

# TAČR Centrum kompetence CIDAM

Kinematical, kinetostatical and dynamical analysis of 7DoF  
manipulator, parametric optimization of mechanical  
construction

Výzkumná zpráva WP5-DV027

Martin Švejda

23. prosince 2015

**T A**  
**Č R**



**CIDAM**

*Center for Intelligent Drives  
and Advanced Machine Control*

## Abstrakt

Výzkumná zpráva se zabývá kinematickou a dynamickou analýzou nové architektury manipulátoru pro polohování ostříkovací trysky v komorách průmyslových mycích linek. Manipulátor je uvažován jako sériový redundantní manipulátor s 5 stupni volnosti (DoF) koncového efektoru (polohování v prostoru a orientování směru ostříkovací trysky). Pohony manipulátoru tvoří 1 prizmatický a 5 rotačních aktuátorů (celkem 6 DoF), 7. DoF je možnost dovybavení manipulátoru vhodným uchopovačem ostříkovací trysky. ve zprávě je diskutována možnost a postup optimalizace kinematických parametrů manipulátoru (délek ramen) a samotného pohybu s ohledem na redundanci.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Kinematika manipulátoru</b>	<b>5</b>
2.1	Přímý geometrický model . . . . .	8
2.2	Inverzní geometrický model . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Dynamika manipulátoru</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Optimalizace parametrů</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Poděkování</b>	<b>17</b>

# 1 Úvod

V uvedené zprávě je analyzován manipulátor určený k umístění do mycí komory průmyslové mycí linky, kde slouží k polohování ostříkovací trysky. Polohování ostříkovací trysky hraje zásadní roli při mytí, odlakování, odmašťování osušování a dalších přidružených procesů technologických komponent komplexních geometrií (v praxi se jedná především o průmyslové díly s různými vývrty, otvory a dalšími prvky). Složitá geometrie dílů velmi výrazně komplikuje použití standardních principů průmyslových myček, jejichž mycí komory bývají pro složité díly vybaveny celou řadou staticky umístěných směřovaných ostříkovacích trysek. Taková zařízení bývají dodávána zakázkově přímo pro použití s konkrétním technologickým dílem. Jejich rekonfigurace za účelem mytí jiného dílu většinou znamená převoz myčky a její kompletní rekonstrukci u dodavatele. V případě, že se jedná o technologické díly v málopočetných sériích, uživatel je nucen neustále rekonstruovat průmyslové mycí linky, což veden na vysokou časovou a ekonomickou náročnost.

Uvedené problémy jsou hlavním důvodem k hledání vhodného řešení. Po konzultaci se specialisty na průmyslové mycí linky vznikla idea, že takové problémy by mohly být s výhodou řešeny novým typem manipulátoru, který bude umístěn přímo do mycí komory. Na manipulátor se předpokládají následující požadavky:

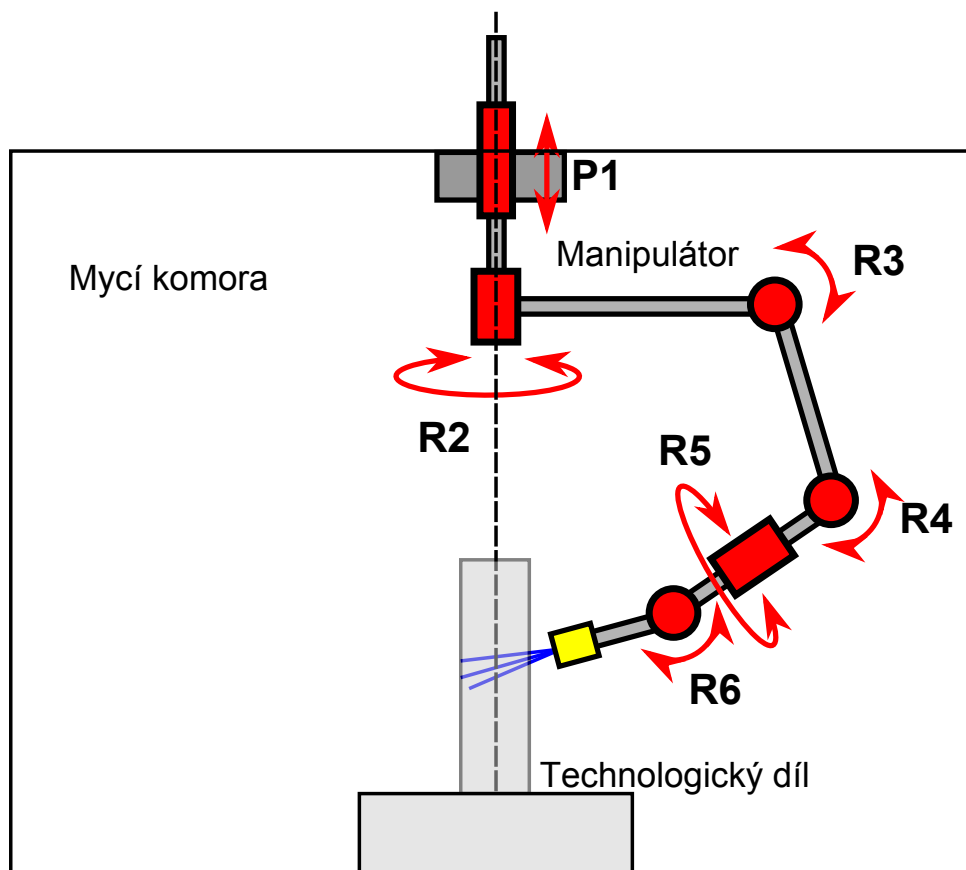
- Vodotěsnost proti stříkající vodě, teplotní odolnost do 80°C, odolnost vůči chemikáliím v mycí komoře
- Kompaktnost řešení s ohledem na rozměry
- Možnost orientovat ostříkovací trysku v daném směru s umístěním do požadovaného bodu v pracovním prostoru

Právě s ohledem na kompaktnost řešení a nezbytnost řídit 5 DoF koncového efektoru (ostříkovací trysky) byla vybrána varianta manipulátoru s redundantní architekturou. Poznamenejme, že navržený manipulátor se liší od standardních 6 DoF průmyslových manipulátorů (např. manipulátory Kuka, ABB, viz Obrázek 1) především konstrukcí prvních ramen, kde první rameno manipulátoru je připojeno k základně prostřednictvím translačního **P1** a rotačního **R2** kloubu. Následují dva klouby **R3**, **R4** ve standardním uspořádání tvořící zbytek 4 DoF základu manipulátoru. Následně je připojeno neúplné sférické zápěstí, tzn. dva klouby **R5**, **R6** s osami rotace, které se protínají. Taková uvažovaná architektura manipulátoru vykazuje následující vlastnosti:

- Vzhledem ke geometrii a použití ostříkovací trysky je postačující, aby manipulátor vykazoval 5 DoF koncového efektoru ve složení 3 DoF translační a 2 DoF rotační (rotace kolem osy  $z$  a  $x$ ) koncového efektoru (oproti standardním řešením se neuvažuje poslední rotace kolem podélné osy koncového efektoru). Schématické znázornění manipulátoru uvnitř mycí komory je na Obrázku 2.
- Manipulátor má celkem 6 aktivních nezávislých kloubů (**PRRR(RR)**) pro 5 DoF koncového efektoru  $\Rightarrow$  redundantní manipulátor.
- Redundanci manipulátoru lze využít pro optimalizaci pohybu uvnitř mycí komory (např. první lineární pohon je řízen tak, aby manipulátor zaujímal co nejmenší fyzický pracovní prostor).
- Konstrukce prvního ramena manipulátoru připojeného na klouby **P1**, **R2** umožňuje přirozený pohyb manipulátoru uvnitř oplachovací komory okolo technologického dílu.



Obrázek 1: KUKA, ABB a FANUC 6 DoF manipulátor standardní architektury

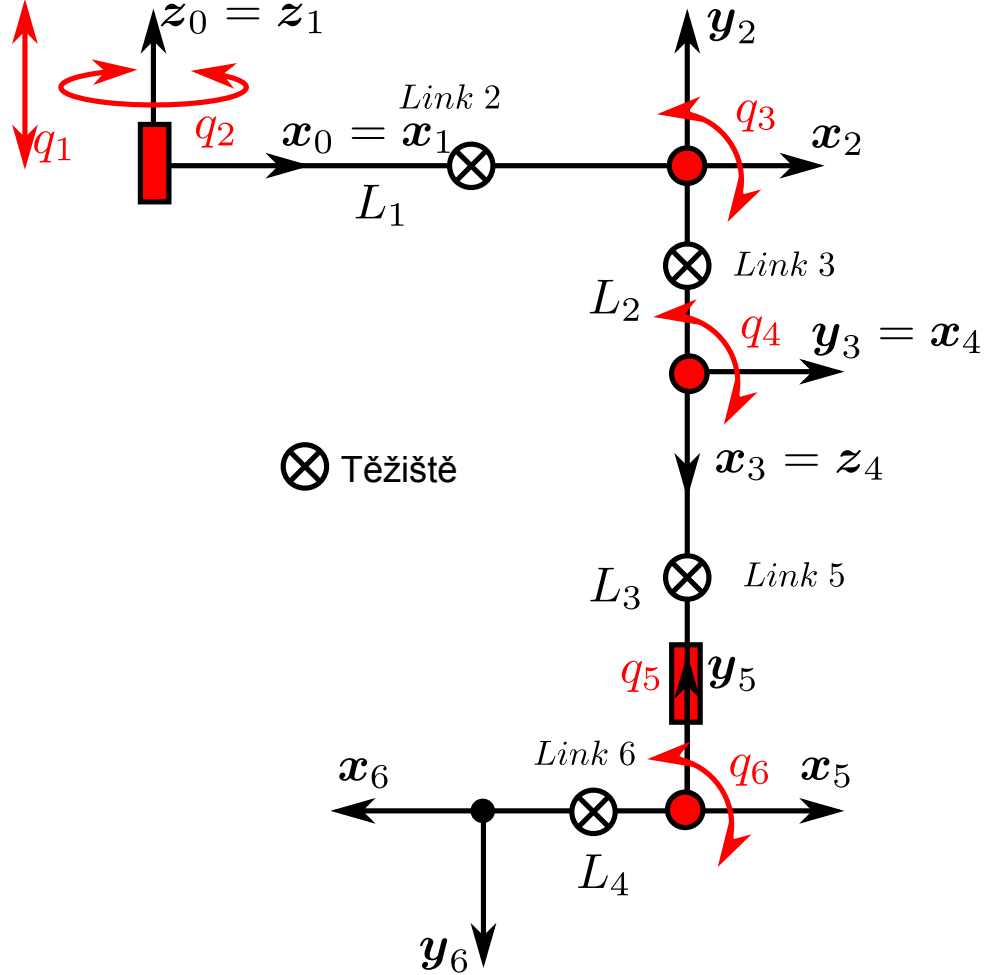


Obrázek 2: Uvažovaná architektura manipulátoru uvnitř mycí komory

## 2 Kinematika manipulátoru

Zabývejme se nejprve kinematickým modelem uvažovaného manipulátoru. Kinematický popis manipulátoru je dán pomocí Denavit-Hartenbergovy úmluvy [1], která přiřazuje každému ramenu manipulátoru souřadný systém (s.s.) dle dané konvence. Pohyb manipulátoru je poté reprezen-

tován skládáním transformací s.s. jednotlivých ramen. Jednotlivé transformace mezi příslušnými s.s. jsou popsány v kompaktní podobě formou homogenních transformačních matic, kde  $\mathbf{T}_i^{i-1}(q_i)$  je homogenní transformační matice určující polohu a orientaci s.s.  $F_i$  vyjádřenou vzhledem k s.s.  $F_{i-1}$  závislá na poloze  $q_i$  kloubu *Joint i*, podrobnosti lze nalézt dále např. v [4], [2], [5]. Přiřazení s.s. je znázorněno na Obrázku .



Obrázek 3: Přiřazení s.s. dle Denavit-Hartenbergovy úmluvy pro polohy aktivních kloubů  $q_{\{1,2,5\}} = 0$ ,  $q_3 = \frac{-\pi}{2}$ ,  $q_4 = \frac{\pi}{2}$ ,  $q_6 = \pi$ . Poznamenejme, že některá ramena (*Link 1,4*) jsou nulových délek, ale formálně je kinematický model obsahuje.

Denavit-Hartenbergovy (D-H) parametry parametrizující vzájemné transformace (hodnoty prvků matic  $\mathbf{T}_i^{i-1}$ ) jsou dány následovně:

$i$	$d_i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$q_1$	0	0	0
2	0	$q_2$	$L_1$	$\frac{\pi}{2}$
3	0	$q_3$	$L_2$	0
4	0	$q_4$	0	$\frac{\pi}{2}$
5	$L_3$	$q_5$	0	$-\frac{\pi}{2}$
6	0	$q_6$	$L_4$	0

Tabulka 1: D-H parametry

Homogenní transformace  $\mathbf{T}_i^{i-1}(q_i)$  pro  $i = 1 \dots 6$  mezi s.s. jsou dány z D-H parametrů, viz

Tabulka 1 dle obecného předpisu:

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{q_i} & -s_{q_i}c_{\alpha_i} & s_{q_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{q_i} \\ s_{q_i} & c_{q_i}c_{\alpha_i} & -c_{q_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{q_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

kde  $s_\star = \sin(\star)$ ,  $c_\star = \cos(\star)$ .

Definujme následující kinematické a dynamické vlastnosti modelu manipulátoru:

**Aktivní kloubové souřadnice manipulátoru:**

$$\mathbf{Q} = [ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 ]^T \quad (2)$$

**Zobecněné souřadnice manipulátoru:**

Zobecněnými souřadnicemi manipulátoru rozumíme souřadnice popisující polohu (pozici a orientaci) koncového efektoru. V případě uvažovaných 5 DoF jsou zobecněné souřadnice definovány jako:

$$\mathbf{X} = [ \mathbf{O}_6^0[1] \quad \mathbf{O}_6^0[2] \quad \mathbf{O}_6^0[3] \quad \gamma \quad \beta ]^T \quad (3)$$

kde  $\mathbf{O}_6^0$  je počátek s.s.  $F_6$  koncového efektoru manipulátoru<sup>1</sup>.  $\gamma$ ,  $\beta$  jsou Eulerovy úhly orientace s.s.  $F_6$  koncového efektoru ve smyslu postupné rotace s.s. okolo osy  $\mathbf{z}$  o úhel  $\gamma$  a okolo osy  $\mathbf{y}$  o úhel  $\beta$ . Vzhledem k faktu, že definujeme pouze dva nezávislé parametry orientace (poslední rotace, např. rotace okolo osy  $\mathbf{x}$  o úhel  $\alpha$  - tedy rotace kolem podélné osy koncového efektoru není uvažována) je zřejmé (z definice postupných rotací dle schématu  $ZYX$  o úhly  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ), že je určen pouze první sloupec (osa  $\mathbf{x}_6^0$ ) požadované orientace koncového efektoru dané jako matice rotace  $\mathbf{R}_6^{02}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_6^0(\gamma, \beta, \alpha) &= \mathbf{R}_z(\gamma) \cdot \mathbf{R}_y(\beta) \cdot \mathbf{R}_x(\alpha) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & -s_\gamma c_\alpha + c_\gamma s_\beta s_\alpha & s_\gamma s_\alpha + c_\gamma s_\beta c_\alpha \\ s_\gamma c_\beta & c_\gamma c_\alpha + s_\gamma s_\beta s_\alpha & -c_\gamma s_\alpha + s_\gamma s_\beta c_\alpha \\ -s_\beta & c_\beta s_\alpha & c_\beta c_\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_6^0(\gamma, \beta) = \mathbf{R}_6^0(\gamma, \beta, \alpha)[:, 1] = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta \\ s_\gamma c_\beta \\ -s_\beta \end{bmatrix} \quad (5)$$

**Návrhové kinematické parametry manipulátoru:**

$$\boldsymbol{\xi} = [ L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 ]^T \quad (6)$$

**Geometrické parametry manipulátoru:**

Dynamickými parametry manipulátoru rozumíme takové parametry, která ovlivňují dynamické chování manipulátoru, typicky jsou jimi hmotnosti, umístění těžiště a tensor setrvačnosti vzhledem k s.s. těžiště jednotlivých ramen. V uvažovaném modelovém případě manipulátoru uvažujeme, že jsou tyto parametry přímo závislé na parametrech kinematických  $\boldsymbol{\xi}$ , neboť, s ohledem na

<sup>1</sup>Značení  $\mathbf{O}[i : j, m : n]$  značí výběr prvků z vektoru/matice  $\mathbf{O}$  ve smyslu výběru  $i$ -tého až  $j$ -tého řádku a  $m$ -tého až  $n$ -tého sloupce. Zároveň horní index vektoru/matice určuje vztahný s.s., tedy s.s. ve kterém jsou příslušné prvky vektoru/matice vyjádřeny.

<sup>2</sup>Zkratky:  $s_\star = \sin(\star)$ ,  $c_\star = \cos(\star)$

optimalizaci těchto kinematických parametrů (délky ramen), viz Kapitola 4, se budou dynamické parametry měnit. Závislosti mezi dynamickými  $\boldsymbol{\mu}$  a kinematickými  $\boldsymbol{\xi}$  parametry jsou plně určeny zvolenou geometrií ramen případně dalšími materiálovými vlastnostmi. V uvažované případě manipulátoru uvažujme, že ramena jsou realizována jako plné tyče o poloměru  $r_1$ . Hustota materiálu všech ramen je dána hodnotou  $\rho$ . Vektor gravitační síly je neměnný ve tvaru  $[0 \ 0 \ -9.81]^T$  vzhledem k s.s.  $F_0$ . Dále uvažujme, že v těžišti posledního ramene (koncového efektoru) *Link 6* je umístěna přidaná hmotnost (břemeno) daná hmotným bodem o hmotnosti  $M$ . Hmotnosti pohonů zanedbáme (v případě potřeby je možné je aproximovat přidanou hmotností v dílčích kloubech a odpovídajícím posunem těžišť ramen). Uvažované dynamické parametry jsou tedy dána jako:

$$\boldsymbol{\mu} = [r_1 \ \rho \ M]^T \quad (7)$$

## 2.1 Přímý geometrický model

Přímý geometrický model **DGM** je dán zobrazením:  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{X}$ , tedy nelineární vektorovou funkcí polohy kloubových souřadnic  $\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ . Výpočet DGM je triviální a může být postaven na systému skládání transformací s.s. (ekvivalentně vyjádřené násobením homogenních transformačních matic). Vzhledem, že násobením homogenních transformačních matic dostáváme „plnou“ informaci o poloze (pozice  $\mathbf{O}_6^0$  a orientace  $\mathbf{R}_6^0$ ) koncového efektoru, musí být provedena restrikce této informace na požadované zobecněné souřadnice  $\mathbf{X}$ . V našem případě se jedná o restrikci orientace  $\mathbf{R}_6^0$  na příslušné hodnoty Eulerových úhlů  $\gamma, \alpha$ :

$$\mathbf{T}_6^0(\mathbf{Q}) = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & \mathbf{O}_6^0 \\ & \mathbf{R}_6^0 & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \prod_{i=1}^6 \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i) \quad (8)$$

Z vektoru osy  $\mathbf{x}_6^0 = \mathbf{R}_6^0[:, 1]$  lze inverzí vztahu (5) získat přímo hodnoty hledaných Eulerových úhlů:

$$\begin{aligned} \sin(\beta) &= -\mathbf{x}_6^0[3], & \cos(\beta) &= \pm \sqrt{\mathbf{x}_6^0[1:2]^T \cdot \mathbf{x}_6^0[1:2]} \Rightarrow \beta = \text{atan2}(\sin(\beta), \cos(\beta)) \\ \sin(\gamma) &= \frac{\mathbf{x}_6^0[2]}{\cos(\beta)}, & \cos(\gamma) &= \frac{\mathbf{x}_6^0[1]}{\cos(\beta)} \Rightarrow \gamma = \text{atan2}(\sin(\gamma), \cos(\gamma)) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_6^0 \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix} \quad (10)$$

Poznamenejme, že v případě  $\cos(\beta) = 0$ , tzn.  $\beta = \{0, \pi\}$  dochází k tzv. kinematické singularitě v reprezentaci pomocí Eulerových úhlů (úhly  $\gamma, \beta$  z vypočtené matice rotace  $\mathbf{R}_6^0$ ). Tento případ musí být dále algoritmicky ošetřen, podrobnější diskuze např. v [5, 6].

## 2.2 Inverzní geometrický model

V případě inverzního geometrického modelu **IGM** hledáme zobrazení:  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Q}$ , tedy nelineární vektorovou funkcí polohy kloubových souřadnic  $\mathbf{Q} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X})$ . Je zřejmé, že v případě redundantního manipulátoru (počet DoF koncového efektoru 5 je větší než počet nezávislých kloubů 6) existuje nekonečně mnoho řešení IGM. Tento fakt je dán tvarem nelineárních rovnic DGM kdy existuje 5 nezávislých rovnic (5 DoF) pro 6 neznámých kloubových souřadnic, viz rovnice (8-10). V takovém případě je možné optimalizovat pohyb redundantního manipulátoru tak, že je minimalizováno/maximalizováno nějaké sekundární kritérium optimality, podrobná studie je možná



nalézt např. v [9]. V obecném případě je tak možné vybrat libovolnou kloubovou souřadnici (v případě redundance vyšších řádů souřadnice) a pomocí této souřadnice parametrizovat řešení IGM. Vhodnou volbou parametrizující souřadnice podél požadovaného pohybu manipulátoru může být provedena zmíněná optimalizace. IGM tak přejde obecně na tvar:

$$\mathbf{Q}_{\text{orig}} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\text{par}}) \quad (11)$$

kde

$$\mathbf{Q}_{\text{par}} = q_1, \quad \mathbf{Q}_{\text{orig}} = [q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \quad (12)$$

Řešení IGM je parametrizováno polohou prvního lineárního pohonu manipulátoru a pro uvažovaný redundantní manipulátor je dáno následujícím postupem:

- Dána poloha koncového efektoru  $\mathbf{X}$ , parametrizující kloubová souřadnice  $\mathbf{Q}_{\text{par}} = q_1$  a hodnota parametrů  $\xi$ :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_6^0 \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix}$$

- Výpočet směru osy  $\mathbf{x}_6^0$  ze zadaných Eulerových úhlů  $\gamma, \beta$  je získán přímo použitím vztahu (5).
- Z přiřazení s.s. dle Obrázku 3 je zřejmé, že počátek  $\mathbf{O}_5^0$  s.s.  $F_5$  lze vypočítat přímo jako:

$$\mathbf{O}_5^0 = \mathbf{O}_6^0 - L_4 \cdot \mathbf{x}_6^0 = (\text{známá hodnota}) \quad (13)$$

- Ze symbolického vyjádření bodu  $\mathbf{O}_5^0$  dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_5^0 &= \prod_{i=1}^5 \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i)[1 : 3, 4] = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(q_2)(L_3 \cos(q_3) \sin(q_4) + L_3 \sin(q_3) \cos(q_4) + \cos(q_3)L_2 + L_1) \\ \sin(q_2)(L_3 \cos(q_3) \sin(q_4) + L_3 \sin(q_3) \cos(q_4) + \cos(q_3)L_2 + L_1) \\ L_3 \sin(q_3) \sin(q_4) - L_3 \cos(q_3) \cos(q_4) + \sin(q_3)L_2 + q_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Zřejmě tak pro kloubovou souřadnici  $q_2$  platí následující vztah, po porovnání s vyčíslenou hodnotou bodu  $\mathbf{O}_5^0$  z rovnice (13), existují dvě možné řešení:

$$q_2 = \text{atan2}(\mathbf{O}_5^0[2], \mathbf{O}_5^0[1]) + k \cdot \pi, \quad k = \{0, 1\} \quad (15)$$

- Ze znalosti souřadnic  $q_1, q_2$  lze vypočítat hodnotu souřadnic bodu  $\mathbf{O}_5^2$  (prostřednictvím (13)):

$$\mathbf{O}_5^2 = (\mathbf{T}_1^0(q_1) \cdot \mathbf{T}_2^1(q_2))^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{O}_5^0 \\ 1 \end{bmatrix} = (\text{známá hodnota}) \quad (16)$$

Porovnáním hodnoty (16) se symbolickým vyjádřením:

$$\mathbf{O}_5^2 = \prod_{i=2}^5 \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i)[1 : 3, 4] = \begin{bmatrix} L_3 \sin(q_3 + q_4) + \cos(q_3)L_2 \\ -L_3 \cos(q_3 + q_4) + \sin(q_3)L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
& L_3 \sin(q_3 + q_4) + \cos(q_3)L_2 = \\
& = L_3 \sin(q_3) \cos(q_4) + L_3 \cos(q_3) \sin(q_4) + \cos(q_3)L_2 = \mathbf{O}_5^2[1] \\
& \quad - L_3 \cos(q_3 + q_4) + \sin(q_3)L_2 = \\
& = L_3 \sin(q_3) \sin(q_4) - L_3 \cos(q_3) \cos(q_4) + \sin(q_3)L_2 = \mathbf{O}_5^2[2]
\end{aligned} \tag{18}$$

Souřadnice  $q_4$  lze vypočítat umocněním a sečtením levé/pravé strany rovnice (existují dvě řešení):

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}_5^2[1]^2 + \mathbf{O}_5^2[2]^2 &= L_3^2 + 2L_3L_2 \sin(q_4) + L_2^2 \\
\Rightarrow \sin(q_4) &= \frac{\mathbf{O}_5^2[1]^2 + \mathbf{O}_5^2[2]^2 - L_3^2 - L_2^2}{2L_2L_3} \\
\cos(q_4) &= \pm \sqrt{1 - \sin^2(q_4)} \Rightarrow q_4 = \text{atan2}(\sin(q_4), \cos(q_4))
\end{aligned} \tag{19}$$

Řešení soustavy lineárních rovnic (18) pro neznámé  $\sin(q_3)$ ,  $\cos(q_3)$  dostáváme:

$$\begin{aligned}
\sin(q_3) &= \frac{L_3 \sin(q_4)\mathbf{O}_5^2[2] + L_2\mathbf{O}_5^2[2] + \mathbf{O}_5^2[1]L_3 \cos(q_4)}{L_3^2 + 2L_3L_2 \sin(q_4) + L_2^2} \\
\cos(q_3) &= \frac{-\mathbf{O}_5^2[2]L_3 \cos(q_4) + \mathbf{O}_5^2[1]L_3 \sin(q_4) + \mathbf{O}_5^2[1]L_2}{L_3^2 + 2L_3L_2 \sin(q_4) + L_2^2} \\
\Rightarrow q_3 &= \text{atan2}(\sin(q_3), \cos(q_3))
\end{aligned} \tag{20}$$

- Z nyní již známého vektoru  $x$ -ové osy  $\mathbf{x}_6^4(q_5, q_6)$  s.s.  $F_6$  vyjádřenou v s.s.  $F_4$

$$\mathbf{x}_6^4 = \left( \prod_{i=1}^4 \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i)[1 : 3, 1 : 3] \right)^T \cdot \mathbf{x}_6^0 = (\text{známá hodnota}) \tag{21}$$

porovnáním hodnoty (21) se symbolickým vyjádřením:

$$\mathbf{x}_6^4(q_5, q_6) = \left( \prod_{i=1}^4 \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i)[1 : 3, 1 : 3] \right)[:, 1] = \begin{bmatrix} \cos(q_5) \cos(q_6) \\ \sin(q_5) \cos(q_6) \\ -\sin(q_6) \end{bmatrix} \tag{22}$$

dostáváme hodnotu kloubových souřadnic  $q_5$ ,  $q_6$  (dvě řešení) jako:

$$\begin{aligned}
\sin(q_6) &= -\mathbf{x}_6^4[3] \\
\cos(q_6) &= \pm \sqrt{\mathbf{x}_6^4[1]^2 + \mathbf{x}_6^4[2]^2} \Rightarrow q_6 = \text{atan2}(\sin(q_6), \cos(q_6))
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\sin(q_5) &= \frac{\mathbf{x}_6^4[2]}{\cos(q_6)} \\
\cos(q_5) &= \frac{\mathbf{x}_6^4[1]}{\cos(q_6)} \Rightarrow q_5 = \text{atan2}(\sin(q_5), \cos(q_5))
\end{aligned} \tag{24}$$

- Výsledný předpis (řešení IGM) pro kloubové souřadnice je tak dán rovnicemi (15, 20,19,24,23).

## Přímá a inverzní okamžitá kinematická úloha

Přímou **DIK** a inverzní **IIK** okamžitou kinematickou úlohou rozumíme vztah mezi rychlostmi a zrychleními zobecněných a kloubových souřadnic manipulátoru. V případě uvažovaného redundantního manipulátoru platí, viz [9]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{J}_{\text{orig}}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} + \mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} &= \mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot (\mathbf{Q}) \left( \dot{\mathbf{X}} - \mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \right)\end{aligned}\quad (25)$$

kde  $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} = [\dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_6]^T$  je hledaná rychlost kloubových souřadnic,  $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} = \dot{q}_1$  je známá rychlost souřadnic parametrizující řešení IIK,  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}_{\text{orig}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}\}$  je známá poloha kloubových souřadnic a  $\mathbf{J}_{\text{orig}}$  resp.  $\mathbf{J}_{\text{par}}$  je jakobián odpovídající příspěvkům do  $\dot{\mathbf{X}}$  od  $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}$  resp.  $\dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}$ , pro který platí:

$$\mathbf{J}_{\text{orig}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{J}(\mathbf{Q})[:, 2:6] \in \mathbb{R}^{5 \times 5} \quad (26)$$

$$\mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q}) = \mathbf{J}(\mathbf{Q})[:, 1] \in \mathbb{R}^{5 \times 1} \quad (27)$$

a  $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$  je jakobián manipulátoru pro který platí:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (28)$$

Časovou derivací (25) lze dále odvodit DIK, IIK pro redundantní manipulátory udávající závislosti zrychlení:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{X}} &= \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}_{\text{orig}}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} + \mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \\ \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} &= \mathbf{J}_{\text{orig}}^{-1} \cdot \left( \ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{J}_{\text{par}}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} \right)\end{aligned}\quad (29)$$

kde  $\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} = [\ddot{q}_2 \ \ddot{q}_3 \ \ddot{q}_4 \ \ddot{q}_5 \ \ddot{q}_6]^T$  je neznámé hledané zrychlení kloubových souřadnic,  $\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}} = \ddot{q}_1$  je známé zrychlení souřadnic parametrizující řešení IIK,  $\mathbf{Q}$  a  $\dot{\mathbf{Q}}$  je známá poloha a rychlost kloubových souřadnic.

### Výpočet jakobiánu manipulátoru:

**Kinematický** jakobián  $\mathbf{J}_k$  manipulátoru v obecném případě vztahuje rychlosti kloubových souřadnic  $\dot{\mathbf{Q}}$  a úplné zobecněné rychlosti  $\dot{\mathbf{X}}_{\text{full}}$  koncového efektoru:

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{full}} = \mathbf{J}_k(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \dot{\mathbf{X}}_{\text{full}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \boldsymbol{\omega}_6^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_k(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (30)$$

kde translační rychlost koncového efektoru je standardně vyjádřena jako rychlost  $\dot{\mathbf{O}}_6^0$  počátku s.s.  $F_6$  a rotační rychlost je vyjádřena vektorem úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}_6^0$  s.s.  $F_6$ .

V uvažovaném případě však potřebujeme znát zobecněné rychlosti  $\dot{\mathbf{X}}$  (s jinak vyjádřenou rotační rychlostí):

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^{5 \times 6} \quad (31)$$

Převod mezi rychlostmi (derivacemi) Eulerovských úhlů  $\mathbf{EA} = [\gamma \ \beta \ \alpha]^T$  s postupnou rotací ZYX o úhly  $\gamma, \beta, \alpha$  a vektorem úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}$  lze vyjádřit pomocí Eulerových kinematických rovnic, viz [5, 6]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{H}(\mathbf{EA}) \cdot \dot{\mathbf{EA}} \Rightarrow \dot{\mathbf{EA}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{EA}) \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &\Rightarrow \ddot{\mathbf{EA}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{EA})) \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{EA}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}\end{aligned}\quad (32)$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{EA}) &= \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma)\cos(\beta) \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma)\cos(\beta) \\ 1 & 0 & -\sin(\beta(t)) \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{EA}) &= \begin{bmatrix} \frac{\cos(\gamma)\sin(\beta)}{\cos(\beta)} & \frac{\sin(\gamma)\sin(\beta)}{\cos(\beta)} & 1 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\beta)} & \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\beta)} & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{H}^{-1}) &= \begin{bmatrix} -\frac{\sin(\gamma)\dot{\gamma}\sin(\beta)\cos(\beta)-\cos(\gamma)\dot{\beta}}{(\cos(\beta))^2} & \frac{\cos(\gamma)\dot{\gamma}\sin(\beta)\cos(\beta)+\sin(\gamma)\dot{\beta}}{(\cos(\beta))^2} & 0 \\ -\cos(\gamma)\dot{\gamma} & -\sin(\gamma)\dot{\gamma} & 0 \\ -\frac{\sin(\gamma)\dot{\gamma}\cos(\beta)-\cos(\gamma)\sin(\beta)\dot{\beta}}{(\cos(\beta))^2} & \frac{\cos(\gamma)\dot{\gamma}\cos(\beta)+\sin(\gamma)\sin(\beta)\dot{\beta}}{(\cos(\beta))^2} & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Jakobián manipulátoru  $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$  a jeho časová derivace, viz (31), lze tak získat kombinací rovnic (30, 32) následovně:

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}}_{=\dot{\mathbf{X}}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{EA})[1:2,:]\end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \boldsymbol{\omega}_6^0 \end{bmatrix}}_{=\dot{\mathbf{X}}_{\text{full}}=\mathbf{J}_k(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}} \\ \dot{\mathbf{X}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{EA})[1:2,:]\end{bmatrix}}_{=\mathbf{J}(\mathbf{Q})} \cdot \mathbf{J}_k(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}\end{aligned}\quad (33)$$

$$\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \frac{d}{dt}(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{EA})[1:2,:]) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_k(\mathbf{Q}) + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{EA})[1:2,:]\end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{J}}_k(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})\quad (34)$$

DIK a IIK pro rychlosti a zrychlení lze tak s pomocí jakobiánu a jeho časové derivace (33, 34) vypočítat dle (25, 29).

Poznamenejme, že kinematický jakobián  $\mathbf{J}_k(\mathbf{Q})$  a jeho časová derivace  $\dot{\mathbf{J}}_k(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$  lze získat algoritmy uvedenými v [5] přímo z prvků homogenních transformačních matic bez nutnosti explicitně derivovat polohové vztahy (obecné algoritmy pro výpočet kinematického jakobiánu a jeho časové derivace pro sériové kinematické řetězce popsané dle D-H úmluvy). Opět je třeba dát pozor na přítomnost singularity v reprezentaci (pro  $\cos(\beta) = 0$ ).

### 3 Dynamika manipulátoru

Předpokládejme nyní, že jsou známy všechny kinematické vztahy redundantního manipulátoru, viz Kapitola 2, a označme jednotlivé funkční vztahy řešící tyto úlohy za účelem zpřehlednění následovně:

Přímý geometrický model (DGM):.....  $\mathbf{X} = \mathbf{DGM}(\mathbf{Q}, \xi)$   
 Inverzní geometrický model (IGM):.....  $\mathbf{Q}_{\text{orig}} = \mathbf{IGM}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\text{par}}, \xi)$   
 Přímá ok. kin. úloha (DIK):.....  $\{\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}\} = \mathbf{DIK}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}, \xi)$   
 Inverzní ok. kin. úloha (IIK): .....  $\{\dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}, \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}}\} = \mathbf{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}, \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}, \xi)$

kde  $\xi$  jsou kinematické návrhové parametry manipulátoru (typicky délky, ramen, umístění kloubů, kompenzace polohy základny a konc. efektoru) a  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}_{\text{par}}, \mathbf{Q}_{\text{orig}}\}$

Dynamiku manipulátorů můžeme opět rozdělit na dvě základní úlohy (předpokládejme nejprve manipulátory sériové):

- **Inverzní dynamický model (IDM):**  $\{\mathbf{F}, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}\} \rightarrow \boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{IDM}(\mathbf{F}, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}, \xi, \boldsymbol{\mu}) \quad (35)$$

Tedy výpočet sil/silových momentů  $\boldsymbol{\tau}$  v kloubech (aktuátorech) manipulátoru ze známého pohybu (polohy  $\mathbf{Q}$ , rychlosti  $\dot{\mathbf{Q}}$  a zrychlení  $\ddot{\mathbf{Q}}$ ) manipulátoru a požadovaných sil/momentů působících na koncový efektor  $\mathbf{F}$ .

- **Přímý dynamický model (DDM):**  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}\} \rightarrow \ddot{\mathbf{Q}}$

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{DDM}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{F}, \mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \xi, \boldsymbol{\mu}) \quad (36)$$

Tedy výpočet zrychlení kloubových souřadnic manipulátoru na základně známé polohy  $\mathbf{Q}$  a rychlosti  $\dot{\mathbf{Q}}$  manipulátoru, sil/momentů působících na koncový efektor a sil/momentů působících v kloubech (aktuátorech) manipulátoru. Prostřednictvím DDM lze sestavit dynamické rovnice manipulátoru formulované soustavou nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.

kde  $\xi$  jsou kinematické návrhové parametry manipulátoru a  $\boldsymbol{\mu}$  jsou dynamické návrhové parametry manipulátoru (typicky umístění těžišť ramen, hmotnosti a moment setrvačnosti ramen, vektor gravitačního zrychlení).

Poznamenejme, že v případě sériových kinematických řetězců lze nalézt efektivní algoritmus výpočtu IDM založený na dopředném rekurzivním výpočtu rychlostí a zrychlení navazujících ramen směrem od základny ke koncovému efektoru a zpětného rekurzivního výpočtu distribuce sil/momentů působících na navazující ramena směrem od koncového efektoru k základně. Vhodnou substitucí vstupných proměnných  $(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}})$  do IDM lze poté odvodit hodnoty dynamických matic/vektorů  $\mathbf{B}(\mathbf{Q})$ ,  $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$  v obecném popisu dynamiky sériového kinematického řetězce ve tvaru:

$$\mathbf{B}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (37)$$

kde

$$\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{F}$$

kde  $\mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$  je matice vlivu zdánlivých sil (odstředivá, Coriolisova),  $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$  je matice vlivu gravitační síly a  $\mathbf{J}$  je kinematický jakobián sériového kin. řetězce.

Popsané algoritmy výpočtu IDM, DDM pro sériové kin. řetězce jsou popsány např. v [4] a podrobně odvozeny v [9].

## 4 Optimalizace parametrů

Optimalizace uvažovaného manipulátoru lze rozdělit na dva odlišné přístupy, a to:

- **Optimalizace kinematických návrhových parametrů manipulátoru**

V takovém případě hledáme takové kinematické návrhové parametry  $\xi$  manipulátoru pro zjednodušený dynamický model manipulátoru (v našem případě uvažujeme ramena manipulátoru jako hmotné plné tyče daných délek, průměrů a typu materiálu  $\Rightarrow$  dynamické parametry manipulátoru  $\mu$ ), které vedou na maximalizaci minimální hodnoty kritériální funkce podél pracovního prostoru manipulátoru. Z matematického hlediska se jedná o řešení optimalizační úlohy ve tvaru:

$$J^*(\mathbf{X}, \xi^*, \mu) = \max_{\xi \in \Xi} \left( \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} J(\mathbf{X}, \xi, \mu) \right) \quad (38)$$

$$\xi^* = \operatorname{argmax}_{\xi \in \Xi} \left( \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} J(\mathbf{X}, \xi, \mu) \right) \quad (39)$$

kde  $\Xi$  je přípustná množina kinematických návrhových parametrů manipulátoru a  $\mathbf{X}_{\text{opt}}$  je požadovaný pracovní prostor manipulátoru včetně definované množiny parametrizujících kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}_{\text{par}}$ .

Kritériální funkce  $J$  je volena jako převrácená hodnota součtu penalizační  $J_{\text{pen}}$  a účelové funkce  $J_{\text{obj}}$ , kde penalizační funkce zohledňuje daná omezení optimalizace ve smyslu:  $J_{\text{pen}} = 0$  všechna omezení splněna (např. existuje řešení IGM, úhly mezi rameny jsou v daných mezích, atd.),  $J_{\text{pen}} \rightarrow +\infty$  některé z omezení je porušeno. Hodnota funkce  $J_{\text{pen}}$  může nabývat spojitých hodnot v intervalu  $\langle 0, +\infty \rangle$  dle nastavených penalizačních konstant vážící jednotlivá omezení při jejich porušení. Účelová funkce  $J_{\text{obj}}$  nabývá hodnot  $\langle 1, \infty \rangle$ , kde  $J_{\text{obj}} = 1$  odpovídá nejlepšímu možnému stavu. V našem případě, analogicky jako v [8, 7], je účelová funkce volena jako maximální norma silových momentů v aktuátorech manipulátoru v bodě  $\mathbf{X}$  pracovního prostoru manipulátoru potřebný pro dané zrychlení z nulové rychlosti koncového efektoru  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$  a nulové rychlosti a zrychlení parametrizující kloubových souřadnice  $\mathbf{Q}_{\text{par}}$  do libovolného směru.

Metoda řešení uvedené optimalizační úlohy je podrobně zpracována v [9, 8, 7]. Problém je řešen diskretizací prostoru přípustných návrhových kinematických parametrů  $\Xi$  a pracovního prostoru  $\mathbf{X}_{\text{opt}}$  a použitím **Culling** algoritmu globálního prohledávání s prořezáváním. Následně je využito zpřesňující lokální optimalizace na principu **Nelder-Mead simplexového algoritmu**.

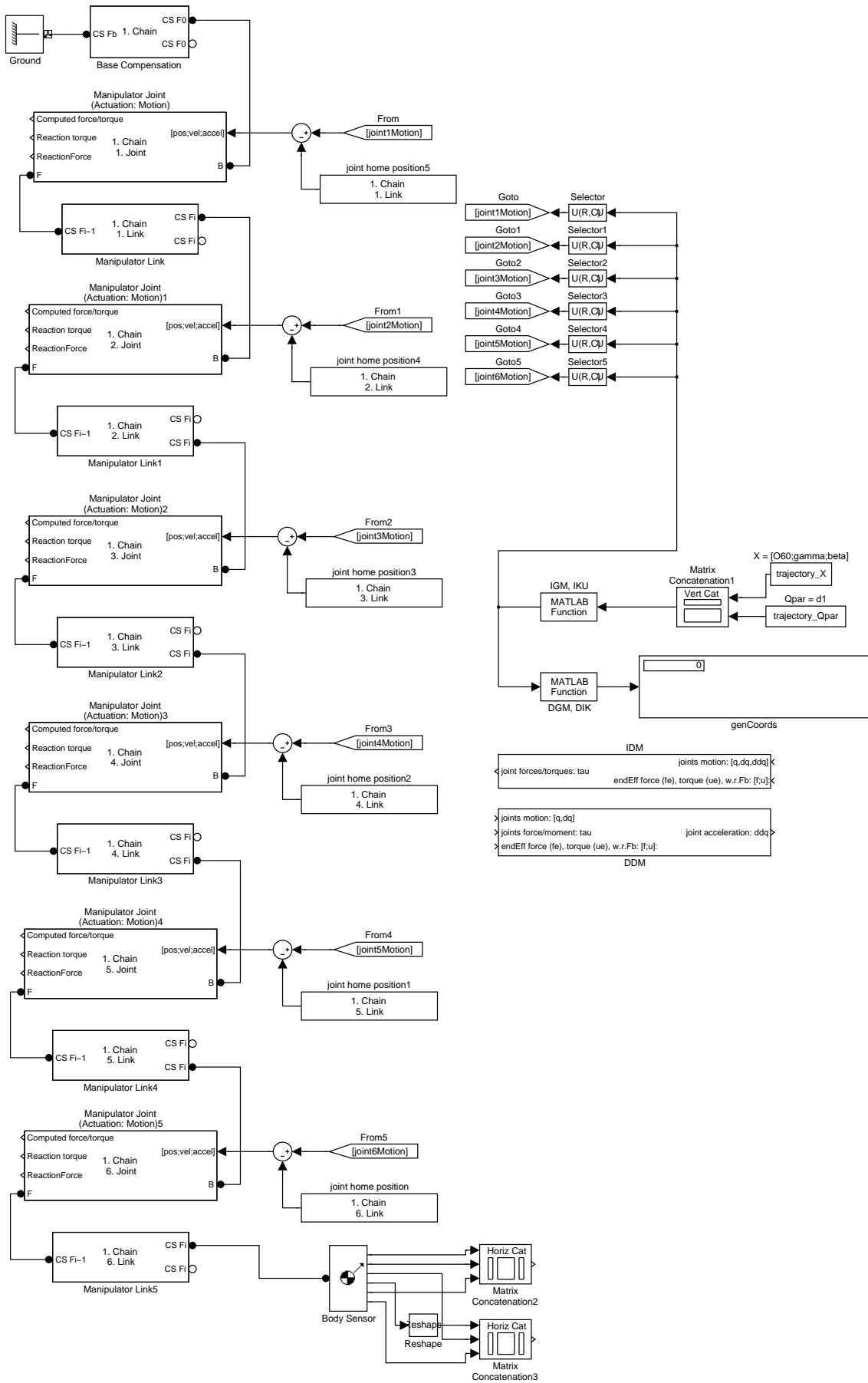
- **Optimalizace pohybu manipulátoru**

Zatímco v předešlém případě jsme uvažovali optimalizaci hodnot kinematických návrhových parametrů  $\xi$  a hodnoty parametrizujících kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}_{\text{opt}}$  byly voleny, v tomto případě je situace opačná. Uvažujme dané konstantní kinematické návrhové parametry a hledejme takové hodnoty (trajektorii) parametrizujících kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}_{\text{par}}$ , která optimalizuje dané kritérium. Jedná se o využití redundance manipulátoru k výběru takového řešení IGM, IIK, které je z daného hlediska optimální. Kritériem optimality může být v našem případě např. zástavbová velikost manipulátoru (tzv. fyzický pracovní prostor). Ve zjednodušeném případě lze tak říci, že podél zvolené trajektorie pohybu koncového efektoru  $\mathbf{X}$  je možné hledat takové souřadnice  $\mathbf{Q}_{\text{par}}$ , které minimalizují potřebný úhel  $q_4$  (tedy maximalizují zarovnění ramen *Link 3*, *Link 5* díky změně lineárního výsuvu  $d_1$ ). Podrobněji je metodika optimalizace pohybu redundantních manipulátorů zpracována v [9].

## 5 Závěr

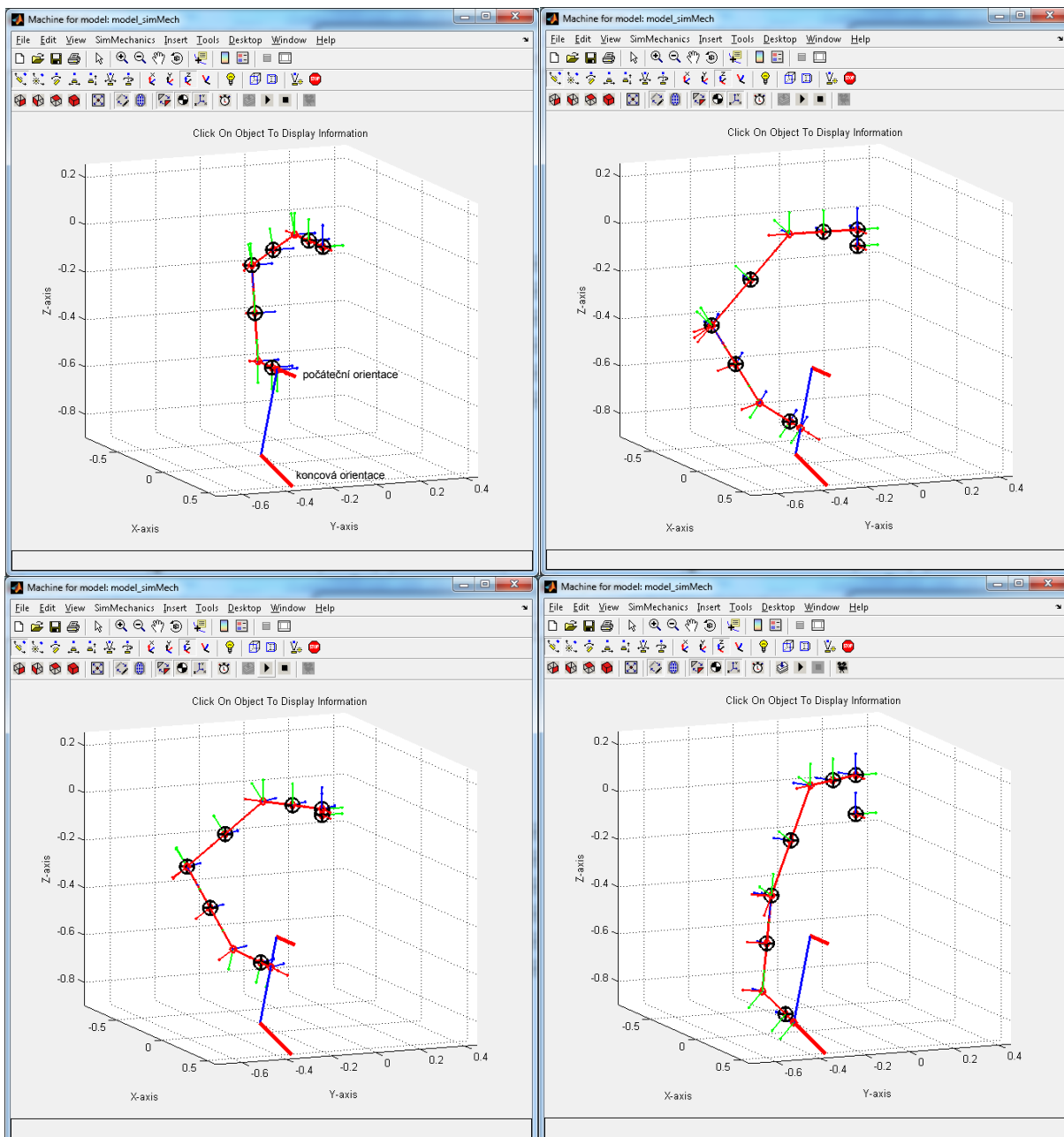
V uvedené technické zprávě byl odvozen kinematický a dynamický model speciální architektury manipulátoru pro zástavbu do mycích komor průmyslových myček. Navržený virtuální model je

vytvořen prostřednictvím knihovny funkčních bloků, [9] v prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics [3] a je znázorněn na Obrázku 4, 5 . Dále byly diskutovány možnosti optimalizace kinematických návrhových parametrů manipulátoru a optimalizace pohybu redundantního manipulátoru. Konkrétní výsledky optimalizací nejsou v této zprávě dostupné, neboť je současná podoba architektury manipulátoru stále ve vývoji a dále je nutné specifikovat vhodný požadovaný pracovní prostor (v současnosti v řešení s firmou Eurotec JKR s.r.o.).



Obrázek 4: Virtuální model manipulátoru





Obrázek 5: Virtuální model manipulátoru - vizualizace pohybu po zadané trajektorii

## 6 Poděkování

Tento výzkum byl podpořen Technologickou agenturou České republiky z prostředků projektu Centra Kompetence CIDAM TE02000103.

## Reference

- [1] Denavit, J.; Hartenberg, R. S.: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, ročník 22, 1955: s. 215–221.  
URL <http://ci.nii.ac.jp/naid/10008019314/en/>
- [2] Khalil, W.; Dombre, E.: *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science paper edition, Elsevier Science, 2004, ISBN 9780080536613.  
URL <http://books.google.cz/books?id=nyrY0Pu5k10C>
- [3] MathWorks, T.: *SimMechanics User's Guide*, [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com).
- [4] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer London, 2000, ISBN 9781852332211.  
URL <http://books.google.fr/books?id=v9PLbcYd9aUC>
- [5] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni (online: [http://home.zcu.cz/~msvejda/\\_publications/2011/rigo.pdf](http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2011/rigo.pdf)), 2011.
- [6] Švejda, M.: Úvod do robotiky a mechatroniky. Přednášky k předmětu, 2012.  
URL <http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/>
- [7] Švejda, M.: Comparison of serial and parallel structures for 3-link manipulator arm, advanced parametric optimization of special construction. Technická zpráva, NTIS, ZČU v Plzni, 2015.
- [8] Švejda, M.: Kinematical, kinetostatical and dynamical analysis of 4DoF manipulator, parametric optimization of mechanical construction (WP5-DV026). Technická zpráva, NTIS, ZČU v Plzni, 2015.
- [9] Švejda, M.: *Optimalizace robotických architektur*. Dizertační práce, Západočeská univerzita v Plzni, 2016.