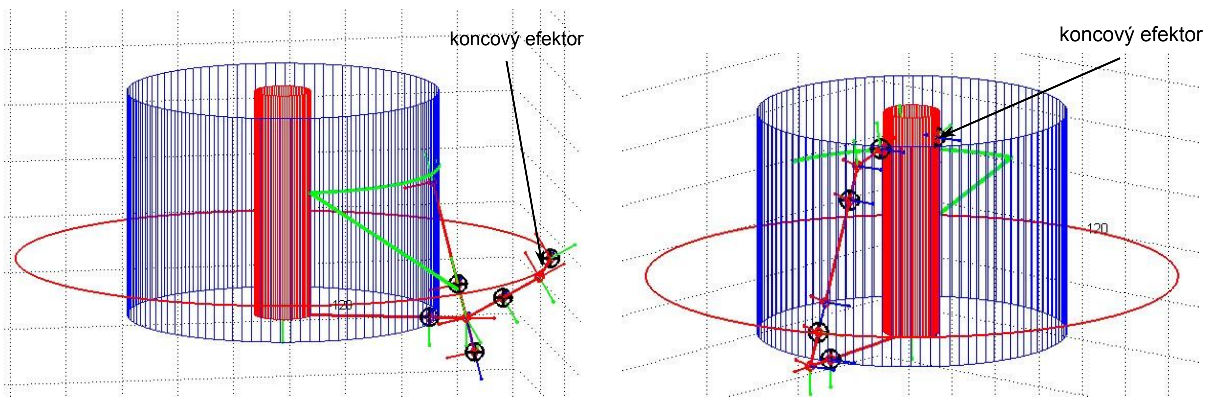
V prostoru zobecněných souřadnic singulární polohy odpovídají válcové ploše, parametrizované pouze návrhovými parametry manipulátoru $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{X}_{\text{sing2}} = \begin{bmatrix} z_k \cdot \cos(\alpha) \\ z_k \cdot \sin(\alpha) \\ \text{„libovolné“} \end{bmatrix} \tag{21}$$

kde $\alpha \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$, $\phi =$ „libovolné“



Obrázek 3: Singulární polohy manipulátoru vyjádřené jako podmnožiny prostoru zobecněných souřadnic (polohy koncového efektoru)



(a) **Singularita 1** pro $\phi = -120^o$ a kinematické parametry $\boldsymbol{\xi} = \left[0.65,\ 0.3,\ 0.05,\ -0.03,\ 0.1,\ -\frac{\pi}{2}\right]^T \Rightarrow d_3 = 0$

(b) **Singularita 2** pro kinematické parametry $\boldsymbol{\xi} = \left[0.65,\ 0.3,\ 0.05,\ -0.03,\ 0.1,\ -\frac{\pi}{2}\right]^T$

Obrázek 4: Koncový efektor manipulátoru v singulárních polohách

Reference

[1] MapleSoft, Maple. http://www.maplesoft.com/.

[2] The MathWorks, Matlab. http://www.mathworks.com/.

[3] Bláha, L.: Groebnerova báze a teorie řízení. Práce ke státní doktorské zkoušce, Katedra kybernetiky, FAV, ZČU v Plzni, 2011.

[4] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Práce ke státní doktorské zkoušce, Katedra kybernetiky, FAV, ZČU v Plzni, 2011.