

Technická zpráva

Název projektu:

Výukový model pro robotiku

(Číslo projektu: VS-14-019)

Název zprávy:

Kinematika a dynamika manipulátoru pro výukové účely

Zapsáno (místo, datum):

KKY, 30. ledna 2015

Autor:

Martin Švejda

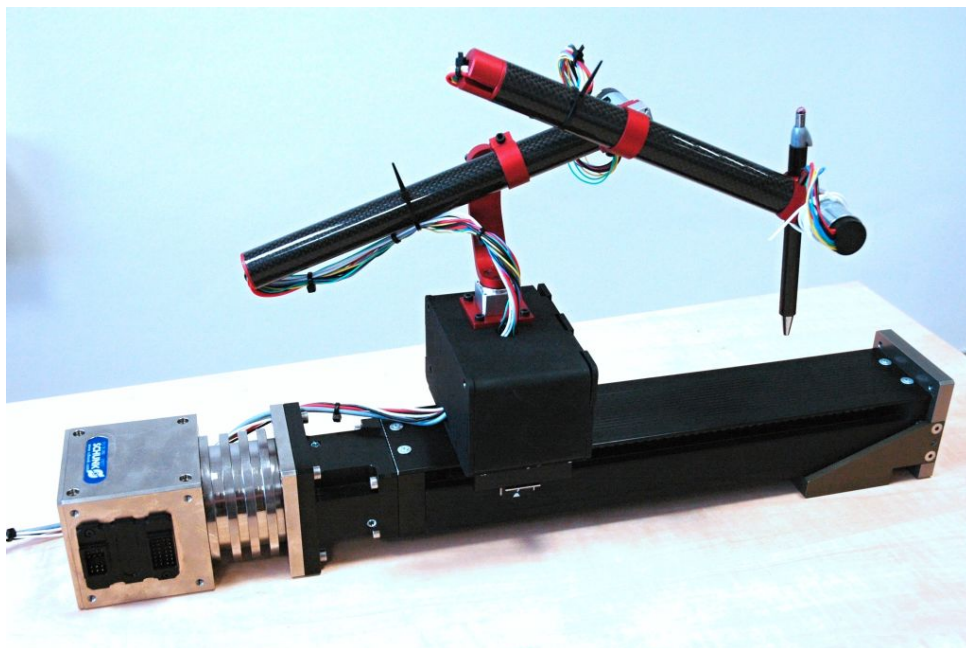
Obsah

1	Úvod	3
2	Kinematika výukového modelu manipulátoru	4
2.1	Přímý geometrický model	7
2.2	Inverzní geometrický model	7
2.3	Okamžitá kinematická úloha	9
3	Dynamika výukového modelu manipulátoru	9
3.1	Přístup s využitím Euler-Lagrangeových rovnic	9
3.2	Newton-Eulerův přístup	10
4	Virtuální model manipulátoru pro výukové účely	10
5	Příklad aplikace „Pick and Place“	13
5.1	Generátor požadované trajektorie koncového efektoru	13
5.2	Ověření dynamického modelu	16
5.3	Realizace virtuálního dynamického modelu manipulátoru (implementační poznámky)	17
6	Závěr	19

1 Úvod

Výzkumná zpráva se zabývá vytvořením matematického modelu vyvíjeného manipulátoru pro výukové účely v robotice a mechatronice. S ohledem na cíle projektu je nezbytně nutné vytvořit korektní matematický model manipulátoru, na kterém budou prezentovány veškerá základní principy modelování kinematiky a dynamiky manipulátorů. Znalost matematického modelu manipulátoru hraje klíčovou roli pro pochopení dalších nadřazených problémů v řízení, optimalizaci atd.

Vyvíjený manipulátor, viz Obrázek 1, je tvořen sériovou architekturou se 3 stupni volnosti (DoF), které umožňují pohyb koncového efektoru manipulátoru ve třech nezávislých translačních osách v prostoru. Manipulátor je poháněn 3 nezávislými rotačními aktuátory a je vybaven systémem modulárně uzpůsobitelných ramen z uhlíkových vláken. Konstrukce manipulátoru je originálním výsledkem projektu podrobně popsáným v technické zprávě [2]. Řídicí systém manipulátoru implementovaný v systému REX je podrobně popsán v technické zprávě [8].



Obrázek 1: Vyvinutý manipulátor se 3 DoF pro výukové účely

Technická zpráva sleduje cíle projektu a věnuje se především následujícím oblastem:

- **Model kinematiky manipulátoru**

Matematický model kinematiky manipulátoru byl vytvořen na základě obecných principů používaných v robotice. Důraz byl kladen nejen na vlastní vytvoření kinematického modelu, ale zejména na možnost ověření takto vzniklého modelu v SW nástroji Matlab/Simulink/SimMechanics umožňující vizualizaci pohybu manipulátoru.

- **Dynamický model manipulátoru**

Za účelem vytvoření kompletního matematického modelu je nezbytně nutné doplnit kinematický model manipulátoru modelem dynamickým. Tak dostáváme kompletní virtuální model robotu, na kterém lze demonstrovat přístupy *Model Based Design* a *Hardware In the Loop*.

- **Virtuální model robotu k implementaci do HW platformy**

Řešením diferenciálních rovnic získaného dynamického modelu lze vypočítat pohyb manipulátoru na základě momentů působících na jednotlivé aktuátory a externí síly působící na

koncový efektor. Implementací dynamického modelu do HW platformy společně se systémem řešení diferenciálních rovnic dynamického modelu získáváme fyzické zařízení modelující chování manipulátoru. Takové zařízení lze pak používat pro návrh řídicích systémů.

- **Generátory pohybu**

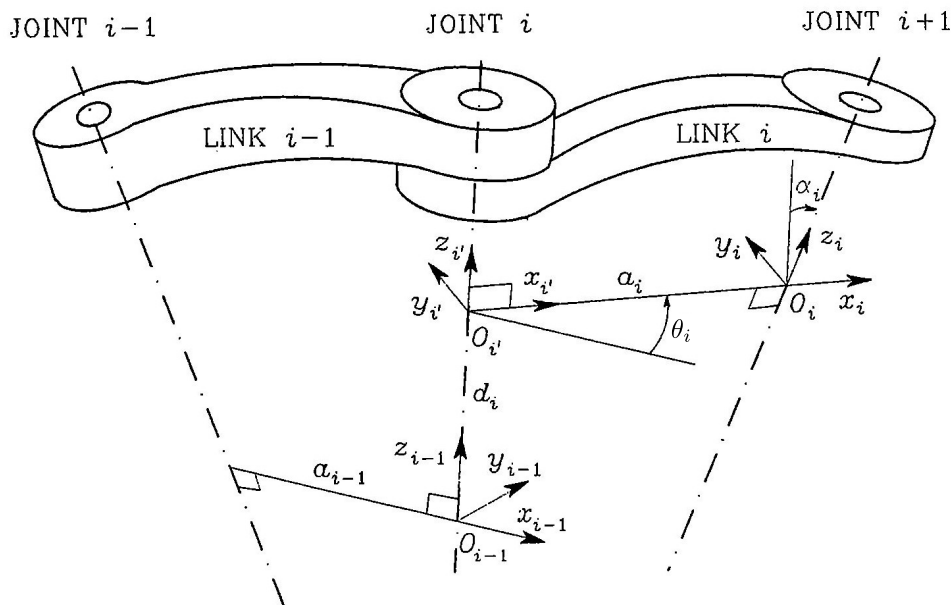
Za účelem demonstrace výukového modelu pro robotiku a systému řízení je nezbytně nutné implementovat vhodné algoritmy plánování pohybu koncového efektoru manipulátoru. Předpokládá se plánování pohybu manipulátoru pro jednoduché pick and place aplikace, tzn. přesun manipulátoru z počáteční do cílové pozice se současným tvarováním trajektorie mezi okrajovými body (např. za účelem vyhnutí se překážkám). Algoritmy plánování pohybu jsou pouze nastíněny a nejsou hlavním předmětem řešeného projektu.

2 Kinematika výukového modelu manipulátoru

Kinematický model manipulátoru byl založen na základě standardních popisů ramen manipulátoru prostřednictvím přiřazených souřadných systémů (s.s.) dle Denavit-Hartenbergovy (D-H) úmluvy. Podrobné informace k systému popisu kinematiky manipulátoru prostřednictvím D-H úmluvy lze nalézt např. v [9], [10]. Poznámka 1 předkládá stručný popis postupu aplikace D-H úmluvy na kinematiku manipulátoru. Přiřazené s.s. ramenům manipulátoru jsou znázorněny na Obrázku 3, D-H parametry jsou shrnuty v Tabulce 1.

- **Poznámka 1 (Denavit-Hartenbergova úmluva)**

Definice s.s. $F_i = \{O_i - x_i y_i z_i\}$ za předpokladu znalosti s.s. $F_{i-1} = \{O_{i-1} - x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}\}$ dle D-H úmluvy je vyjádřena následovně:



Obrázek 2: D-H úmluva

- Zvol osu z_i podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint* $i + 1$ a osu z'_i podél osy rotace, resp. translace kloubu *Joint* i
- Umístí počátek O_i s.s. F_i do průsečíku osy z_i a normály¹ os z_{i-1} a z_i . Umístí počátek O'_i s.s. $F'_i = \{O'_i - x'_i y'_i z'_i\}$ do průsečíku osy z_{i-1} a téže normály.

¹normála os x a y je spojnice těchto os s minimální vzdáleností svírající s osami pravý úhel

- Zvol osu \mathbf{x}_i a \mathbf{x}'_i podél normály ve směru od kloubu *Joint* i do kloubu *Joint* $i + 1$.
- Zvol osu \mathbf{y}_i a \mathbf{y}'_i tak, aby výsledné s.s. byly pravotočivé.

Lze snadno ukázat, že D-H úmluva nedefinuje jednoznačně umístění s.s. v následujících případech.

- Pro s.s. $F_0 = \{\mathbf{O}_0 - \mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0\}$ je určena jednoznačně pouze osa \mathbf{z}_0 (podle osy rotace, resp. translace prvního kloubu manipulátoru *Joint* 1). Osu \mathbf{x}_0 a počátek \mathbf{O}_0 lze proto volit libovolně. Osa \mathbf{y}_0 je pak určena tak, aby výsledný systém byl opět pravotočivým.
- Pro s.s. $F_n = \{\mathbf{O}_n - \mathbf{x}_n\mathbf{y}_n\mathbf{z}_n\}$, kde n je počet kloubů s jedním stupněm volnosti uvažovaného manipulátoru není jednoznačně určena osa \mathbf{z}_n , neboť kloub *Joint* $n + 1$ již neexistuje. Osa \mathbf{x}_n však musí zůstat kolmá k ose \mathbf{z}_{n-1} .
- Pokud jsou dvě po sobě jdoucí osy kloubů (\mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i) paralelní, jejich normála není jednoznačně definována (může být libovolně posunuta ve směru os kloubů).
- Pokud se dvě po sobě jdoucí osy kloubů (\mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i) protínají (normála je nulové délky), osa \mathbf{x}_i bude volena tak, aby byla kolmá k rovině definované osami \mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i . Její *kladný směr* však může být volen libovolně.

Nyní může být vzájemná poloha s.s. F_{i-1} a F_i popsána pouze pomocí čtyř D-H parametrů:

$a_i \dots$ vzdálenost mezi počátky \mathbf{O}_i a \mathbf{O}'_i

$d_i \dots$ vzdálenost mezi počátky \mathbf{O}_{i-1} a \mathbf{O}'_i

$\alpha_i \dots$ úhel mezi osami \mathbf{z}_{i-1} a \mathbf{z}_i daný pootočením s.s. F'_i podél osy \mathbf{x}'_i

$\theta_i \dots$ úhel mezi osami \mathbf{x}_{i-1} a \mathbf{x}_i daný pootočením s.s. F_{i-1} podél osy \mathbf{z}_{i-1}

Je zřejmé, že pro základní typy kloubů s jedním stupněm volnosti platí:

kloub *Joint* i je typu P proměnná definující pohyb kloubu je d_i , proměnné a_i , α_i , θ_i jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link* i

kloub *Joint* i je typu R proměnná definující pohyb kloubu je θ_i , proměnné a_i , d_i , α_i jsou konstanty definující geometrické uspořádání ramene *Link* i

Transformační vztah mezi s.s. F_{i-1} a F_i je dán následujícím způsobem.

- Vyber s.s. F_{i-1}
- Posuň tento systém podél osy \mathbf{z}_{i-1} o vzdálenost d_i a otoč jej okolo osy \mathbf{z}_{i-1} o úhel $\theta_i \Rightarrow$ dostáváme s.s. F'_i . Matice přechodu²:

$$\mathbf{T}_{i'}^{i-1} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

²zkratka c_{θ_i} , resp. s_{θ_i} označuje $\cos \theta_i$, resp. $\sin \theta_i$. Podobně $s_{(\theta_1+\theta_2)}$ označuje $\sin(\theta_1 + \theta_2)$

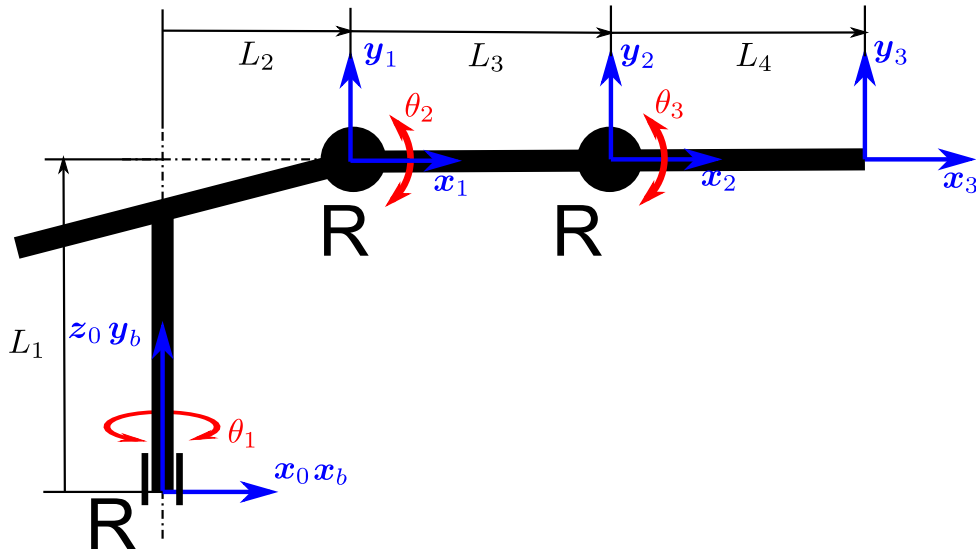
- Posuň s.s. F_i' podél osy x_i' o vzdálenost a_i a otoč jej okolo osy x_i' o úhel $\alpha_i \Rightarrow$ dostáváme s.s. F_i . Matice přechodu:

$$\mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Výsledná matice přechodu ze s.s. F_{i-1} do s.s. F_i je dána:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{i-1} &= \mathbf{T}_{i'}^{i-1} \cdot \mathbf{T}_i^{i'} = \text{Trans}(\mathbf{z}, d_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{z}, \theta_i) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, a_i) \cdot \text{Rot}(\mathbf{x}, \alpha_i) = \\ &= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

Připomeňme, že matice přechodu matice (3) je funkcí pouze kloubových souřadnic θ_i (pro rotační klouby R) a d_i (pro translační klouby P). ■



Obrázek 3: Zavedené s.s. manipulátoru

i	d_i	θ_i	a_i	α_i	$q_{i_{HOME}}$
1	L_1	θ_1	L_2	$\frac{\pi}{2}$	0
2	0	θ_2	L_3	0	0
3	0	θ_3	L_4	0	0

Tabulka 1: D-H parametry základního kinematického modelu, $q_{i_{HOME}}$ je domovská poloha kloubových souřadnic, která odpovídá konfiguraci na Obrázku 3, tučně jsou vyznačeny aktivní kloubové souřadnice

Kloubové a zobecněné souřadnice manipulátoru a geometrické parametry jsou dány jako³

$$\mathbf{X} = \mathbf{O}_3^b = [x \ y \ z]^T \quad (\text{zobecněné souřadnice}) \quad (4)$$

$$\mathbf{Q} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T \quad (\text{kloubové souřadnice}) \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\xi} = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4]^T \quad (\text{geometrické parametry}) \quad (6)$$

2.1 Přímý geometrický model

Jedná se o nalezení zobecněných souřadnic \mathbf{X} za předpokladu znalosti souřadnic kloubových \mathbf{Q} . Problém přímého geometrického modelu (DGM) je pro sériové manipulátory vždy řešitelný v analytickém tvaru a existuje pro něj vždy právě jedno řešení. Řešení DGM je dáno přímo násobením homogenních transformačních matic transformující s.s. jednotlivých ramen manipulátoru (včetně kompenzace orientace základny \mathbf{T}_0^b):

$$\mathbf{T}_4^b = \mathbf{T}_0^b \cdot \mathbf{T}_1^0 \cdot \mathbf{T}_2^1 \cdot \mathbf{T}_3^2, \quad \mathbf{X} = \mathbf{O}_3^b = \mathbf{T}_3^b[1 : 3, 4] \quad (7)$$

kde \mathbf{T}_i^{i-1} jsou homogenní transformační matice vzniklé dosazením D-H parametrů z Tabulky 1 do obecných předpisů (3) a

$$\mathbf{T}_0^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je kompenzace orientace základny manipulátoru (vzájemné natočení s.s. F_b a F_0)⁴.

Výsledný vztah pro DGM je následující:

$$\mathbf{X} = \mathbf{O}_3^b = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) (\cos(\theta_2) \cos(\theta_3) L_4 - \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) L_4 + \cos(\theta_2) L_3 + L_2) \\ \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) L_4 + \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) L_4 + \sin(\theta_2) L_3 + L_1 \\ -\sin(\theta_1) (\cos(\theta_2) \cos(\theta_3) L_4 - \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) L_4 + \cos(\theta_2) L_3 + L_2) \end{bmatrix} \quad (8)$$

2.2 Inverzní geometrický model

Inverzní geometrický model (IGM) pro sériové manipulátory obecně není triviální záležitostí, nelze řešit analyticky a může existovat více izolovaných řešení. V případě manipulátoru pro výukové účely je však z důvodu jednoduchosti kinematické architektury možné problém IGM řešit Algoritmem 2.2, který vede na více izolovaných řešení, avšak tato řešení lze nalézt v analytické podobě.

◆ Algoritmus 1 (IGM pro výukový model manipulátoru)

Vstup:

Polohy zobecněných souřadnic $\mathbf{X} = \mathbf{O}_3^b = [x \ y \ z]^T$ (poloha konc. efektoru manipulátoru vzhledem k s.s. F_b)

Výstup:

Polohy kloubových souřadnic $\mathbf{Q} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$

³ \mathbf{O}_i^j označuje souřadnice bodu/vektoru \mathbf{O}_i vyjádřené vzhledem k s.s. F_j

⁴ $\mathbf{O}_3^b[1]$ označuje 1. složku vektoru \mathbf{O}_3^b , $\mathbf{T}_3^b[1 : 3, 4]$ vyjadřuje 1. až 3. řádek, 4. sloupec matice, tedy $= \mathbf{O}_3^b$

Vlastní algoritmus:

1. Vypočti souřadnice bodu \mathbf{O}_3 (poloha koncového efektoru) v s.s. F_0

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O}_3^0 \\ 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{T}_0^b)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3^b \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Z pozorování symbolického vyjádření x a y složky bodu \mathbf{O}_3^0

$$\mathbf{O}_3^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) (\cos(\theta_2) \cos(\theta_3) L_4 - \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) L_4 + \cos(\theta_2) L_3 + L_2) \\ \sin(\theta_1) (\cos(\theta_2) \cos(\theta_3) L_4 - \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) L_4 + \cos(\theta_2) L_3 + L_2) \\ \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) L_4 + \cos(\theta_2) \sin(\theta_3) L_4 + \sin(\theta_2) L_3 + L_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

lze nalézt vztah pro výpočet první kloubové souřadnice θ_1 :

$$\theta_1 = \text{atan2}(\mathbf{O}_3^0[2], \mathbf{O}_3^0[1]) + k\pi, \quad k = \{0, 1\} \quad (11)$$

tedy existují dvě řešení pro kloubovou souřadnici θ_1 .

2. Se znalostí θ_1 , tedy i transformací $\mathbf{T}_1^0(\theta_1)$, lze vypočítat souřadnice bodu \mathbf{O}_3 v s.s. F_1 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O}_3^1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{T}_1^0)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Opět využitím symbolického vyjádření bodu \mathbf{O}_3^1

$$\mathbf{O}_3^1 = \begin{bmatrix} L_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \cos(\theta_2) L_3 \\ L_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin(\theta_2) L_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

lze umocněním a sečtením x a y souřadnice tohoto bodu získat vztah pro výpočet kloubové souřadnice θ_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_3^1[1]^2 + \mathbf{O}_3^1[2]^2 &= L_4^2 + 2 L_4 L_3 \cos(\theta_3) + L_3^2 \\ \cos(\theta_3) &= \frac{\mathbf{O}_3^1[1]^2 + \mathbf{O}_3^1[2]^2 - L_3^2 - L_4^2}{2 L_4 L_3} \\ \sin(\theta_3) &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_3} \\ \theta_3 &= \text{atan2}(\sin(\theta_3), \cos(\theta_3)) \end{aligned} \quad (14)$$

tedy existují dvě řešení pro kloubovou souřadnici θ_3

3. S využitím součtových vzorců pro funkce \sin a \cos lze symbolické vyjádření bodu \mathbf{O}_3^1 z rovnice (13) přeformulovat na soustavu dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé $\sin(\theta_2)$, $\cos(\theta_2)$ a nalézt tak řešení pro kloubovou souřadnici θ_2 :

$$\begin{aligned} \sin(\theta_2) &= \frac{\cos(\theta_3) L_4 \mathbf{O}_3^1[2] + L_3 \mathbf{O}_3^1[2] - \mathbf{O}_3^1[1] \sin(\theta_3) L_4}{L_4^2 + 2 L_4 L_3 \cos(\theta_3) + L_3^2} \\ \cos(\theta_2) &= \frac{\mathbf{O}_3^1[2] \sin(\theta_3) L_4 + \mathbf{O}_3^1[1] \cos(\theta_3) L_4 + \mathbf{O}_3^1[1] L_3}{L_4^2 + 2 L_4 L_3 \cos(\theta_3) + L_3^2} \\ \theta_2 &= \text{atan2}(\sin(\theta_2), \cos(\theta_2)) \end{aligned} \quad (15)$$

Je zřejmé, že IGM pro model manipulátoru pro výukové účely má tak celkem 4 izolovaná řešení daná rovnicemi (11), (14). \blacklozenge

2.3 Okamžitá kinematická úloha

Vzhledem k potřebě nalézt dynamický model manipulátor, je nezbytné znát nejen závislosti mezi polohami zobecněných a kloubových souřadnic (DGM, IGM), ale také závislosti rychlostí a zrychlení mezi těmito souřadnicemi, které lze obecně psát jako:

Přímý okamžitá kinematická úloha:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \\ \ddot{\mathbf{X}} &= \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}\end{aligned}\quad (16)$$

Inverzní okamžitá kinematická úloha:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}) \cdot \ddot{\mathbf{X}}\end{aligned}\quad (17)$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ respektive $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$ nazýváme *kinematickým* respektive *inverzním kinematickým jakobiánem*. Lze ukázat [9], [7], že prvky kinematického jakobiánu a jeho časové derivace není nutné odvozovat přímým derivováním polohových vztahů (DGM, IGM) podle času, ale lze je odvodit přímo prostřednictvím prvků homogenních transformačních matic \mathbf{T}_0^b , \mathbf{T}_i^{i-1} , $i = 1, 2, 3$. Konkrétní obecné vztahy pro výpočet kinematického jakobiánu a jeho časové derivace zde neuvádíme, jejich podrobné odvození lze nalézt v [9].

3 Dynamika výukového modelu manipulátoru

Existují dva základní přístupy k vytváření dynamických modelů manipulátoru. Poznamenejme, že oba přístupy formulují dynamické rovnice manipulátoru v prostoru kloubových souřadnic.

3.1 Přístup s využitím Euler-Lagrangeových rovnic

Metoda založena na vyjádření Lagrangiánu ve tvaru:

$$L = T(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) - U(\mathbf{Q}) \quad (18)$$

kde T resp. U je kinetická resp. potenciální energie všech ramen manipulátoru.

Pohybové rovnice pro manipulátor s n rameny lze poté získat ve tvaru:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1 \dots n \quad (19)$$

kde $q_i = \mathbf{Q}[i]$ jsou kloubové souřadnice manipulátoru a τ_i je síla/moment působící na i -tý kloub manipulátoru (síla aktuátorů).

Rovnici (19) lze přepsat do známého tvaru pohybové rovnice:

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{Q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}(\mathbf{Q}) \dot{q}_k \dot{q}_j + g_i(\mathbf{Q}) = \tau_i \quad (20)$$

kde $b_{ij}(\mathbf{Q})$, $h_{ijk}(\mathbf{Q})$, $g_i(\mathbf{Q})$ jsou koeficienty závislé na poloze manipulátoru. Opět lze ukázat, [7], [3], že tyto koeficienty lze odvodit přímo z prvků homogenních transformačních matic a hmotnostních parametrů (umístění a hmotnosti těžišť ramen a momenty setrvačnosti ramen vzhledem k těžišti).

Přesto, že přístup prostřednictvím Euler-Lagrangeových rovnic je často používán především pro možnosti jednoduše modelovat různé externí silové projevy (třecí síly, síly pružin, tlumící síly, atd.), není příliš vhodný pro vytváření dynamických modelů manipulátorů za účelem jejich využití v aplikacích v reálném čase (zejména kvůli velkým výpočetním nárokům při vyčíslování koeficientů pohybové rovnice).

3.2 Newton-Eulerův přístup

Lze ukázat, že výpočet translačních a rotačních rychlostí a zrychlení jednotlivých souřadných systémů (ramen) manipulátoru lze zapsat rekurzivním algoritmem, jehož parametry jsou (podobně jako v případě výpočtu kinematického jakobiánu) prvky homogenních transformačních matic. Takový rekurzivní algoritmus lze modifikovat i na výpočet rotačních a translačních rychlostí a zrychlení jednotlivých těžišť ramen. Dostáváme tak **dopředný rekurzivní předpis**, který nám vypočítává rychlosti a zrychlení těžišť jednotlivých ramen od prvního ramene (nepohybující se základny) k poslednímu a jehož vstupními daty jsou požadované rychlosti a zrychlení jednotlivých kloubů (aktuátorů) manipulátoru.

Uvažujeme-li dále, že jednotlivá ramena spolu silově/momentově interagují, tzn. poslední rameno působí silou/momentem na rameno předposlední atd. (zákon akce a reakce). Lze odvodit **zpětný rekurzivní algoritmus**, s uvažováním externích sil/momentů působících na poslední rameno manipulátoru (externí síly působící na koncový efektor, např. vliv prostředí, atd.), který postupně, směrem od posledního k prvnímu ramenu, vypočítává síly momenty působící v jednotlivých s.s. ramen. Tyto síly resp. momenty pak mohou být promítnuty do sil resp. momentů prizmatických resp. rotačních kloubů. Získáváme tak síly/momenty jednotlivých aktuátorů manipulátor. Principiálně tak Newton-Eulerův přístup řeší prioritně tzv. **inverzní dynamickou úlohu**, tedy nalezení požadovaných sil/momentů aktuátorů takových, aby manipulátor realizoval požadovaný pohyb zadaný polohou, rychlostí a zrychlením jeho kloubových souřadnic.

Vzhledem k rekurzivní podstatě metody je Newton-Eulerův přístup vhodný k implementaci dynamických modelů manipulátoru. V případě, že požadujeme realizovat tzv. **přímou dynamickou úlohu**, tedy nalezení požadovaného pohybu manipulátoru ve smyslu poloh, rychlostí a zrychlení jeho kloubových souřadnic ze znalosti sil/momentů působících na jednotlivé klouby a síly/momentu působící na koncový efektor, je možné využít rekurzivní formulaci inverzní dynamické úlohy a vypočítat přímo hodnoty zrychlení \ddot{q}_i kloubových souřadnic manipulátoru. Dostáváme tak předpis:

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbb{F}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) \quad (21)$$

kde \mathbf{Q} jsou kloubové souřadnice manipulátoru, $\boldsymbol{\tau}$ jsou síly/momenty působící v kloubech manipulátoru (vlivem řízených aktuátorů), \mathbf{F} jsou externí síly a momenty působící na koncový efektor, $\boldsymbol{\xi}$ jsou geometrické parametry manipulátoru a $\boldsymbol{\mu}$ jsou dynamické (hmotnostní) parametry manipulátoru (hmotnosti a umístění těžišť ramen, momenty setrvačnosti ramen k těžišti).

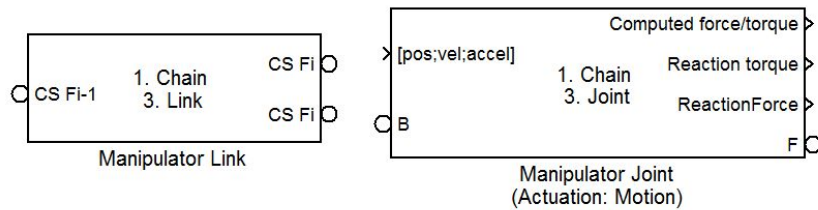
Podrobné informace k uvedeným rekurzivním algoritmům lze nalézt v [7], [3], [4].

4 Virtuální model manipulátoru pro výukové účely

Za účelem vytvoření manipulátoru pro výukové účely byla implementována knihovna bloků v prostředí Matlab/Simulink/SiMechanics a některé obecné funkce, které umožňují modelovat libovolné sériové kinematické řetězce manipulátorů. Poznamenejme, že vyvinuté bloky jsou stále ve fázi vývoje. Celý systém bloků a funkcí tvoří modulární nástroj k modelování manipulátorů. Vzhledem k podstatě projektu je takový přístup vhodný, neboť demonstruje možnosti využití obecných přístupů v robotice a umožňuje tak studentům pochopit princip vytváření virtuálních modelů rychlou a zejména systematickou cestou.

Byly implementovány následující funkce a bloky:

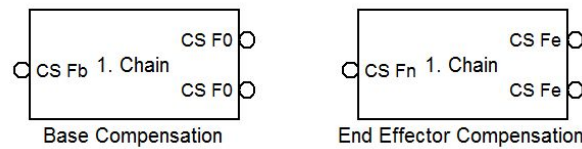
- **Bloky realizující kinematickou dvojici kloub + rameno v SimMechanicsu**



Obrázek 4: Blok realizující rameno a kloub manipulátoru

Lze obecně implementovat pro sériové manipulátory.

- **Bloky realizující kompenzaci polohy základny a koncového efektoru manipulátoru v SimMechanicsu**

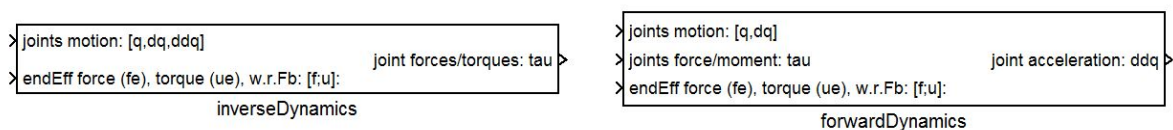


Obrázek 5: Blok realizující kompenzaci polohy základny a koncového efektoru

Lze obecně implementovat pro sériové manipulátory.

- **Bloky realizující přímou a inverzní dynamickou úlohu**

Založeny na výpočetně vhodnějším rekurzivním algoritmu Newtonova-Eulerova přístupu, viz Kapitola 3.2.



Obrázek 6: Blok realizující přímou a inverzní dynamickou úlohu

Lze obecně implementovat pro sériové manipulátory.

- **Funkce v Matlabu pro výpočet kinematického jakobiánu a jeho časové derivace**

jacobian.m

Lze obecně implementovat pro sériové manipulátory.

- **Funkce v Matlabu pro výpočet dopředných úloh (DGM, přímá okamžitá kinematická úloha)**

forwardKinematics.m

Lze obecně implementovat pro sériové manipulátory.

- **Funkce vytvářející datovou strukturu manipulátoru ze zadaných kinematických (geometrických) a dynamických (hmotnostních) parametrů**

robotSetup.m

Lze obecně implementovat pro manipulátory. Funkce vypočítává parametry a uloží je do datové struktury v Matlabu, která je vyžadována implementovanými bloky v SimMechanicsu.

Model manipulátoru je pak sestaven prostřednictvím výše uvedených funkcí a bloků pouze ze zadaných kinematických a dynamických parametrů. V případě uvažovaného manipulátoru pro výukové účely se jedná o následující parametry:

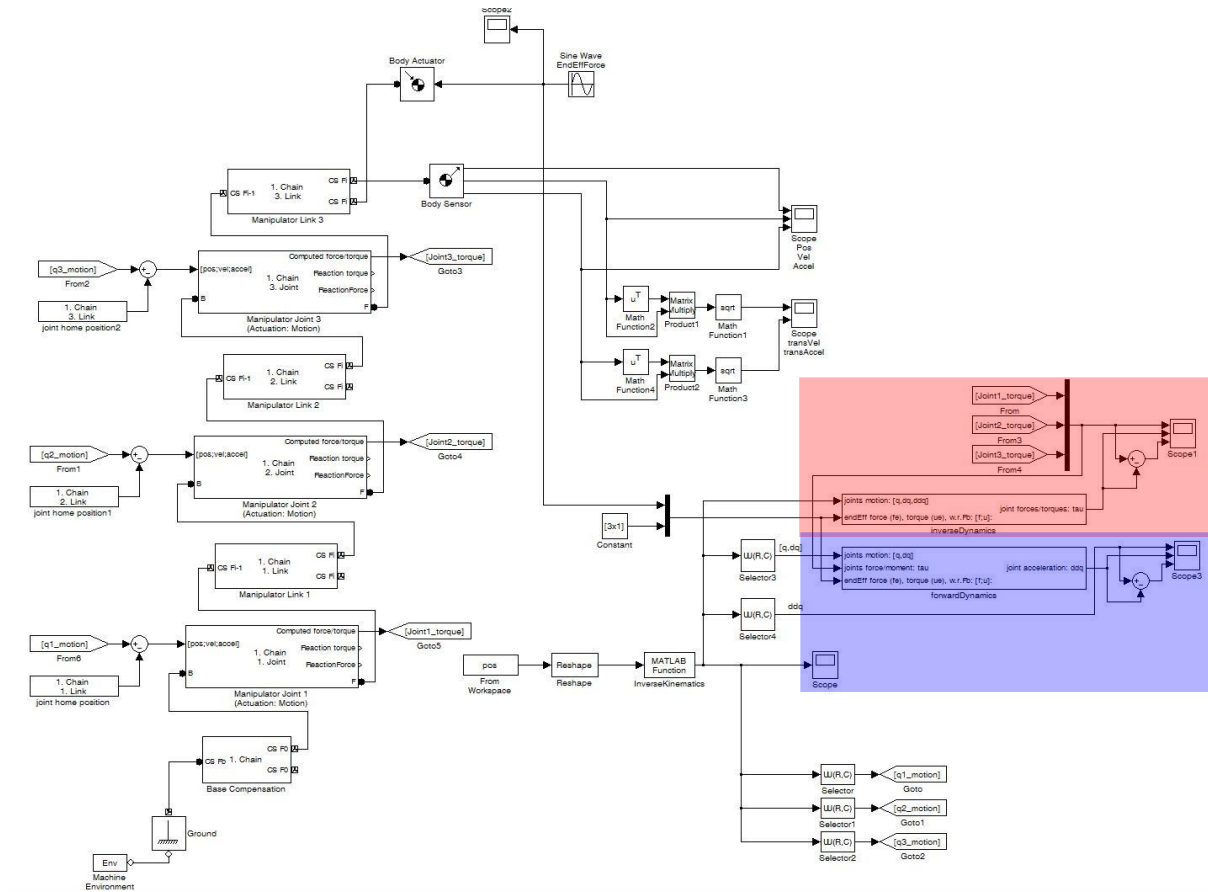
- **Kinematické parametry:**

DHpar	DH parametry, viz Tabulka 1
jointType	typy kloubů: RRR (R - rotační, P - translační kloub)
Qhome	domovské polohy kloubů, viz Tabulka 1
baseComp	kompence polohy základny, viz T_0^b
endEffComp	kompence polohy konc. efektoru, nepoužita

- **Dynamické parametry:**

mass	hmotnosti těžišť ramen, $m_1 \dots m_3$
inertiaTensor	matice v $\mathbb{R}^{3,3}$, tensor setrvačností těžišť ramen v s.s. daného ramene, $I_1 \dots I_3$
gravityCenter	vektor v \mathbb{R}^3 , poloha těžiště ramen v s.s. daného ramene, $T_1 \dots T_3$
gravityVector	vektor v \mathbb{R}^3 , směr gravitačního zrychlení v s.s. F_b

Výsledný model manipulátoru v SimMechanicsu je znázorněn na Obrázku 7.



Obrázek 7: Výukový model pro robotiku sestavený pomocí vytvořených bloků

5 Příklad aplikace „Pick and Place“

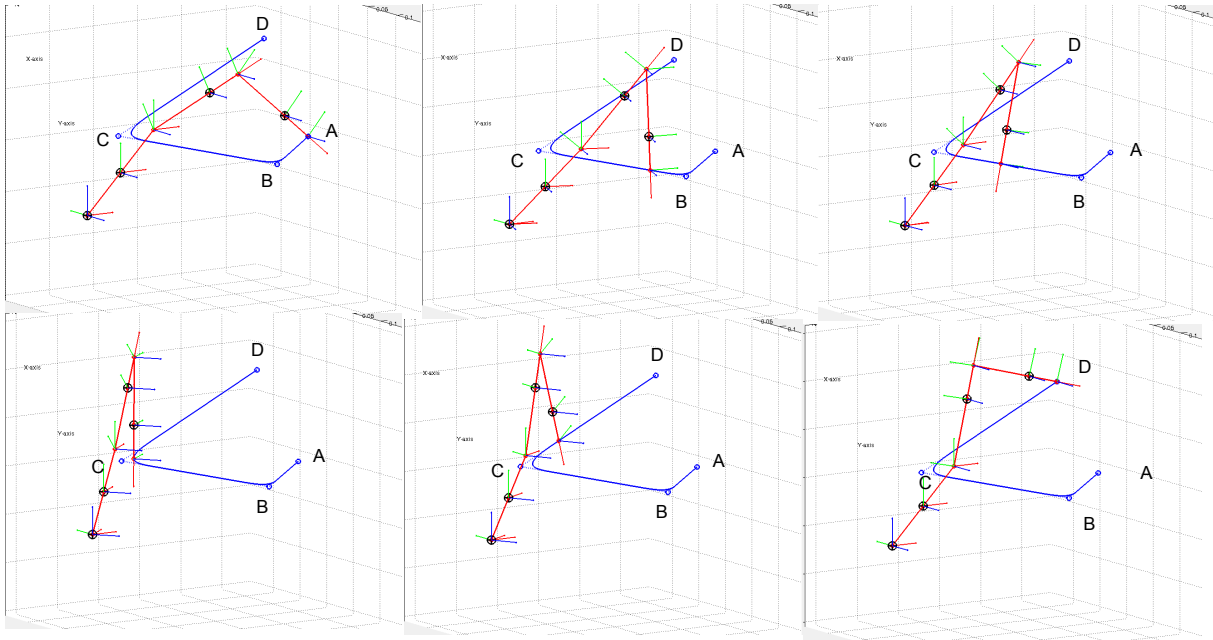
Pro demonstraci funkčnosti virtuálního modelu manipulátoru byla připravena jednoduchá aplikace pick and place (přemísťování předmětů manipulátorem). Zadání úlohy bylo následující:

Využijte virtuální model manipulátoru pro simulaci pohybu v případě, kdy potřebujeme přemístit daný předmět z bodu A do bodu D a zároveň požadujeme, aby se manipulátor vyhnul překážce a volil trajektorii takovým způsobem, že projede v blízkosti bodů B a D . Po celou dobu trajektorie klademe omezení na maximální rychlost v_{max} a maximální zrychlení a_{max} translačního pohybu koncového efektoru. Porovnejte výsledky získaných dynamických modelů manipulátoru (dopředná a inverzní dynamická úloha) s výsledky získanými z modelu v SimMechanicsu.

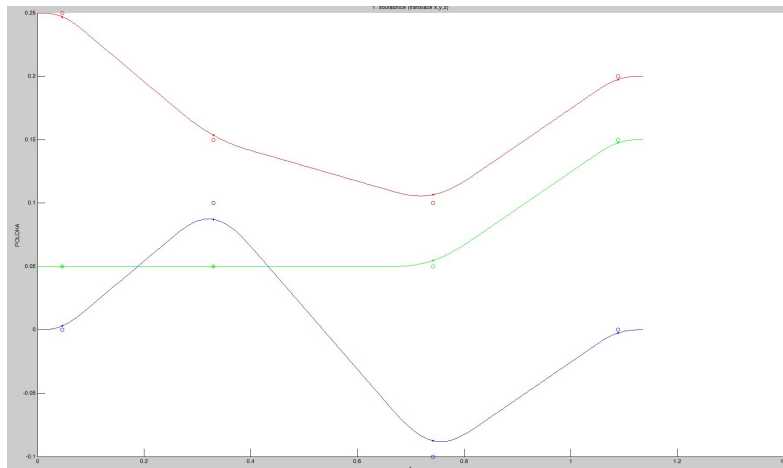
5.1 Generátor požadované trajektorie koncového efektoru

Trajektorie koncového efektoru manipulátoru, tedy souřadnice $\mathbf{X} = \mathbf{O}_3^b = [x \ y \ z]^T$, je v takovém případě volena často jako lineární segmenty mezi jednotlivými body trajektorie s polynomiálním napojením v blízkosti vnitřních bodů (B , C), pohyb po lineárních částech trajektorie je realizován s rychlostí v_{max} , pohyb v blízkosti vnitřních bodů trajektorie je interpolován polynomiální funkcí takovým způsobem, aby nedošlo k překročení maximálního povoleného zrychlení a_{max} (toto omezení odpovídá například požadavku, kdy manipulátorem nesená součást nesmí být vystavena většímu přetížení než je a_{max}). Ponechme stranou implementační detaily takového generátoru trajektorie, neboť v tomto případě nejsou náplní problematiky samotného virtuálního modelu manipulátoru. Obrázek 8 ukazuje generovanou trajektorii se současným rozfázovaným

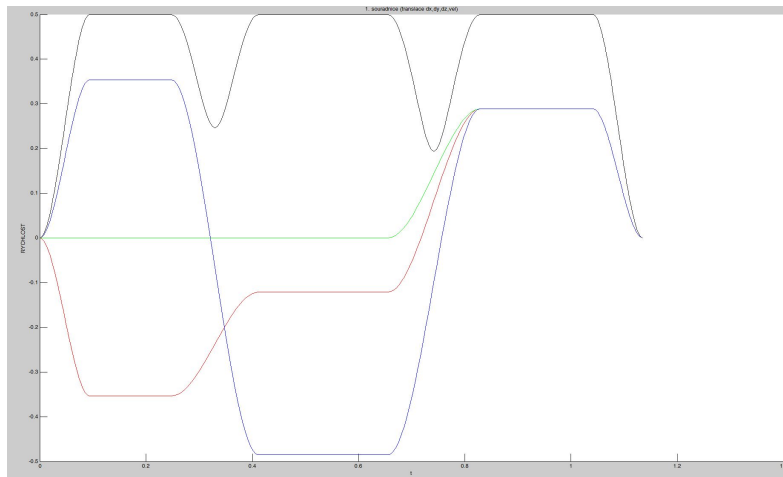
pohybem manipulátoru. Obrázek 9-11 znázorňuje polohy \mathbf{X} , rychlosti $\dot{\mathbf{X}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}$ zobecněných souřadnic z generátoru trajektorie. Poznamenejme, že prostřednictvím známé IGM a inverzní okamžité kinematické úlohy je možné zobecněné souřadnice a jejich časové derivace přepočítat do poloh \mathbf{Q} , rychlostí $\dot{\mathbf{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}$ souřadnic kloubových.



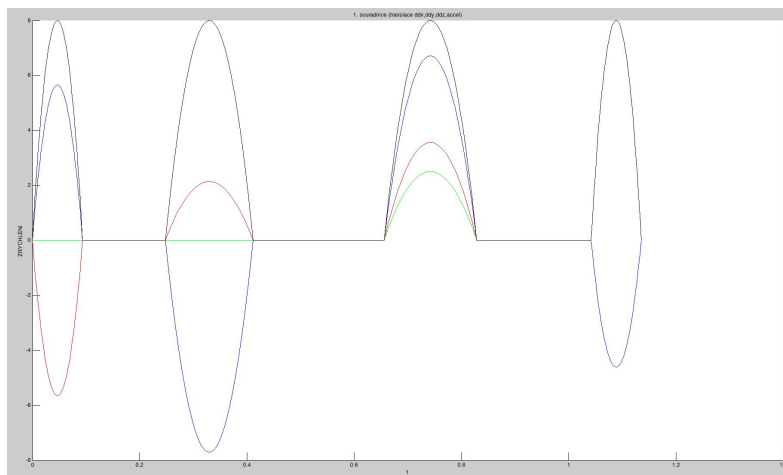
Obrázek 8: Virtuální model v SimMechanicsu + generovaná trajektorie



Obrázek 9: Polohy zobecněných souřadnic podél trajektorie manipulátoru



Obrázek 10: Rychlosti zobecněných souřadnic podél trajektorie manipulátoru, černě znázorněna celková rychlost $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ (patrné jsou limity pro $v_{max} = 0.5m/s$ na lineárních úsecích)



Obrázek 11: Zrychlení zobecněných souřadnic podél trajektorie manipulátoru, černě znázorněna celkové zrychlení $\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$ (patrné jsou limity pro $a_{max} = 8m/s$ na úsecích polynomiálního napojení)

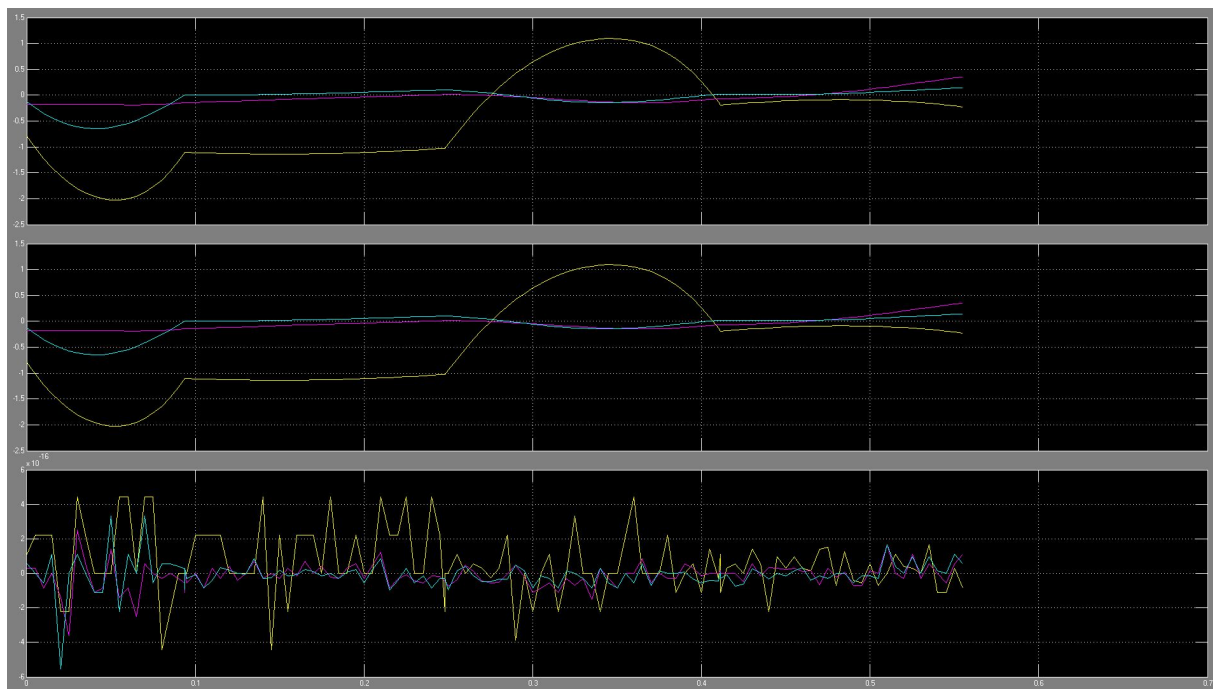
5.2 Ověření dynamického modelu

Vzhledem k faktu, že nyní známe požadované kloubové souřadnice, jejich rychlosti i zrychlení, můžeme využít režim inverzní dynamiky v SimMechanicsu a ověřit s jeho pomocí implementovaný algoritmus inverzní dynamické úlohy (blok `inverseDynamics`), viz Obrázek 7 (červená oblast), tedy relaci

$$\{Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, F\} \Rightarrow \{\tau\}$$

kde F je sinusový signál generující síly působící na koncový efektor (variující zátěž koncového efektoru).

Obrázek 12 znázorňuje průběhy signálů na bloku `Scope1`, tedy vypočtené momenty v aktuátorech SimMechanicsem (nahore) a implementovaným blokem `inverseDynamics` (uprostřed) a jejich rozdíl (dole).



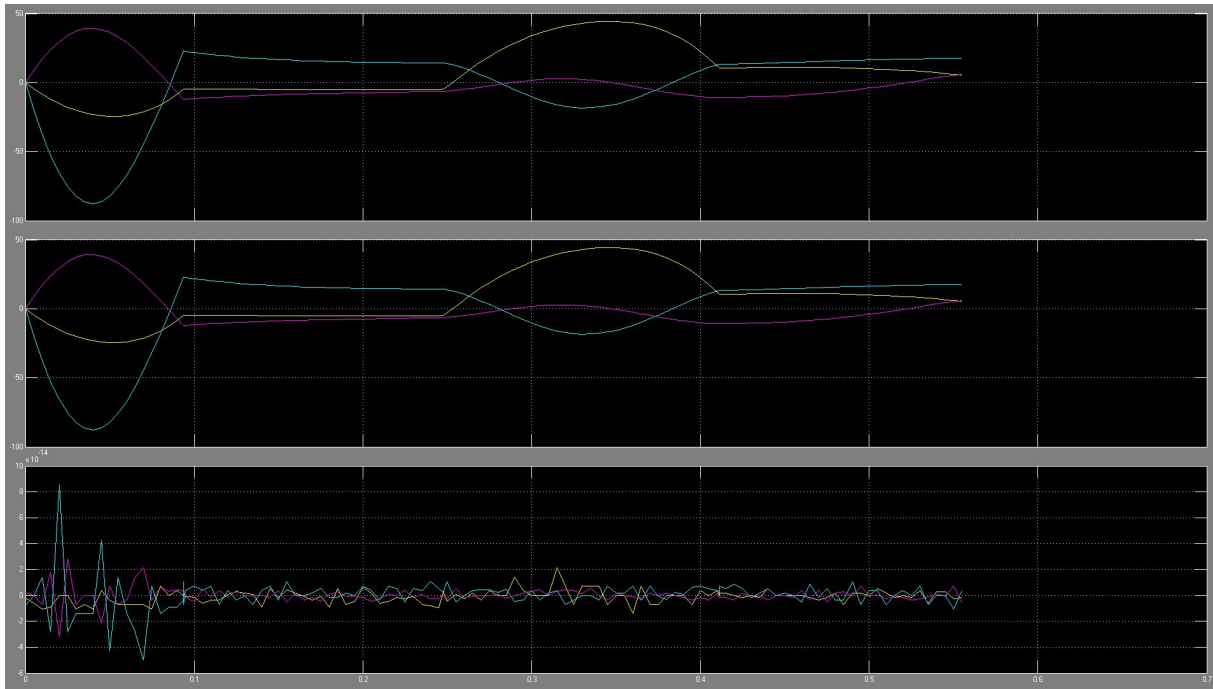
Obrázek 12: Ověření implementovaného bloku pro výpočet inverzní dynamické úlohy pro generovaný pohyb manipulátoru

Obdobným způsobem lze provést ověření implementovaného algoritmu přímé dynamické úlohy (blok `forwardDynamics`), viz Obrázek 7 (modrá oblast), tedy relaci danou funkcí (21)

$$\{Q, \dot{Q}, \tau, F\} \Rightarrow \{\ddot{Q}\}$$

kde F je sinusový signál generující síly působící na koncový efektor (variující zátěž koncového efektoru).

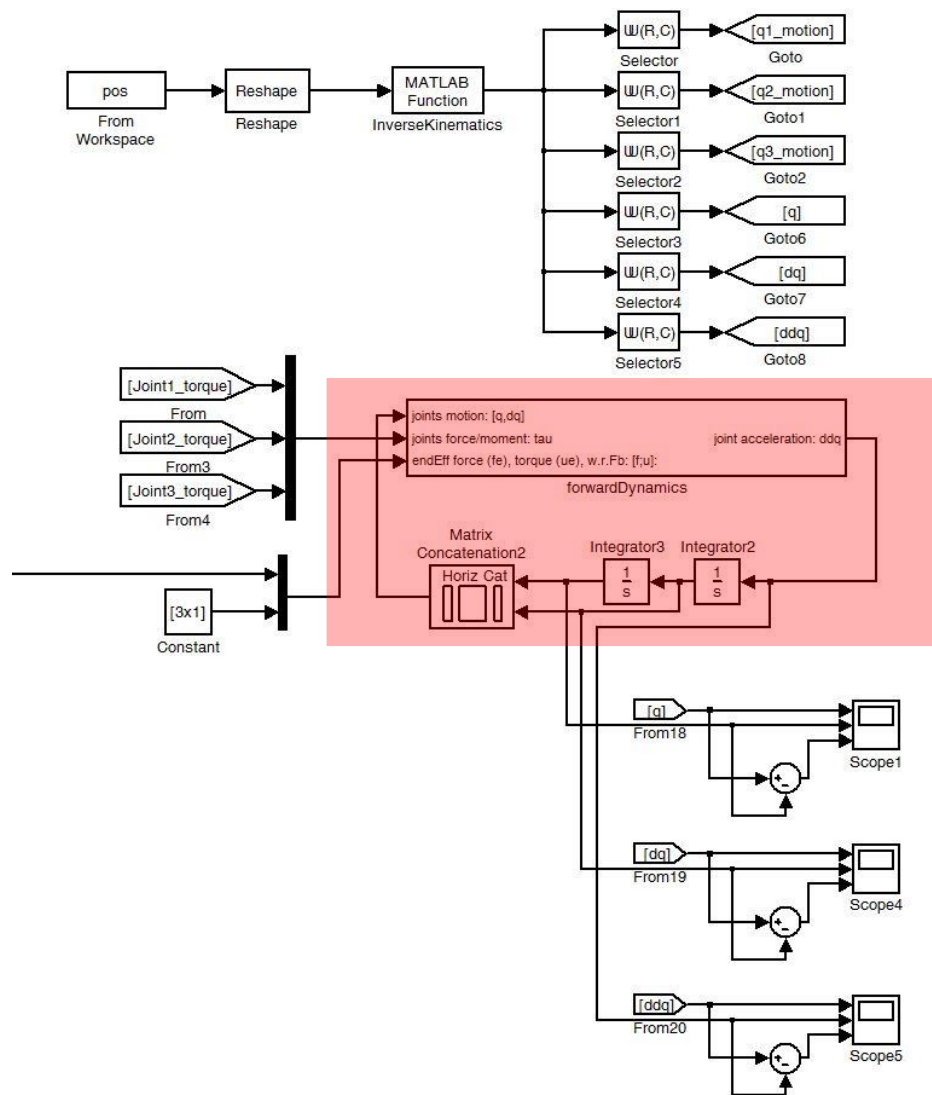
Obrázek 13 znázorňuje průběhy signálů na bloku `Scope3`, tedy vypočtená zrychlení kloubových souřadnic (na základě znalosti jejich rychlostí a poloh, momentů působících v kloubech manipulátoru a externích sil působících na koncový efektor) (uprostřed), skutečné průběhy zrychlení kloubových souřadnic (které generují momenty v aktuátorech) (nahore) a jejich rozdíl (dole).



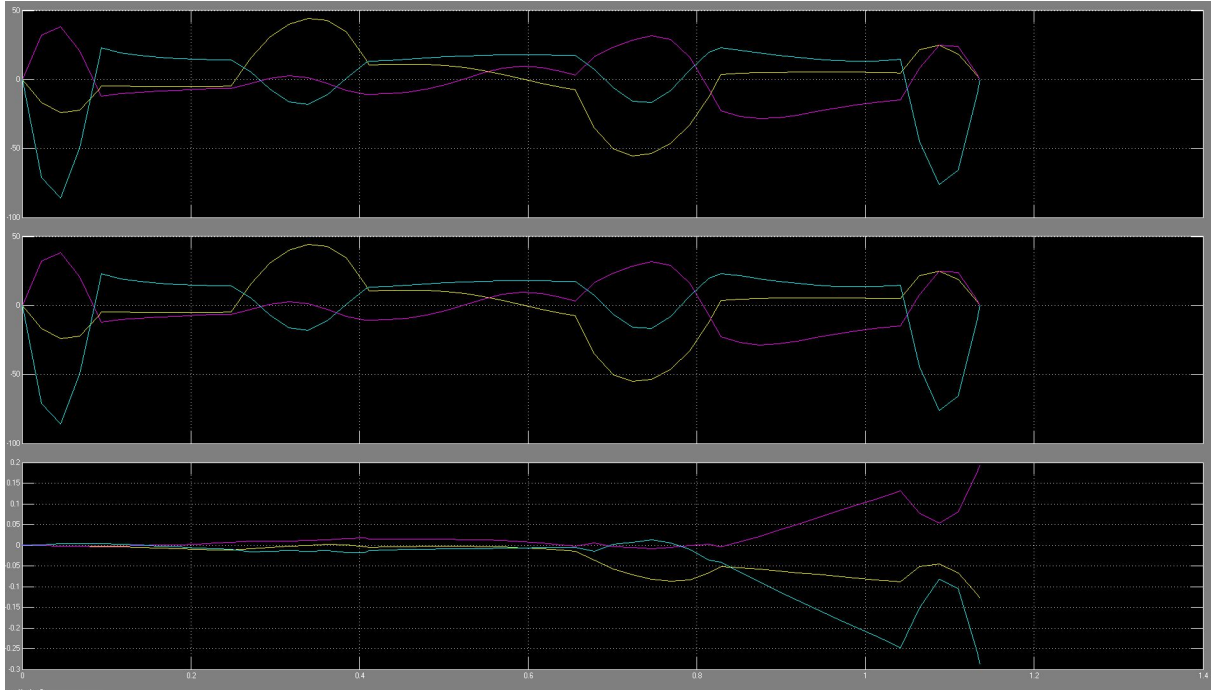
Obrázek 13: Ověření implementovaného bloku pro výpočet dopředné dynamické úlohy pro generovaný pohyb manipulátoru

5.3 Realizace virtuálního dynamického modelu manipulátoru (implementační poznámky)

V plánovaných cílech projektu bylo vytvoření kompletního dynamického modelu manipulátoru, který bude realizován na samostatné HW platformě. Za tímto účelem je možné využít blok `forwardKinematics`. Simulační schéma v Simulinku realizující dynamický model manipulátoru v prostoru kloubových souřadnic je na Obrázku 14. Obrázek 15 ukazuje průběhy signálů na bloku `Scope5`, tedy skutečné zrychlení kloubových souřadnic (generující požadované momenty v aktuátorech) (nahore), zrychlení získané řešením diferenciálních rovnic popisující dynamický model manipulátoru (červeně zvýrazněné zpětnovazební schéma s dvojicí integrátorů na Obrázku 14) (uprostřed) a jejich rozdíl (dole). Vzniklé chyby jsou bezesporu způsobeny akumulující se chybou integrace (jsou závislé na zvolené metodě v solveru Simulinku).



Obrázek 14: Realizace dynamického modelu manipulátoru v Simulinku



Obrázek 15: Ověření kompletního dynamického modelu manipulátoru

Poznamenejme, že implementovaný blok `forwardKinematics` (stejně jako i blok `inverseKinematics`) využívá pouze zápis algoritmu ve funkcích Matlabu (m-filech), tzn. je možné jej přeimplementovat do libovolného jazyku (C, C++, atd.). Klíčovým problémem je však řešení soustavy diferenciálních rovnic $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbb{F}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu})$ v reálném čase na samostatné HW platformě (v Simulinku realizované dvojicí integrátorů a vnitřním výpočetním jádrem - použita metoda *ODE45*). Vzhledem k faktu, že dynamický model manipulátoru bude implementován v řídicím systému REX, který je vyvíjen na katedře kybernetiky a využíván ve výuce předmětů, odvozený dynamický model by měl být implementován právě v REXu. Implementací vhodných solverů dynamických rovnic v systému REX běžícím na daných HW platformách v reálném čase se zabývají některé publikované výsledky [6], [5], [1].

6 Závěr

Uvedená technická zpráva se zabývá popisem kinematiky a dynamiky výukového modelu pro robotiku. Jedná se o 3 DoF sériový manipulátor unikátní mechanické konstrukce. V technické zprávě jsou řešeny polohové závislosti mezi kloubovými a zobecněnými souřadnicemi daného manipulátoru a nastíněny postupy pro řešení závislostí rychlostí a zrychlení. Dále jsou popsány způsoby řešení přímé a inverzní dynamické úlohy. Stručně jsou představeny modulární bloky a implementované funkce pro rychlou a systematickou tvorbu virtuálních simulačních modelů sériových manipulátorů v prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics. V poslední části zprávy je diskutován problém implementace virtuálního dynamického modelu manipulátoru na HW platformách běžících v reálném čase (pro účely Hardware In the Loop). Jako demonstrativní příklad je volena jednoduchá aplikace typu pick and place, na které jsou ověřeny odvozené algoritmy.

Reference

- [1] Bláha, L.; Schlegel, M.; Königsmarková, J.: Design and Control of Underwater Vehicle for NDT Inspections. In *Oceanic Engineering Society - IEEE AUV 2014, Autonomous Underwater Vehicles 2014*, 2014.
- [2] Jáger, A.: Konstrukce modelu pro výukové účely. Technická zpráva, 2015.
- [3] Khalil, W.; Dombre, E.: *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science paper edition, Elsevier Science, 2004, ISBN 9780080536613.
URL <http://books.google.cz/books?id=nyrY0Pu5kl0C>
- [4] Mark W. Spong, M. V., Seth Hutchinson: *Robot Modeling and Control*. Wiley, 2005.
- [5] Schlegel, M.; Königsmarková, J.: Numerické řešení a analýza bodového modelu jaderného reaktoru nulového výkonu. Technická zpráva, ZČU v Plzni, NTIS, 2013.
- [6] Schlegel, M.; Königsmarková, J.; Sobota, J.; aj.: Číslicového RT modelu jaderného reaktoru s fyzickými vstupy a výstupy. Technická zpráva, ZČU v Plzni, NTIS, 2014.
- [7] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer London, 2000, ISBN 9781852332211.
URL <http://books.google.fr/books?id=v9PLbcYd9aUC>
- [8] Čechura, T.: Řídicí systém manipulátoru a jeho implementace. Technická zpráva, ZČU v Plzni, 2015.
- [9] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni (online: http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2011/rigo.pdf), 2011.
- [10] Švejda, M.: Úvod do robotiky a mechatronicky. Přednášky k předmětu, 2012.
URL <http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/>