

TAČR Centrum kompetence CIDAM

Survey: Existing methods and tools for optimization of mechatronic systems in terms of structure, parameters and control

Výzkumná zpráva WP3-D3.17

Martin Švejda

5.1.2015

Abstrakt

Výzkumná zpráva podává přehled stávajících metod pro strukturální a parametrickou optimalizaci manipulátorů.

1 Úvod

Robotika, jejíž obsah beze sporu spadá do dnes velmi rozšířené vědní disciplíny mechatronika, hraje nedílnou součást v podstatě všech průmyslových odvětví. Roboty samotné, stejně tak jako celé robotizované systémy a komplexní automatické linky dnes výrazným a nenahraditelným způsobem realizují nejen celé výrobní procesy (automatické svařování, obrábění, broušení, lakování, kompletace, vizuální kontroly atd.), ale také činnosti jakými jsou průzkumy neznámých prostředí, metody nedestruktivního zkoušení materiálových defektů (ultrazvukové zkoušení, zkoušení vířivými proudy, atd.), asistované chirurgické zákroky atd. K úspěšnému návrhu kompletního robotického systému však vede dlouhá a komplikovaná cesta, kde jsou ve většině případů všechny dílčí úkoly vzájemně propojeny. Tento fakt zůstává bohužel velmi často opomenut a k návrhu robotických systémů se přistupuje až příliš automaticky, dokonce jsou některé klíčové elementární problémy dnes považovány za zcela vyřešené a tím odsouvané odbornou veřejností do pozadí. V souvislosti s robotikou se tak dnes především hovoří o problémech spojených s umělou inteligencí, jako je automatické rozpoznávání pro navádění robotů, autonomní chování a rozhodování, procesy učení a rozhodování atd. Bezpochyby takové problémy v moderní vědě hrají důležitou roli, však spíše na úrovni humanoidních a částečně či zcela autonomních zařízení. Nicméně ani takové systémy se v robotice neobejdou bez uspokojivého řešení problémů elementárních. Právě tyto elementární problémy nakonec diktují, jestli celé robotické zařízení je vůbec funkční s ohledem na realizování požadovaných pohybů, energetické náročnosti, volbu a dimenzování nosných konstrukcí, kloubů a pohonů, realizace řídicích algoritmů, a je tedy možné aplikovat další „vyšší“ algoritmy umělé inteligence. Mezi tyto běžně řešené úkoly při návrhu robotického manipulátoru patří zejména:

- přímý a inverzní geometrický model (vztah mezi polohami zobecněných a kloubových souřadnic, tedy polohou koncového efektoru a polohou aktuátorů)
- přímý a inverzní kinematický model (vztah mezi rychlostmi, zrychleními či vyššími časovými derivacemi polohy zobecněných a kloubových souřadnic)
- identifikace a vyřešení singulárních poloh (sériové a paralelní singularity manipulátorů přinášející kritické problémy při řízení pohybu manipulátorů)
- vyšetření pracovních prostorů manipulátorů (různé typy pracovních prostorů: *constant orientation workspace*, *translation workspace*, *maximal workspace*, *reachable workspace*, *dexterous workspace* atd.)
- dynamické modelování manipulátorů (přímý a inverzní dynamický model)
- plánování pohybu manipulátorů (interpolační a aproximační metody generování pohybu koncového efektoru s ohledem na plynulost pohybu, časově optimální trajektorii, definovanou rychlost podél obecných křivek atd.)
- návrh řízení pro manipulátory (decentralizované a centralizované metody řízení, pokročilé metody řízení - prediktivní řízení, robustní řízení, řízení poddajných konstrukcí manipulátorů, tlumení vibrací, atd.)

Většina výše uvedených problémů je obsáhle shrnuta v řadě předních a kvalitních publikacích [28], [34], [14], [22]. Přesto, že se může zdát, že jsou tyto elementární problémy vyřešeny, stále se, zejména pak v praktických a průmyslových aplikacích, objevují nové problémy a úskalí, které nejsou v žádném případě vyřešeny uspokojivě. Příkladem může být právě problém kinematického modelování manipulátoru a s tím související témata, zajímavým způsobem zpracovaný v [25]. Autor zde upozorňuje na celosvětový trend, který považuje výpočet kinematiky manipulátorů

za vyřešený problém. Navíc, díky rapidnímu vylepšení a zlevňování komponent řídicího systému (výkonné počítače, inteligentní čidla a pohony), lze mechanické nedostatky snadno kompenzovat aktivním řízením \Rightarrow podrobná kinematická analýza nehraje zvlášť významnou roli při návrhu manipulátoru. Autor však ukazuje na následující fakty:

- náklady na mechanickou část manipulátoru nepřesahují zpravidla 20-30% celého systému
- měření chyb v mechanické konstrukci je sice možné, nicméně vývoj řídicího systému pro jejich následnou kompenzaci je velmi obtížný a zdlouhavý
- výpočetní výkon by měl být využit především na vývoj „inteligence“ manipulátoru bez nutnosti jej využívat pro zásah do chování manipulátoru dané jeho architekturou

Dále autor zmiňuje některé doposud otevřené problémy v robotice, které dodnes nejsou uspokojivě řešeny, zejména pak problém *syntézy a optimalizace* manipulátorů.

Přesto, že návrh robotických zařízení s sebou bezesporu nese nutnost věnovat se všem výše uvedeným problémům, významnou roli zde hraje tzv. **strukturální a parametrická syntéza (strukturální a parametrická optimalizace)**. Jinými slovy, jakým způsobem vůbec konstruovat dané zařízení, aby vyhovělo všem požadavkům a zároveň maximálním možným způsobem redukovalo komplikace při řešení přidružených problémů (výpočet kinematických transformací, návrhy a realizace algoritmů řízení, atd.). Tato oblast je bohužel často opomíjena, což s sebou v řadě případů nese nemalé problémy, které mnohdy lze jen obtížně dále řešit, nebo dokonce tyto není možné řešit vůbec. Uveďme některé příklady:

- **Nevhodnou konstrukcí manipulátoru s ohledem na umístění kloubů a ramen** (strukturální syntéza, viz Kapitola 2) lze výrazně zkomplikovat řešení kinematických úloh (IGM, DGM, IIK, DIK). V drtivé většině případů v průmyslové praxi je strukturální návrh geometrické konstrukce určen již konkrétní aplikací, ve které bude manipulátor využit. Strukturální návrh je tak zpravidla navržen odborníky z oblasti nasazení manipulátoru. V některých případech je nutné strukturální návrh dále modifikovat v průběhu návrhu manipulátoru a jeho řídicího systému. Typickým případem takové modifikace je situace, kdy pro původně navržený manipulátor nelze uspokojivě vypočítat právě kinematické úlohy, avšak relativně drobná změna ve strukturálním uspořádání ramen a kloubů vede na zachování požadované funkčnosti manipulátoru a zároveň k výrazné redukci výpočetní složitosti kinematických úloh. Například je možné docílit kinematické dekompozice 6 DoF sériového manipulátoru s klouby typu **R** na více nezávislých celků (typicky na translační část manipulátoru a sférické zápěstí, viz [45]), [46]), a tím dekomponovat i řešení IGM na dvě soustavy rovnic a získat tak řešení IGM v uzavřeném tvaru. V obecném případě sériového manipulátoru (libovolně umístěné osy kloubů, z nichž žádná po sobě jdoucí trojice netvoří sférické zápěstí - osy těchto kloubů se neprotínají v jediném bodě) však lze ukázat, [14], [33], [17], že IGM vede na řešení (minimálního) polynomu 16. řádu, a tudíž neexistuje analytické řešení IGM.
- **Nevhodným návrhem parametrů** (parametrická syntéza, viz Kapitola 3) ramen a kloubů manipulátoru (typicky např. Denavit-Hartenbergových [6] či Khalil-Kleinfingerových parametrů [15], [45], reprezentující délky ramen a umístění kloubů) nelze docílit požadovaných DoF, není možné pokrýt celý požadovaný pracovní prostor či dochází při požadovaném pohybu manipulátoru k jeho přiblížení k singulárním polohám. Dále často dochází k nevhodnému poměru převodu sil/momentů či rychlostí (kinetostatická dualita, viz [34]) mezi aktuátory a koncovým efektem manipulátoru. Poměr mezi převody sil/momentů hraje významnou roli zejména pro sériové manipulátory, kdy vlivem otevřeného kinematického řetězce dochází k nasčítávání požadavků na síly/momenty v aktuátorech, které

významně závisí právě na délce jednotlivých ramen. Snadno se tak může stát, že výsledný navržený manipulátor nemůže na svém koncovém efektoru již nést téměř žádné břemeno - navyšování výkonů aktuátorů je sice možné, nicméně poměr hmotnosti a výstupního momentu/síly aktuátoru je v reálně nasazovaných aktuátorech nepříznivý (hmotnost aktuátoru většinou roste velmi strmě s rostoucími požadavky na výstupní momenty/síly, navíc je třeba dále navyšovat pevnost, a tedy i robustnost, celé konstrukce manipulátoru).

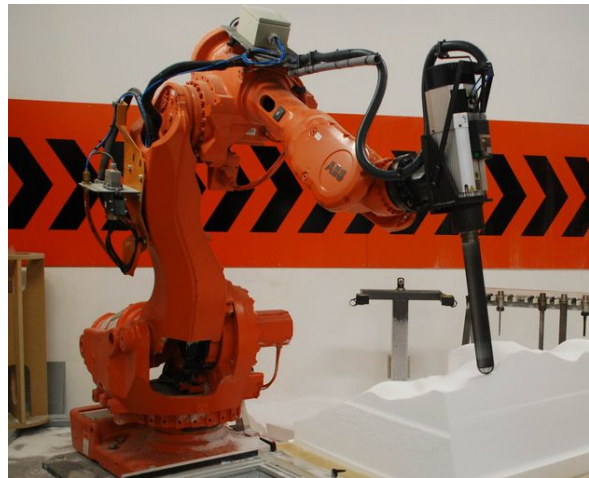
- **Nevhodné plánování trajektorie manipulátoru** v případech, kdy tento požadavek můžeme ovlivnit. Tento problém spadá do parametrické syntézy (nalezení vhodných parametrů plánované trajektorie, např. interpolační body či parametry spline křivek, atd.). Příklady situací, kdy lze uvažovat o změně plánované trajektorie za účelem zlepšení určitých vlastností při pohybu manipulátoru jsou:

- „**Pick and place**“ **aplikace**, kde, vyjma situací, kdy je třeba objet danou překážku, požadujeme pouze přesun koncového efektoru manipulátoru z počáteční do cílové pozice (obecně polohy a orientace). V takovém případě je možné plánovat trajektorii mezi počátečním a cílovým bodem tak, aby mohlo být optimalizováno některé z vedlejších kritérií, např. vzdálenost od singulárních poloh, pohyb aktuátorů co nejbližší jejich středních poloh, minimalizace momentů/sil na aktuátorech způsobených gravitací, časově optimální trajektorie (ne vždy musí časově optimální trajektorie propojovat počáteční a cílovou pozici přímkou, neboť na takovém úseku se může manipulátor přiblížit singulární poloze, která povede na snížení rychlostí pohybu koncového efektoru z důvodu limitace maximálních rychlostí aktuátorů), atd.
- **Redundantní případy**. Redundantním případem během plánování trajektorie manipulátoru rozumíme stav, kdy k potřebnému pohybu manipulátoru není zapotřebí všech DoF, který manipulátor umožňuje. To může nastat ve dvou situacích. Buď se jedná o manipulátor ze své konstrukce redundantní, tzn. počet nezávislých aktuátorů převyšuje počet DoF koncového efektoru, např. 7 DoF sériový manipulátor *Dextrous Lightweight Arm LWA 4D* firmy Schunk pro polohování a orientování součástí v prostoru (požadováno 6 DoF), viz Obrázek 1(a), nebo je některý DoF koncového efektoru nahrazen pohybem pracovního nástroje, např. orientace kolem rotační osy frézy připevněné na koncový efektor 6DoF manipulátoru ABB IRB6640 firmy ABB, viz Obrázek 1(b).

V takových případech je opět možné plánovat trajektorii koncového efektoru manipulátoru tak, aby bylo optimalizováno vedlejší kritérium, viz výše.



(a) Dextrous Lightweight Arm LWA 4D



(b) ABB IRB6640

Obrázek 1: Příklady redundantních manipulátorů

- **Spojitost vyšších časových derivací plánovaného pohybu.** Na optimalizaci trajektorie lze nahlížet i tak, že požadujeme co možná nejvíce přirozený a plynulý pohyb koncového efektoru manipulátoru. Tento požadavek je zřejmý, neboť nespojitosti časových derivací, tedy rychlostí, zrychlení a jerku vede k momentovým/silovým rázům v konstrukci manipulátoru a v samotných aktuátorech (přirozeně, např. skoková rychlost ve zrychlení odpovídá skokové rychlosti v působící síle/momentu), což může vést např. k vybuzení nemodelované dynamiky, atd.

2 Strukturální syntéza robotického zařízení - strukturální optimalizace

Jak již bylo výše uvedeno, každá dílčí aplikace, ve které má být nasazeno robotické zařízení by měla být předem specifikována s ohledem na požadované chování. Požadovaných chování s ohledem na strukturální syntézu rozumíme základní strukturální kinematické vlastnosti manipulátoru jako jsou:

- **Počet stupňů volnosti (DoF) koncového efektoru:**
- **Typ stupňů volnosti:** rotační/translační či některé speciální případy, viz Příklad 1
- ★ **Příklad 1 (DoF konc. efektoru manipulátoru s nestandardním uspořádáním)**
Nechť požadujeme robot s 5 DoF koncového efektoru s následujícím uspořádáním:
 - 3 translační stupně volnosti koncového efektoru - pohyb v ose x, y, z
 - 1 rotační stupeň volnosti, který však není vyjádřen jako elementární rotace souřadného systému (s.s.) koncového efektoru, ale jako úhel mezi dvěma rameny manipulátoru.

★

- **Uspořádání os jednotlivých kloubů:** umístění a orientace os rotace/translace kloubů R/P či umístění a orientace kloubů složených (typicky např. *kulový /sférický kloub S* - trojice elementárních kloubů RRR s protínajícími se kolmými osami rotace či *univerzální/kardanův kloub U* dvojice elementárních kloubů RRR s protínajícími se kolmými osami rotace).

Strukturální syntéza a optimalizace se zabývá nalezením právě výše uvedených topologických vlastností manipulátoru, bez ohledu na to, jak budou vypadat jeho skutečné dimenze (délky ramen, přesná finální orientace os rotací/translací kloubů, umístění a hmotnosti těžišť, atd.). Definovat z daných požadavků konkrétní aplikace topologické vlastnosti manipulátoru je však úloha velmi obtížná. I když připustíme, že je možné popsat a formulovat topologii manipulátoru vzhledem k jeho strukturálním vlastnostem, viz např. [47], samotný problém nalezení, případně optimalizace, vhodné topologie vede spíše na metody umělé inteligence (produkční algoritmy, algoritmy založené na evoluci jako různé typy genetických algoritmů), prohledávací algoritmy a heuristické algoritmy, algoritmy využívající výpočty kombinací či algoritmy založené na hrubé síle.

V drtivé většině případů v průmyslové praxi je strukturální návrh geometrické konstrukce určen již konkrétní aplikací, ve které bude systém využit a strukturální návrh je tak zpravidla navržen odborníky z oblasti nasazení mechatronického systému. V některých případech je strukturální návrh dále modifikován v průběhu návrhu řídicího systému. Přesto, že se v tomto textu nebudeme dále zabývat strukturální analýzou, ponecháme ji v pozadí a budeme předpokládat, že tato byla již navržena experty z oboru, jedna její součást hraje významnou roli při posuzování, zda navržený robotický systém je vůbec schopen požadovaného pohybu. Konkrétně, zda-li navržený systém umožňuje nezávisle polohovat všechny požadované DoF koncového efektoru. V tomto ohledu lze pozorovat následující vlastnosti kinematického uspořádání manipulátoru:

2.1 Kinematická struktura manipulátoru je plně určena

Tzn. počet nezávislých aktuátorů n odpovídá počtu nezávislých DoF koncového efektoru m . V takovém případě se jedná o správně strukturálně navržený manipulátor, kinematický jakobián

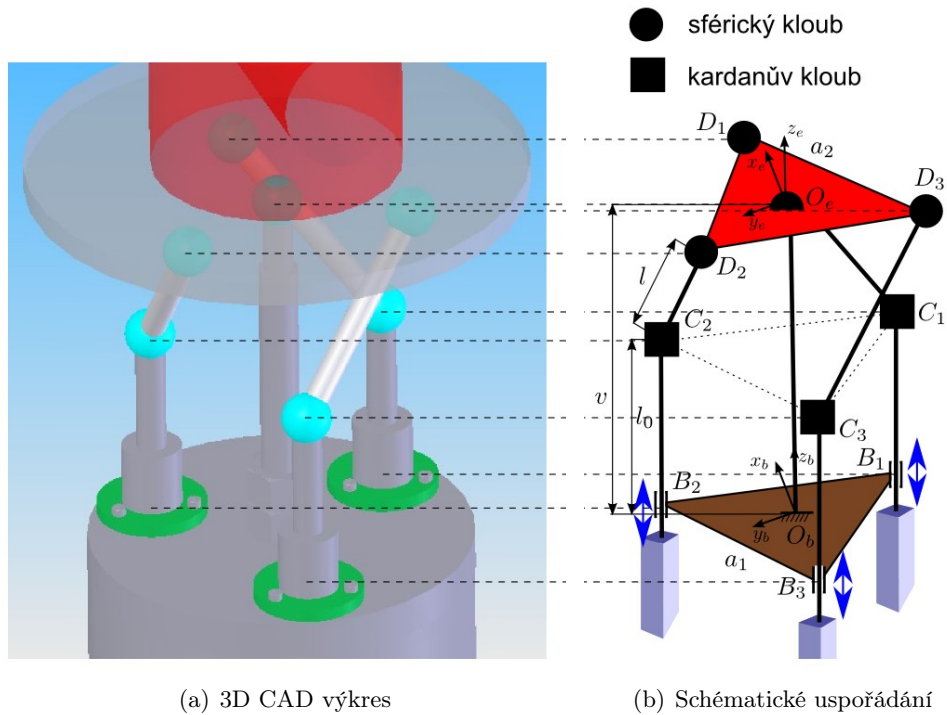
\mathbf{J} (vztahující rychlosti kloubových $\dot{\mathbf{Q}}$ a zobecněných souřadnic $\dot{\mathbf{X}}$, viz (1))

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \text{kde } \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad (1)$$

je regulární maticí (má plnou hodnotu) $\text{Rank}(\mathbf{J}) = \min(m, n) = m = n$ a zároveň platí $\det(\mathbf{J}) \neq 0$ v celé množině bodů $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m,n}$ pracovního prostoru manipulátoru s výjimkou spočetně mnoha bodů, tzv. *bodové singulární polohy* či dané restrikce množiny pracovního prostoru (variety stupně menšího než m), tzv. *množinové singulární polohy*, viz následující příklady. Stručný úvod do problematiky singulárních poloh sériových a paralelních manipulátorů je uveden v Kapitole A.2.

★ **Příklad 2 (Bodová sing. poloha 3DoF paralelního manipulátoru)**

Uvažujme 3 DoF paralelní manipulátor typu sférické zápěstí, viz Obrázek 2, složený z trojice identických kinematických řetězců typu PUS s kloubovými souřadnicemi $\mathbf{Q} = [d_1 \ d_2 \ d_3]^T$ a zobecněnými souřadnicemi definujícími orientaci koncového efektoru $\mathbf{X} = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T$, kde α, β, γ jsou Eulerovy úhly dle schématu XYZ a rychlost koncového efektoru je vyjádřena nikoliv jako derivace Eulerovských úhlů α, β, γ , ale vektorem úhlové rychlosti $\dot{\mathbf{X}} \triangleq \boldsymbol{\omega}_e \in \mathbb{R}^3$. Poznamenejme, že vztah mezi derivacemi Eulerových úhlů a vektorem úhlové rychlosti jsou dány tzv. *Eulerovými kinematickými rovnicemi*, viz [46], [45]. Návrhové parametry manipulátoru jsou dány rozměry základny, koncového efektoru a ramen kinematických řetězců jako $\boldsymbol{\xi} = [a_1 \ a_2 \ l \ v]^T$.



Obrázek 2: Paralelní manipulátor typu sférického zápěstí

Lze ukázat, viz [45], že *inverzní* kinematický jakobián $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$ zkoumaného manipulátoru lze vyjádřit v uzavřeném tvaru následovně:

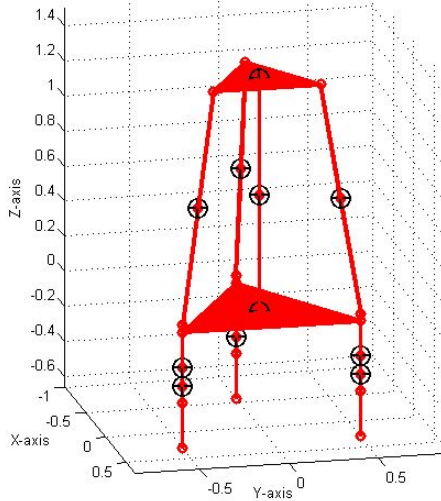
$$\mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_e^b \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \boldsymbol{\omega}_e^b, \quad \text{kde } \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (2)$$

kde

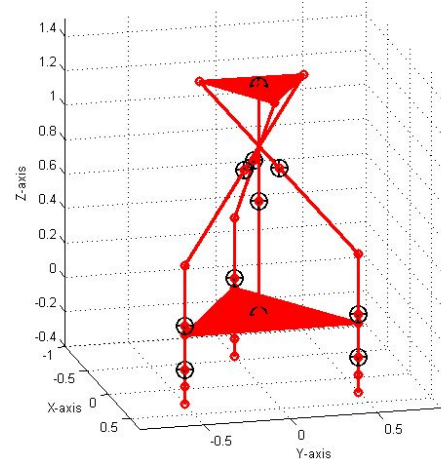
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\overline{\mathbf{C}_1 \mathbf{D}_1})^T \cdot \vec{\mathbf{u}}^b & 0 & 0 \\ 0 & (\overline{\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_2})^T \cdot \vec{\mathbf{u}}^b & 0 \\ 0 & 0 & (\overline{\mathbf{C}_3 \mathbf{D}_3})^T \cdot \vec{\mathbf{u}}^b \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_1})^T \times \overline{\mathbf{C}_1 \mathbf{D}_1} \\ \dots \\ (\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_2})^T \times \overline{\mathbf{C}_2 \mathbf{D}_2} \\ \dots \\ (\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_3})^T \times \overline{\mathbf{C}_3 \mathbf{D}_3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

a vektory $\overline{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i}$, $\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i}$ vzhledem k s.s. F_b lze vypočítat ze znalosti řešení IGM manipulátoru, viz [45], a $\vec{\mathbf{u}}^b = [0 \ 0 \ 1]^T$ je konstantní jednotkový vektor ve směru pohybu \mathbf{P} aktivních kloubů.

Manipulátor se nachází v *paralelní* singulární poloze, viz Poznámka , pokud matice \mathbf{B} je singulární (inverzní jakobián $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$ je taktěž singulární maticí). Je zřejmé, že toto nastává v případě, pokud je alespoň jeden vektor $(\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i})^T \times \overline{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i}$ nulovým vektorem ($\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i}$ a $\overline{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i}$ jsou vzájemně rovnoběžné), nebo jsou vektory $(\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i})^T \times \overline{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i}$ lineárně závislé, viz Obrázek 3 a Obrázek 4. Poznamenejme, že v druhém případě dochází zároveň i k *sériové* singulární poloze, neboť matice \mathbf{A} je taktěž singulární (nulová).

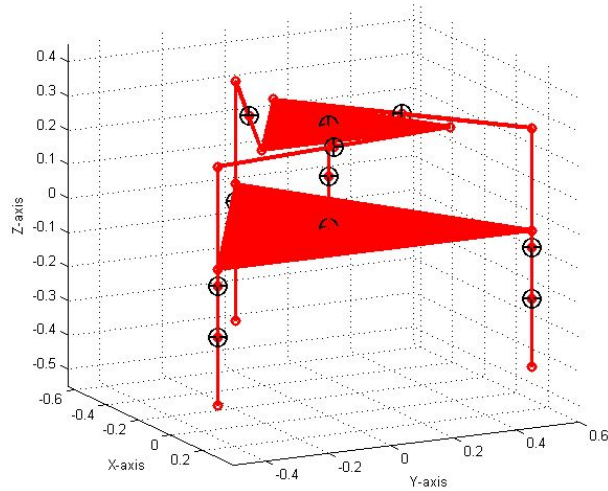


(a) $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = -\frac{2}{3}\pi$



(b) $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = \frac{1}{3}\pi$

Obrázek 3: Paralelní singulární polohy manipulátoru, vektory $\overline{\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i}^T \times \overline{\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i}$ jsou lineárně závislé (leží v jedné rovině se vzájemným pootočením o $\frac{2}{3}\pi$).

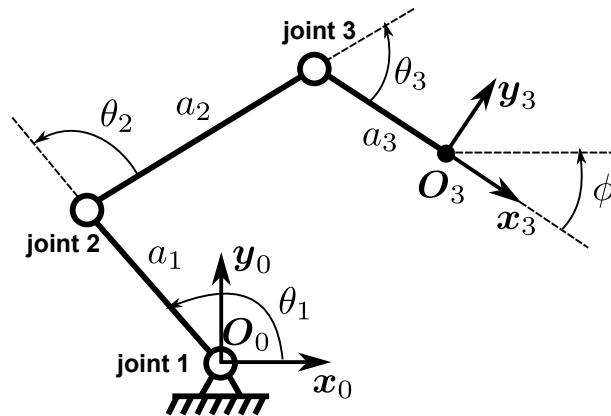


Obrázek 4: Manipulátor současně v sériové i paralelní singulární poloze, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (manipulátor uvažován s jinými rozměry než v předchozím případě), vektory $(\mathbf{O}_e \mathbf{D}_i^b \times \mathbf{C}_i \mathbf{D}_i^b)$ jsou lineárně závislé (rovnoběžné), vektory $\mathbf{C}_i \mathbf{D}_i$ a \mathbf{u} jsou kolmé.

V obou případech sériové a paralelní singularity se však jedná o bodovou záležitost, tedy singularita nastává pouze v daném izolovaném bodě polohy koncového efektoru manipulátoru. Genericky se tedy jedná o manipulátor, který je z hlediska strukturální syntézy navržen správně, neboť jeho kinematická struktura je plně určena (3 DoF koncového efektoru pro 3 nezávislé prismatické aktuátory) pro téměř všechny body pracovního prostoru (s výjimkou zmíněných singulárních izolovaných bodů). ★

★ **Příklad 3 (Množinová sing. poloha 3DoF sériového manipulátoru)**

Uvažujme 3 DoF sériový manipulátor, viz Obrázek 5 tvořený otevřeným kinematickým řetězcem typu **RRR** s kloubovými souřadnicemi $\mathbf{Q} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ a zobecněnými souřadnicemi $\mathbf{X} = [\mathbf{O}_3[1:2]^T \ \phi]^T$. Návrhové parametry manipulátoru jsou dány délkami jednotlivých ramen jako $\boldsymbol{\xi} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$.



Obrázek 5: Sériový manipulátor typu **RRR**

Lze ukázat, viz [46], že kinematický jakobián $\mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta})$ manipulátoru lze vyjádřit v uzavřeném tvaru následovně:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q}, \text{ kde } \mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} -a_3 s_{\theta_{123}} - a_2 s_{\theta_{12}} - a_1 s_{\theta_1} & -a_3 s_{\theta_{123}} - a_2 s_{\theta_{12}} & -a_3 s_{\theta_{123}} \\ a_3 c_{\theta_{123}} + a_2 c_{\theta_{12}} + a_1 c_{\theta_1} & a_3 c_{\theta_{123}} + a_2 c_{\theta_{12}} & a_3 c_{\theta_{123}} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

kde $s_{\theta_{123}} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, analogicky pro $\cos(\star)$.

Singulární (sériové) polohy lze stanovit v prostoru kloubových souřadnic z podmínky singularity kinematického jakobiánu:

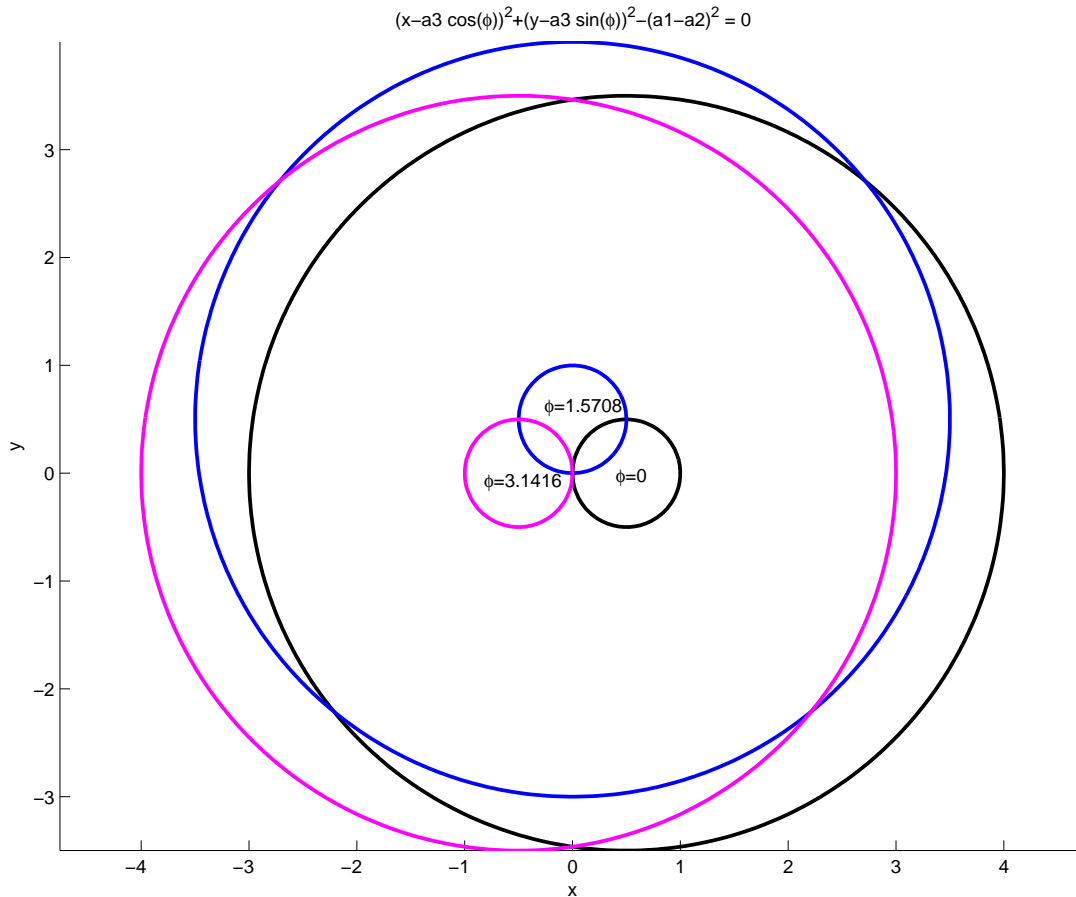
$$\det(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) = 0 \Rightarrow -a_2 c_{\theta_{12}} s_{\theta_1} a_1 + a_2 s_{\theta_{12}} c_{\theta_1} a_1 = a_1 a_2 s_2 = 0 \quad (5)$$

Tedy singulární polohy manipulátoru nastávají v hodnotách kloubových souřadnic:

$$\theta_1 = \text{lib.}, \quad \theta_2 = k\pi, \quad k = \{0, 1\}, \quad \theta_3 = \text{lib.} \quad (6)$$

Dosažením podmínky (6) do řešení DGM, viz [46] lze získat ekvivalentní podmínku v prostoru zobecněných souřadnic ve tvaru variety 1. řádu, konkrétně se jedná o dvojici soustředných kružnic ležících v prostoru zobecněných souřadnic (rovině \mathbf{xy}) jejichž počátek je parametrizovaný třetí zobecněnou souřadnicí ϕ . Implicitní vyjádření této variety je dáno rovnicí (7) a její grafické znázornění na Obrázku 6.

$$\begin{aligned} (x - a_3 c_\phi)^2 + (y - a_3 s_\phi)^2 &= (a_1 + a_2)^2 \quad (\text{pro } \theta_2 = 0) \\ (x - a_3 c_\phi)^2 + (y - a_3 s_\phi)^2 &= (a_1 - a_2)^2 \quad (\text{pro } \theta_2 = \pi) \end{aligned} \quad (7)$$



Obrázek 6: Singulární polohy manipulátoru znázorněné v prac. prostoru (rovině \mathbf{xy}) parametrizované zobec. souřadnicí orientace ϕ , malá kružnice - ramena manip. se překrývají, velká kružnice - ramena manip. jsou „natažená“

Z uvedeného je patrné, že v případě zkoumaného manipulátoru mohou nastávat singulární polohy, které existují na dané restrikci (varietě) pracovního prostoru. Přesto, že tedy bezsporně existuje

nekonečně mnoho singulárních poloh manipulátoru, jsou tyto polohy dané uzavřenou množinou v pracovním prostoru. Genericky se tedy opět jedná o manipulátor, který je z hlediska strukturální analýzy navržen správně. Jeho kinematická struktura je plně určena (3 DoF koncového efektoru pro 3 nezávislé rotační aktuátory) pro téměř všechny body pracovního prostoru s výjimkou bodů ležících na nalezené varietě. ★

2.2 Kinematická struktura manipulátoru je přeúčtená

Zde je situace odlišná pro sériové a paralelní manipulátory. Pro sériové manipulátory platí, že jejich kinematická architektura nikdy nemůže být z principu přeúčtena. Manipulátor je reprezentován sériovým kinematickým řetězcem a může tak obsahovat libovolný počet aktuátorů. Tyto aktuátory se svým pohybem nijak neomezuje a je možné a dokonce nutné vždy všechny nezávisle polohovat. Situace, kdy sériový manipulátor obsahuje více aktuátorů (kloubů n) než je počet DoF koncového efektoru m , tzn. $n > m \leq 6$ (max. 6 DoF v prostoru, 3 posuny, 3 rotace) je chápána jako *redundantní* manipulátor a existuje nekonečně mnoho řešení IGM, IIK pro daný pohyb koncového efektoru. Zabývejme se proto dále paralelními manipulátory.

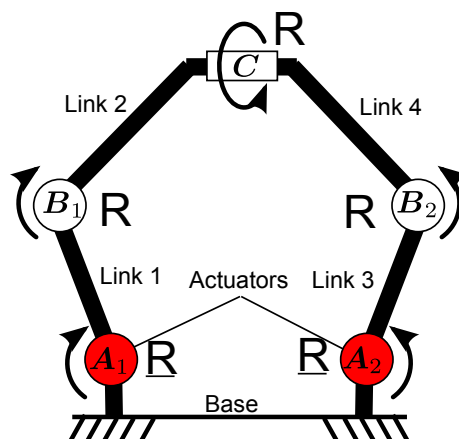
Přeúčtenou kinematickou strukturou paralelního manipulátoru lze rozumět dvě alternativy:

- **Struktura manipulátoru je topologicky přeúčtena (bez ohledu na počet aktuátorů)**

K této situaci dochází nezávisle na počtu aktuátorů. V každé kinematicky uzavřené struktuře hraje významnou roli vlastní uspořádání jednotlivých kloubů a ramen, neboť právě jím je dán výsledný počet DoF koncového efektoru manipulátoru. Snadno pak může nastat situace, kdy je kinematická soustava přeúčtená, tzn. počet DoF koncového efektoru je ≤ 0 \Rightarrow koncový efektor se z principu nemůže pohybovat (tato situace bývá někdy označována jako *uzamčení manipulátoru*), viz následující příklad:

★ Příklad 4 (Topologicky přeúčtená struktura manipulátoru)

Uvažujme 2 DoF paralelní Dual-Scara manipulátor složený z \mathbf{R} kloubů ve standardním uspořádání, viz Obrázek 8(a), ale s tou výjimkou, že \mathbf{R} kloub v bodu C má změněnou osu rotace, viz Obrázek 7. V takovém případě (nezávisle na počtu aktuátorů) je kinematická struktura manipulátoru přeúčtena a manipulátor není zřejmě schopen žádného pohybu.



Obrázek 7: Paralelní Dual-Scara manipulátor s nevhodně zvolenou orientací kloubu v bodě C

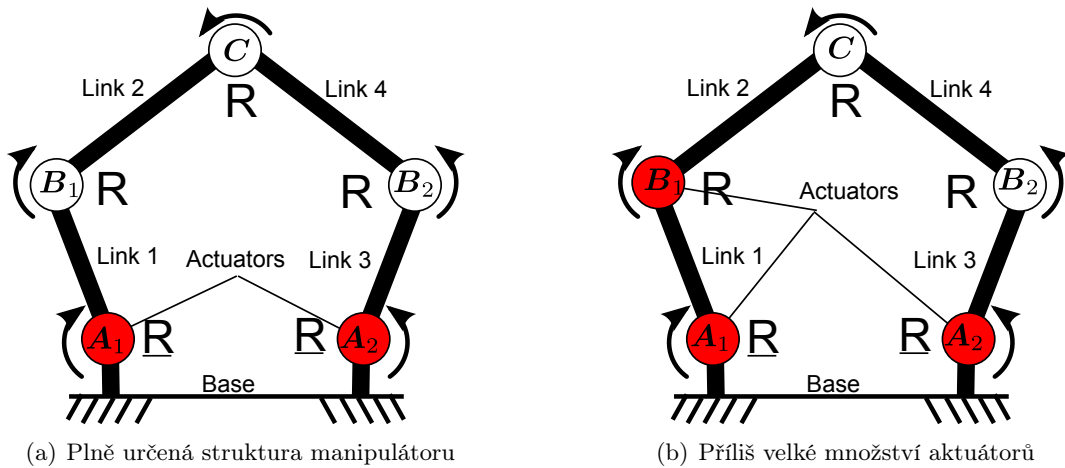
★

- **Struktura topologicky plně určena, nicméně počet aktuátorů převyšuje DoF koncového efektoru.**

K této situaci dochází, pokud počet nezávislých aktuátorů převyšuje maximální možný počet DoF koncového efektoru manipulátoru¹. To má za následek, že některý z aktuátorů (jeden či více) navrženého manipulátoru nemůže vykonávat svůj pohyb (je zablokován), za podmínky, že v daném okamžiku nedochází k současnému pohybu žádného jiného aktuátoru, viz následující příklad:

★ **Příklad 5 (Přeurčená struktura manipulátoru počtem aktuátorů)**

Uvažujme 2 DoF paralelní Dual-Scara manipulátor složený z **R** kloubů, viz Obrázek 8(a). Standardně je tento manipulátor vybaven 2 nezávislými **R** aktuátory pevně umístěnými na základně v bodech **A**₁ a **A**₂. Lze ukázat, že koncový efektor manipulátoru **C** má tak právě 2 DoF (pohyb v rovině **xy**). Zároveň platí, že kinematická omezení, která jsou určena spojením 2 **RR** kinematických řetězců v bodě **C** jednoznačně definují polohu všech ramen manipulátoru pro libovolné 2 aktivní klouby. Přidání aktuátoru do libovolného dalšího kloubu má za následek nikoliv navýšení DoF koncového efektoru (toto zřejmě není z topologického uspořádání kinematických řetězců ani možné), ale k přeurčení kinematické struktury, viz Obrázek 8(b). Tzn. nelze pohybovat nezávisle se všemi třemi aktuátory.



Obrázek 8: Paralelní Dual-Scara manipulátor

★

2.3 Kinematická struktura manipulátoru je nedourčená

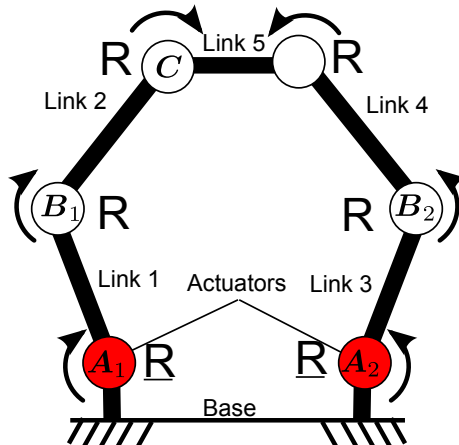
Situace je opět odlišná pro sériové a paralelní manipulátory. Pro sériové manipulátory tvořené sériovým kinematickým řetězcem je zřejmé, že struktura bude nedourčená, pokud by manipulátor obsahoval kloub, který není současně aktuátorem. V takovém případě nelze cíleně polohovat všechny DoF koncového efektoru. V případě paralelních manipulátorů je situace složitější. Kinematická struktura manipulátoru je označena za topologicky nedourčenou, pokud pro zvolený počet uzamčených aktuátorů (aktuátor se nepohybuje) vykazuje manipulátor nenulový počet DoF koncového efektoru, viz následující příklad:

★ **Příklad 6 (Topologicky nedourčená struktura manipulátoru)**

Přidáním **R** kloubu, který nebude aktuátorem, do 2 DoF Dual-scara manipulátoru je pohyb koncového efektoru manipulátoru v rovině nedourčen, resp. koncový efektor se může volně pohybovat

¹Tzn. počet DoF, který dovoluje topologické uspořádání kinematické struktury, nikoliv počet DoF, které vyžaduje daná aplikace, ten může být nižší.

i pro nepohybující se aktuátory, viz Obrázek 9.



Obrázek 9: Paralelní Dual-Scara manipulátor s nedourčenou strukturou

★

2.4 Metody vyšetřování počtu DoF z topologického uspořádání manipulátoru

S ohledem na výše uvedené vlastnosti manipulátorů vyplývá, že prioritním problémem při jejich strukturální syntéze (optimalizaci) je určení počtu DoF koncového efektoru. Jinými slovy, jak zajistit, aby měl navrhovaný manipulátor právě požadovaný počet DoF. Je zřejmé, že v případě sériových manipulátorů je problém přímočarý, neboť otevřený kinematický řetězec má vždy tolik DoF, kolik je nezávislých kloubů. Těchto kloubů potom může být libovolné množství (pro počet větší než 3 v rovině a 6 v prostoru mluvíme o manipulátorech redundantních) a tyto klouby musí být zároveň aktuátory. Pro paralelní manipulátory, které jsou tvořeny uzavřenými kinematickými řetězci je však problém určení DoF koncového efektoru na základě jeho strukturálních vlastností daleko komplikovanější. Zabýváme se tedy dále stručně touto problematikou.

Předpokládejme, že strukturálními vlastnostmi manipulátoru rozumíme právě počet a typ kloubů, ramen, jejich vzájemné geometrické uspořádání a počet kinematických řetězců, ze kterých je manipulátor složen. V zásadě existují dvě principiální možnosti analýzy, a to využití jednoduchých formulací, které se pokouší určit počet DoF právě z výše uvedených parametrů či metody založené na podrobné analýze kompletní kinematiky manipulátoru.

2.4.1 Jednoduché formulace pro výpočet DoF koncového efektoru manipulátoru

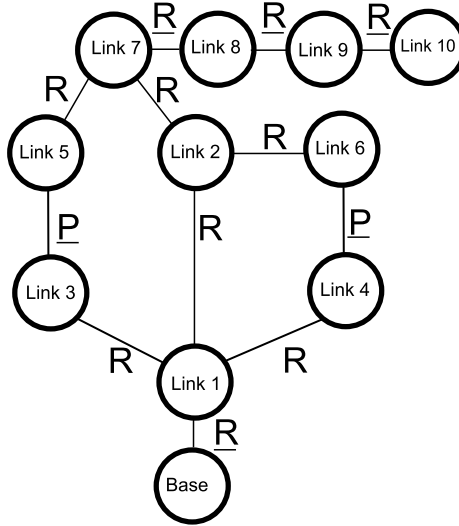
Jedná se o formulace založené na principech grafového znázornění struktury manipulátoru, které z podstaty této grafické reprezentace určují právě počet DoF koncového efektoru manipulátoru. Jako vstupní data vyžadují pouze základní strukturální parametry, kterými jsou počet kloubů a počet jejich DoF, typ manipulátoru (planární/prostorový), počet geometricky nezávislých smyček a některé další. V literatuře je možné nalézt celou řadu různě sofistikovaných formulací pro výpočet DoF, poměrně rozsáhlý přehled je zpracován v [9], [3].

Snad nejznámější formulací pro určení DoF koncového efektoru manipulátoru však zůstává *Chebyshev-Grübler-Kutzbachova formulace (CGK)*, formulovaná v základní podobě jako:

$$M = \sum_{i=1}^p f_i - \underbrace{b \cdot q}_r \quad (8)$$

kde M je počet DoF koncového efektoru manipulátoru, p je počet kloubů manipulátoru, b je číslo pohyblivosti ($b = 3$ pro manipulátor v rovině, $b = 6$ pro manipulátor v prostoru), q je počet geometricky nezávislých smyček, f_i je počet DoF i -tého kloubu a r je počet rovnic kinematického omezení.

Využijme dále grafickou reprezentaci znázornění kinematické struktury manipulátoru, a to takovým způsobem, že vrcholy grafu reprezentují ramena manipulátoru a hrany grafu reprezentují klouby manipulátoru, viz Obrázek 10.



Obrázek 10: Grafová reprezentace paralelního manipulátoru

Počet geometricky nezávislých smyček manipulátoru lze z jeho grafové reprezentace získat prostřednictvím *Eulerovy vztahu*, viz teorie grafů, který má tvar:

$$\underbrace{(n+1)}_{\text{vrcholy grafu}} - \underbrace{p}_{\text{hrany grafu}} + \underbrace{(q+1)}_{\text{uzavřené oblasti včetně vnější nekonečné}} = 2 \Rightarrow q = p - m + 1 \quad (9)$$

kde m je počet ramen manipulátoru (včetně základny), n je počet pohyblivých ramen manipulátoru ($n = m - 1$), q je počet geometricky nezávislých smyček.

Dosazením Eulerova vztahu (9) do CGK formulace (8) dostáváme její výslednou známou podobu:

$$M = b \cdot (m - 1 - p) + \sum_{i=1}^p f_i, \quad b = \{3, 6\} \quad (10)$$

kde M je počet DoF koncového efektoru manipulátoru, p je počet kloubů manipulátoru, b je číslo pohyblivosti ($b = 3$ pro manipulátor v rovině, $b = 6$ pro manipulátor v prostoru), f_i je počet DoF i -tého kloubu, m je počet ramen manipulátoru (včetně základny) a n je počet pohyblivých ramen manipulátoru ($n = m - 1$).

Bohužel, CGK formulace platí pouze v generickém případě a nepostihuje, z principu ani nemůže, kinematické závislosti mezi uzavřenými kinematickými řetězci, viz následující příklady:

★ Příklad 7 (Správné určení počtu DoF pomocí CGK formulace)

1. Sériový antropomorfní manipulátor

Sériový antropomorfní manipulátor a jeho grafická reprezentace je znázorněna na Obrázku 11(a). Výpočet CGK formulace dává očekávaný výsledek, tedy 6 DoF koncového

efektoru manipulátoru.

$$b = 6, m = 7, p = 6, f_i = 1 \text{ pro } i = 1 \dots 6$$

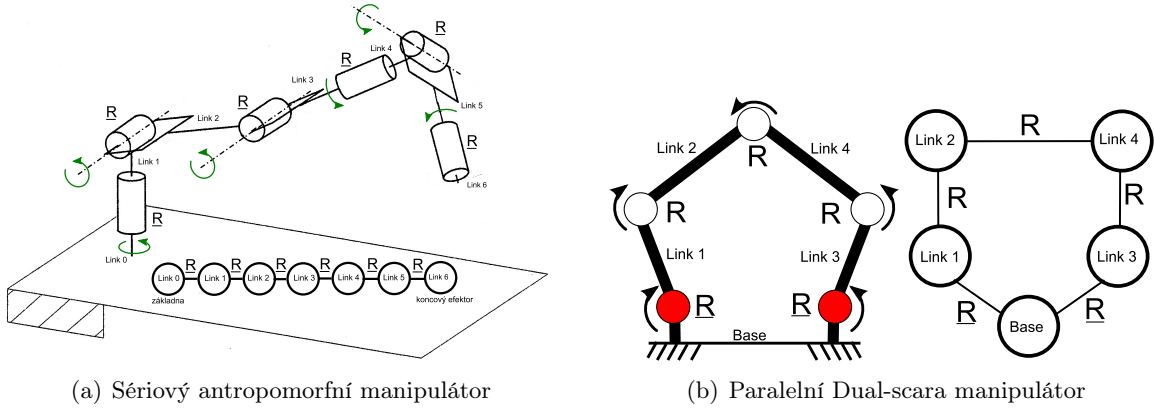
$$M = 6 \cdot (7 - 1 - 6) + \sum_{i=1}^6 1 = 6 \quad (11)$$

Připomeňme, že CGK formulace přirozeně dává správný výsledek pro všechny sériové manipulátory. Volbou aktuátorů za všechny klouby bude manipulátor kinematicky plně určen.

2. **Paralelní Dual-scara manipulátor** Paralelní Dual-scara manipulátor a jeho grafická reprezentace je znázorněna na Obrázku 11(b). Výpočet CGK formulace dává očekávaný výsledek, tedy 2 DoF koncového efektoru manipulátoru, v případě, že za aktuátory zvolíme právě dva klouby manipulátoru, bude manipulátor kinematicky plně určen.

$$b = 3, m = 5, p = 5, f_i = 1 \text{ pro } i = 1 \dots 5$$

$$M = 3 \cdot (5 - 1 - 5) + \sum_{i=1}^5 1 = 2 \quad (12)$$



Obrázek 11: Příklady manipulátorů, pro které je výpočet dle CGK formulace korektní

★

★ **Příklad 8 (Chybné určení počtu DoF pomocí CGK formulace)**

1. **Sarrus linkage**

Jedná se o paralelní prostorový manipulátor znázorněný na Obrázku 12(a). Je známo, že Sarrus linkage má právě 1 DoF (lineární posun v ose z). Výpočet CGK formulace však označuje tento paralelní manipulátor za přeúčtený, tedy neschopný pohybu.

$$b = 6, m = 6, p = 6, f_i = 1 \text{ pro } i = 1 \dots 6$$

$$M = 6 \cdot (6 - 1 - 6) + \sum_{i=1}^6 1 = 0 \quad (13)$$

2. **Bennett linkage**

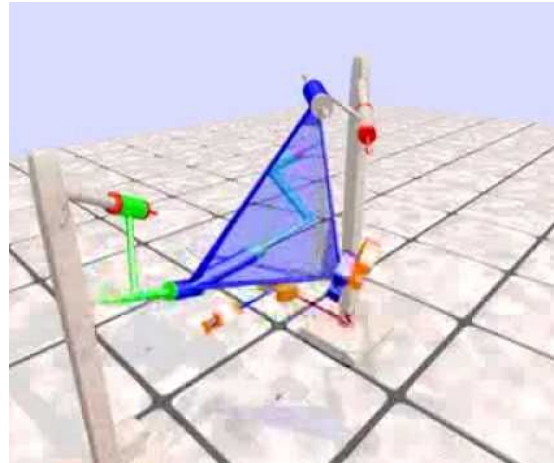
Jedná se opět o paralelní manipulátor znázorněný na Obrázku 12(b). Je známo, že Bennett linkage má právě 1 DoF, což je opět v rozporu s CGK formulací, která označuje manipulátor jako přeúčtený (dokonce stupněm 2), tedy opět neschopný pohybu.

$$b = 6, m = 4, p = 4, f_i = 1 \text{ pro } i = 1 \dots 4$$

$$M = 6 \cdot (4 - 1 - 4) + \sum_{i=1}^4 1 = -2 \quad (14)$$



(a) Sarrus linkage



(b) Bennett linkage

Obrázek 12: Příklady paralelních manipulátorů, pro které výpočet dle CGK selhává

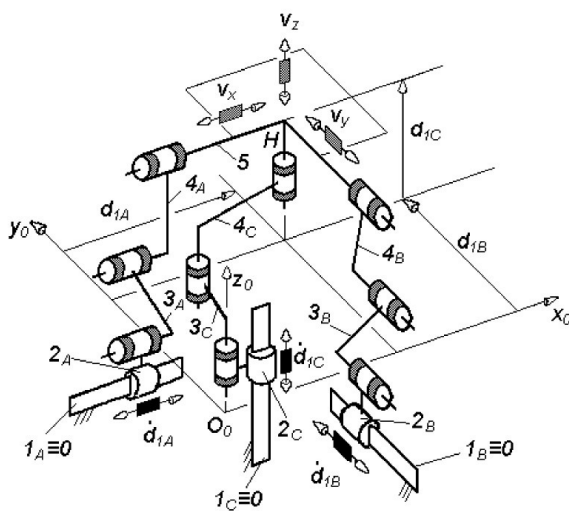
3. Kartézský paralelní manipulátor

Předpokládejme kartézský paralelní manipulátor, viz Obrázek 13. Manipulátor sestává z 3 kinematických řetězců typu **PRRR**, viz Obrázek 14. Koncový efektor manipulátoru umožňuje 3 translační DoF (pohyb v osách xyz). Zobecněné souřadnice \mathbf{X} koncového efektoru jsou dány souřadnicemi bodu \mathbf{H} , rychlosti potom jejich časovými derivacemi.

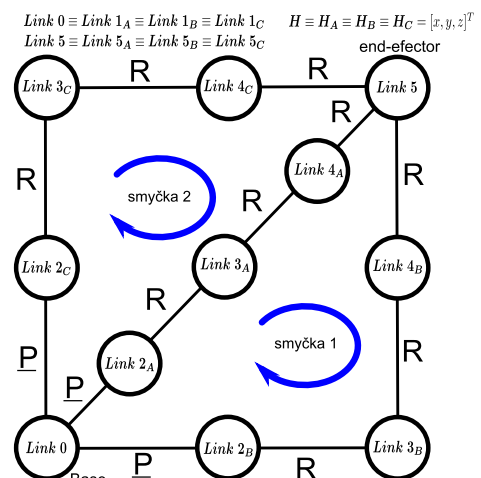
$$\mathbf{X} = [H_x \ H_y \ H_z]^T, \quad \dot{\mathbf{X}} = [V_x \ V_y \ V_z]^T \quad (15)$$

Kloubové souřadnice manipulátoru a jejich časové derivace jsou pro každý kinematický řetězec **A**, **B**, **C** dány jako:

$$\mathbf{Q}_x = [d_{1x} \ \phi_{2x} \ \phi_{3x} \ \phi_{4x}], \quad \dot{\mathbf{Q}}_x = [\dot{d}_{1x} \ \dot{\phi}_{2x} \ \dot{\phi}_{3x} \ \dot{\phi}_{4x}], \quad \text{kde } x = \{A, B, C\} \quad (16)$$

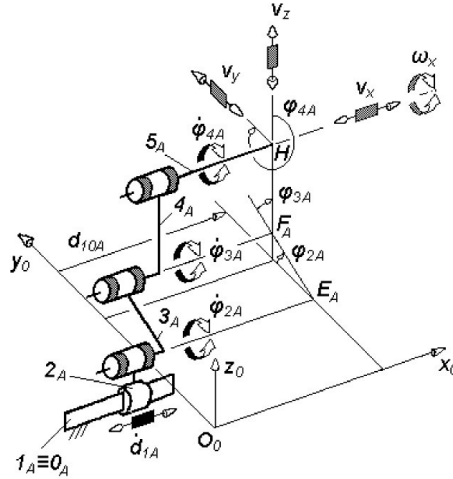


(a) Strukturální schéma manipulátoru



(b) Grafová reprezentace

Obrázek 13: Paralelní kartézský manipulátor včetně grafové reprezentace



Obrázek 14: Kinematický řetězec paralelního kartézského manipulátoru

Výpočet DoF koncového efektoru manipulátoru prostřednictvím CGK formulace opět dává nekorektní výsledek, neboť označuje zkoumaný paralelní manipulátor jako kinematicky přeúčtený, koncový efektor by nemohl vykonávat žádný pohyb.

$$b = 6, m = 11, p = 12, f_i = 1 \text{ pro } i = 1 \dots 12$$

$$M = 6 \cdot (11 - 1 - 12) + \sum_{i=1}^{12} 1 = 0 \quad (17)$$

★

2.4.2 Podrobná analýza kompletní kinematiky manipulátoru

Z Kapitoly 2.4.1 je patrné, že CGK formulace nedává vždy správné výsledky, a to dokonce pro jednoduché paralelní struktury manipulátorů. Podobné projevy chování lze pozorovat i u ostatních formulací pro výpočty DoF koncového efektoru manipulátoru, viz [9]. Důvodem je fakt, že kinematické vlastnosti manipulátoru jsou sice dány genericky jeho strukturálními parametry, ale výsledek dle zavedených formulací je relevantní pouze v případě, když jednotlivé smyčky manipulátoru tvořené jeho kinematickými řetězci jsou nejen geometricky, ale zejména kinematicky nezávislé. V případě, že smyčky jsou kinematicky závislé (a to nutně neznamená, že se robot nachází v singulární poloze z definice v Kapitole A.2), dochází k porušení generického předpokladu, kdy lze vypočítat DoF koncového efektoru manipulátoru pouze ze strukturálních parametrů udávající počty jednotlivých entit (kloubů, ramen, počty DoF kloubů atd.). Různé jiné formulace odvozené podobně jako CGK formulace se snaží tyto kinematické závislosti určitým způsobem zohlednit, avšak relevantní výsledky mohou být dány pouze podrobnou kinematickou analýzou (bohužel za cenu řádově vyšších výpočetních nároků). Problém demonstrováme na následujícím příkladu, kdy se budeme zabývat analýzou právě paralelního kartézského manipulátoru z Příkladu 8. Podobné analýzy lze nalézt např. v [8], [11], [3].

★ Příklad 9 (Podrobná kinematická analýza paralelního kartézského manipulátoru)

Z podmínky uzavřeného kinematického řetězce v bodě koncového efektoru H musí platit, že rychlosti (translační i úhlové) posledního ramena (posledního s.s.) kinematických řetězců A , B , C vzhledem k s.s. F_0 musí být shodné.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_A}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_A}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_B}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_B}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_C}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_C}^0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Můžeme tedy stanovit rovnice tzv. **kinematických omezení** pro dvě geometricky nezávislé uzavřené kinematické smyčky:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_A}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_A}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_B}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_B}^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ (smyčka 1)}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_A}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_A}^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{H_C}^0 \\ \boldsymbol{\omega}_{H_C}^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ (smyčka 2)} \quad (19)$$

Vzhledem k lineárním závislostem mezi rychlostmi kloubových a zobecněných souřadnic pro manipulátor v dané poloze, lze rovnice kinematických omezení (19) přepsat do tvaru (např. pomocí D-H úmluvy a metod pro výpočet DIK, IIK pro sériové manipulátory uvedené v [45]):

$$\mathbf{A}_{1[6x8]} \cdot [d_{1A}^{\dot{}}, \dot{\phi}_{2A}, \dot{\phi}_{3A}, \dot{\phi}_{4A}, d_{1B}^{\dot{}}, \dot{\phi}_{2B}, \dot{\phi}_{3B}, \dot{\phi}_{4B}]^T = \mathbf{0}_{[6x1]} \text{ (smyčka 1)} \quad (20)$$

$$\mathbf{A}_{2[6x8]} \cdot [d_{1A}^{\dot{}}, \dot{\phi}_{2A}, \dot{\phi}_{3A}, \dot{\phi}_{4A}, d_{1C}^{\dot{}}, \dot{\phi}_{2C}, \dot{\phi}_{3C}, \dot{\phi}_{4C}]^T = \mathbf{0}_{[6x1]} \text{ (smyčka 2)} \quad (21)$$

kde \mathbf{A}_1 a \mathbf{A}_2 závisí na aktuální poloze manipulátoru, tzn. kloubových souřadnicích d_{1x} , ϕ_{2x} , ϕ_{3x} , ϕ_{4x} pro $x = \{A, B, C\}$

Sloučením rovnic (20) a (21) dostáváme výslednou rovnici kinematického omezení manipulátoru:

$$\mathbf{A}_{[12x12]} \cdot [d_{1A}^{\dot{}}, \dot{\phi}_{2A}, \dot{\phi}_{3A}, \dot{\phi}_{4A}, d_{1B}^{\dot{}}, \dot{\phi}_{2B}, \dot{\phi}_{3B}, \dot{\phi}_{4B}, d_{1C}^{\dot{}}, \dot{\phi}_{2C}, \dot{\phi}_{3C}, \dot{\phi}_{4C}]^T = \mathbf{0}_{[12x1]} \quad (22)$$

Existuje tedy 12 rovnic pro 12 neznámých (rychlosti kloubových souřadnic), které musí platit v každém bodě pro uzavřený kinematický řetězec (2 smyčky) zkoumaného manipulátoru. Poznamenejme, že může opět existovat izolované množství bodů či daná podmnožina (varieta) pracovního prostoru, ve kterém budou rovnice kinematického omezení závislé. Tyto body opět nazýváme bodovými či množinovými singularitami, analogicky jako v Kapitole 2.1. V obecném (generickém) případě však počet nezávislých kinematických omezení daný počtem nezávislých rovnic v (22) určuje skutečný počet reálných omezení počtu DoF pro pohyb zkoumaného manipulátoru, v CGK formulaci právě parametr r . V případě paralelního kartézského manipulátoru lze ukázat (výpočtem hodnoty symbolického vyjádření matice \mathbf{A} v rovnici (22) např. ve výpočetním softwaru Maple [20]), že $\text{Rank}(\mathbf{A}) = 9$, tedy že existuje 9 nezávislých rovnic kinematického omezení ($r=9$). Těchto 9 nezávislých rovnic znamená, že s celkového počtu DoF, které jsou dodány do struktury manipulátoru jednotlivými klouby ($\sum_{i=1}^1 1 = 12$) je právě 9 DoF odebráno díky kinematickému omezení popsaného rovnicemi (22). Výsledný počet DoF manipulátoru je tedy dán ve tvaru původní definice CGK formulace (8) jako:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^p f_i}_{\text{počet DoF dodaný klouby}} - \underbrace{r}_{\text{počet nez. rovnic kin. omezení}} = 12 - 9 = 3 \quad (23)$$

Poznamenejme, že vyšetřením hodnoty matic \mathbf{A}_1 a \mathbf{A}_2 definující počet nezávislých rovnic kinematického omezení pro dvě geometrické smyčky manipulátoru vede k následujícímu pozorování:

$$\begin{aligned} \text{Rank}(\mathbf{A}_1) = r_1 = 5 &\Rightarrow 5 \text{ nez. rovnic kin. omezení smyčky 1} \\ \text{Rank}(\mathbf{A}_2) = r_2 = 5 &\Rightarrow 5 \text{ nez. rovnic kin. omezení smyčky 2} \end{aligned} \quad (24)$$

Každá geometricky nezávislá smyčka manipulátoru odebírá tedy právě 5 DoF, tedy výsledný počet DoF by byl místo výše uvedených 3 pouze 2.

$$\sum_{i=1}^p f_i - (r_1 + r_2) = 12 - 10 = 2 \quad (25)$$

Toto ovšem platí pouze v případě, že rovnice kin. omezení smyčky 1 jsou nezávislé s rovnicemi kin. omezení smyčky 2 (smyčky jsou nejen geometricky, ale také kinematicky nezávislé). Protože ale $\text{Rank}(\mathbf{A}) = 9$, *kinematická závislost mezi smyčkami existuje a nelze ji ignorovat*. Korektní výsledek počtu DoF koncového efektoru paralelního kartézského manipulátoru je tedy 3. ★

Strukturální syntéza s ohledem na vyšetřování DoF koncového efektoru manipulátoru, která hraje primární roli při syntéze celého zařízení, lze tedy shrnout následovně:

- Výsledek pomocí CGK formulace není obecně platný pro všechny manipulátory (totéž platí i pro ostatní odvozené formulace)

Důvod:

Formule nebere v potaz kinematické závislosti ve struktuře manipulátoru, uvažují se pouze strukturální parametry, tzn. počet kloubů, počet DoF kloubů, počet ramen , počet smyček (geometricky nezávislých), atd.

- Obecně neplatí, že geometricky nezávislé smyčky jsou zároveň i kinematicky nezávislémi
- CGK formulace a další odvozené mají pouze omezené použití (neplatí dokonce pro mnoho i jednoduchých případů)
- Dodnes nenalezena „univerzální“ (rychlá, jednoduchá a obecná) formulace pro výpočet DoF paralelních manipulátorů
- Relevantní výsledky při vyšetřování DoF paralelních manipulátorů je možné získat pouze podrobnou analýzou - nalezením nezávislých rovnic kinematického omezení.

3 Parametrická syntéza robotického zařízení - parametrická optimalizace

V Kapitole 2 jsme se zabývali strukturální syntézou manipulátorů ve smyslu jejich strukturálních (topologických) vlastností. Bylo ukázáno, že prioritním problémem je určení počtu DoF koncového efektoru daného manipulátoru. Tento problém je snadný pro sériové manipulátory, ale značně se komplikuje pro manipulátory paralelní. Jak již bylo řečeno, často je však problém strukturální analýzy ponechán na návrhářích daného robotického systému, kteří mají zkušenosti z oblasti nasazení a oblasti konstrukce robotických systémů. Společně s moderními možnostmi simulace mechanických soustav (Simulink/SimMechanics, Modelica, MapleSim) je tak návrh struktury manipulátoru řešen většinou simulacemi a následnými dílčími modifikacemi (tento proces je často iterován).

Nedílnou součástí návrhu robotického systému však tvoří následující proces, a to proces tzv. *parametrické syntézy*. Parametrická syntéza zahrnuje vlastní návrh kinematických parametrů, tzn. délky ramen manipulátoru, rozměry základny a koncového efektoru, orientace rotačních/translačních os kloubů atd.). Syntéza kinematických parametrů hraje klíčovou roli při návrhu robotického systému a nelze ji přikládat nikterak menší důležitost než návrhu strukturálnímu. Neuváženým a nesprávným návrhem kinematických parametrů lze velmi snadno zkazit vlastnosti jinak strukturálně vhodně navrženého zařízení. Hlavní náplň práce bude soustředěn právě na parametrickou optimalizaci. Podstatu parametrické optimalizace lze formulovat následovně:

Jak navrhnout kinematické parametry mechatronického systému (manipulátoru) s pevně danou strukturou (strukturálním návrhem), aby navržený mechanismus splňoval požadovaná kritéria (případně jejich kompromis) buď na celém svém pracovním prostoru, případně na jeho požadované podmnožině?

Uveďme dva příklady:

★ Příklad 10 (Příklady parametrické optimalizace manipulátorů)

1. Jak navrhnout délku dvou ramen 2 DoF planárního sériového manipulátoru takovým způsobem, aby při pohybu manipulátoru po zvolené trajektorii (přímce či obecně křivce v rovině) vykazovaly silové momenty na kloubech manipulátoru minimální hodnoty?
2. Jak navrhnout délky tří ramen 3 DoF cylindrického manipulátoru, aby se, při pohybu manipulátoru po zvolené trajektorii (přímce či obecně křivce v prostoru), projevila gravitace působící na ramena a koncový efektor manipulátoru minimálním možným způsobem do silových momentů aktuátorů?

★

Poznamenejme, že proces návrhu parametrů mechatronických systémů s danou strukturou může být dále rozšířen na návrh dynamických parametrů, např. hmotnosti, momenty setrvačnosti-rozložení hmoty. Tyto parametry jsou pochopitelně z velké části určeny již navrženou strukturou a kinematickými parametry společně s použitým materiálem při konstrukci, nicméně v některých speciálních případech lze zvažovat přidání dodatečných hmotností případně silových elementů (pružiny, tlumiče) do stávající navržené konstrukce manipulátoru za účelem zlepšení statických/dynamických vlastností. Pokročilou možností parametrické optimalizace pak může být stanovení kinematických, případně dynamických parametrů za účelem optimalizace říditelnosti mechatronického systému opět v pracovním prostoru či jeho podmnožině. Jinými slovy, jak navrhnout parametry mechatronického systému, aby byla zajištěna optimální možnost jeho ovlivnění řídicím systémem prostřednictvím použitých aktuátorů.

3.1 Současný stav problematiky parametrické optimalizace

V následující této kapitole je shrnut současný stav problematiky týkající se parametrické optimalizace. Jedná se o velmi stručný výtah z obsahu relevantních článků, ze které jsou patrné základní principy a často používané metody. Dvěma hlavními oblastmi řešerše jsou:

- **Optimální návrh - parametrická optimalizace**
Zahrnuje výsledky a poznámky z algoritmů parametrické optimalizace.
- **Indikátory optimality**
Většina optimalizačních algoritmů je založena na vyčíslování kritériální funkce. Otázkou je, jakým způsobem kritériální funkci vůbec definovat, co vlastně znamená pojem *optimální* návrh manipulátoru a jak definovat korektní, prakticky a fyzikálně opodstatněná kritéria optimality.

3.1.1 Optimální návrh

J-P.Merlet: Optimal design of robots, [24]

- Návrh robotů ve dvou krocích:
 1. **strukturální syntéza:** uspořádání kinematické architektury, typ a počet kloubů, způsob geometrického uspořádání kloubů a typ spojení rameno-kloub
 2. **parametrická syntéza:** délka ramen, umístění a orientace rotačních/translačních os kloubů (v podstatě D-H či K-K parametry)
- řada vlastností manipulátoru může být určena přímo z kinematické architektury manipulátoru.
Např.: dva manipulátory typu **PPP** s výsuvem ramen L **RRR** s délkou ramen L - objem pracovního prostoru **RRR** - objem prac. prostoru cca $40L^3$, **PPP** objem prac. prostoru $L^3 \Rightarrow$ **RRR** manipulátor z hlediska objemu prac. prostoru vhodnější, ale pouze jediná vlastnost nezávisající na hodnotě skutečných parametrů manipulátoru
- řada důležitých vlastností manipulátoru (silové poměry a rychlostní poměry konc. efektor vs. klouby, tuhost, atd.) striktně závisí na hodnotě parametrů - situace se výrazně komplikuje s uvažováním uzavřených kin. struktur
- ze zkušeností instituce INRIA vyplývá „pouze statisticky podložené“ pravidlo:
Manipulátor s a-priori lepším strukturálním návrhem, ale s nevhodně zvolenými parametry vykazuje výrazně horší vlastnosti než manipulátor s ne příliš vhodně zvolenou architekturou, ale vhodně (optimálně) navrženými parametry
To sice neznehodnocuje význam strukturální syntézy, ale zdůrazňuje důležitost syntézy parametrické.
- **Klasický přístup k parametrické optimalizaci (cost-function approach):**

$$\mathcal{P}^* = \underset{\mathcal{P}}{\operatorname{argmin}}(C), \quad \text{kde} \quad C = \sum_i w_i P_i(\mathcal{P})$$

kde w_i jsou váhy, $P_i \in \langle 0, 1 \rangle$ jsou jednotlivá kritéria (krit. fce) (0...kritérium nesplněno, 1...kritérium splněno) a \mathcal{P} je vektor parametrů.

Přirozeně hledáme lokální minimum krit. fce C . Pro takový přístup existuje celá řada nevýhod:

- kritériální funkce musí být efektivní cestou vyčísitelná (př. P_i vyjadřuje objem největšího kvádrů/koule vepsaného do pracovního prostoru manipulátoru se zachováním minimálního indexu podmíněnosti ... problém s výpočtem takového kritéria)
- krit. fce by měla být diferencovatelná (možnost využití gradientních metod)
- přesnost výpočtu kritériální funkce, krit. fce může být počítána některou aproximační numerickou metodou a poskytovat tak výsledek s danou chybou $\epsilon \Rightarrow$ např. mezi dvěma architekturami manip. lze porovnávat pouze za předpokladu, že krit. fce pro tyto architektury budou mít mezi sebou větší rozdíl, než je přesnost jejich výpočtu. Výpočetní čas krit. fce je často extrémě závislý právě na ϵ .
- Jak určit váhy w_i ? Váhy neurčují pouze prioritu dílčích kritérií vyjádřených pomocí P_i , ale musí se vypořádat i např. s problémem různých jednotek (např. P_1 je přesnost manip. v řádech 10^{-3} a P_2 je objem prac. prostoru v řádech 10^0) \Rightarrow normování! I malá změna ve váhách w_i může vést k diametrálnímu rozdílu v optimalizovaných parametrech.
- jednotlivé kritéria si mohou odporovat neboli se chovat protichůdně (např. objem prac. prostoru vs. dexterity index) \Rightarrow můžeme dostávat nerealizovatelné „optimální výsledky“. Nutno někdy volit další požadavky, že některá kritéria P_i nesmí klesnout pod hranici i na úkor uvolnění (zhoršení) ostatních kritérií.
- získáváme pouze jediné optimální řešení, vznikají tedy následující problémy (souvisí s citlivostí návrhu na nepřesnosti v návrhových (optimalizovaných) parametrech):
 - * při výrobě se objevují chyby z důvodu výrobních tolerancí \Rightarrow jaký bude reálný dopad na manipulátor (splnění uvažovaných kritérií)
 - * s existencí jediného řešení nemáme možnost vložit do optimalizace nějaké další kritérium (sekundární požadavky), které nemohly být zahrnuty do kritériální funkce C .
 - * s nalezenými optimálními parametry předpokládáme, že výrobce splní všechny námi kladené požadavky na výrobu manip., toto se děje jen zřídka, jaký bude tedy skutečný dopad na optimalitu celého zařízení při nedodržení některých požadavků (např. z ekonomických důvodů)?

• **Odlíšný přístup k parametrické optimalizaci: intervalový přístup (parameters space approach):**

Intervalová analýza:

- základní operace, bisekce intervalů
- jednoduchý příklad algoritmu pro výpočet přítomnosti singularit v prac. prostoru
- 2 metody vylepšení interval. analýzy: (vyšetřování parciálních derivací - monotónost fce..., filtrace (zúžení intervalů)...)
 - **Př:** Nalezení optimálních parametrů \mathcal{P} takových, aby se v prac. prostoru \mathcal{W} , nevykytovala žádná singularita.
 - „overestimated problem“ při intervalová analýze (přestřelení min/max hranice v intervalovém výpočtu fce)
 - využití sekundárního kritéria - po nalezení opt. parametrů respektive boxů, v kterých leží, lze ještě dále vybrat konkrétní parametry splňující sekundární kritérium

J-P. Merlet: Interval Analysis and Reliability in Robotics, [26]

- overestimation of ranges (problém při užití klasických pouček intervalové analýzy při výpočtu vztahů s jednou proměnou typu $x \cdot \sin(x)$ pro $x \in [0, 1]$)

- lze zohlednit numerické zaokrouhlovací chyby
- popsán opět základní alg. intervalové analýzy - metodami typu filtrace atd. lze výrazně vylepšit, ale toto je vždy závislé na konkrétní aplikaci
- lze využít paralelních výpočtů (jednotlivé subboxy jsou zpracovávány odděleně)
- **Příklady využití intervalové analýzy v robotice**

– DGM pro paralelní roboty:

- * numer. metody (Newton-Raphson) začínají od poč. polohy konc. ef, nelze zajistit, že v daném okolí této polohy neexistuje více než jedno řešení \Rightarrow nebezpečné
- * využití intervalové analýzy společně s Kantorovitch teorémem (lze nalézt interval v okolí (ball) poč. polohy \mathbf{X}_0 ve kterém \exists právě 1 řešení DGM)
- * příklad filtrace - zúžení intervalu pro zefektivnění metody, např. dokonce vyhození celého boxu, který nemůže být splněn

– *verification problem*: find $\text{Max}(\Delta\mathbf{X}) = \mathbf{J}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}, \mathcal{P})\Delta\mathbf{Q} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{W}$

– *design problem*: find $\text{Max}(\Delta\mathbf{Q}) = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}, \mathcal{P})\Delta\mathbf{X} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{W}$

Př.: Využití intervalové analýzy a základního algoritmu pro *Verification problem*:

Dána max. hranice pro přesnost polohování $\Delta\mathbf{X}^{max}$ a známe interval $[\mathcal{P}]$ (nemusí být interval) a přesnost aktuátorů $\Delta\mathbf{Q}$. Cílem je ověřit, zda-li na pracovním prostoru \mathcal{W} splňuje manipulátor alespoň přesnost udanou max. hranicí $\Delta\mathbf{X}^{max}$ při dané přesnosti aktuátorů $\Delta\mathbf{Q}$.

Řešení: Pro daný interval $[\mathbf{X}]$ (v prvním kroku $[\mathbf{X}] = \mathcal{W}$) lze vypočítat $[\Delta\mathbf{X}]$: Pokud $\overline{\Delta\mathbf{X}} < \Delta\mathbf{X}^{max}$ podmínky splněny pro $[\mathbf{X}]$, pokud $\underline{\Delta\mathbf{X}} > \Delta\mathbf{X}^{max}$ podmínky nesplněny pro prac. prostor, pokud $\Delta\mathbf{X}^{max} \in [\Delta\mathbf{X}]$ bisekce intervalu $\Delta\mathbf{X}$ \rightarrow nově vzniklé boxy a iterace alg. (do daného počtu bisekcí)

- vyšetřování singularit - základní algoritmus shodný s [24], vylepšení metod pro odhad intervalu determinantu inverzního jakobiánu
- Ověření trajektorie (trajectory verification)
Např. problém mechanických limitů aktuátorů, omezení prac. prostoru. Příklad na ověření maximálního rozsahu aktuátorů při definovaném pohybu manipulátoru
- návrh optimálních parametrů manipulátoru, podobné k [24].

Př.: nalézt opt. parametry Stewart platformy \mathcal{P} tak, aby manipulátor dosáhl v prac. prostoru do všech kombinací min/max zobecněných souřadnic (vrcholy hyperkrychle = pracovní prostor) a nebyly překročeny max. rozsahy výsuvu aktuátorů ρ_{min}, ρ_{max} .

Řešení: Pro daný interval parametrů (box) $[\mathcal{P}]$ spočítat interval $[\rho_i] \quad \forall i$ (z DGM) pokud $\underline{\rho}_i > \rho_{min}$ a $\overline{\rho}_i < \rho_{max}$ pro všechny $i \rightarrow$ OK-box $[\mathcal{P}]$ vyhovuje, pokud $\underline{\rho}_i < \rho_{min}$ nebo $\overline{\rho}_i > \rho_{max}$ alespoň pro jedno $i \rightarrow$ špatně-box $[\mathcal{P}]$ se vyhazuje, jinak bisekce $[\mathcal{P}]$.

Marco Ceccarelli, Erika Ottaviano: Kinematic Design of Manipulators, [21]

- obecné schéma návrhu robotu (tzn. syntéza kin. řetězce, návrh parametrů, návrh robot. komponent - senzory, aktuátory, řízení), vývoj robotu = iterační proces
- předložen přehled stávajících metod pro kinematický návrh manipulátorů - rozšíření z oblasti syntézy mechanismů (Precision Point techniques, Workspace design, Inversion algorithms, Optimization formulation), aplikace Screw Theory, aplikace 3D kinematiky/geometrie (Lie Group Theory, Dual numbers, Quaternions, Grassmann Geometry).
- jeden z cílů - obecný optim. alg. pro sériové i paralelní manip.

- **Kinematické úlohy:** IGM, DGM ale i tzv. **Kinematic Design Problem** (dán pracovní prostor manipulátoru, třeba i diskrétně a nutno najít struktury a parametry manip, aby byl prac. prostor pokryt + např. s nějakou kvalitou)
- klasické rozdělení optimalizace: *typ, upořádání a počet kloubů a ramen = strukturální optimalizace a parametrická optimalizace*
strukturální optimalizace: řešena prostřednictvím zkušenosti návrhářů, případně expertní systémy, atd.
- **Parametrická optimalizace:** (náplň textu)
 - výpočet objemu prac. prostoru z diskrétních hodnot (binární mřížka, body na hranicích prac. prostoru) => komplikace s nekonvexními tvary, díry v prac. prostoru, atd.
 - *Precision points techniques:* definují se nějaké body v prac. prostoru robotu, v těch se vypočítají nějaké ukazatele (tuhost, síly, podmíněnost, rychlost, atd.), sestaví se soustavy rovnic pro tyto body a hledá se max/min přes parametry (tzn. počet bodů odpovídá počtu hled. parametrů)
 - Využití Screw theory
 - Optimization problem design
 - * základní definice problému jako minimalizace kritériální fce dle návrh. parametrů s omezením na omezení parametrů ve tvaru rovností a nerovností
 - * 2 základní problémy: jak formulovat krit. optimality (computational efficiency), jak ho řešit vzhledem k parametrům, dále problém s globálním řešením
 - * příklady optimalizace

J-P. Merlet: Interval Analysis for Certified Numerical Solution of Problems in Robotics, [27]

- intervalová analýza vhodná pro řešení problémů na PC (numericky)
- základní výhody int. analýzy:
 - nalezení řešení problému v daném intervalu (výhodné v případě, že neznámé jsou fyzikální parametry - např. parametrická optimalizace)
 - lze vzít v úvahu numerické zaokrouhlovací chyby (hodnoty parametrů/neznamých jsou intervaly nikoliv přesné bodové hodnoty) => řešení je garantováno a je numericky bezpečné
 - lze vzít v úvahu parametrickou neurčitost (přirozená vlastnost fyzikálních modelů)
 - pro kritické aplikace, spolehlivost (operační roboty)
 - složitost exponenciální (bisekce) - ale i tak může být nepoužitelné
 - odkazy na nějaké aplikace intervalové analýzy (joint clearance, robot reliability, navigation and localization, motion planning, collision detection, calibration)
 - int. analýza lze řešit paralelně (např. pro více kritérií, vyčíslování int. boxů v různých procesech = parallel computing)
 - **obecný popis int. analýzy**
 - * využití intervalových boxů, s každým boxem jsou prováděny 4 zákl. operace
 - **filtrace:** dokázání pomocí znalosti problému, že řešení neleží v daném boxu, či, že daný box může být příslušně zúžen (velmi významný krok, výrazná úspora výp. času)

- **vyčíslení:** operátor vrací: řešení neexistuje v daném boxu, všechny hodnoty v boxu jsou řešením, nelze rozhodnout
- **existence:** operátor vrací, že v daném boxu existuje právě jediné řešení, které lze vypočítat s libovolnou přesností
- **příklady:** filtrace, existence (Kantorovitch theorem + inflation process (Neumaier))
- **obecné závěry o int. analýze:**
 - základní alg. jednoduchý **ALE** pro efektivní běh alg. nutné velmi dobré expertní znalosti problému (např. pro filtraci, atd.)
 - často použití vhodné heuristiky (u filtrace, bisekce) výrazně (1/100000) zlepšit výpočetní nároky. Bohužel není známá žádná efektivní metoda pro určení těchto heuristik.

- **Příklady použití int. analýzy u robotů:** DGM (Gough platform), Singularity v prac. prostoru

Optimální návrh:

Formulace: Z daného přípustného boxu parametrů manipulátoru \mathcal{P} (# boxů odpovídá # návrh. parametrů, \mathcal{P} -vektor intervalů dimenze 1) určit boxy (po alg.), které splňují dané kritérium (síly, rychlost, podmíněnost, atd.) na celém prac. prostoru definovaného jako boxy zobecněných souřadnic \mathcal{W} (# boxů odpovídá # zobecněných souřadnic, \mathcal{W} -vektor intervalů dimenze 1)

Řešení: Využití dvou interval. alg. S_1 a S_2 . Alg. S_2 řeší vyčíslení pro alg. S_1 . Tedy pro daný box $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ zjišťuje, zda-li je kritérium splněno na celém \mathcal{W} - int. analýza, pokud ne, bisekce \mathcal{W} a opět ověření až do dané min. velikosti boxů $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W}$. Alg. S_1 se potom rozhoduje o bisekci $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ na základě evaluace $S_2 \Rightarrow$ nalezení subboxů $\mathcal{B}_{\mathcal{P}} =$ intervaly opt. parametrů!

V případě využití optimalizace dle více kritérií - dvě základní možnosti:

- provést opt. pro všechny krit. nezávisle \Rightarrow více výsledných int. boxů $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ a udělat jejich průnik - výhody: lze určit, jaké krit. je nejhorší, co se týče splnitelnosti (žádné, či malé $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$) a to případně vypustit, nevýhody: řešit průniky, výpočetně náročné - počítá se celá opt. s velkými poč. boxy pro všechny krit.
- postupně: provést opt. dle jednoho krit. a výsledné int. boxy $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ jsou vstupem pro opt. pro další krit, výhody: úspora výp. času, nevýhody: pokud jsou výsledné boxy $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ prázdné, nelze určit, jaké kritérium to „zkazilo“.

S. Regnier, F. B. Ouezdou: General Method for Kinematic Synthesis of Manipulators with Task Specifications, [30]

- optimalizace založená na *Distributed Solving Method (DSM)*
- řešení problému nalezení jak kloubových souřadnic tak geometrických parametrů pro projetí co nejlépe danou trajektorii (určenou k diskretními body)
- **optimalizace kl. souřadnic:** pro každý bod je vypočítána opt. hodnota kl. souřadnic pomocí distribuované metody, tzn.:
 - uvažována i -tá kl. souřadnice jako proměnná, ostatní kl. s. včetně geom. par. jsou konstanty
 - krit. fce vypočtena jako vzdálenost M_i (norma hom. trans. matic, viz článek, orientace+pozice) mezi požadovanou polohou \mathbf{T}^* a polohou konc. efektoru ovlivněnou i -tou kl. souř. vzhledem k s.s. F_{i-1} , pro všechny k :

$$\mathbf{T}_0^f \cdot \mathbf{T}_{i-1}^0(q_1, \dots, q_{i-1}) \cdot \mathbf{T}_i^{i-1}(q_i) \cdot \mathbf{T}_n^i(q_{i+1}, \dots, q_n) = \mathbf{T}_n^f = \mathbf{T}^*$$

$${}^kF_i(q_i) = \|\mathbf{T}_i^{i-1}(q_i) \cdot \mathbf{T}_n^i(q_{i+1}, \dots, q_n) - (\mathbf{T}_0^f \cdot \mathbf{T}_{i-1}^0(q_1, \dots, q_{i-1}))^{-1} \cdot \mathbf{T}^*\|^2, \forall k$$

– lze analyticky vypočítat opt. řešení pro kl. s. q_i (vše ostatní konst.!)

$$\frac{d^k F_i(q_i)}{dq_i} = 0 \Rightarrow {}^k q_i^m \text{ pro všechna } k$$

– iteračně v dalších krocích lze vypočítat pro všechny ostat. kl. souř.

• **optimalizace geom. par:** musí být počítáno pro všechna k (diskrétní body)

– kriterium (analogicky jako výše), ${}^k q_i$ konstantní

$${}^k G_i(\text{DH geom.par}) = \sum_{j=1}^k \|\mathbf{T}_i^{i-1}(q_i) \cdot \mathbf{T}_n^i(q_{i+1}, \dots, q_n) - (\mathbf{T}_0^f \cdot \mathbf{T}_{i-1}^0(q_1, \dots, q_{i-1}))^{-1} \cdot \mathbf{T}^*\|^2$$

– opět lze analyticky najít optim. hodnoty geom. par (vždy v každém kroku iterace jeden geom. par, ostatní konstantní)

- uvedeny příklady 6DoF robot (i včetně limitů/omezení na par./souřadnice, obstacle avoidance, umístění manipulátoru-base frame)
- Vždy nalezeno v každém kroku jen lok. optimum v jednom parametru/ souřadnici \Rightarrow jaké budou důsledky pro konvergenci algoritmu?

Pettersson, M. and Krus, P. and Andersson, J.: On optimal drive train design in industrial robots, [32]

- optimální návrh převodovky manipulátoru (z uvažované nabídky převodovek) s ohledem na udržení požadavků a snížení ceny robotu
- požadavky (robot performance) = cycle time, life time, cost
- nalezení kompromisu mezi požadavky
- založeno na *direct search algorithm*

Snyman, Jan A.: Practical mathematical optimization : an introduction to basic optimization theory and classical and new gradient-based algorithms,[42]

- celkem podrobná publikace unconstrained X constrained opt. problems
- **Constrained opt.: equality X inequality constraints**

– **equality constraints:**

- * řešení *Metoda Lagrange multiplikátorů*
- * známá nutná podmínka: parc. derivace dle argumentů a multiplikátorů (=omezení), viz. str: 63
- * postačující podmínka: složitá, ale ukázáno, že pokud krit. fce i funkce definující omezení jsou konvexní - je nutná podmínka zároveň postačující
- * Platí:
Předpokládejme x^* min. fce $f(x)$ s respektováním omezení $h(x) = 0$ (tedy známe i λ^*) a zároveň pro λ z okolí λ^* má Lagrangian $L(x, \lambda)$ lok. minimum vzhledem k x v okolí x^* potom:
 $L(x, \lambda)$ má sedlový bod v bodě $[x^*, \lambda^*]$

– **inequality constraints:**

- * inequality constraints \rightarrow equality constraints: zavedením přídavné proměnné: inequality: $g_j(x) < 0 \rightarrow$ equality $g_j(x) + \theta_j^2 = 0$, tedy $g_j(x) = -\theta_j^2$ (nerovnost splněna) \Rightarrow řešení problému pomocí Lagrangeových multiplik. (více proměnných - komplikovanější řešení rovnic)
- * **Karush-Kuhn-Tucker** (KKT) nutná podmínka existence lok. minima x^* fce $f(x)$ s omezením tvaru nerovností $g_j(x) \leq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$: viz str. 70: x^* a λ^* musí splňovat KKT podmínku. Pouze nutná podmínka, nikoliv postačující. KKT nutná podmínka je zároveň postačující, pokud $f(x)$ i $g_j(x)$ jsou konvexní funkce!
- * **kvadratické programování:**
 - minimize $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$ za předpokladu $Cx \leq 0$
 - známe-li aktivní množinu omezení v bodě řešení x^* (tzv. active set: $\hat{C}x = 0$), řešení se redukuje na Lagrangeovu metodu multiplikátorů
 - \Rightarrow QP je majoritně založeno na tom, jak nalézt aktivní množinu omezení v bodě řešení x^* a potom využít metodu Lagrangeových multiplikátorů.
 - Metoda „Theil and Van de Panne“, viz str. 78, Stručně: omezení ve tvaru nerovností se nejprve vezmou jednotlivě jako aktivní (tvar rovnosti) a najde se extrém pro každé jednotlivé omezení, pokud žádný nevyhovuje nerovnostem, vezmou se kombinace omezení (opět tvar rovnosti) a tak dále, dokud nějaké kombinace nevyhovují všem nerovnostem (tyto kombinace jsou označeny jako aktivní) a v nich se pomocí KKT určí jediné lok. minimum vyhovující všem nerovnostem. (KKT zřejmě kvůli rozhodnutí \leq , \geq , jinak by snad šlo porovnat hodnotu krit. fce v nalezených extrémech)

Park, F.C. and Bobrow, J.E.: Efficient geometric algorithms for robot kinematic design,[31]

- předloženy výhody gradientních metod optimalizace, ALE nutno umět vypočítat gradient
- se standardní notací pomocí DH parametrů - složité, a často problémy s necitlivostí na malé disturbance v kinematických parametrech v případě kloubů s téměř paralelními osami (viz kalibrace robotů)
- výpočet kritéria vzdálenosti konc. ef. manip. od požadované referenční polohy (poloze i orientace) s ohledem na: nezávislost výběru ref. s.s. (polohy), atd. \Rightarrow výběr vhodného kritéria (výpočet/důkaz pomocí Lieovy algebry)
- výpočet analytického gradientu krit. fce pomocí Lieovy algebry
- příklad: dva kooperující roboty, které mají dosáhnout stejné polohy (držení obrobku) pro 8 různých případů v prac. prostoru $\Rightarrow 2 \cdot 6 \cdot 8$ neznámých kl. souřadnic + 1 neznámá jako vzájemný posun robotů od sebe. Problém navržen tak, aby roboty nikdy nemohly (viz jejich kin. parametry) dosáhnout přesně 8 určených poloh. Kritérium udává součet kvadrátů vzdáleností konc. ef. robotů od těchto poloh - krit. fce (ze které se počítá gradient) + omezení optimalizace - kooperující roboty, tzn. poloha robotu 1 = poloha robotu 2
- optimalizace prováděna pomocí Matlabu, fce **fmincon** (nelineární opt. s omezením - využívá sekvenční kvadratické programování s linearizací omezení ???)

Lining Sun and Qingyong Ding and Xinyu Liu: Optimal kinematic design of a 2-DOF planar parallel robot,[44]

- opt. návrh 2DoF planárního paralelního robotu se smíšeným kritériem (kompromis mezi přesností, rychlostí a podmíněností) v předepsaném tvaru prac. prostoru (vepsaný čtverec do prac. prostoru manip.)

Vahit Mermertaş: Optimal design of manipulator with four-bar mechanism, [29]

- optimalizace 4-bar mechanismu (nalezení návrhových parametrů)
- výsledek: pokud zafixujeme všechny parametry, lze nalézt maximum kritéria (manip. index) pro danou polohu manip. (kl. souřadnice)
- pokud „uvolním“ nějaký (jeden, či více) par (v podstatě jakoby to byly další kl.), můžeme kritérium vylepšit (optimalizovat) změnou těchto uvolněných parametrů podél trajektorie manip. (kl. souřadnic)
- toto asi známe z redundantních manipulátorů (což je vlastně uvolnění některých návrhových parametrů) a opt. krit. podél pohybu manip.
- ALE dostáváme proměnné návrhové parametry podél trajektorie - jak řešit?

Callegari, M. and Palpacelli, M.-C.: Kinematics and optimization of the translating 3-CCR/3-RCC parallel mechanisms, [4]

- analýzy dvojice paralelních robotů typu 3-CCR a 3-RCC
- analýza kinematiky, DoF
- optimalizace parametrů: multiobj. krit (objem. prac. prostoru, velikost konc. ef., dexterity index - vše v součtu), numericky integrována pře celý prac. prostor
- diskretizace mřížkou přes prac. prostor
- optimalizace metodou Monte Carlo

J.A. Snyman: A new and dynamic method for unconstrained minimization, [35]

- problém minimalizace krit. fce $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je převeden na pohyb hmotné částice v konzervativním potenciálovém poli reprezentovaném fci potenciální energie $\mathbb{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = [x_i]$
- pro pohyb hm. částice o jednotkové hmotnosti v potenc. poli platí: $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\mathbf{F}(\mathbf{x})$
- pro bilanci kin. $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ a pot. $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ energie v diskrétních čas. okamžicích platí:

$$\Delta\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{T}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{T}(\mathbf{x}_k) = -\Delta\mathbf{T}_k$$

- problém jak nastavit parametry manipulátoru tak, aby byla splněna podmínka, že robot může projet zadanou trajektorií (koincidenční body zadané v čase t_n) - existovalo řešení IKÚ
- ukázáno pro closed-loop mechanismy, kde je navíc nutná splnit podmínka realizovatelnosti (uzavření kin. řetězce)
- rovnice kin. omezení pro polohu v čase t_n :

$$\Psi(\mathbf{Q}(t_n), t_n) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}(t_n)) - \mathbf{X}(t_n) = \mathbf{0}$$

- podmínka protnutí koincidenčních bodů \mathbf{X}_n^* v čase t_n :

$$\mathbf{X}(t_n) = \mathbf{X}_n^*$$

- \Rightarrow výsledná vazební podmínka:

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{Q}(t_n), t_n) = \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{Q}(t_n), t_n) \\ \mathbf{X}(t_n) - \mathbf{X}_n^* \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- TRIK: z opt. návrhových parametrů se udělají aktivní klouby, tzn. nová definice kl. souřadnic (rozšířený vektor kl. souřadnic): $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_J^T, \mathbf{Q}_{DV}^T]^T$, kde \mathbf{Q}_J jsou aktivní kl. manipulátoru (aktuátory) a \mathbf{Q}_{DV} jsou „fiktivní, přidané“ kl. manip. korespondující s návrhovými parametry.

\Rightarrow rovnice $\tilde{\Psi}(\mathbf{Q}(t_n), t_n) = \mathbf{0}$ je nedourčená ($\dim(\mathbf{Q}) > \#\text{rovnice, DoFs}$)

- **formulace problému:** nalézt trajektorii manipulátoru v rozšířených souřadnicích $\mathbf{Q}(t_n)$ takovou, která vyhovuje vazební podmínce $\tilde{\Psi}(\mathbf{Q}(t_n), t_n)$ a zároveň minimalizuje varianci návrhových parametrů \mathbf{Q}_{DV} (v ideálním případě je variance nulová - konstantní návrh. parametry).

Tzn. nalézt řešení opt. problému pro každý krok t_n (konkrétní koincidenční bod):

$$\min_{\mathbf{Q}} \beta(\mathbf{Q}), \quad \beta(\mathbf{Q}) = \sum_{q_k \in \mathbf{Q}_{DV}} \frac{1}{2} (q_k - \bar{q}_k)^2$$

$$\text{za vazební podmínky: } \tilde{\Psi}(\mathbf{Q}(t_n), t_n) = \mathbf{0}$$

kde \bar{q}_k je střední hodnota q_k získaná z minulého cyklu optimalizace ($\bar{q}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_k$, N je # koincidenčních bodů)

- **řešení opt. problému:** optimalizace s vazebními podm. typu rovností:

- rozšířené kritérium $\mathbf{K}(\mathbf{Q}(t_n), t_n)$, $\boldsymbol{\lambda}$ - Lagrange. multipl.:

$$\mathbf{K} = \beta(\mathbf{Q}) + \tilde{\Psi}(\mathbf{Q}(t_n), t_n)^T \boldsymbol{\lambda}$$

- nutné podmínky existence extrému:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{Q}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{Q}} \right)^T + \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{\Psi} = \mathbf{0}$$

$$\text{dohromady: } \mathbf{H}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{Q}} \right)^T + \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \\ \tilde{\Psi} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\text{kde } \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{Q}} = [d\beta_1, \dots, d\beta_i \dots]^T, \quad d\beta_i = \begin{cases} q_k - \bar{q}_k & \text{pro } q_k \in \mathbf{Q}_{DV} \\ 0 & \text{pro } q_k \notin \mathbf{Q}_{DV} \end{cases}$$

– \Rightarrow nutno řešit $H(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$, ale jak (numericky), to už v článku není napsáno, jen se k řešení využívá jakobián: $\mathbf{J} = \frac{\partial H(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \{\mathbf{Q}^T, \boldsymbol{\lambda}^T\}}^T$ - takže pravděpodobně numerika

- **JINÝMI SLOVY:** využití numer. řešení pro redundantní manip. (viz RIGO [45])
 - sekundární kritérium = β
 - pro každý koincidenční bod řešit IKÚ numericky \Rightarrow nalezení $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_J, \mathbf{Q}_{DV}]$
 - po proběhnutí celého cyklu (všechny koincidenční body) znovu vypočítat $\bar{q}_k = E(q_k) \forall k$
 - spustit cyklus znovu - iterace až do uspokojivé hodnoty $\text{Var}(q_k)$
- tato opt. zajistí **POUZE** nalezení takových návrh parametrů, které zajistí možnost projetí koincidenčních bodů (alespoň přibližně, může nastat v případě, že se návrh. par neustálí úplně)
- **PROBLÉMY:** konvergence?, přídatné kritérium (nejen projet koincidenční body, ale také zajistit požadovanou kvalitu prac. prostoru!)
- **ještě jiná formulace:** Jak nalézt **konstantní hodnoty** návrh. parametrů manip. tak, aby se trajektorie v rozšířených kl. souřadnicích $(\mathbf{Q}_J, \mathbf{Q}_{DV})$ co nejvíce blížila trajektorii, kde \mathbf{Q}_{DV} jsou konstantní po celou trajektorii (nevariují podél trajektorie)

J.-F. Collard , P. Fisette, P. Duysinx: Optimal synthesis of mechanisms using time-varying dimensions and natural coordinates, [12]

- problematika založená na podobném principu jako [10]
- ukázáno na 4-bar anip.
- mezi příslušné body reprezentující klouby jsou umístěny modely pružiny s tuhostí k_i a přirozenou délkou l_i (návrhový parametr)
- definována trajektorie opět jako koincidenční body (které se mají projet konc. ef - bodem)
- **optimalizace** nalezení takové konfigurace manipulátoru (v podstatě kl. souřadnice, i když zde jsou definovány tzv. *floating poits (FP)* - vnitřní pohybující se body manip.), které minimalizují sílu v pružinách pro každý koincidenční bod \Rightarrow pro každý koincidenční bod nalezeny FP, které minimalizují energii v pružinách \Rightarrow dostáváme opt. vzdálenosti mezi FP v daném koincidenčním bodě. Tyto opt. vzdálenosti jsou zprůměrovány přes všechny koincidenční body a je vypočtena nová přirozená délka pružin (a iteruje se).
- v podstatě vypuštěny z úvahy kl. souřadnice (i když nicméně ty lze vypočítat z polohy FP)
- nemusí být dosaženo globální optimum
- úprava - jeden cyklus (iterace přes všechny koincidenční body) využita k prvotnímu odhadu FPs a potom globální optimalizace přes FP i přirozené délky (trust region, atd...) - ani tak nemusí být nalezeno gl. optimum (i při použití gen. alg.)
- problém nalezení gl. optima řešeno spuštěním z více p.p. a výběrem

J.A. Alba and M. Doblaré and L. Gracia: A simple method for the synthesis of 2D and 3D mechanisms with kinematic constraints, [2]

- optimalizace, předepsaný pohyb a minimalizace vzd. skutečného a předepsaného pohybu, pravděpodobně podobné jako v [12], objective function = strain energy
- zavedení **přírozených souřadnic (natural coordinates)**: nodes and elements - souřadnice hm. bodů reprezentující klouby
- analytické vyjádření některých omezení (fixní body, pohyb v daném směru, převodovka,...)
- **proces optimalizace:**
 - **lokální opt.:** nalezení přírozených souřadnic manip. (souřadnice jednotlivých bodů), které minimalizují krit. fci (*strain energy*) za podmínky, že je konc. ef. manip. uvažován v požadovaném bodě (synthesis point). Přírozené délky ramen (pružných elementů) jsou v této fázi konstantní! \Rightarrow „active mechanism“ = poloha přír. souřadnic pro každý synthesis point, které minimalizuje krit. fci - nalezené přír. souřadnice použity pro gl. opt. podobně jako v [12].
 - **globální opt.:** nalezení přírozených souřadnic manip., souřadnic pevných bodů a přírozené délky ramen tak, aby byla krit. fce (ta samá jako u lok. opt.) minimalizována přes všechny synthesis points.
 - lokální opt. využita jako poč. bod (máme opt. přír. souřadnice vzhledem k počátečním přírozeným délkám ramen pro všechny synthesis points, tak aby. strain energy (krit.fce) byla optimalizována)
 - navíc lze ještě přidat omezení např. na rychlosti v synthesis points \Rightarrow zhoršení krit. fce., dále tomu moc nerozumím (v podstatě kompromisní řešení)
 - výsledek nalezení přírozených souřadnic (trejektorie robotu) a fixních bodů a délek ramen
- zavedení přír. souřadnic zjednodušuje výpočet kin. omezení a krit. fce (např. vyčíslení krit. fce jsou jen vzdálenosti mezi příslušnými body robotu)
- optimalizace provedena na základě **SQP**

J.M Jiménez and G Álvarez and J Cardenal and J Cuadrado: A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms, [13]

- pěkná formulace **problému optimalizace (obecně)**:
 - *type synthesis*: výběr typově vhodného mechanismu, který bude splňovat požadavky pro danou úlohu (druhy použitých ramen, kloubů, převodovek, atd.)
 - *number synthesis*: stanovení počtu kloubů, ramen, typ kloubů s ohledem na požadovaný počet DoF, redundanci, atd.
 - *dimensional synthesis*: výběr vhodných konkrétních hodnot geometrických parametrů, aby byly uspokojeny požadavky na manip.
 - *type and number synthesis* významně závisí pouze na zkušenosti návrháře (automatizace a algoritmizace velice složitá), *dimensional synthesis* - algoritmizovatelná

Dimensional synthesis: dva typy omezení definované při opt.:

- *functional constraints*: = požadavky na opt., omezení pohybu manip.

- *function generation synthesis*:
Získat výstupní úhel ψ^i (souřadnici) mechanismu co nejbližší k hodnotě předepsané funkce f vstupního úhlu ϕ^i (v podstatě systém vaček - funkce závislostí f): $\psi^i = f(\phi^i)$, $i = 1 \dots N$
- *path generation synthesis*:
Návrh mechanismu a jeho pohybu tak, aby zvolený bod na manipulátoru \mathbf{X} sledoval požadovanou trajektorii. Tzn. $\mathbf{X} - \mathbf{X}_p^i = 0$, kde \mathbf{X} je polohový vektor zvoleného bodu na manip. a \mathbf{X}_p^i je známý, určený, požadovaný pohyb zvoleného bodu, $i = 1 \dots N$
- *rigid body guidance*:
Zobecnění *path generation synthesis* (navíc orientace) - na manip. je zvolen s.s. F , který má sledovat je známý, určený, požadovaný pohyb s.s. F_i , $i = 1 \dots N$.
- obecně lze *functional constraints* zapsat jako:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}^i) = \mathbf{0}, \quad i = 1 \dots N, \quad \mathbf{q}^i \text{ závislé souřadnice - přirozené/relativní=kloubové}$$

- *geometric constraints*: rovnice kin. omezení, omezení dané kinematikou manipulátoru (DGM, IGM)

- lze vyjádřit v *přirozených souřadnicích (natural coordinates, fully Cartesian coordinates)*:

Přirozené souřadnice:

- * závislé kartézské souřadnice nějakých bodů manipulátoru (většinou jsou body umístěné v kloubech)
- * každé rameno manip. definováno jednoznačně dvěma body (přirozené souřadnice), některé ramena mají body společné \Rightarrow redukce $\#$ souřadnic
- * kinematické uspořádání manip. určuje rovnice kin. omezení jako funkce přirozených souřadnic (rovnice plynou z principu popisu tuhých těles (ramen) a z uspořádání a typu kloubů, tzn. využití analytického popisu rovnoběžnosti/kolmosti vektorů, koincidence bodů, bod ležící na přímce, atd. \Rightarrow skalární/vektorové součiny, atd.)
- * výhody:
 - geometrická omezení jsou kvadratickými, či lineárními fcemi přír. souřadnic
 - geometrické návrh. par \mathbf{b} jsou obsaženy explicitně v rovnicích kin. omezení
 - jednoduchá definice krit. fce a efektivní implementace
 - přepočitatelné na nezávislé/závislé kl. souřadnice - relativní souřadnice
 - absence transcendentních funkcí sin, cos (nebo alespoň výrazná redukce jejich počtu) ve srovnání využití kl. souřadnic jako např. v DH úmluvě.
- * nevýhody?:
 - jak určit rovnice kin. omezení - algoritmizovatelný způsob jako např. u DH úmluvy?
 - závislost mezi přír. souřadnicemi? kolik a jaké jsou nezávislé (jako např. kl. souřadnice)
 - transformace přír. souřadnic do nezávislých kl. souřadnic (relativních)

- nebo lze vyjádřit v kl. (nezávislých pro serial. manip. či závislých pro parallel manip., relativních) souř. \mathbf{q} jako $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, kde \mathbf{b} jsou geometrické návrh. par.

- výsledná rovnice omezení (kinematické + funkcionální):

$$\Theta^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}) \\ \mathbf{F}(\mathbf{q}^i) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

- obecně souřadnice \mathbf{q} mohou být závislé (viz kl. souřadnice paralelních manip. - aktivní, pasivní)
- soustava rovnic pro $i = 1 \dots N$ je zpravidla přeuročená, neboť máme:
celkový # rovnic: ($N * \#$ rovnic. kin. omezení, zpravidla = DoF manip.) + # rovnic funkcionálního omezení (libovolné)
celkový # neznámých: $N * \#$ souřadnic \mathbf{q}^i + # návrh. parametrů
- trochu se smazává rozdíl mezi kin. omezením a funkcionálním omezením, neboť např. kin. omezení může rovnou obsahovat koincidenční body, kterými se má projet:

Př.: 2DoF planární paralelní manipulátor

Kin. omezení: $\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = [q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}]^T = 0$, q_{11} resp. q_{12} jsou aktivní resp. pasivní kl. souř. 1. sériového ramene a q_{21} resp. q_{22} jsou aktivní resp. pasivní kl. souř. 2. sériového ramene

$\mathbf{b} = [l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}, l]$ návrh. geom. par - délky ramen a rozteč základny

Omezení na projetí koincidenčních bodů bodem \mathbf{E} manip. = funkcionální omezení dle článku: $\mathbf{F}(\mathbf{q}^i) = \mathbf{E}(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}) - \mathbf{E}_p$, kde $\mathbf{E}(\star)$ je řešení PKÚ a \mathbf{E}_p jsou dané koincidenční body ALE $\mathbf{F}(\star)$ lze klidně přidat do kin. omezení $\Phi(\star)$ (definovaná poloha konc. ef.)

- pro sériové manip. by byly koincidenční body rovnou součástí kin. omezení, neboť $\Phi(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}) = \mathbf{E}(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}) - \mathbf{E}_p$
- pravděpodobně lze do funkcionálního omezení vložit další kritéria typu požadovaná rychlost, síla, manipulability index, atd. v koincidenčním bodě

- kritériální funkce pro $i = 1 \dots N$, N koincidenčních bodů:

$$\Psi(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})^T \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})$$

kde $\bar{\Theta}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})^T = [\Theta^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{b})^T, \dots, \Theta^N(\mathbf{q}^N, \mathbf{b})^T]$, a $\bar{\mathbf{q}}^T = [q^1, \dots, q^N]$

- klasický problém optimalizace: $\min_{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}} \Psi(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}) \Rightarrow \bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}$, tedy polohy manip. v každém koincidenčním bodě a návrhové par. (společné pro všechny koincidenční body)
- řešení:

$$\frac{\partial \Psi(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})}{\partial \{\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}\}} = 0 \Rightarrow \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})^T \cdot \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}) = 0, \quad \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}) = \left[\frac{\partial \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})}{\partial \bar{\mathbf{q}}}, \frac{\partial \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}} \right]$$

- rovnice $\mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})^T \cdot \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}) = 0$ lze řešit pomocí quasi-Newton alg. jako (rozložením $\bar{\Theta}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})$ Tylor. rozvojem 2. řádu):

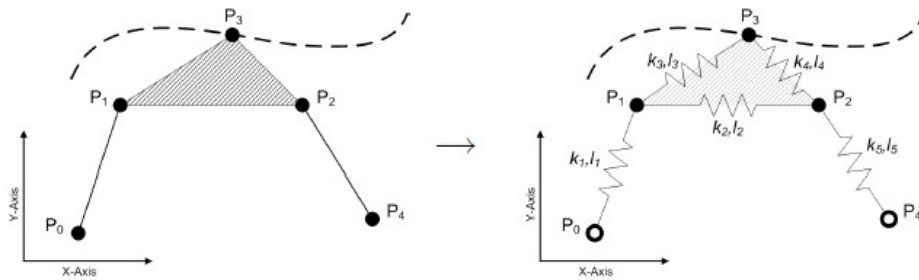
$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}_k + \Delta \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad \Delta \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = - [\mathbf{J}^T(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b}) \mathbf{J}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})]_k^{-1} \mathbf{J}^T(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})_k \bar{\Theta}(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{b})_k$$

- iterační alg. - někdy nutno upravovat přírůstek Δ (nešlo by využít line search, atd.), jak volit poč. bod (někdy dobré uvolnit omezení - kin., funkcionál, a najít tak počáteční bod iterace)
- někdy lze opt. splnit s nulovou chybou (přesně) díky závislosti rovnic omezení a souřadnic \mathbf{q} , JINAK kompromis! Tzn. pravděpodobně nemusíme projet všemi koincidenčními body přesně, pokud chceme splňovat i jiné kritérium (manipulability index)!
- **tedy zásadní otázka:** lze projet všechny koincidenční body a zároveň minimalizovat nějaké přídatné kritérium s uvažováním konstantní geom. parametrů???

Collard, Jean-François and Duysinx, Pierre and Fiset, Paul: Optimal synthesis of planar mechanisms via an extensible-link approach, [5]

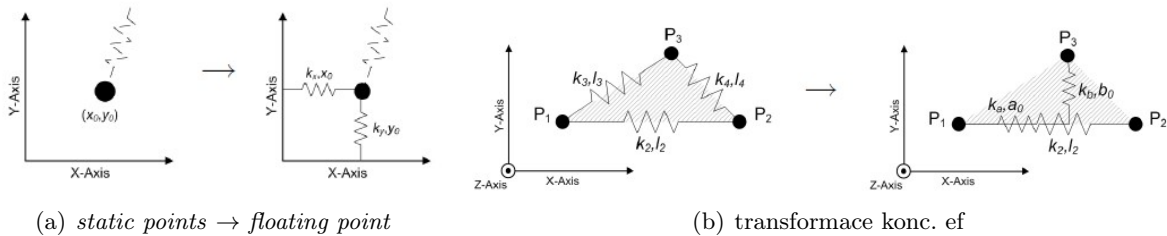
- *relativní* vs. přirozené souřadnice:
relativní: limitují počet možných složení manip. (assembly modes), zavádí trigonometrické fce (komplikovanější fce)
přirozené: vyžadují přídatné rovnice omezení, obsahují ale pouze lineární a kvadratické rce (linear, distance function)
- velmi podobné jako [12]

Popis alg.: s ohledem na 4-bar system, viz Obr. 15.



Obrázek 15: 4-bar mechanism

- v mechanismu stanoveny 3 typy bodů (přirozené souřadnice): *static points* P_0 a P_4 (body nepohybující se během pohybu manip.), *floating points* P_1, P_2 (body, pohybující se během pohybu manip.) a *tracking points* P_3 (body, které sledují pož. trajektorii)
- nahrazení tuhých ramen flexibilními (přirozená délka pružiny l_i a tuhost pružiny k_i) \Rightarrow flexibilní mechanismus
- pokud požadujeme měnit i polohu základny manipulátoru (*static points*), lze *static points* \rightarrow *floating point* + zavedení přídatných přirozených délek (včetně znaménka \pm , tzv. oriented springs, to v krit. fci nevadí-kvadrát) a koeficientů tuhosti pružiny, viz Obr. 16(a)
- k odstranění nejednoznačnosti v umístění P_3 vzhledem k P_1 and P_2 (nad/pod) je konc. ef., zjednodušen, viz Obr. 16(b).

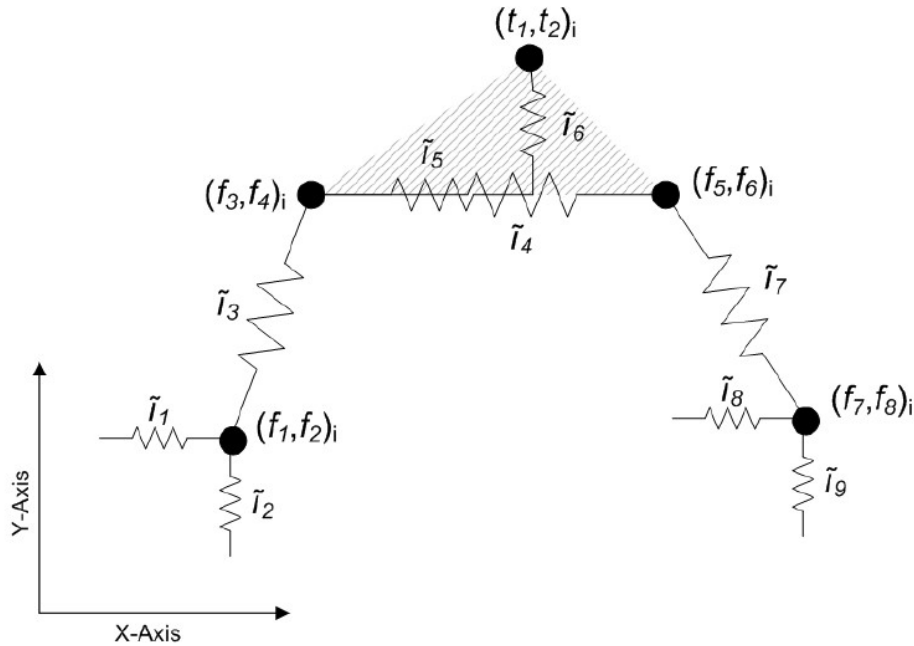


Obrázek 16: 4-bar mechanism (transformace bodů)

- Výsledný „elastický“ model manip. je znázorněn na Obr. 17, kde $\tilde{\mathbf{d}}_i$ je vektor všech vzájemných vzd. mezi body (floating points, dim = 9), $\tilde{\mathbf{l}}$ je vektor přirozených délek pružin (dim = 9) a $\tilde{\mathbf{K}}$ je diag. matice tuhostí příslušných pružin, \mathbf{t}_i je vektor souřadnic *tracking points* (zde jen P_3 , tzn. dim = 2) pro tento bod nacházející se v i -tém koincidenčním bodu (požadovaném) a \mathbf{f}_i je vektor souřadnic *floating points* ($P_{0,1,2,4}$) ve stejné situaci (dim =

8).

$\Rightarrow 9 + 8N$ hledaných neznámých (9 geom. par - přirozené délky \tilde{l}) a $8N$ přír. souřadnic \mathbf{f}_i $i = 1 \dots N$ pro N koincidenčních bodů)



Obrázek 17: Transformovaný 4-bar mechanism

- **definice opt. problému:** nalezení přír. souřadnic \mathbf{f}_i a zároveň geom. parametrů \tilde{l} manip.

$$\mathbf{E} = \min_{\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_N, \tilde{l}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{l}]^T \tilde{\mathbf{K}} [\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{l}]$$

- hledání stac. bodu, nutné podmínky extrému, citlivost krit. fce ke geom. parametřům:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{f}_i} = \frac{\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i)^T}{\partial \mathbf{f}_i} \tilde{\mathbf{K}} [\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{l}] = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tilde{l}} = - \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{K}} [\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{l}] = \mathbf{0}$$

Je zřejmé, že pro konst. geom. par \tilde{l} , je krit. fce \mathbf{E} „citlivá“ pouze na polohu i -tého *floating point* nezávisle na ostatních, také totiž platí (pro konst. \tilde{l}):

$$\min_{\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_N, \tilde{l}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{l}]^T \tilde{\mathbf{K}} [\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{l}] = \sum_{i=1}^N \min_{\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_N} \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{l}]^T \tilde{\mathbf{K}} [\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{l}]$$

\Rightarrow min. hodnota krit. fce lze získat pro konst. \tilde{l} řešením lok. opt. problémů pro separované \mathbf{f}_i jako: $\min_{\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_N} \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{l}]^T \tilde{\mathbf{K}} [\tilde{\mathbf{d}}_i(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) - \tilde{l}] \Rightarrow \mathbf{f}_i \dots$ optimální poloha mechanismu v každém koincidenčním bodě pro dané parametry $\tilde{l} =$ **lokální opt. problém.**

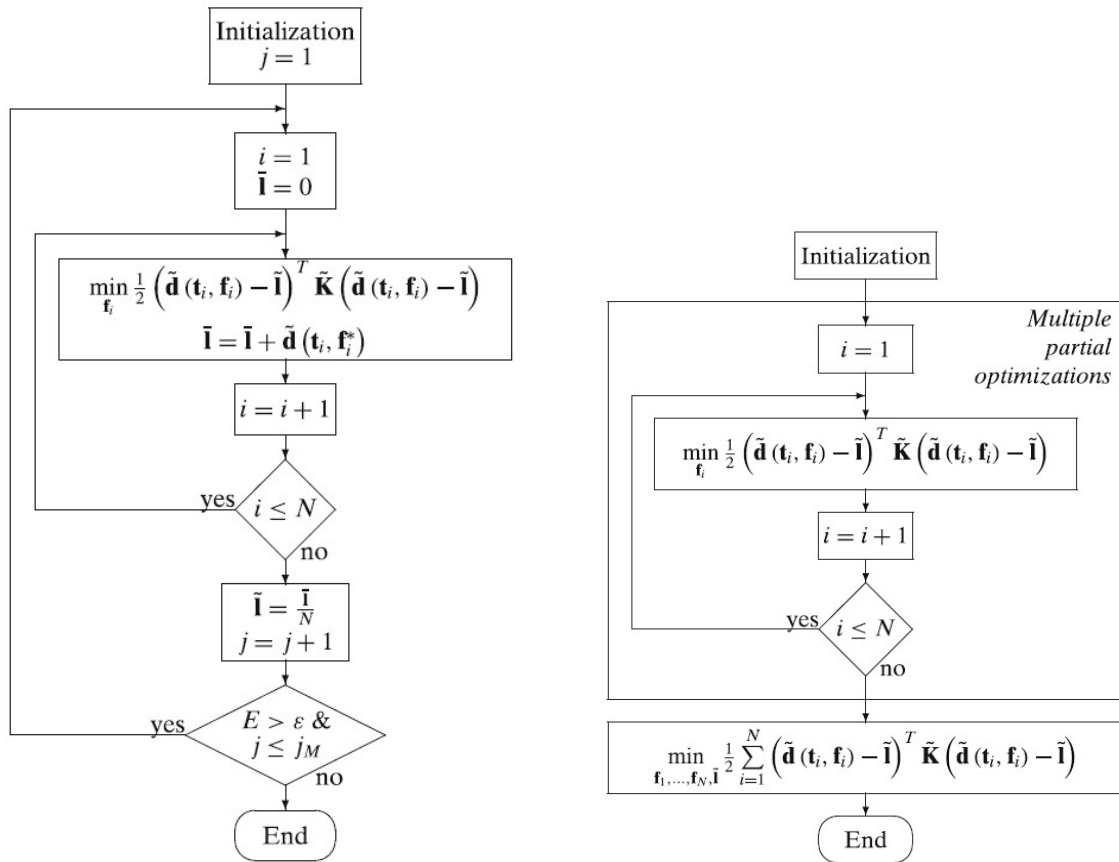
- dvě možné optimalizace: **Mean Value Update**, analogicky jako v [10] a **full synthesis Mean Value Update**; viz Obrázek 18(a).

– řešení lok. opt. problému pro všechny koincidenční body pro $\tilde{l} =$ současná střední hodnota přír. délek (geom. par)

- nalezeny opt. polohy manip. \mathbf{f}_i^* a příslušné vzdálenosti mezi *floating points* $\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i^*)$
- aktualizace $\tilde{\mathbf{l}}$ = střední hodnota z $\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i^*)$ přes všechna i (koincidenční body)
- iterace dokud $\tilde{\mathbf{l}}$ „hodně“ variuje
- pro fixované \mathbf{f}_i řešení nutné podmínky $\frac{\partial E}{\partial \tilde{\mathbf{l}}} = \mathbf{0}$ vede na $\tilde{\mathbf{l}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{t}_i, \mathbf{f}_i) \Rightarrow$ což je ekvivalentní s výše uvedeným výpočtem aktualizace $\tilde{\mathbf{l}}$

Full synthesis:, viz Obrázek 18(b).

- předchozí alg. vykonán pouze jednou (tedy přes $i = 1 \dots N$ pro $j = 1$)
- \Rightarrow získáme počáteční „náštel“ $\mathbf{f}_i, \tilde{\mathbf{l}}$
- poté se započne celková opt. přes $\mathbf{f}_i, \tilde{\mathbf{l}}$ najednou!
- to vyžaduje robustní a spolehlivé alg.?? (dog-leg)



(a) Mena Value Update

(b) Full optimization

Obrázek 18: Opt. algoritmy

- Jak vložit do alg. například omezení, že některé body leží v rovině? (např. \mathbf{P} kloub), to již vede na opt. s omezením, viz řešení [2]
- negarantuje nalezení globálního extrému, volba poč. podmínek? (využit nukleon alg. ale možná by byl vhodný i Culling alg.)

Snyman, J.A.: On non-assembly in the optimal synthesis of serial manipulators performing prescribed tasks, [39]

- opt. návrh geom. par. manipulátoru pro pohyb po předepsané trajektorii \Rightarrow nastávají komplikace během optimalizace - porušení geom. omezení (naražení na hranice prac. prostoru, singularity)
- v takovém případě nastávají komplikace s vyčíslením krit. fce (vůbec nemusí být definována!)
- krit. fce pro 3DoF manip. volena jako podmínka na min. průměrné momenty v kl.

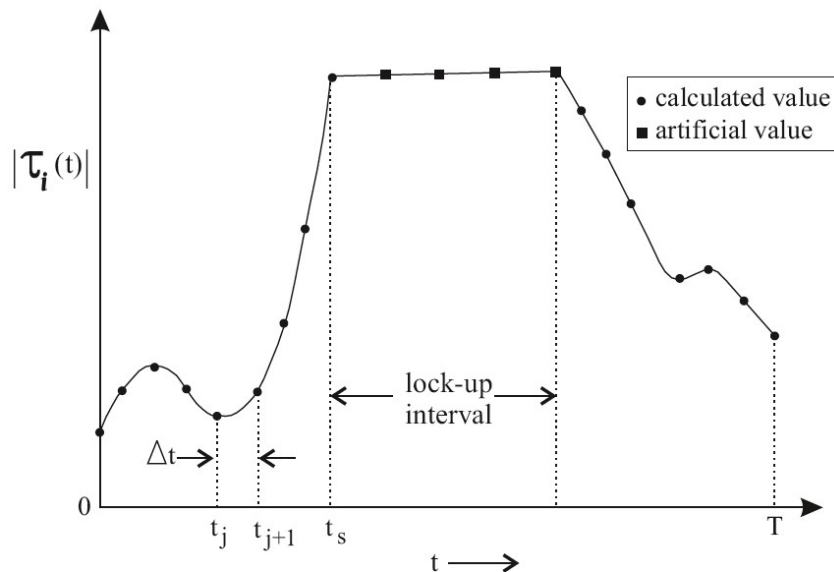
$$T_{av}(\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T (|\tau_1(t)| + |\tau_2(t)| + |\tau_3(t)|) dt$$

kde ξ jsou návrhové par. a τ_i jsou momenty v kl. souřadnicích a $[0, T]$ je čas. interval pohybu manip.

- mohou být kladeny přídatná omezení na max. abs. moment, na limitní délky ramen, atd.
- předpokládá se, že poč. a koncový bod trajektorie je v řešení kin. omezení (manip. lze složit)
- \Rightarrow krit. fce lze vyčíslit v prvním a posledním bodě (mezi může nastávat nemožnost vyčíslení) \Rightarrow úprava krit. fce:

Často se kin. analýzy provádí v čas. okamžicích $k \cdot \Delta t$, $k = 1 \dots N$, $N \cdot \Delta t = T$, momenty v jednotlivých kloubech lze tak vyčíslovat v těchto čas. okamžicích. V případě, že se blížíme k porušení kin. omezení (blížíme se k singulárnímu bodu, je to však obecný případ?, každopádně zde to platí), tzn. rostou rychlosti a zrychlení kloubů \Rightarrow z inverzní dynamiky prudce porostou i momenty v kloubech (kvůli zrychlení - dynamický vliv!)

V posledním diskrétním „vypočitatelném“ bodě, kde už je hodnota momentů vysoká, se tato hodnota zapamatuje a použije se konstantní po celou dobu, kdy je se pohybujeme po nerealizovatelné části trajektorie, viz Obrázek 19.



Obrázek 19: Průběh abs. hodnoty momentu při naražení na okamžik nesplnění kin. omezení (non-assembly)

- pokud ani počáteční a/nebo koncový bod trajektorie nesplňuje rovnice kin. omezení, je nahrazena krit., fce jednoduchou penalizační funkcí $P(\boldsymbol{\xi}) = \beta_1(g_1(\boldsymbol{\xi}))^2 + \beta_2(g_2(\boldsymbol{\xi}))^2$, kde $g_1(\boldsymbol{\xi})$ resp. $g_2(\boldsymbol{\xi})$ je kin. omezení typu $g_i(\boldsymbol{\xi}) \leq 0$ pokud je podmínka složení splněna pro počáteční, resp. koncový bod trajektorie a $\beta_i = 0$ pokud je podm. splněna $g_i(\boldsymbol{\xi}) \leq 0$ a $\beta_i = 1$ pokud je podm. nesplněna $g_i(\boldsymbol{\xi}) > 0$.
- k opt. využít *robust gradient-based leap-frog algorithm*, [42].
- **Nápad:** co využít právě penalizační funkce k přidávání omezení během optimalizace \Rightarrow lze pak využít metody pro neomezené hledání extrémů (co ale u gradientních metod, kde musíme znát gradient, hessián,...) - využití Leap Frog alg, viz [42].

Snyman, J.A. and Berner, D.F.: The design of a planar robotic manipulator for optimum performance of prescribed tasks, [40]

- opt. parametrů 3DoF RRR manip. pro předepsaný pohyb po trajektorii
- krit. fce $F(\boldsymbol{\xi})$: průměrný moment v kloubech, spotřeba el. energie
- optimalizace pomocí dynamického alg. Leap Frog + Penalty functions
- problém, kdy se návrhové parametry $\boldsymbol{\xi}$ mohou dostat do hodnot, které neumožňují složení manip. je řešen analogicky (artificial values of crit. function) jako v [39].
- **zavedení omezení:** max. moment přípustný na motorech $\mathbf{g}_\tau(\boldsymbol{\xi}) = [g_{\tau_1}, g_{\tau_2}, \dots]^T \leq 0$, omezení na natočení kloubů (joint angle constraints) $\mathbf{g}_{jac}(\boldsymbol{\xi}) = [g_{jac_1}, g_{jac_2}, \dots]^T \leq 0$, omezení na délku ramen (geometric constraints) $\mathbf{g}_{geo}(\boldsymbol{\xi}) = [g_{geo_1}, g_{geo_2}, \dots]^T \leq 0$, omezení na složení robotu (assembly constraints) $\mathbf{g}_{ass}(\boldsymbol{\xi}) = [g_{ass_1}, g_{ass_2}, \dots]^T \leq 0$. pokud omezení nejsou splněny, jejich hodnota $\mathbf{g}_*(\boldsymbol{\xi}) > 0$ (čím více nesplněna, tím větší). Funkce omezení jsou dány příslušnými integrály přes celou uvažovanou předepsanou trajektorii $t = \langle 0, T \rangle$.
- Výsledná „penalty function“ (patří do množiny **transformation methods**: transformace opt. s omezením na opt. bez omezení), která má být minimalizována:

$$P(\boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\xi}) + \sum_i \beta_{\tau_i} g_{\tau_i}^2(\boldsymbol{\xi}) + \sum_i \beta_{jac_i} g_{jac_i}^2(\boldsymbol{\xi}) + \sum_i \beta_{geo_i} g_{geo_i}^2(\boldsymbol{\xi}) + \sum_i \beta_{ass_i} g_{ass_i}^2(\boldsymbol{\xi})$$

kde β_{*i} jsou penalizační váhy ($\beta_{*i} = 0$ pokud jsou $g_{*i} \leq 0$ jinak $\beta_{*i} = \rho$, $\rho \dots$ vhodně zvolený penalizační parametr - dynamicky měněný)

- analogicky jako v [39]: platí-li, že v poč. a konc. bodu trajektorie lze manip. složit, lze vyčíslit $F(\boldsymbol{\xi})$, a tedy i $P(\boldsymbol{\xi})$ alespoň v těchto bodech. Během opt. může dojít k tomu, že pro dané hodnoty param. $\boldsymbol{\xi}$ nepůjde manip. složit - což pravděpodobně povede na vysoké hodnoty (nekonečně) $F(\boldsymbol{\xi})$ - využití metodiky z [39]. Pokud nelze manip. složit v poč. a nebo konc. bodu trajektorie - $F(\boldsymbol{\xi})$ nelze rozumně spočítat \Rightarrow pak se řeší optimalizace $\bar{P}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_i \beta_{ass_i} g_{ass_i}^2(\boldsymbol{\xi})$ pouze pro poč. a konc. bod trajektorie, dokud nejsou pro tyto body splněny podmínky na složení manip.
- uvedeny některé příklady

Snyman, J.A. and Tonder, F.: Optimum design of a three-dimensional serial robot manipulator, [41]

- podobné [40]

- hlavní problém při mat. opt. inženýrských aplikací, zde robotiky: výskyt singulárních poloh, chyby při aproximaci integrálů numerickými alg. => určení hodnot kritériální (penalizační) fce a jejího gradientu.
- přístup pomocí penalizačních funkcí realizuje přímočaré řešení, ale mnohdy špatně stabilní - řešení - LFOPCON (LeapFrog OPtimization for CONstrained problem)- údajně robustní, vhodné pro inženýrské problémy.
- zajímavé příklady optimalizace pro různé podmínky pohybu po předepsané trajektorii a různá omezení: např. optimalizujeme-li pouze průměrný moment => singulární polohy (ramena manip. plně natažena, či se překrývají), opt. parametry se budou měnit např. s rychlostí pohybu manip. po kružnici (optimalizujeme opět prům. moment) => pro malé rychlosti převládá gravitace, pro velké odstředivá síla => různé výsledky diametrálně odlišné
- z opt. může vyjít i výsledek, že některý stupeň volnosti (kloub manip.) je zbytečný
- ověření optimalizace LFOPCON - intuitivně správné řešení na jednoduchých trajektoriích, kružnice/elipsa => **opt. alg. by měly být ověřovány na intuitivně zřejmých případech**

J.A. Snyman: A new and dynamic method for unconstrained minimization, [35]

- minimalizace krit. fce $F(\mathbf{x})$ - analogie s pohybem hmotného bodu v konzervativním silovém poli
- údajně: spolehlivá, robustní metoda (nevyžaduje výpočet hesiánu), časová náročnost narůstá téměř lineárně pro počet neznámých v opt.
- potenciální energie částice $F(\mathbf{x})$ ($\mathbf{a}(\mathbf{x})$ - síla na hm. bod):

$$F(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{x}^*}^{\mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x})^T d\mathbf{x} + F(\mathbf{x}^*) \quad (26)$$

=> pohyb hm. částice ($m = 1$) v konzervativním poli - rovnice pohybu (E-L rovnice z $F(\mathbf{x})$, $T(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{x}}\|^2$):

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla F = \mathbf{a}$$

=> konzervativní pole (energie) => $T(\mathbf{x}) + F(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}_0) + F(\mathbf{x}_0) = E_0$, pokud začínáme v klidu ($T(\mathbf{x}_0) = 0 \Rightarrow F(\mathbf{x}) \leq F(\mathbf{x}_0)$)

- pro diskretizovaný čas také platí $\Delta F(\mathbf{x}_k) = -\Delta T(\mathbf{x}_k)$, tzn. pokud pot. kin. energie roste pro pohybující se hm. částici, potenciální energie (a tedy i krit. fce, která má být minimalizována) klesá (klasické kyvadlo)!
- nutno řešit diff. rovnici 2. řádu: použití dopředný Euler (pro polohu), zpětný Euler (pro rychlost) - konzervuje energii (aproximativně) - to je to, co nutně potřebujeme, aby platilo: $\Delta T(\mathbf{x}_k) = -\Delta F(\mathbf{x}_k)$, $\Delta F(\mathbf{x}_k) = F(\mathbf{x}_{k+1}) - F(\mathbf{x}_k)$, atd. Pro integrační alg (dopředný a zpětný Euler - LeapFrog alg.) platí pouze aproximativně: $-\Delta T(\mathbf{x}_k) + 0.5\|\mathbf{a}_{k+1}\|^2\Delta t^2 - 0.5\Delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{H} \Delta\mathbf{x}_k = \Delta F(\mathbf{x}_k)$, \mathbf{H} je Hessián ... podrobně v článku
- opt. alg.: sledujeme kin. energii, pokud začne klesat (jedeme „do kopce“ pryč od minima), rychlost nulujeme/redukujeme = základní alg.
- pochopitelně pro řešení nutno řešit rovnici 26 - využito numerické integrování - alg. LeapFrog (konzervativní alg. vzhledem k energii - ale důkaz jen pro konvexní kvadratickou funkci)

- použita heuristika: např. pokud rychlost roste, úplně se nenuluje, ale pouze redukuje, atd. (viz článek)
- úprava délky Δt opět heuristika, více dále
- vyrovnávání komponent vektoru zrychlení \mathbf{a}_k , pokud je větší zesílení v některé složce (např. $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + 400x_2^2$)
- porovnání nového alg. a Quasi Newtonovy metody (Gill and Murphy) a Davidon-Fletcher-Powell (metoda založená na zlatém řezu), obě metody ve Fortranu IV, pro různé typy funkcí a dimenzi
- nová metoda: konverguje ve všech případech do minima, vykazuje lepší výpočetní čas pro vysoké dimenze, nová metoda je pomalejší pro vzdálenější počáteční body, obecně „ploché minimum“ je nevýhodné pro novou metodu - horší konvergence, ale téměř lin. nárůst výp. času s dimenzí
- vhodná metoda pro mnohadimensionální problémy se známým/rychlým výpočtem 1. derivace (pouze!), robustní, spolehlivá, pro funkce „ploché“ je metoda méně efektivní, leč spolehlivá, lineární nárůst výp. času.
- k zabránění nerealisticky velkému kroku, vedoucí k nekonvergenci alg. je voleno omezení: $\|\Delta \mathbf{x}_k\| \leq \delta$, $\Delta \mathbf{x}_k = \Delta \mathbf{v}_k \Delta t$ (v případech, kdy $-\nabla F(\mathbf{x}_k + 1) = \mathbf{a}_{k+1}$ je velmi vysoké, neboť $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \Delta t \mathbf{a}_{k+1}$), podrobně viz Alg. v článcích. δ je max. krok
- úprava Δt heuristika, ale funguje na testovacích funkcích, viz [36]:
je zřejmé, že pokud $\mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{a}_k \leq 0$ (vektory \mathbf{a}_{k+1} , \mathbf{a}_k svírají úhel $> 90^\circ$.) je krok Δt příliš veliký \Rightarrow redukce: (stručně) pokud je několikrát po sobě splněno $\mathbf{a}_{k+1}^T \mathbf{a}_k \leq 0$ redukovat Δt na polovinu, pokud ne a zároveň $\|\Delta \mathbf{x}_k\| \leq \delta$ zvětšuj Δt (nějak), pokud $\|\Delta \mathbf{x}_k\| > \delta$ potom Δt se nemění.
- dynamický alg. označen jako LFOP (Leap Frog OPTimizer)

J.A. Snyman: A new and dynamic method for unconstrained minimization, [35]

- použití algoritmu LFOP pro constrained optimalizaci
- penalty function method: formulace problému:
minimalizuj $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tak, že:
 $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$
 $h_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, \dots, r$
 f, g, h jsou skalární fce. Penalty function je zavedena jako:

$$p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i^2(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^r \beta_j h_j^2(\mathbf{x})$$

kde $\alpha_i = 0$ (pro $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$) a $\alpha_i = \rho_i$ (pro $g_i(\mathbf{x}) > 0$), obvykle volíme $\rho_i = \beta_j = \mu$. Pro $\mu \rightarrow \infty$ dostáváme minimalizaci $f(\mathbf{x})$ korektní vázané minimum, ALE:

- alg. pochopitelně funguje špatně pro konstantní vysoké hodnoty μ ($p(\mathbf{x})$ reprezentující pot. energii výrazně mění a urychluje hm. bod - naráží na bariéry způsobené omezením)
- řešení: měnit par. μ dynamicky podél trajektorie - až do vysoké hodnoty - plynulá konvergence \Rightarrow dynamic penalty parameter.
- nutnost umět počítat gradient $p(\mathbf{x})$ - tedy i omezení !!! (což nemusí nutně jít (analyticky?))

- pokud je krit. fce a kritéria složitá, výp. náročné, nebo dokonce analyticky nevypočítatelné, lze použít aproximaci funkcí f, g_i, h_j - kvadratická aproximace: potom *kvadratická aproximace* + LFOP = *Dynamic Q method*, více v [38].

– aproximuj f, g_i, h_j kvadratickou funkcí v bodě \mathbf{x}_i , tzn:

$$\tilde{f}_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_i) + \nabla^T f(\mathbf{x}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

kde $\nabla^T f(\mathbf{x}_i)$ je gradient (nelze-li spočítat, pak jeho aproximace z dat $f(\mathbf{x}_i)$), $\mathbf{A} = \text{diag}(a_i)$ je diag. matice reprezentující křivost (hessián), odhaduje se z numerických známých dat trajektorie $\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i$ jako:

$$a = \frac{2 [f(\mathbf{x}_{i-1}) - f(\mathbf{x}_i) - \nabla^T f(\mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i)]}{\|\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i\|^2}$$

a to samé pro g_i, h_j .

- použij aproximace $\tilde{f}, \tilde{g}_i, \tilde{h}_j$ do Algoritmu LFOP ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_i$) \Rightarrow opt. řešení (dynamic constraint opt.) \mathbf{x}_i^*
- $i = i + 1, \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}^*$ a celé opakuj.
- vhodné redukovat δ , když se řešení (opt. aproximovaných subproblémů \mathbf{x}_i blíží k řešení \mathbf{x}^*), viz článek.
- provedeno srovnání s SQP metodou (NAG Subroutine E04UCF, Fortran): přesto, že NAG konverguje často rychleji, její úspěšnost (konvergence) silně závisí na počátečním bodu a nastavení parametrů - z tohoto ohledu se tváří nová metoda jako mnohem robustnější a spolehlivější.

J.A. Snyman: The {LFOPC} leap-frog algorithm for constrained optimization, [37]

- vylepšení alg. LFOPCON (omezení množství nastavovaných parametrů)
- alg. necitlivý k nespojitostem a nepřesnostem ve výpočtu gradientu (vhodné pro krit fce, kde je se pracuje s numerickými a simulačními daty)
- optimalizace prostřednictvím dyn. alg. a penalty function \Rightarrow dynamické navyšování penalizačního parametru $\mu_k = m\mu_{k-1}, \mu_k \in \langle \mu_0, \mu_{max} \rangle$ - k dosažení konvergence alg., viz [35].
- jak volit μ_0, μ_{max}, m ? (špatná volba, pomalá konvergence, konvergence do nesprávného bodu) - článek řeší vylepšení, kdy je třeba volit v alg. jen podmínku zastavení konvergence a případně (volitelně) max. délku kroku δ .
- aproximativní řešení složitých opt. problémů
- vylepšení algoritmu - vývojový diagram funkčnosti
- podrobněji popsána metoda penalty function
 - normování a škálování penalizační funkce $p(\mathbf{x})$
 - 3 základní fáze alg:
 - 0. fáze:** LFOP pro dané $\mu = \mu_0$ - konvergence do bodu $\mathbf{x}^*(\mu_0)$ - označení aktivních omezení typu nerovností (tzn. $g_i(\mathbf{x}^*(\mu_0)) > 0$), počet aktivních n_a : pokud $\|\nabla(\mathbf{x}^*(\mu_0))\| < \text{threshold}$ nebo $n_a + r = n$ (počet akt. omezení, r ...počet omezení typu rovností, vždy aktivní) \Rightarrow omezení je jako neznámých pro optimalizaci

(předpokládáme-li, že jsou akt. omezení nezávislé) - jdi na **fázi 2** jinak jdi na **fázi 1**
1. fáze: navýšit penalizační parametr (tzn. systém dyn. navyšování) $\mu_1 \gg \mu_0$ a použij opět LFOP pro μ_1 , identifikuj aktivní omezení $\Rightarrow n_a$

2. fáze: jsme dostatečně blízko minimu (neboť gradient $\|\nabla(\mathbf{x}^*(\mu_0))\|$ se mění velmi málo) nebo je aktivních n omezení (nezávislých!, tzn. existuje n nezávislých rovnic pro n neznámých - dimenze \mathbf{x}) \Rightarrow nalezení takového \mathbf{x}^* vyhovující pouze omezením (aktivním) - neuvažuje se už krit. fce. f (v případě aktivních n omezení ani nemůže - nejsou volné stupně volnosti - max. nalezení více izol. řešení a vybrat to nejlepší) \Rightarrow řešení opt. problému ve tvaru: minimalizuj $p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i^2(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^r \beta_j h_j^2(\mathbf{x})$ - což odpovídá metodě nejmenších čtverců pro rovnici $g_i(\mathbf{x}) = 0$, pro n_a aktivních omezení typu nerovností a $h_j(\mathbf{x}) = 0$ pro r omezení typu rovností (pro stejný počet akt. omezení jako počet neznámých n a nezávislých rovnic lze řešit beze zbytku, jinak MNČ)

- zajímavé příklady - graficky - v článku

3.1.2 Indikátory optimality

René V. Mayorga and Johnatan Carrera and Maria M. Ortiz: A kinematics performance index based on the rate of change of a standard isotropy condition for robot design optimization, [23]

- stanovení nového indexu „kvality“ v hodnocení kvality polohy maip. v prac. prostoru (performance index)
- většina založena na hodnocení vzdálenost manip. od sing. polohy (SVD rozklad, číslo podmíněnosti kin. jakobiánu atd.)
- obecně nastávají problémy s různými fyz. jednotkami, které se vyskytují u kl. rychlostí manip. (m/s , rad/s) ... matice jakobiánu je nevyvážená \Rightarrow číslo podmíněnosti závisí na volbě jednotek, pravděpodobně i referenčního s.s. (např. v případě paralel. manip. kde $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$ - ASI?)

- **používané indexy:** $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m$... sing. čísla jakobiánu $J(\theta)$

– založené na determinantu:

$$p(\theta) = \det(J(\theta) \cdot J(\theta)^T)^{\frac{1}{2}} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_m \quad (27)$$

– založená na nejmenším vlastním čísle:

$$p(\theta) = \sigma_m \quad (28)$$

– založená na čísle podmíněnosti:

$$p(\theta) = \frac{\sigma_1}{\sigma_m} \quad (29)$$

- pro obecné manipulátory jsou tyto indexy velmi obtížně vyjádřitelné v *explicitní podobě*, v analytickém tvaru
- tyto indexy závisí na akt. poloze manip. \Rightarrow lokální indexy!
Globalizace: integrací přes celý prac. prostor či jeho restrikcí (tedy přes $\forall\theta$) či využití nalezení nejhorsího bodu v prac. prostoru, atd.
- **Příklad: RRR** planární sériový manipulátoru (redundantní). Najít θ a délky ramen l_1 , l_2 a l_3 (nebo bez délek ramen, fixované na konstanty), tak aby byly optimalizovány použité indexy (viz výše + modifikace + nový index pro hodnocení kvality, viz dále) \Rightarrow výsledkem byl 1 bod v prac. prostoru a 1 sada param. (délky)

– opt. úloha s omezením (max. součet délek ramen + omezení na max. hodnotu indexu (podmíněnost úlohy)) - využít Matlab Optim. Toolbox (fce *fmincon*)

– **Index 1:** (založeno na determinantu, viz (27)): optimalizace: maximalizace $\delta(\theta) = p^2(\theta)$

– **Index 2:** založeno na čísle podmíněnosti, viz (29), ale uvažován jeho max. horní odhad (proč?, není to zbytečně svazující)

lze dokázat: $\frac{\sigma_1}{\sigma_m} \leq \frac{\|J(\theta)\|_F^m}{(\det(J(\theta)J^T(\theta))^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}$, kde Frobeniova norma:

$$\|J(\theta)\|_F^m = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |j_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Optimalizace: minimalizace $\frac{\|J(\theta)\|_F^m}{(\det(J(\theta)J^T(\theta))^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}$

- **Index 3:** (Isotropy condition) Nalezení délek a polohy θ tak, aby se sing. čísla co nejvíce sobě blížila, nejlépe $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots \sigma_m = 1 \Rightarrow$ isotropní bod (\Rightarrow nejlepší podmíněnost)

Podmínka isotropního bodu σ_{iso} : $J(\theta)J^T(\theta) - \sigma_{iso}I = 0$

NEBO

pokud nevyjádříme explicitně požadované sing. č. σ_{iso} :

$$\delta(\theta) = \det(J(\theta) \cdot J(\theta))^T \stackrel{!}{=} \left[\frac{1}{m} \|J(\theta)\|_F^2 \right]^m$$

Z toho plynou dvě možnosti optimalizace:

minimalizace $[J(\theta)J^T(\theta) - \sigma_{iso}I = 0]$, $\sigma_{iso} \geq 1$

NEBO

minimalizace $[\frac{1}{m} \|J(\theta)\|_F^{2m} - \delta(\theta)]$

- Index 1, Index 2 a Index 3 (2. podmínka) ... nevýhoda nutnosti explicitního výpočtu determinantu $\delta(\theta)$ (velmi složité vztahy)
- Index 3 (1. podmínka) ... výpočetně jednoduché, další zdokonalení (**přínos článku**)
- Nový performance index:

- **Normování v prostoru kl. a zobecněných souřadnic:** (známe z kalibrace - kvůli podmíněnosti úlohy)

Nechť $Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$ jsou symetrické, pozitivně definitní matice a

souřadnice rychlostí jsou $\dot{x} = \begin{bmatrix} v \\ \varphi \end{bmatrix}$ (zobec. souřadnice, v translační, φ rotační), $\dot{\theta} = \begin{bmatrix} r \\ p \end{bmatrix}$

(kl. souřadnice, r **R** klouby, p **P** klouby), potom **homogenizované (normované) normy vektoru** rychlostí $\|\star\|_S$ lze psát:

$$\|\dot{x}\|_S = \|Z^{\frac{1}{2}}\dot{x}\|_2 = (\dot{x}^T Z \dot{x})^{\frac{1}{2}}, \quad \|\dot{\theta}\|_S = \|W^{\frac{1}{2}}\dot{\theta}\|_2 = (\dot{\theta}^T W \dot{\theta})^{\frac{1}{2}}$$

Porovnání jakobiánu J a homogenizovaného jakobiánu J_S lze získat:

$$\dot{x} = J\dot{\theta} \rightarrow \text{normování} \rightarrow Z^{\frac{1}{2}}\dot{x} = J_S W^{\frac{1}{2}}\dot{\theta} \Rightarrow \text{homogen. jakobián: } J_S = Z^{\frac{1}{2}} J W^{-\frac{1}{2}}$$

- podmínka isotropního bodu σ_{iso} : $J(\theta)J^T(\theta) - \sigma_{iso}I = 0$, ale lze ukázat, že isotropní bod je závislý na parametrech a akt. konfiguraci manip. neboť pro manipulátor nacházející se v takovém bodě platí:

$$\sigma_{iso} = \sigma_1 = \sigma_2 = \dots \sigma_m = \|J(\theta)\|_2 \Rightarrow \|J(\theta)\|_F = (m\sigma_{iso}^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sigma_{iso} = \frac{1}{\sqrt{m}} \|J(\theta)\|_F$$

- **optimalizace:** minimalizace $f_1(\theta) = \|J(\theta)J^T(\theta) - \sigma_{iso}I\|_F$, kde $\sigma_{iso} = \frac{1}{\sqrt{m}} \|J(\theta)\|_F$ vede k nalezení θ (isotropní polohy resp. nejvíce isotropní polohy) a případně parametrů l_i (délky ramen). Proč Frobeniova norma? Možná kvůli druhému krit. $f_2(\theta)$, které má také formu Frob. normy, viz dále.
- dále je ukázáno, že lze vypočítat horní odhad derivace (rate) isotrop. sing. čísla σ_{iso} jako: $\dot{\sigma}_{iso} \leq f_2(\theta)$...
- **výsledná optimalizace:** minimalizace $[k_1 f_1(\theta) + k_2 f_2(\theta_2)] \Rightarrow$ nalezení nejvíce isotropní polohy a zároveň takové, ve které (v jejímž okolí) se nebude isotropní sing. číslo příliš měnit... (vše lze vypočítat **explicitně**), jinými slovy: nalezení okolí bodu v prac. prostoru (případně v prostoru parametrů), kde bude nízké č. podmíněnosti (isotropní bod = 1) a zároveň isotropní podmínka nebude mít vysokou změnu (rate).

Doty, Keith L. and Melchiorri, Claudio and Schwartz, E.M. and Bonivento, C.: Robot manipulability,[7]

- analýzy *performance index* v robotice
- **Pozn.:** příklad využití redundance manip k čas. opt. řízení (s omezením na rychlost akt.): natáčení hl. osy velocity ellipsoidu do směru tečného k plánované trajektorii
- problém v metodách určování performance indexu založeného na *Euklidovské metrice* v 6DoF prostoru (Twist, Wrench): metody nekonzistentní (srovnává např. $[m]$ a $[rad]$, $[m/s]$ a $[rad/s]$)
- metody založené na určování indexů na základě SVD dekompozice, čísla podmíněnosti jakobiánu nemají fyzikální význam a tyto indikátory nejsou invariantní ke změně měřítka, k použitým jednotkám a k použitému s.s. (origin?)

$$\dot{x} = J \cdot \dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = j_1 \dot{q}_1 + j_2 \dot{q}_2 + \dots, \quad j_i \dots \text{sloupce } J - \text{nekonzistentní prvky (linear - angular velocity)}$$

- využití „normování, homogenizování“ souřadnic (zobec., kl.) může do určité míry řešit nekonzistentnost (a řeší), ale problém, jak určovat normující matice
- manipulability ellipsoid, manipulating force ellipsoid, dynamic manipulability ellipsoid - založeny přímo na J či jeho inverzi \Rightarrow nekonzistentní performance index
- dokázáno, že SVD není invariantní ke změně měřítka, jednotkám, ref. s.s.
- cíl článku, zavedení metriky, které toto řeší
- Domnívám se, že z hlediska optimalizace je dostatečné normovat (homogenizovat) a docílit tak vhodné podmíněnosti úlohy, jelikož neporovnáváme např. dvě architektury manipulátorů mezi sebou!

Serdar Kucuk and Zafer Bingul: Comparative study of performance indices for fundamental robot manipulators,[16]

- demonstrace opt. návrhu parametrů vybrané třídy manipulátorů (16 sériových manipulátorů s klouby typu **P** či **R**)
- opt. alg. Matlab SQP
- **performance indices:**
 - manipulability measure: $w = \sqrt{\det(JJ^T)} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$
 - structural length index: $Q_L = L / \sqrt[3]{V}$, $L = \sum_{i=1}^n (a_i + d_i)$, a_i link length, d_i joint offsets, V workspace volume
 - local condition index (LCI): $c = 1/\text{cond}(J)$
 - global condition index (GCI): $\eta = \frac{\int_W (c) dW}{\int_W dW}$, $W \dots$ workspace
- Příklad: **RRR** robot: výpočet objemu prac. prostoru V aproximačně, analyticky, w , c vypočteno analyticky \Rightarrow optimalizace s omezením na rozměry ramen $l_{1..3}$ s ohledem na výše uvedené indexy pomocí SQP.
- Pozn.: k výpočtu objemu prac. prostoru, pokud známe omezení v kl. souřadnicích (nezávislé). Integrace přes kl. souřadnice s využitím absolutní hodnoty determinantu jakobiánu.

I. Mansouri and M. Ouali: A new homogeneous manipulability measure of robot manipulators, based on power concept,[18]

- známé kinetostatické performance indexy (vycházející z jakobiánu) jsou z fyzikálního pohledu konzistentní pouze za předpokladu, že je manipulátor pouze s \mathbf{R} nebo s \mathbf{P} klouby!
- JINAK: *dimensional inconsistency*
- článek přináší nový performance index na základě *power concept* - dále necitlivý na výběr fyzikálních jednotek
- manipulability = ellipsoid (velocity) volume je úměrný $\Gamma_Y = \sqrt{\det(JJ^T)}$, viz [48]
- protože, objem může být velký, ale ellipsoid může být z jedné strany „splácnutý“ \Rightarrow lepší využít isotropy manip. index $\Gamma_{iso} = 1/\text{cond}(J) = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$, σ_i odpovídají velikostem poloos (viz 2DoF manip.) $\Rightarrow J$ se blíží isotropnímu zobrazení (pouze zesiluje/zeslabuje ALE nekresluje!)
- pokud \mathbf{R} i \mathbf{P} klouby index Γ_{iso} nemá fyz. význam - nelze porovnávat rotace/translace (fyzikálně toto není správné ani za předpokladu zavedení charakteristické délky robotu: poměr mezi maximum linear and angular force or velocity, viz [43])
- **představena nová metoda:**

- Každé rameno manipulátoru koná určitý výkon, který je dán jako skalární součin translační rychlosti T_{kL} a síly W_{kL} + součin úhlové rychlosti T_{kR} a momentu W_{kR} na rameno působící. Síly/momenty a translační/úhlové rychlosti lze vypočítat ze sil/momentů a translačních/úhlových rychlostí působící na konc. ef. Tento výkon je činným výkonem P_i .
- Konc. efektor koná nějaký výkon (činný) (který odevzdává do okolí) $\Rightarrow P_L = f_E \cdot v_e$ a $P_R = M_e \cdot \omega_e$
- zavedení *total power vector* $p = \begin{bmatrix} p_L \\ p_R \end{bmatrix} : [f_e \ M_e] \cdot \begin{bmatrix} v_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = p^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p$... výkon, konající koncový efektor, ten musí být zpracován na činný výkon ramen P_i a na jakýsi jalový výkon (reactive power), který je zlikvidován v reakčních silách kloubů
- výsledný zdánlivý výkon ramene k může být tak vyjádřen jako 4-prvkový vektor:

$$S_k = \begin{bmatrix} W_{kL}^T \cdot T_{kL} + W_{kR} \cdot T_{kR} \\ W_{kL}^T \times T_{kL} + W_{kR} \times T_{kR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{činný výkon} \\ \text{jalový výkon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$$

- celkový výkon konající mech. konstrukce manipulátoru je tedy

$$S = \sum_k S_k = p^T \Phi p$$

, kde Φ je pos. def. matice závislá na kin. vl. manip.

- pokud $S \leq 1$ (omezení na zdánlivý výkon konstrukce) lze získat ellipsoid v souřadnicích výkonu p jako $p^T \Phi p \leq 1 \Rightarrow$, tzn. ellipsoid ukazuje max. možný výkon konc. efektoru, který je pokryt mech. konstrukcí s omezením jeho výkonu. (Něco jako **power ellipsoid**)
- tento přístup je fyzikálně v pořádku (jednotky jsou všude výkon!) \Rightarrow nový manipulability index (izotropický) = $1/\text{cond}(\Phi)$

- Příklady: porovnání standardního manip. indexu $1/\text{cond}J$ a nového manip. indexu:
 - 2DoF RR manip:** vychází v podstatě shodně - i co se týče identifikace singularit,
 - 3DoF planární paralelní manip.:** pro danou velikost a velikost 10x menší (scale problem) - nový index dává konzistentní (shodné výsledky pro obě verze manip.), standardní index - diametrálně odlišné výsledky (nekonzistentní - citlivý na měřítko!)
- velmi podobný problém jako v [19]

L. Stocco and S. E. Salcudean and F. Sassani: Matrix normalization for optimal robot design,[43]

- vynásobení zleva a zprava návrhové matice (jakobiánu) diagonálními maticemi kompenzující „scale“ zobec. a kl. souřadnic
- v případě jakobiánu - praktické využití **charakteristické délky (characteristic length, někdy také natural length)** = poměr mezi max. lineární a úhlovou rychlostí (resp. mezi lineární silou a momentem, někdy i jiné definice)
- přínos: jak integrovat dané požadavky do kritériální funkce při opt. návrhu (včetně zohlednění různých jednotek)
- isotropic = directional independent
- **Culling algorithm**, viz [1]: optimalizační algoritmus založený na „Direct Search method“, accelerated global search alg., využívá prohledávání stavového prostoru (osa x : parameters sets: $p_0, p_1, \dots, p_M \in R^m$, osa y : end-ef. position sets: $x_1, x_2, \dots, x_N \in R^n$)
Výhody: nalezení globálního extrému, není nutno vyčíslovat všech $N \cdot M$ hodnot krit. fce (hrubá síla), ale počet vyčíslení je významně redukován!, možnost využít libovolnou krit. fci (bez nutnosti znát derivace, nespojitá, atd.)
- využití diagonálních váhových matic: $\tau = S_J \Delta \tau$, $f = S_T \Delta f$, na jejichž diagonále jsou největší hodnoty sil/momentů všech os \Rightarrow vektory $\Delta \star$ jsou vyjádřeny v % (bezrozměrné).
- diag. matice S_J , S_T lze s výhodou využít pro opt. manip. se specifickými požadavky pro konkrétní aplikaci:
Např.: 3DoF manip. v jehož ose y působí gravitace: předpokládané síly $f_x = 5N$, $f_y = 15N$ (vzhledem ke gravitaci) $f_\theta = 25Ncm \Rightarrow$ po normování: $S_T = \text{diag}(1, 3, 5)$
 Budeme-li předpokládat, že robot je typu **RRR** sériový, potom z geometrie plyne, že momenty kl. se budou směrem od základny snižovat, tedy budeme-li předpokládat, že vždy o 1/2, potom lze volit váhovou matici momentů aktuátorů jako: $S_J = \text{diag}(4, 2, 1)$

S.H.H. Zargarbashi and Waseem Khan and Jorge Angeles: The Jacobian condition number as a dexterity index in 6R machining robots,[49]

- využití redundance 6 DoF manipulátoru při 5-ti osém obrábění
- přenos mezi rychlostmi kl. a konc. ef vztaženy přes jakobián (potažmo - míra přenosu - číslo podmíněnosti...)
- při pohybu obráběcího stroje nutno zajistit hladkou trajektorii v kl. souřadnicích
- 1DoF (rotační s osou rotace v ose otáčení obráběcího nástroje je redundantní) \Rightarrow (cíl článku): jak volit trajektorii této souřadnice tak, aby byl nejpříhodnější poměr mezi rychlostmi (např. při obrábění rohu se musí robot rychle přeuspořádat, pokud je tento bod blízko singularit \Rightarrow vysoké nároky na rychlosti kl.)

- toto řešeno uživatelem, kdy pozmění trajektorii redundantní souřadnice tak, aby „objela“ singularity (řešeno jako GUI, viz Fig. 2)
- nebylo by toto možno využít pro optimalizaci parametrů?

4 Závěr

V uvedené zprávě je představena problematika optimalizace robotických architektur s ohledem na strukturální a parametrickou syntézu.

Strukturální syntéza se zabývá návrhem manipulátoru z hlediska jeho topologického uspořádání (počet a typ kloubů a ramen, uzavřených kinematických smyček, atd.). Zatímco u sériových manipulátorů je problematika strukturální syntézy relativně přímočará, pro paralelní manipulátory se výrazně komplikuje. V textu je představen primární problém strukturální syntézy, a to metody vyšetřování DoF koncového efektoru paralelního manipulátoru, který hraje v robotice primární problém. Jinými slovy, jak určit topologické vlastnosti manipulátoru, aby se koncový efektor manipulátoru mohl pohybovat s daným počtem DoF. Z důvodu uzavřených kinematických smyček paralelního manipulátoru totiž tento problém není intuitivně zřejmý a vyžaduje podrobnou analýzu. Za tímto účelem jsou předloženy metody vyšetřování DoF právě paralelních manipulátorů na základě jednoduchých formulací a podrobné kinematické analýzy. Vzhledem k faktu, že strukturální syntéza není hlavní náplní další práce související s optimalizací robotických architektur, je tento problém v textu pouze nastíněn a demonstrován na vybraných příkladech společně s odkazy na další zdroje informací.

Druhá z uvedených, parametrická syntéza, je primárním výzkumným úkolem projektu. Parametrická syntéza se zabývá nalezením parametrů manipulátoru (délky ramen, orientace os kloubů, rozměry základny a koncového efektoru, atd.) s ohledem na daná požadavky (minimalizace požadovaných sil/momentů v aktuátorech, kvalita pracovního prostoru, omezení na pohyb aktuátorů, atd.). Parametrická syntéza hraje klíčovou roli v robotice a je známo, že nevhodným návrhem parametrů manipulátoru je možné zásadním způsobem zhoršit vlastnosti strukturálně dobře navrženého manipulátoru. V textu je uveden stručný výtah z relevantních odborných textů věnovaných právě parametrické optimalizaci a přidruženým problémům. Předložené poznámky z odborných textů tvoří současný rámcový přehled zkoumané problematiky ve světě.

Reference

- [1] *Mechanism design for global isotropy with applications to haptic interfaces*, 1997, cited By (since 1996): 5.
URL www.scopus.com
- [2] Alba, J.; Doblaré, M.; Gracia, L.: A simple method for the synthesis of 2D and 3D mechanisms with kinematic constraints. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 35, č. 5, 2000: s. 645 – 674, ISSN 0094-114X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(99\)00035-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(99)00035-X).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X9900035X>
- [3] Alizade, R.; Bayram, C.: Structural synthesis of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 39, č. 8, 2004: s. 857 – 870, ISSN 0094-114X, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2004.02.008>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X04000539>
- [4] Callegari, M.; Palpacelli, M.-C.: Kinematics and optimization of the translating 3-CCR/3-RCC parallel mechanisms. In *Advances in Robot Kinematics*, editace J. Lenarčič; B. Roth, Springer Netherlands, 2006, ISBN 978-1-4020-4940-8, s. 423–432, doi:10.1007/978-1-4020-4941-5_46.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-4941-5_46
- [5] Collard, J.-F.; Duysinx, P.; Fiset, P.: Optimal synthesis of planar mechanisms via an extensible-link approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, ročník 42, č. 3, 2010: s. 403–415, ISSN 1615-147X, doi:10.1007/s00158-010-0500-3.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-010-0500-3>
- [6] Denavit, J.; Hartenberg, R. S.: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, ročník 22, 1955: s. 215–221.
URL <http://ci.nii.ac.jp/naid/10008019314/en/>
- [7] Doty, K. L.; Melchiorri, C.; Schwartz, E.; aj.: Robot manipulability. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, ročník 11, č. 3, 1995: s. 462–468, ISSN 1042-296X, doi:10.1109/70.388791.
- [8] Gogu, G.: Chebychev Grubler Kutzbachs criterion for mobility calculation of multiloop mechanisms revisited via theory of linear transformations. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, ročník 24, č. 3, Květen 2005: s. 427–441, ISSN 09977538, doi:10.1016/j.euromechsol.2004.12.003.
URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.12.003>
- [9] Gogu, G.: *Structural Synthesis of Parallel Robots: Part 1: Methodology (Solid Mechanics and Its Applications)*. Springer; 2008 edition (December 10, 2007), 2007, ISBN 978-0313311901.
- [10] Hansen, J.: Synthesis of Mechanisms Using Time-Varying Dimensions. *Multibody System Dynamics*, ročník 7, č. 1, 2002: s. 127–144, ISSN 1384-5640, doi:10.1023/A:1015247821899.
URL <http://dx.doi.org/10.1023/A:1015247821899>
- [11] Ibarreche, J.; Altuzarra, O.; Petuya, V.; aj.: Structural Synthesis of the Families of Parallel Manipulators with 3 Degrees of Freedom. In *Romansy 19, Robot Design, Dynamics and Control, CISM International Centre for Mechanical Sciences*, ročník 544, editace V. Padois; P. Bidaud; O. Khatib, Springer Vienna, 2013, ISBN 978-3-7091-1378-3, s. 35–42, doi:10.1007/978-3-7091-1379-0_5.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7091-1379-0_5

- [12] J.-F. Collard, P. D., P. Fiset: Optimal synthesis of mechanisms using time-varying dimensions and natural coordinates. In *6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Rio de Janeiro, Brazil, June 2005.
- [13] Jiménez, J.; Álvarez, G.; Cardenal, J.; aj.: A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 32, č. 3, 1997: s. 323 – 341, ISSN 0094-114X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(96\)00017-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(96)00017-1).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X96000171>
- [14] Khalil, W.; Dombre, E.: *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science paper edition, Elsevier Science, 2004, ISBN 9780080536613.
URL <http://books.google.cz/books?id=nyrY0Pu5k10C>
- [15] Khalil, W.; Kleinfinger, J.: A new geometric notation for open and closed-loop robots. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1986 IEEE International Conference on*, ročník 3, Apr 1986, s. 1174–1179, doi:10.1109/ROBOT.1986.1087552.
- [16] Kucuk, S.; Bingul, Z.: Comparative study of performance indices for fundamental robot manipulators. *Robotics and Autonomous Systems*, ročník 54, č. 7, 2006: s. 567 – 573, ISSN 0921-8890, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2006.04.002>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921889006000546>
- [17] Manocha, D.; Canny, J. F.: Efficient Inverse Kinematics for General 6R Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, ročník 10, 1994: s. 648–657.
- [18] Mansouri, I.; Ouali, M.: A new homogeneous manipulability measure of robot manipulators, based on power concept. *Mechatronics*, ročník 19, č. 6, 2009: s. 927 – 944, ISSN 0957-4158, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechatronics.2009.06.008>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957415809001202>
- [19] Mansouri, I.; Ouali, M.: The power manipulability ? A new homogeneous performance index of robot manipulators. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, ročník 27, č. 2, 2011: s. 434 – 449, ISSN 0736-5845, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.rcim.2010.09.004>, <ce:title>Translational Research ? Where Engineering Meets Medicine</ce:title>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0736584510001225>
- [20] MapleSoft: Maple.
URL <http://www.maplesoft.com/>
- [21] Marco Ceccarelli, E. O.: Kinematic Design of Manipulators. LARM: Laboratory of Robotics and Mechatronics, DiMSAT - University of Cassino, Via Di Biasio 43, 03043 Cassino (Fr), Italy.
- [22] Mark W. Spong, M. V., Seth Hutchinson: *Robot Modeling and Control*. Wiley, 2005.
- [23] Mayorga, R. V.; Carrera, J.; Ortiz, M. M.: A kinematics performance index based on the rate of change of a standard isotropy condition for robot design optimization. *Robotics and Autonomous Systems*, ročník 53, č. 3?4, 2005: s. 153 – 163, ISSN 0921-8890, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2005.09.010>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921889005001387>
- [24] p. Merlet, J.; Antipolis, I. S.: Optimal design of robots. In *in Robotics: Science and Systems*, 2005, s. 8–11.
- [25] Merlet, J. P.: Kinematics' not dead! In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, ročník 1, 2000, ISSN 1050-4729, s. 1–6 vol.1, doi:10.1109/ROBOT.2000.844031.

- [26] Merlet, J.-P.: Interval Analysis and Reliability in Robotics. Březan 2006.
URL <http://hal.inria.fr/inria-00001152>
- [27] Merlet, J.-P.: Interval analysis for Certified Numerical Solution of Problems in Robotics. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, ročník -, 2009: s. –.
URL <http://hal.inria.fr/inria-00362431>
- [28] Merlet, J. P.: *Parallel Robots*. Springer Publishing Company, Incorporated, druhé vydání, 2010, ISBN 9048170532, 9789048170531.
- [29] Mermertaş, V.: Optimal design of manipulator with four-bar mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 39, č. 5, 2004: s. 545 – 554, ISSN 0094-114X, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2003.12.002>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X04000138>
- [30] Ouezdou, F. B.; Regnier, S.: General Method for Kinematic Synthesis of Manipulators with Task Specifications. *Robotica*, ročník 15, 1997: s. –.
- [31] Park, F.; Bobrow, J.: Efficient geometric algorithms for robot kinematic design. In *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*, ročník 2, 1995, ISSN 1050-4729, s. 2132–2137 vol.2, doi:10.1109/ROBOT.1995.525576.
- [32] Pettersson, M.; Krus, P.; Andersson, J.: On optimal drive train design in industrial robots. In *Industrial Technology, 2005. ICIT 2005. IEEE International Conference on*, 2005, s. 254–259, doi:10.1109/ICIT.2005.1600645.
- [33] Raghavan, M.; Roth, B.: Inverse Kinematics of the General 6R Manipulator and Related Linkages. *Journal of Mechanical Design*, ročník 115, 1993, doi:10.1115/1.2919218.
- [34] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer London, 2000, ISBN 9781852332211.
URL <http://books.google.fr/books?id=v9PLbcYd9aUC>
- [35] Snyman, J.: A new and dynamic method for unconstrained minimization. *Applied Mathematical Modelling*, ročník 6, č. 6, 1982: s. 449 – 462, ISSN 0307-904X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X\(82\)80007-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X(82)80007-3).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X82800073>
- [36] Snyman, J.: An improved version of the original leap-frog dynamic method for unconstrained minimization: LFOP1(b). *Applied Mathematical Modelling*, ročník 7, č. 3, 1983: s. 216 – 218, ISSN 0307-904X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0307-904X\(83\)90011-2](http://dx.doi.org/10.1016/0307-904X(83)90011-2).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X83900112>
- [37] Snyman, J.: The {LFOPC} leap-frog algorithm for constrained optimization. *Computers & Mathematics with Applications*, ročník 40, č. 8-9, 2000: s. 1085 – 1096, ISSN 0898-1221, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221\(00\)85018-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221(00)85018-X).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089812210085018X>
- [38] Snyman, J.: *Practical Mathematical Optimization: An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms*. Applied Optimization, Springer, 2005, ISBN 9780387243481.
URL http://books.google.cz/books?id=0tFmf_UK17oC
- [39] Snyman, J.: On non-assembly in the optimal synthesis of serial manipulators performing prescribed tasks. In *Advances in Robot Kinematics*, editace J. Lenarčič; B. Roth, Springer Netherlands, 2006, ISBN 978-1-4020-4940-8, s. 349–356, doi:10.1007/978-1-4020-4941-5_38.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-4941-5_38

- [40] Snyman, J.; Berner, D.: The design of a planar robotic manipulator for optimum performance of prescribed tasks. *Structural optimization*, ročník 18, č. 2-3, 1999: s. 95–106, ISSN 0934-4373, doi:10.1007/BF01195984.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01195984>
- [41] Snyman, J.; Tonder, F.: Optimum design of a three-dimensional serial robot manipulator. *Structural optimization*, ročník 17, č. 2-3, 1999: s. 172–185, ISSN 0934-4373, doi:10.1007/BF01195942.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01195942>
- [42] Snyman, J. A.: *Practical mathematical optimization : an introduction to basic optimization theory and classical and new gradient-based algorithms*. Applied optimization, New York: Springer, 2005, ISBN 0-387-24348-8.
URL <http://opac.inria.fr/record=b1132592>
- [43] Stocco, L.; Salcudean, S. E.; Sassani, F.: Matrix normalization for optimal robot design. In *in IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1998, s. 434–439.
- [44] Sun, L.; Ding, Q.; Liu, X.: Optimal kinematic design of a 2-DOF planar parallel robot. In *Robotics, Automation and Mechatronics, 2004 IEEE Conference on*, ročník 1, 2004, s. 225–230 vol.1, doi:10.1109/RAMECH.2004.1438921.
- [45] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni (online: http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2011/rigo.pdf), 2011.
- [46] Švejda, M.: Úvod do robotiky a mechatroniky. Přednášky k předmětu, 2012.
URL <http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/>
- [47] Wang, X.; Baron, L.; Cloutier, G.: Topology of serial and parallel manipulators and topological diagrams. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 43, č. 6, 2008: s. 754 – 770, ISSN 0094-114X, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.05.005>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X07001073>
- [48] Yoshikawa, T.: Dynamic manipulability of robot manipulators. In *Robotics and Automation. Proceedings. 1985 IEEE International Conference on*, ročník 2, 1985, s. 1033–1038, doi: 10.1109/ROBOT.1985.1087277.
- [49] Zargarbashi, S.; Khan, W.; Angeles, J.: The Jacobian condition number as a dexterity index in 6R machining robots. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, ročník 28, č. 6, 2012: s. 694 – 699, ISSN 0736-5845, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.rcim.2012.04.004>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0736584512000427>

Přílohy

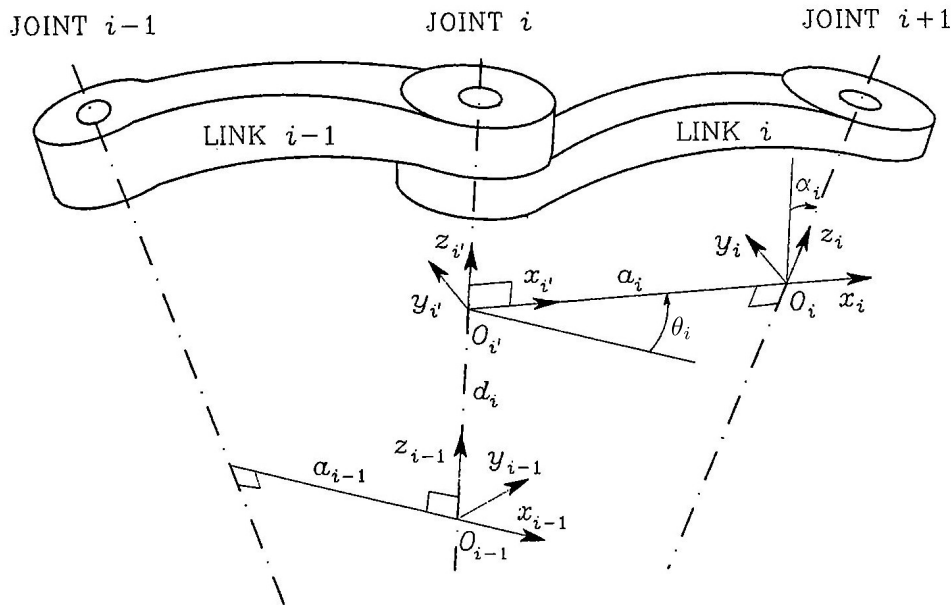
A Matematika v robotice

V uvedené kapitole je stručný souhrn použitých matematických základů. Přesto, že téměř všechny tyto základy lze nalézt v uvedené literatuře, mnohdy je v kontextu daného dokumentu obtížné čerpat z různých zdrojů a kompaktní shrnutí zachovávající syntaktické matematické značení hraje klíčovou roli pro zdárné porozumění předkládané problematice.

A.1 Denavit-Hartenbergova úmluva

Pro popis geometrického uspořádání ramen a kloubů manipulátoru bylo zavedeno mnoho metod. Ty se pokouší jednoduchou a systematickou cestou rekurzivně definovat souřadné systémy reprezentující jednotlivá ramena manipulátoru a jejich vzájemnou polohovou transformaci. Polohová transformace dvou po sobe jdoucích s.s. závisí na daných konstantních geometrických parametrech ξ (zahrnují geometrický tvar ramen, kloubu a jejich vzájemnou konfiguraci) a kloubových souřadnicích Q (zahrnují aktuální polohu kloubu manipulátoru). Mezi nejznámější takové úmluvy patří tzv. Denavit-Hartenbergova (D-H) úmluva [6] a Khalil-Kleinfingerova úmluva (K-K) [15]. Výhody a nevýhody jednotlivých metod lze nalézt podrobně například v [45]. V předloženém dokumentu je využita právě D-H úmluva a to z důvodů, že v celosvětové literatuře se vyskytuje v drtivé většině případů, i přes to, že neumožňuje jednoznačně popisovat komplexní rozvětvené kinematické řetězce.

Předpokládejme dvě ramena manipulátoru *Link* $i - 1$ a *Link* i , která jsou spojena kloubem *Joint* i s jedním stupněm volnosti, viz Obr. 20.



Obrázek 20: D-H úmluva

Definice s.s. $F_i = \{O_i - x_i y_i z_i\}$ za předpokladu znalosti s.s. $F_{i-1} = \{O_{i-1} - x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}\}$ dle D-H úmluvy je vyjádřena následovně:

- Zvol osu z_i podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint* $i + 1$ a osu z'_i podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint* i

- Umístí počátek \mathbf{O}_i s.s. F_i do průsečíku osy \mathbf{z}_i a normály² os \mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i . Umístí počátek \mathbf{O}'_i s.s. $F'_i = \{\mathbf{O}'_i - \mathbf{x}'_i \mathbf{y}'_i \mathbf{z}'_i\}$ do průsečíku osy \mathbf{z}_{i-1} a téže normály.
- Zvol osu \mathbf{x}_i a \mathbf{x}'_i podél normály ve směru od kloubu *Joint* i do kloubu *Joint* $i + 1$.
- Zvol osu \mathbf{y}_i a \mathbf{y}'_i tak, aby výsledné s.s. byly pravotočivé.

Lze snadno ukázat, že D-H úmluva nedefinuje jednoznačně umístění s.s. v následujících případech.

- Pro s.s. $F_0 = \{\mathbf{O}_0 - \mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0 \mathbf{z}_0\}$ je určena jednoznačně pouze osa \mathbf{z}_0 (podle osy rotace, resp. translace prvního kloubu manipulátoru *Joint* 1). Osu \mathbf{x}_0 a počátek \mathbf{O}_0 lze proto volit libovolně. Osa \mathbf{y}_0 je pak určena tak, aby výsledný systém byl opět pravotočivým.
- Pro s.s. $F_n = \{\mathbf{O}_n - \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n \mathbf{z}_n\}$, kde n je počet kloubů s jedním stupněm volnosti uvažovaného manipulátoru není jednoznačně určena osa \mathbf{z}_n , neboť kloub *Joint* $n + 1$ již neexistuje. Osa \mathbf{x}_n však musí zůstat kolmá k ose \mathbf{z}_{n-1} .
- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy kloubů (\mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i) paralelní, jejich normála není jednoznačně definována (může být libovolně posunuta ve směru os kloubů).
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy kloubů (\mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i) protínají (normála je nulové délky), osa \mathbf{x}_i bude volena tak, aby byla kolmá k rovině definované osami \mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i . Její *kladný směr* však může být volen libovolně.

Nyní může být vzájemná poloha s.s. F_{i-1} a F_i popsána pouze pomocí čtyř D-H parametrů:

$a_i \dots$ vzdálenost mezi počátky \mathbf{O}_i a \mathbf{O}'_i

$d_i \dots$ vzdálenost mezi počátky \mathbf{O}_{i-1} a \mathbf{O}'_i

$\alpha_i \dots$ úhel mezi osami \mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i daný pootočením s.s. F'_i podél osy \mathbf{x}'_i

$\theta_i \dots$ úhel mezi osami \mathbf{x}_{i-1} a \mathbf{x}_i daný pootočením s.s. F_{i-1} podél osy \mathbf{z}_{i-1}

Je zřejmé, že pro základní typy kloubů s jedním stupněm volnosti platí:

kloub *Joint* i je typu P proměnná definující pohyb kloubu je d_i , proměnné a_i , α_i , θ_i jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link* i

kloub *Joint* i je typu R proměnná definující pohyb kloubu je θ_i , proměnné a_i , d_i , α_i jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link* i

Transformační vztah, v našem případě homogenní transformační matice mezi s.s. F_{i-1} a F_i je dán následujícím způsobem.

- Vyber s.s. F_{i-1}
- Posuň tento systém podél osy \mathbf{z}_{i-1} o vzdálenost d_i a otoč jej okolo osy \mathbf{z}_{i-1} o úhel $\theta_i \Rightarrow$ dostáváme s.s. F'_i . Homogenní transformační matice má následující tvar:

$$\mathbf{T}_{i'}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

²normála os \mathbf{x} a \mathbf{y} je spojnice těchto os s minimální vzdáleností svírající s osami pravý úhel

- Posuň s.s. F_i' podél osy x_i' o vzdálenost a_i a otoč jej okolo osy x_i' o úhel $\alpha_i \Rightarrow$ dostáváme s.s. F_i . Homogenní transformační matice má následující tvar:

$$\mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

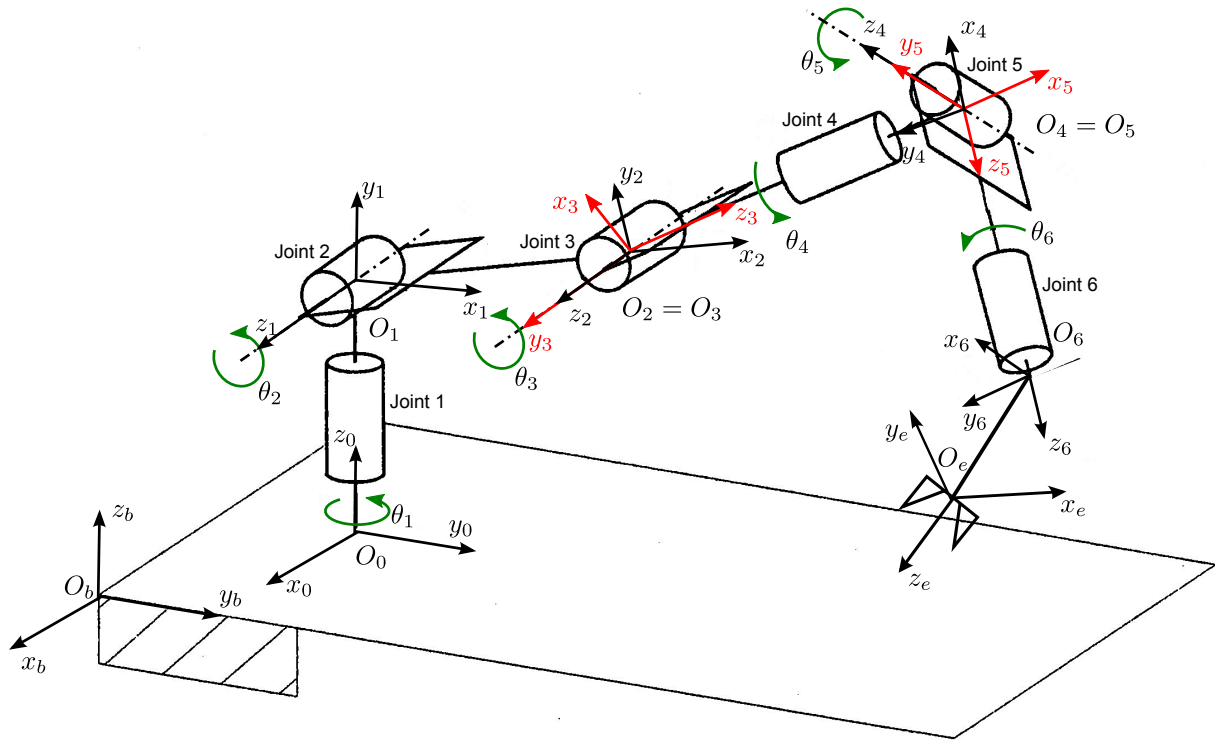
- Výsledná homogenní transformační matice ze s.s. F_{i-1} do s.s. F_i je dána:

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \mathbf{T}_{i'}^{i-1} \cdot \mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Připomeňme, že matice (32) je funkcí pouze kloubových souřadnic θ_i (pro rotační klouby \mathbf{R}) a d_i (pro translační klouby \mathbf{P}).

★ Příklad 11 (D-H úmluva 6 DoF sériový manipulátor)

Obrázek 21 znázorňuje zavedení souřadných systémů pro jednotlivá ramena antropomorfního manipulátoru se sférickým zápěstím.



Obrázek 21: Zavedení souřadných systémů pro dle D-H úmluvy

Geometrické parametry manipulátoru (tzv. D-H parametry), jsou pak dány následující tabulkou:

Joint i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	l_1	θ_1	0	$\frac{\pi}{2}$
2	0	θ_2	l_2	0
3	0	θ_3	0	$\frac{\pi}{2}$
4	l_3	θ_4	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	θ_5	0	$\frac{\pi}{2}$
6	l_4	θ_6	0	0

Tabulka 1: D-H parametry manipulátoru

★

A.2 Singulární polohy v robotice

Singulární polohy manipulátorů jsou specifické polohy koncového efektoru, které významně ovlivňují jeho kinematické vlastnosti. Tuto skutečnost je třeba brát vždy v úvahu při syntéze, analýze i řízení manipulátorů.

Je známo [45], [34], [14], že mezi rychlostmi kloubových $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ a zobecněných $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ souřadnic manipulátoru existuje, pro danou *konstantní* polohu manipulátoru, *lineární závislost* daná jakobiánem³, jako:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \text{kde } \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad (33)$$

Poznamenejme, že zobecněné souřadnice mohou být formálně vyjádřené pro 6 DoF manipulátor jako $\mathbf{X} = \{\mathbf{O}_e^b, \mathbf{R}_e^b\}$, kde \mathbf{O}_e^b je počátek s.s. F_e koncového efektoru vzhledem k s.s. základny F_b a \mathbf{R}_e^b je jeho orientace daná maticí rotace opět vzhledem k s.s. základny F_b , či ekvivalentně např. jako $\mathbf{X} = [(\mathbf{O}_e^b)^T, \alpha, \beta, \gamma]^T$, kde α, β, γ jsou Eulerovy úhly definující rotaci koncového efektoru. Rychlosti zobecněných souřadnic lze pak, s ohledem na reprezentaci rychlosti orientace, vyjádřit několika způsoby:

- Časovou derivací matice rotace:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_e^b & \dot{\mathbf{R}}_e^b \end{bmatrix} \quad (34)$$

- Časovou derivací Eulerových úhlů (dle daného schématu rotace **XYZ**, atd.)

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_e^b \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (35)$$

- Vektorem úhlové rychlosti:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_e^b \\ \boldsymbol{\omega}_e^b \end{bmatrix} \quad (36)$$

Poznamenejme, že vztah mezi vektorem úhlové rychlosti, časovou derivací matice rotace a časovou derivací Eulerových úhlů je následující, viz [45], [46]:

³Jakobián lze v literatuře často nalézt ve dvou modifikacích: *analytický* a *kinematický*, které si liší pouze vyjádřením rychlosti orientace. *Analytický* jakobián využívá k reprezentaci rychlosti orientace konc. efektoru přímé časové derivace zobecněných souřadnic (většinou Eulerovských úhlů), zatímco *kinematický* jakobián využívá reprezentaci rychlosti orientace vektor úhlové rychlosti.

- Čas. derivace matice rotace $\dot{\mathbf{R}} \Leftrightarrow$ vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{R}, \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

- Vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega} \Leftrightarrow$ čas. derivace Eulerových úhlů $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$:
Řešeno dle tzv. *Eulerových kinematických rovnic*, např. pro schéma rotace **XYZ**:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{H}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (38)$$

Pozor na inverzi matice \mathbf{H} při převodu z vektoru úhlové rychlosti na čas. derivace Eulerových úhlů. Matice \mathbf{H} je singulární pro *singularity v reprezentaci*, tzn. v našem případě $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$.

A.2.1 Singulární polohy sériových manipulátorů

Singulární polohou sériového manipulátoru, tzv. *sériovou singulární polohou* rozumíme takovou polohu koncového efektoru, pro kterou jakobián $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ ztrácí svou hodnotu, tedy $\text{Rank}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))$. Z principů lineární algebry, lze tedy ze závislosti mezi rychlostmi (33) usuzovat, že existuje nenulová rychlost kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{0}$ pro kterou se koncový efektor nemůže pohybovat $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$. Jinými slovy, manipulátor v této singulární poloze lokálně ztrácí jeden či více DoF umožňující pohyb koncového efektoru (v Příkladu 3 se jedná zřejmě o ztrátu 1 DoF, což umožní pohyb koncového efektoru pouze po kružnici).

Další nepříjemnosti, které jsou standardně způsobeny pohybem manipulátoru v blízkosti singulárních poloh lze pozorovat ze SVD rozkladu jakobiánu. Připomeňme, že platí následující rozklad (prvky matice \mathbf{J} jsou reálné):

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \quad (39)$$

kde $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_i]$ resp. $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_i]$ jsou unitární matice⁴ po sloupcích složené z levých \mathbf{u}_i resp. pravých \mathbf{v}_i singulárních vektorů. Matice $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$ je diagonální matice, na jejíž diagonále jsou seřazeny od největšího singulární čísla σ_i matice \mathbf{J} , $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$. Dále platí: $\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$ resp. $\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i$.

Soustředíme se nyní na problém IJK, tedy, jak vypočítat rychlost kloubových souřadnic ze známých rychlostí koncového efektoru. Inverzí vztahu (33) a využitím SVD rozkladu (39) dostáváme:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{V} \cdot \text{diag}[\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}] \cdot \mathbf{U}^T \cdot \dot{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (40)$$

Ze vztahu (40) je patrné, že v případě, že se robot pohybuje v blízkosti singulární polohy, platí $\sigma_n \rightarrow 0$ (pro singularity vyšších řádů navíc $\sigma_{n-1} \rightarrow 0$, $\sigma_{n-2} \rightarrow 0$, atd.), tedy $\sigma_n^{-1} \rightarrow +\infty$. Z uvedeného vyplývá, že rychlosti kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}$ mohou (záleží zda-li při násobení matic nedojde k „poodčítání“ jednotlivých prvků) dosahovat vysokých hodnot (limitně nekonečna) pro velmi malé požadavky na rychlost koncového efektoru $\dot{\mathbf{X}}$. Tento problém v průmyslové praxi nastává poměrně často například u antropomorfního manipulátoru se sférickým zápěstím, kvůli singularitě právě ve sférickém zápěstí (zarovnání os prvního a třetího kloubu). Standardní řešení této situace je uskutečněno přeplánování požadovaného pohybu.

⁴Pro unitární matice platí: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$

Analogický problém se projevuje pro přesnost polohování koncového efektoru manipulátoru, neboť platí:

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \Delta \mathbf{Q} \quad (41)$$

Tedy malé nepřesnosti v aktuátorech (nepřesnost regulace, vůle v zubech převodovek, atd.) vedou na vysoké polohové nepřesnosti aktuátoru.

Poznamenejme, že v případě neredundantních manipulátorů (počet nezávislých kloubových souřadnic n je totožný s počtem DoF koncového efektoru m) je jakobián $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ čtvercovou maticí, singulární polohy neredundantních manipulátorů lze vyšetřovat z podmínky $\det(\mathbf{J}) = 0$. Bohužel, ke stanovení relevantní vzdálenosti od singulární polohy, je výpočet determinantu jen stěží použitelný, neboť zde hrají významnou roli dílčí prvky jakobiánu, typicky první tři řádky mají rozměr m , zbývající tři potom rozměr rad (příspěvek rychlostí všech kloubových souřadnic do výsledné rotační/translační rychlosti koncového efektoru). Bez vhodného normování jakobiánu tedy nelze jednoznačně říci, jak moc jsme od singulární polohy vzdáleni. Z tohoto důvodu se často zavádí tzv. *index podmíněnosti* jakobiánu μ , který je definován jako:

$$\mu = \frac{\sigma_n}{\sigma_1} \in \langle 0, 1 \rangle \quad (42)$$

kde σ_n resp. σ_1 je nejmenší resp. největší singulární číslo jakobiánu \mathbf{J} .

A.2.2 Singulární polohy paralelních manipulátorů

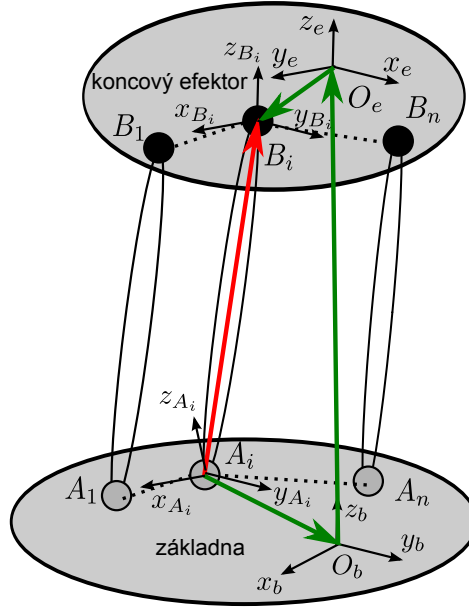
V případě singulárních poloh paralelních manipulátorů lze singularity dělit na dvě základní skupiny. *Paralelní singulární polohy* dané paralelní kinematickou strukturou manipulátoru a *sériové singulární polohy* dané sériovými kinematickými řetězci, které tvoří jednotlivá „ramena“ paralelního manipulátoru. Abychom mohli tyto singulární polohy jednoznačně definovat, zaměřme se nejprve na výpočet IGM právě pro paralelní manipulátory, zobecnění přístupu uvedeného v [45]. Předpokládejme paralelní manipulátor s N nezávislými sériovými kinematickými řetězci, viz Obrázek 22. Poloha základny manipulátoru je jednoznačně určena s.s. F_0 a poloha koncového efektoru pak s.s. F_e . Poloha a orientace i -tého kinematického řetězce $\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$, tedy s.s. F_{B_i} vzhledem k s.s. F_{A_i} , je dána homogenní transformační maticí:

$$\mathbf{H}_1^{(i)}(\mathbf{X}) \triangleq \mathbf{T}_{B_i}^{A_i} = \left(\mathbf{T}_{A_i}^b \right)^{-1} \cdot \mathbf{T}_e^b \cdot \mathbf{T}_{B_i}^e, \quad \mathbf{T}_e^b = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_e^b & \mathbf{R}_e^b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

kde \mathbf{T}_e^b je daná poloha \mathbf{O}_e^b a orientace \mathbf{R}_e^b koncového efektoru vzhledem k s.s. základny F_b (známé zobecněné souřadnice \mathbf{X}), $\mathbf{T}_{A_i}^b$ je konstantní známá hom. transformační matice definující polohu a orientaci základny, s.s. F_{A_i} , i -tého kinematického řetězce a $\mathbf{T}_{B_i}^e$ je konstantní známá hom. transformační matice definující polohu a orientaci s.s. F_{B_i} , který určuje polohu a orientaci přípojného místa kin. řetězce ke koncovému efektoru. Matice $\mathbf{T}_{B_i}^e$ a $\mathbf{T}_{A_i}^b$ jsou tedy jednoznačně určeny geometrií zkoumaného robotu a nezávislé na jeho kloubových/zobecněných souřadnicích.

DGM pro i -tý sériový kinematický řetězec s kloubovými souřadnicemi \mathbf{Q}_i lze psát ve tvaru:

$$\mathbf{H}_2^{(i)}(\mathbf{Q}_i) = \mathbf{T}_{B_i}^{A_i} \quad (44)$$



Obrázek 22: Řešení IKÚ obecného paralelního manipulátoru (A_i resp B_i definují počátky s.s. přípojných bodů na základně resp. koncovém efektoru)

Zatímco struktura rovnice (43) je stejná pro všechny typy paralelních manipulátorů, struktura rovnice (44) závisí striktně na typu použitých sériových kinematických řetězců. IGM pro obecný paralelní manipulátor je pak dán řešením soustavy rovnic, porovnáním vztahu (43) a (44) dostáváme:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{(1)}(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_1^{(i)}(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_1^{(N)}(\mathbf{X}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_1(\mathbf{X})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_2^{(1)}(\mathbf{Q}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_2^{(i)}(\mathbf{Q}_i) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_2^{(N)}(\mathbf{Q}_N) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_2(\mathbf{Q})} \quad (45)$$

Poznamenejme, že funkce $\mathbf{H}_1^{(i)}(\mathbf{X})$ je v případě IGM paralelních manipulátorů známá (známe požadované zobecněné souřadnice \mathbf{X} a geometrické uspořádání přípojných bodů na základně a koncovém efektoru) a předpis funkce $\mathbf{H}_2^{(i)}(\mathbf{Q})$ může být stanoven analogicky jako v případě řešení DGM standardních sériových manipulátorů, tzn. prostým násobením hom. transform. matic plynoucích např. z popisu kinematiky sériových kin. řetězců pomocí D-H úmluvy. Řešení IGM paralelních manipulátorů se tak v podstatě rozpadá na řešení IGM pro N sériových manipulátorů tvořící dílčí kinematické řetězce s hledanými kloubovými souřadnicemi \mathbf{Q}_i (pasivními a aktivními).

Časovou derivací polohových vztahů (45) pak dostáváme vztah mezi rychlostmi kloubových a zobecněných souřadnic paralelního manipulátoru (IIK resp. DIK):

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{Q}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}}_{\mathbf{J}^{-1}} \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (\text{IIK}) \quad \text{resp.} \quad \dot{\mathbf{X}} = \underbrace{\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbf{J}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (\text{DIK}) \quad (46)$$

kde \mathbf{B} resp. \mathbf{A} lze odvodit parciálními derivacemi funkcí $\mathbf{H}_1(\mathbf{X})$ dle složek \mathbf{X} resp. $\mathbf{H}_2(\mathbf{Q})$ dle složek \mathbf{Q} . Singulární polohy pro paralelní manipulátory lze tedy dělit na tři typy:

- Matice \mathbf{A} nemá plnou hodnost \Rightarrow sériová singularita (jakobián \mathbf{J} nemá plnou hodnost, $\text{Rank}(\mathbf{J}) < \min(m, n)$). Tento typ singularity koresponduje se sériovou singulární polohou

sériových manipulátorů reprezentující nezávislé kinematické řetězce manipulátoru. Tedy v takovémto případě opět existuje nenulová rychlost kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{0}$ pro kterou se koncový efektor nemůže pohybovat $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ (manipulátor lokálně ztrácí své DoF). Tento typ singularity bývá často chybně zaměňován s hranicí pracovního prostoru manipulátoru, pro kterou platí to samé (obecně však sériová singularita na hranici pracovního prostoru nemusí nastávat).

- Matice \mathbf{B} nemá plnou hodnost \Rightarrow *paralelní singularita* (inverzní jakobián \mathbf{J}^{-1} nemá plnou hodnost, $\text{Rank}(\mathbf{J}^{-1}) < \min(m, n)$). V takovém případě existuje nenulová rychlost $\dot{\mathbf{X}} \neq \mathbf{0}$ koncového efektoru generující nulovou rychlost $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ aktivních kloubových souřadnic. Koncový efektor tedy získává tzv. neřiditelné stupně volnosti. V praxi je nezbytně nutné se okolí takových poloh vyvarovat, neboť manipulátor se v nich stává v podstatě neřiditelným. Navíc z kinetostatické duality vyplývá (odvozeno na základ principu virtuální práce, viz [34]), vztah mezi silami/momenty koncového efektoru a kloubových souřadnic:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F} \quad (47)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ reprezentuje síly/momenty aktuátorů a \mathbf{F} síly/momenty koncového efektoru.

V blízkosti singulární polohy tak (odvození pomocí SVD rozkladu analogické jako v Kapitole A.2.1) může docházet k vysokým požadavkům na síly/momenty $\boldsymbol{\tau}$ v aktuátorech (limitně nekonečné) pro malé požadavky na síly/momenty koncového efektoru.

- Matice \mathbf{A} ani \mathbf{B} nemá plnou hodnost. Nastávají oba typy singularit současně.

B Použité zkratky

DoF	(Degrees Of Freedom) stupně volnosti koncového efektoru manipulátoru
s.s.	souřadný (souřadnicový) systém
DGM	(Direct Geometric Model) přímý geometrický model (poloha kloubů manipulátoru \Rightarrow poloha koncového efektoru)
IGM	(Inverse Geometric Model) inverzní geometrický model (poloha koncového efektoru \Rightarrow poloha kloubů manipulátoru)
DIK	(Direct Instantaneous Kinematics) přímá okamžitá kinematická úloha (rychlosti/zrychlení kloubů manipulátoru \Rightarrow rychlosti/zrychlení koncového efektoru)
IIK	(Inverse Instantaneous Kinematics) inverzní okamžitá kinematická úloha (rychlosti/zrychlení koncového efektoru \Rightarrow rychlosti/zrychlení kloubů manipulátoru)
R, P	1 DoF klouby rotační, prizmatický
<u>R</u>, <u>P</u>	podtržení značí aktivní kloub v kin. řetězci manipulátoru, např. <u>PRRR</u>
D-H	Denavit-Hartenbergova / Khalil-Kleinfingerova úmluva
#	= počet, např # parametrů manipulátoru

C Použité matematické značení

- F_i $F_i = \{\mathbf{O}_i - \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i \mathbf{z}_i\}$ označení i -tého s.s. určeného počátkem a souř. osami (pravotočivý s.s.)
- $\mathbf{O}[i:j]$ i -tý až j -tý prvek (složka) vektoru (bodu) \mathbf{O}
- \mathbf{O}_i^j souřadnice bodu \mathbf{O}_i vyjádřené v s.s. F_j
- \mathbf{R}_i^j 3×3 matice rotace definující orientaci souř. os s.s. F_i vyjádřenou v s.s. F_j

$$\text{rot}(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{elementární rotace kolem osy } \mathbf{x} \text{ o úhel } \alpha) \quad (48)$$

$$\text{rot}(\mathbf{y}, \beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (\text{elementární rotace kolem osy } \mathbf{y} \text{ o úhel } \beta) \quad (49)$$

$$\text{rot}(\mathbf{z}, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{elementární rotace kolem osy } \mathbf{z} \text{ o úhel } \gamma) \quad (50)$$

- XYZ** rozumíme schéma rotace (pokud není uvedeno jinak) postupně podle:
 osy \mathbf{x} o úhel α
 nově vzniklé osy \mathbf{y} o úhel β
 nově vzniklé osy \mathbf{z} o úhel γ

- \mathbf{T}_i^j homogenní transformační matice - pozice (rotace a orientace)
 s.s. $F_i = \{\mathbf{O}_i - \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i \mathbf{z}_i\}$ vzhledem k s.s. F_j

$$\mathbf{T}_i^j = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_i^j & & \mathbf{O}_i^j \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbf{R}_i^j = \left[\mathbf{x}_i^j \mid \mathbf{y}_i^j \mid \mathbf{z}_i^j \right] \quad (51)$$

- $\text{Trans}(\mathbf{z}, d)$ hom. trans. matice prostého posunutí v ose \mathbf{z} o vzdálenost d
- $\text{Rot}(\mathbf{z}, \gamma)$ hom. trans. matice prostého natočení okolo osy \mathbf{z} o úhel γ
- $\mathbf{A}_{i \times j}$ matice o rozměrech $i \times j$ (počet řádků \times počet sloupců)