

TAČR Centrum kompetence CIDAM

Kinematical, kinetostatical and dynamical analysis of 4DoF
manipulator, parametric optimization of mechanical
construction

Výzkumná zpráva WP5-DV026

Martin Švejda

17. prosince 2015

T A
Č R



CIDAM

*Center for Intelligent Drives
and Advanced Machine Control*

Abstrakt

V uvedené technické zprávě jsou nastíněny základní systematické, algoritmizovatelné postupy pro výpočet kinematiky a dynamiky paralelních manipulátorů. Dále se zpráva zabývá kinematickou optimalizací manipulátorů. Vyvinuté postupy jsou využity k vytvoření virtuálního kinematického a dynamického modelu paralelního manipulátoru se dvěma stupni volnosti s jedním aktuátorem umístěným na základně a s jedním aktuátorem (nesený aktuátor) umístěným na prvním hlavním pohyblivém rameni manipulátoru. Dále je definována optimalizační úloha vedoucí k nalezení kinematických parametrů manipulátoru (konstrukčních rozměrů) minimalizující požadovaný silový moment na aktuátorech podél zvoleného pracovního prostoru (s definovanými vlastnostmi pohybu koncového efektoru). Optimalizační úloha je řešena pomocí vyvinutého algoritmu globální a lokální optimalizace. Uvažovaný manipulátor je jednou z uvažovaných verzí pro manipulátor typu „zakladač“, vyvíjený v rámci projektu CIDAM ve spolupráci s firmou Eurotec JKR, s.r.o.

Obsah

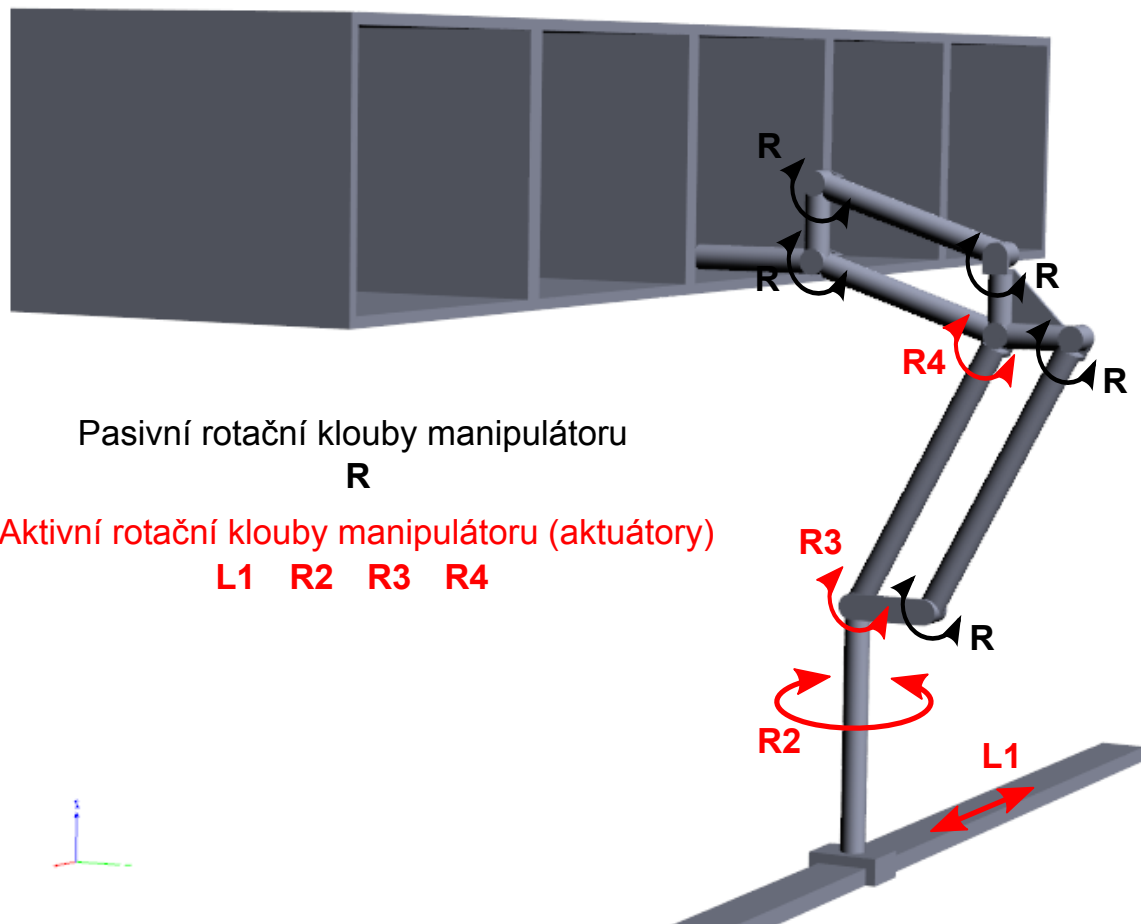
1	Úvod	4
2	Kinematická analýza manipulátoru	6
2.1	Přímý a inverzní geometrický model manipulátoru	10
2.2	Přímá a inverzní kinematická úloha	13
3	Dynamická analýza manipulátoru	16
4	Model manipulátoru v prostředí SimMechanics	20
5	Optimální návrh kinematických parametrů manipulátoru	22
5.1	Definice optimalizační úlohy pro uvažovaný manipulátor	23
5.1.1	Definice hodnoty penalizační funkce J_{pen}	23
5.1.2	Definice hodnoty účelové funkce J_{obj}	24
5.1.3	Konkrétní definice optimalizační úlohy	26
5.2	Metody řešení definované optimalizační úlohy	27
5.2.1	Globální optimalizace	27
5.2.2	Lokální optimalizace	32
6	Výsledky a porovnání optimalizace	33
7	Závěr	44

1 Úvod

Výzkumná zpráva se zabývá návrhem robotu pro manipulaci s paletou technologických dílů určených k průmyslovému mytí a souvisejícím procesům (oplachování, odlakování, odmašťování, sušení, atd.). S ohledem na technologický proces průmyslového mytí se ukazuje, že manipulátor vhodné konstrukce by mohl výrazně zvýšit efektivitu procesu, neboť doposud jsou mycí linky realizovány v drtivé většině jako průběžné mycí komory, kterými projíždí paleta (koš) s omývanými komponenty případně komponenty samotné, které jsou fixovány v jednoúčelových fixačních přípravcích. Pohyb koše/komponent je realizován prostřednictvím válečkových tratí a pasů. V předložené výzkumné zprávě bude podrobně analyzována varianta manipulátoru, který má za úkol polohovat v horizontálním i vertikálním směru paletu (koš) s omývanými komponentami. Hlavními výhodami oproti standardnímu řešení s průběžnými mycími komorami jsou:

- Možnost přesunu palety libovolně v prostoru (především ve vertikálním směru, který nelze prostřednictvím válečkových tratí uspokojivě realizovat)
- Možnost využití neprůběžných mycích komor sestavených ve specifikovaném uspořádání
- Manipulátor může obsluhovat více mycích komor
- Zefektivnění celého mycího cyklu

Z dosavadních zkušeností s vývojem podobných zařízení, zejména pak manipulátoru AGEBOT, viz [5], [16], a dlouhodobé spolupráce s firmou Eurotec [1] byla navržena předpokládaná scéna umístění manipulátoru pro zakládání palet do mycích komor, která je společně s manipulátorem schématicky znázorněna na Obrázku 1. Manipulátor pro zakládání palet bude uvažován jako manipulátor se 4 stupni volnosti (DoF) s jedním lineárním a třemi rotačními pohony. Lineární pohon (**L1**) bude společně s prvním rotačním pohonem (**R2**, rotační stůl) pohybovat s celým manipulátorem podél řady mycích komor a natáčet jej do požadované orientace (proti komorám, podél lineárního posuvu při přejezdech atd.). Dvojice následujících rotačních pohonů (**R3**, **R4**) bude realizovat pohyb manipulátoru v rovině dané aktuálním posunem pohonu **L1** a natočením rotačního stolu **R2**. Z důvodu potřeby držet orientaci posledního ramene manipulátoru ve vodorovné poloze je manipulátor opatřen přídatným paralelogramem, s jehož pomocí je možné zajistit požadovanou orientaci bez nutnosti osazovat poslední rotační kloub manipulátoru pohonem.

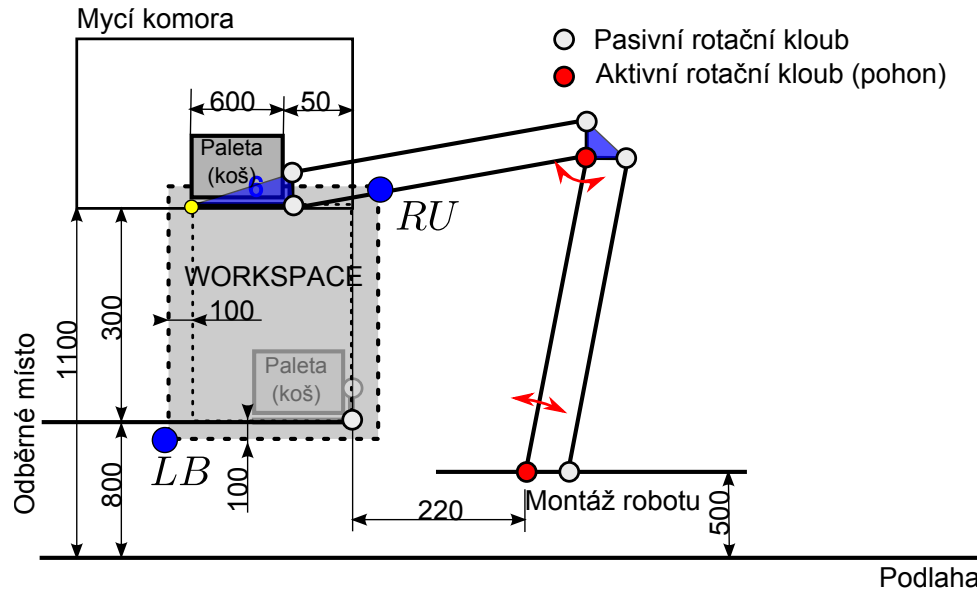


Obrázek 1: 4 DoF manipulátor pro zakládání palet do mycích komor

Vzhledem k podstatě definované úlohy je návrh první dvojice pohonů (**L1** a **R2**) z hlediska parametrizace kinematické architektury manipulátoru nezajímavý a jednoznačně daný sestavou lineárního pojezd-rotačního stůlu. Uvažovaný manipulátor lze tak dekomponovat na planární 2 DoF manipulátor s dvěma rotačními pohony (**R3**, **R4**) a přídatným paralelogramem držící orientaci poslední ramene. Typická situace nasazení manipulátoru při vykládání/nakládání palety do mycí komory (lineární pojezd **L1** a rotační stůl **R2** je zanedbán) je znázorněna na Obrázku . Rozměry kótované na scéně převzaty z příkladu umístění mycí komory, odkládacího místa (např. válečkového dopravníku) a samotného robotu po konzultaci s konstruktéry firmy Eurotec. Cílem výzkumné zprávy je analýza, návrh a optimalizace 2DoF (redukovaného) manipulátoru, které sestává z následujících kroků:

- Kinematický model robotu (paralelní kinematika)
- Dynamický model robotu (paralelní kinematika)
- Parametrická optimalizace volných kinematických parametrů (typicky délky ramen, délka koncového efektoru, atd.) dle zvoleného kritéria optimality přes uvažovaný pracovní prostor (workspace) manipulátoru (v našem případě specifikovaný obdélníkem v rovině x_0y_0)

Jednotlivé kroky budou diskutovány dále v textu výzkumné zprávy.



Obrázek 2: 2 DoF planární manipulátor vzniklý z původního 4 DoF manipulátoru (bez uvažování pohonů **L1**, **R2**) umístěný do uvažované scény

2 Kinematická analýza manipulátoru

Redukovaný 2DoF manipulátor (dále jen „manipulátor“) lze z kinematického pohledu popsat prostřednictvím Denavit-Hartenbergovy (D-H) úmluvy [4] pro popis kinematiky sériových kinematických řetězců. Přesto, že, díky přídavnému paralelogramu, je výsledný manipulátor manipulátorem s uzavřenými kinematickými řetězci, lze, bez újmy na obecnosti, provést dekompozici těchto uzavřených kinematických řetězců na řetězce otevřené (sériové) a použít D-H úmluvu pro tyto sériové řetězce. D-H úmluva přiřazuje každému rameni manipulátoru souřadný systém (s.s.), kterým je poté poloha takového ramene plně popsána (poloha = translace + rotace). Způsob přiřazení s.s. jednotlivým ramenům manipulátoru a zavedení čtveřic D-H parametrů (d_i , θ_i , a_i , α_i) je vyčerpávajícím způsobem popsáno např. v [15], [10], [18] a nebudeme se jím dále zabývat. Dekompozice manipulátoru na sériové kinematické řetězce a zavedení příslušných s.s. ramen je znázorněno na Obrázku 3.

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	q_1	L_1	0
2	0	q_2	$l\sqrt{2}$	0
3	0	q_3	L_2	0
4	0	q_4	L	0

Tabulka 2: D-H parametry sériové řetězce *Chain 2*

kde L_4 lze z geometrie *Link 6* psát jako (kosínová věta): $L = \sqrt{L_3^2 + l^2 - 2L_3l \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$.

Každé rameno manipulátoru má nyní přiřazen pevný (nepohyblivý, s ramenem pevně spojený) s.s. následovně:

Link 1s.s. F_1
Link 2s.s. F_1
Link 3s.s. F_2
Link 4s.s. F_2
Link 5s.s. F_3
Link 6s.s. F_3

Uzavřením kinematických řetězců *Chain 1* a *Chain 2* (v s.s. koncového efektoru F_3 a v s.s. F_1 ramene *Link 1*)¹ vzniká uzavřený kinematický řetězec, který reprezentuje modelovaný manipulátor. Pro korektní uzavření sériových kinematických řetězců je však nutné ztotožnit s.s. základny (F_0) a koncového efektoru (F_3) těchto dílčích kinematických řetězců. V případě kinematického řetězce *Chain 1* tedy nebudeme uvažovat žádné transformace polohy základny a koncového efektoru, zatímco v případě kinematického řetězce *Chain 2* uvažujeme kompenzaci polohy základny $F_0 \rightarrow F_0$ a koncového efektoru $F_4 \rightarrow F_3$.

Vyjádříme-li tedy transformace mezi jednotlivými s.s. v dílčích sériových kinematických řetězcích prostřednictvím homogenních transformačních matic \mathbf{T}_i^{i-1} , viz [15, 10, 18, 7], dostáváme:

- Pro *Chain 1*:

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{T}_1^0(q_1) \cdot \mathbf{T}_2^1(q_2) \cdot \mathbf{T}_3^2(q_3) \quad (1)$$

Kloubové souřadnice *Chain 1*:

$$\mathbf{Q}_{\text{Chain1}} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (2)$$

- Pro *Chain 2*:

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{T}_0^0 \cdot \mathbf{T}_1^{\bar{0}}(q_1) \cdot \mathbf{T}_2^{\bar{1}}(q_2) \cdot \mathbf{T}_3^{\bar{2}}(q_3) \cdot \mathbf{T}_4^{\bar{3}}(q_4) \cdot \mathbf{T}_3^{\bar{4}} \quad (3)$$

kde homogenní transformační matice kompenzace polohy základny \mathbf{T}_0^0 a koncového efektoru $\mathbf{T}_3^{\bar{4}}$ jsou dány jako:

$$\mathbf{T}_0^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l \cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & l \sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_3^{\bar{4}} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & \sin(-\beta) & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

kde $\beta = \arcsin\left(\frac{l \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{L}\right)$.

Kloubové souřadnice *Chain 2*:

$$\mathbf{Q}_{\text{Chain2}} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T \quad (5)$$

¹Značením F_i , $F_i = \mathbf{O}_i - \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i \mathbf{z}_i$ rozumíme i -tý s.s. reprezentovaný svým počátkem \mathbf{O}_i a souřadnicovými osami \mathbf{x}_i , \mathbf{y}_i , \mathbf{z}_i .

Homogenní transformace \mathbf{T}_i^{i-1} pro $i = \{1, 2, 3, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ mezi s.s. jsou dány z D-H parametrů, viz Tabulky 1, 2 dle obecného předpisu:

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{q_i} & -s_{q_i}c_{\alpha_i} & s_{q_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{q_i} \\ s_{q_i} & c_{q_i}c_{\alpha_i} & -c_{q_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{q_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

kde $s_\star = \sin(\star)$, $c_\star = \cos(\star)$.

Pasivní \mathbf{Q}_p , aktivní \mathbf{Q}_a a celkové \mathbf{Q} kloubové souřadnice manipulátoru jsou dány jako:

$$\mathbf{Q}_p = [q_3 \ q_{\bar{1}} \ q_2 \ q_{\bar{3}} \ q_4]^T, \quad \mathbf{Q}_a = [q_1 \ q_2]^T, \quad \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_a^T \ \mathbf{Q}_p^T]^T \quad (7)$$

Návrhové kinematické parametry manipulátoru jsou dány jako:

$$\boldsymbol{\xi} = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ l \ \alpha]^T \quad (8)$$

Dynamické parametry manipulátoru:

Dynamickými parametry manipulátoru rozumíme takové parametry, která ovlivňují dynamické chování manipulátoru, typicky jsou jimi hmotnosti, umístění těžiště a tensor setrvačnosti vzhledem k s.s. těžiště jednotlivých ramen. V uvažovaném modelovém případě manipulátoru uvažujeme, že jsou tyto parametry přímo závislé na parametrech kinematických $\boldsymbol{\xi}$, neboť, s ohledem na optimalizaci těchto kinematických parametrů (zejména délky ramen), viz Kapitola 5, se budou dynamické parametry měnit. Závislosti mezi dynamickými $\boldsymbol{\mu}$ a kinematickými $\boldsymbol{\xi}$ parametry jsou plně určeny zvolenou geometrií ramen případně dalšími materiálovými vlastnostmi. V uvažované případě manipulátoru uvažujeme, že ramena jsou realizována jako plné tyče o poloměru r_1 pro *Link* 1,4 a poloměru r_2 pro ramena *Link* 2,5. Ramena *Link* 3 resp. *Link* 6 jsou realizována jako příslušné trojúhelníky tloušťky r_2 resp. r_1 . Hustota materiálu všech ramen je dána hodnotou ρ . Vektor gravitační síly je neměnný ve tvaru $[0 \ -9.81 \ 0]^T$ vzhledem k s.s. F_0 . Dále uvažujeme, že v těžišti posledního ramene (koncového efektoru) *Link* 6 je umístěna přidaná hmotnost (břemeno) daná hmotným bodem o hmotnosti M . Hmotnost prvního pohonu *Joint* 1 je bezvýznamná (pohon umístěn nepohyblivě na základně manipulátoru), zatímco hmotnost druhého pohonu *Joint* 2 je dána hodnotou M_{mot} . Výsledná dynamické parametry jsou tedy dány jako:

$$\boldsymbol{\mu} = [r_1 \ r_2 \ \rho \ M \ M_{\text{mot}}]^T \quad (9)$$

Hmotnosti ramen:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{1_{\text{link}}} + M_{\text{mot}}, \quad m_{1_{\text{link}}} = \pi r_1^2 L_1 \rho \\ m_2 &= \pi r_2^2 L_1 \rho \\ m_3 &= 0.5 l^2 r_2 \rho \\ m_4 &= \pi r_1^2 L_2 \rho \\ m_5 &= \pi r_2^2 L_2 \rho \\ m_6 &= 0.5 L_3 l \cos(\alpha) r_1 \rho + M \end{aligned} \quad (10)$$

Umístění těžišť ramen (vzhledem k s.s. příslušného ramena, viz předchozí přiřazený vztažných

s.s.):

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 &= \frac{m_{1_{link}}}{m_1} \mathbf{T}_{1_{link}}, \quad \mathbf{T}_{1_{link}} = \begin{bmatrix} -0.5L_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} -0.5L_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{T}_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{6}l & 0 \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{T}_4 &= \begin{bmatrix} -0.5L_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{T}_5 &= \begin{bmatrix} -0.5L_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{T}_6 &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2L_3 - l \sin(-\alpha) & -l \cos(-\alpha) & 0 \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{11}$$

Hlavní momenty setrvačnosti (vzhledem k s.s. příslušného ramena, viz předchozí přiřazený vztahů s.s., deviační momenty jsou rovny nule):

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}_{1_{link}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{T}_{1_{link}}[1] - \mathbf{T}_1[1])^2 m_{1_{link}} + \mathbf{T}_1[1]^2 M_{mot} \\
\mathbf{I}_{1_{link}} &= \begin{bmatrix} 0.5m_1 r_1^2 & 0.5m_1(r_1^2 + \frac{1}{3}L_1) & 0.5m_1(r_1^2 + \frac{1}{3}L_1) \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{I}_2 &= \begin{bmatrix} 0.5m_2 r_2^2 & 0.5m_2(r_2^2 + \frac{1}{3}L_1) & 0.5m_2(r_2^2 + \frac{1}{3}L_1) \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{I}_3 &= \dots \text{Irelevantní, neboť Link 3 (trojúhelník) nerotuje} \\
\mathbf{I}_4 &= \begin{bmatrix} 0.5m_4 r_1^2 & 0.5m_4(r_1^2 + \frac{1}{3}L_2) & 0.5m_4(r_1^2 + \frac{1}{3}L_2) \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{I}_5 &= \begin{bmatrix} 0.5m_5 r_2^2 & 0.5m_5(r_2^2 + \frac{1}{3}L_2) & 0.5m_5(r_2^2 + \frac{1}{3}L_2) \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{I}_6 &= \dots \text{Irelevantní, neboť Link 6 (trojúhelník) nerotuje}
\end{aligned} \tag{12}$$

Zobecněné souřadnice manipulátoru (řízené souřadnice v pracovním prostoru manipulátoru) jsou dány jako²:

$$\mathbf{X} = \mathbf{O}_3^0[1 : 2] = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \tag{13}$$

2.1 Přímý a inverzní geometrický model manipulátoru

Zabývejme se nyní výpočtem polohových závislostí mezi zobecněnými \mathbf{X} a kloubovými \mathbf{Q} souřadnicemi. Vztah mezi aktivními kloubovými souřadnicemi \mathbf{Q}_a a zobecněnými souřadnicemi \mathbf{X} (polohou koncového efektoru) jsou známy jako přímý (dopředný) ($\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_a)$) resp. inverzní ($\mathbf{Q}_a = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X})$) geometrický model (DGM resp IGM). V případě sériových manipulátorů je DGM jednoznačný a vždy analyticky spočitatelný, neboť může být jednoduše formulován prostřednictvím skládání transformací s.s., což je ekvivalentní maticovému násobení homogenních transformačních matic \mathbf{T}_i^{i-1} . V případě sériových manipulátorů jsou kloubové souřadnice \mathbf{Q} přímo rovny souřadnicím aktivním \mathbf{Q}_a neboť pasivní klouby nemohou být obsaženy v kinematickém řetězci sériového manipulátoru (manipulátor by v takovém případě nabyl staticky určen - jinými slovy, v případě „uzamčení“ aktivních kloubů by koncový efektor vykazoval neřiditelné stupně volnosti). IGM pro sériové manipulátory zahrnuje řešit inverzi DGM, tedy řešit obecně soustavu nelineárních transcendentních rovnic - je známo, že v takovém případě obecně nemusí řešení IGM existovat v analytickém tvaru, zároveň může existovat více izolovaných řešení IGM.

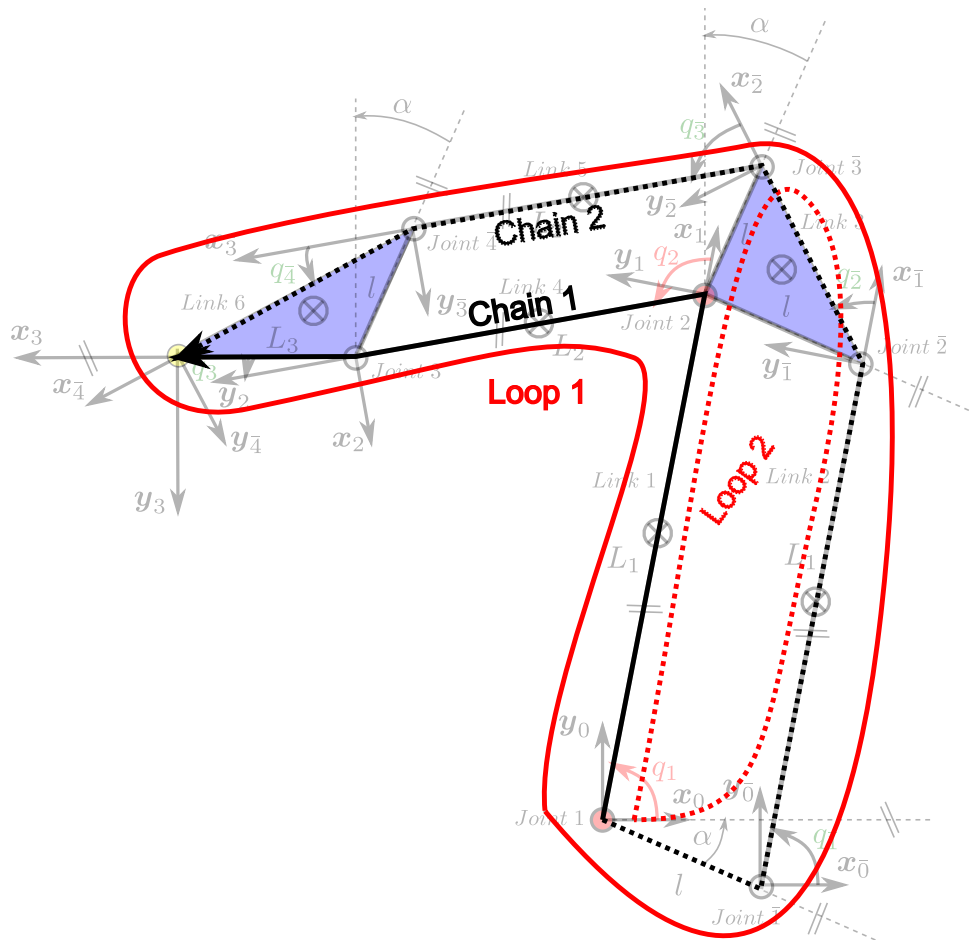
²Značení $\mathbf{O}[i : j, m : n]$ značí výběr prvků z vektoru/matice \mathbf{O} ve smyslu výběru i -tého až j -tého řádku a m -tého až n -tého sloupce. Zároveň horní index vektoru/matice určuje vztahný s.s., tedy s.s. ve kterém jsou příslušné prvky vektoru/matice vyjádřeny.

V našem případě se zabýváme manipulátorem paralelním. V takovém případě nelze v obecném případě zaručit nalezení analytického řešení ani DGM ani IGM. Je zřejmé, že v případě paralelního manipulátoru v dílčích kinematických řetězcích vystupují pasivní a aktivní kloubové souřadnice. Budeme-li uvažovat dále, že počet aktivních kloubových souřadnic odpovídá počtu DoF koncového efektoru a zároveň platí, že kinematická struktura manipulátoru je plně určena (tzn. při uvolnění obecně n aktivních kloubových souřadnic vykazuje koncový efektor manipulátoru právě n DoF a při jejich „uzamčení“ právě žádný DoF), lze nalézt vztah mezi aktivními a pasivními kloubovými souřadnicemi, tedy:

$$Q_p = G(Q_a) \quad (14)$$

■ **Poznámka 1 (Obecný přístup řešení závislosti mezi Q_a a Q_p)**

V obecném případě lze formulovat rovnice vedoucí na (14) z podmínek uzavřenosti kinematických smyček (tzv. podmínky kinematického omezení), které jsou tvořeny dílčími kinematickými řetězci. Takový přístup lze v případě uvažovaného manipulátoru graficky znázornit Obrázkem 4.



Obrázek 4: Vyznačené nezávislé geometrické smyčky formované dílčími kinematickými řetězci

Rovnice kinematických omezení v prostoru kloubových souřadnic lze formulovat z těchto nalezených smyček jako:

Ze smyčky LOOP 1:

$$T_3^0 = T_1^0(q_1) \cdot T_2^1(q_2) \cdot T_3^2(q_3) \stackrel{!}{=} T_0^0 \cdot T_1^0(q_1) \cdot T_2^1(q_2) \cdot T_3^2(q_3) \cdot T_4^3(q_4) \cdot T_3^4 = T_3^0 \quad (15)$$

Vzhledem k faktu, že se jedná o planární manipulátor, ve spojení kinematických řetězců Chain 1 a Chain 2 v s.s. F_3 si musí odpovídat poloha $O_3^0[1]$, $O_3^0[2]$ v rovině x_0y_0 a natočení δ kolem osy

\mathbf{z}_0 . Ze zřejmého tvaru homogenní transformační matice

$$\mathbf{T}_3^0 = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & -\sin(\delta) & 0 & \mathbf{O}_3^0[1] \\ \sin(\delta) & \cos(\delta) & 0 & \mathbf{O}_3^0[2] \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

lze získat ze soustavy rovnic (15) tedy celkem tři nezávislé nelineární rovnice (2 pro polohu, 1 pro orientaci, neboť matice rotace má pouze jediný nezávislý parametr daný úhlem δ) ve tvaru:

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2, q_3, q_{\bar{1}}, q_{\bar{2}}, q_{\bar{3}}, q_{\bar{4}}) &= 0 \\ f_2(q_1, q_2, q_3, q_{\bar{1}}, q_{\bar{2}}, q_{\bar{3}}, q_{\bar{4}}) &= 0 \\ f_3(q_1, q_2, q_3, q_{\bar{1}}, q_{\bar{2}}, q_{\bar{3}}, q_{\bar{4}}) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Ze smyčky LOOP 2:

Stačí zajistit pouze, že přípojný bod \mathbf{O}_1^0 kloubu *Joint 2* koinciduje s odpovídajícím bodem umístěným na ramenu *Link 3* (tento bod je vztahený konstantní transformací $\mathbf{T}_{1pos}^2 = \text{Rot}(\mathbf{z}, \frac{3\pi}{4}) \cdot \text{Trans}(\mathbf{x}, l)$) k s.s. ramene *Link 3*)³. Dostáváme tedy podmínku:

$$\mathbf{O}_1^0[1 : 2] = \mathbf{T}_1^0(q_1)[1 : 2, 4] \stackrel{!}{=} \mathbf{T}_0^0 \cdot \mathbf{T}_{\bar{1}}^0(q_{\bar{1}}) \cdot \mathbf{T}_{\bar{2}}^0(q_{\bar{2}}) \cdot \mathbf{T}_{1pos}^2[1 : 2, 4] = \mathbf{O}_1^0[1 : 2] \quad (18)$$

A následně soustavu dvou nelineárních rovnic:

$$\begin{aligned} f_4(q_1, q_{\bar{1}}, q_{\bar{2}}) &= 0 \\ f_5(q_1, q_{\bar{1}}, q_{\bar{2}}) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Výsledná soustava (17, 19) je soustava 5 nezávislých (nelineárních) rovnic pro 5 neznámých pasivních kloubových souřadnic $q_3, q_{\bar{1}}, q_{\bar{2}}, q_{\bar{3}}, q_{\bar{4}}$ parametrizované aktivními kloubovými souřadnicemi q_1, q_2 . Řešením takové soustavy dostáváme vztah mezi aktivními a pasivními kloubovými souřadnicemi (14). ■

V případě uvažovaného manipulátoru lze však vztah (14) mezi aktivními a pasivními kloubovými souřadnicemi vyřešit intuitivně, neboť z geometrického náhledu na manipulátor určitě platí následující lineární vztahy:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 &= \pi \Rightarrow q_3 = \pi - q_1 - q_2 \\ q_{\bar{1}} &= q_1 \\ q_{\bar{1}} + q_{\bar{2}} &= \frac{3}{4}\pi + \alpha \Rightarrow q_{\bar{2}} = \frac{3}{4}\pi + \alpha - q_1 \quad \Rightarrow \mathbf{Q}_p = \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) \\ q_{\bar{1}} + q_{\bar{2}} + q_{\bar{3}} &= q_1 + q_2 \Rightarrow q_{\bar{3}} = q_1 + q_2 - \frac{3}{4}\pi - \alpha \\ q_{\bar{1}} + q_{\bar{2}} + q_{\bar{3}} + q_{\bar{4}} &= \pi + \beta \Rightarrow q_{\bar{4}} = \pi + \beta - q_1 - q_2 \end{aligned} \quad (20)$$

DGM manipulátoru, tedy $\mathbf{Q}_a \Rightarrow \mathbf{X}$, lze s pomocí již známého vztahu (20) psát následovně:⁴

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1^0(q_1) \cdot \mathbf{T}_2^1(q_2) \cdot \mathbf{T}_3^2(q_3)[1 : 2, 3] = \begin{bmatrix} L_2 c_{12} + L_1 c_1 - L_3 \\ L_2 s_{12} + L_1 s_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_a) \quad (21)$$

³Značení $\text{Trans}(\mathbf{x}, x)$ resp. $\text{Rot}(\mathbf{x}, x)$ značí homogenní transformační matice elementární transformace posunutí res. rotace podél resp. okolo osy \mathbf{x} o vzdálenost resp. úhel x .

⁴Zkrácené značení: $s_1 = \sin(q_1)$, $c_1 = \cos(q_1)$, $s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$, $c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$.

kde $q_3 = \pi - q_1 - q_2$.

IGM manipulátoru, tedy $\mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{Q}_a$, lze psát následovně:

Vzhledem ke konstantní orientaci koncového efektoru (rameno *Link* 6) je zřejmé, že bod $\mathbf{O}_2^0 = [x + L_3 \ y]^T$. Ramena *Link* 1 a *Link* 4 poté tvoří již jednoduchý 2 DoF planární sériový manipulátor, jehož řešení IGM lze psát ve tvaru, viz [19], jako:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{(x + L_3)^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} & \Rightarrow \quad q_2 &= \text{atan2}(s_2, c_2) \\ s_2 &= \pm \sqrt{1 - c_2^2} \\ s_1 &= \frac{c_2L_2y + L_1y - (x + L_3)s_2L_2}{L_2^2 + 2L_2L_1c_2 + L_1^2} & \Rightarrow \quad \mathbf{Q}_a &= \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}) \quad (22) \\ c_1 &= \frac{ys_2L_2 + (x + L_3)c_2L_2 + (x + L_3)L_1}{L_2^2 + 2L_2L_1c_2 + L_1^2} & \Rightarrow \quad q_1 &= \text{atan2}(s_1, c_1) \end{aligned}$$

2.2 Přímá a inverzní kinematická úloha

Přímá (DIK) a inverzní (IIK) kinematická úloha se zabývá vztahem mezi aktuálními rychlostmi a zrychleními mezi zobecněnými a aktivními kloubovými souřadnicemi manipulátoru. V případě sériových kinematických řetězců lze snadno ukázat [18, 15], že vztah mezi kloubovými a zobecněnými rychlostmi definovaný v dané aktuální poloze manipulátoru (známé polohy kloubových potažmo zobecněných souřadnic - z DGM, IGM) je dán lineárním vztahem:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \\ \ddot{\mathbf{X}} &= \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \quad (\text{pro DIK}) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{X}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{Q}) \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \right) \quad (\text{pro IIK}) \end{aligned} \quad (24)$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}}$ resp. $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \frac{d}{dt} \mathbf{J}(\mathbf{Q})$ je jakobián resp. časová derivace jakobiánu zobrazení mezi kloubovými a zobecněnými rychlostmi. Lze ukázat, [18], že prvky matice jakobiánu a jeho časové derivace lze (kromě standardního přístupu časovým derivováním polohových vztahů **DGM**, **IGM**) získat přímo výpočtem z prvků homogenních transformačních matic \mathbf{T}_i^{i-1} příslušných kinematických řetězců.

V případě paralelních manipulátorů je nezbytně nutné nejprve určit vztah mezi rychlostmi a zrychleními aktivních a pasivních kloubových souřadnic (analogicky jako v případě poloh v Kapitole 2.1), daný vztahy:

$$\dot{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{J}_{PA}(\mathbf{Q}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a \quad (25)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{J}_{PA}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{J}}_{PA}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a \quad (26)$$

■ **Poznámka 2 (Obecný přístup k řeš. záv. mezi rychlostmi/zrychleními \mathbf{Q}_p , \mathbf{Q}_a)**
Opět vyjdeme z podmínek uzavřenosti kinematických smyček, viz Obrázek 4. Tentokrát sestavíme rovnice kinematického omezení na základě znalosti rychlostí v dílčích smyčkách. Zřejmě tedy platí:

Ze smyčky LOOP 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_3^0 \\ \boldsymbol{\omega}_3^0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain1}} \stackrel{!}{=} \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain2}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain2}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_3^0 \\ \boldsymbol{\omega}_3^0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}})$, $\mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain2}})$ jsou příslušné *kinematické*⁵ jakobiány.

Vzhledem k faktu, že se jedná o planární manipulátor, rovnice kinematického omezení mají význam uvažovat pouze pro translační rychlosti v rovině $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$ a úhlovou rychlost kolem osy \mathbf{z}_0 (tedy $\dot{\mathbf{O}}_3^0 = [\dot{x} \ \dot{y} \ 0]^T$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_3^0 = [0 \ 0 \ \omega_z]^T$). Dostáváme tak celkem 3 lineární rovnice ve tvaru⁶:

$$\mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}})[[1, 2, 6], :] \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain1}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain2}})[[1, 2, 6], :] \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain2}} \quad (28)$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}}, \mathbf{Q}_{\text{Chain2}}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain1}} \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain2}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 7} \quad (29)$$

kde matice \mathbf{A}_1 vzniká přeuspořádáním příslušných sloupců kinematických jakobiánů.

Ze smyčky LOOP 2:

Opět stačí zajistit, aby rychlost (ve složce x a y) přípojného bodu $\dot{\mathbf{O}}_1^0$ kloubu *Joint 2* odpovídala rychlosti bodu umístěnému na ramenu *Link 3*. Analogicky lze tak psát:

$$\dot{\mathbf{O}}_1^0 = \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}})[1 : 2, :] \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain1}}[1] \stackrel{!}{=} \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain2}})[1 : 2, :] \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain2}}[1 : 2] \quad (30)$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}})$, $\mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain2}})$ jsou příslušné jakobiány (odlišné od kinematických jakobiánů (28) - jiný koncový s.s. (F_1), konstantní transformace mezi s.s. F_2 a přípojným bodem). Dostáváme tedy 2 lineární rovnice ve tvaru:

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}}, \mathbf{Q}_{\text{Chain2}}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain1}}[1] \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain2}}[1 : 2] \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \quad (31)$$

kde matice \mathbf{A}_2 vzniká přeuspořádáním příslušných sloupců kinematických jakobiánů.

Ze soustavy rovnic (29, 31) lze tedy získat výslednou lineární soustavu 5 rovnic pro 5 hledaných neznámých rychlostí pasivních kloubů $\dot{\mathbf{Q}}_p$ parametrizovanou známými rychlostmi aktivních kloubů $\dot{\mathbf{Q}}_a$ v níže uvedeném tvaru a jejím řešením potom dostáváme přímo hledanou závislost (25) (přeuspořádáním příslušných sloupců matic \mathbf{A}_\star odpovídající aktivním a pasivním kloubovým rychlostem do matice \mathbf{A} a \mathbf{b}):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}}, \mathbf{Q}_{\text{Chain2}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_p &= \mathbf{b}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}}, \mathbf{Q}_{\text{Chain2}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{5 \times 2} \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{Q}}_p &= \mathbf{J}_{PA}(\mathbf{Q}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a, \quad \text{kde: } \mathbf{J}_{PA}(\mathbf{Q}_a) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (32)$$

Analogickým způsobem lze odvodit také vztah mezi zrychleními pasivních a aktivních kloubových souřadnic ve tvaru (26). Pro zjednodušení nahradme původní zápis rovnic kinematického omezení (28, 30) jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain1}} &= \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain2}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain2}} \\ \rightarrow \mathbf{J}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_1 &= \mathbf{J}_2 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_2 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}})[1 : 2, :] \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain1}}[1] &= \mathbf{J}(\mathbf{Q}_{\text{Chain2}})[1 : 2, :] \cdot \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain2}}[1 : 2] \\ \rightarrow \mathbf{J}_3 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_3 &= \mathbf{J}_4 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_4 \end{aligned} \quad (34)$$

⁵Pojem *kinematický* jakobián vyjadřuje předpoklad, že rychlost rotace koncového efektoru (tedy rychlost zobecněných souřadnic odpovídající orientaci) jsou dány jako vektor úhlové rychlosti $\Rightarrow \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_3^0 & \boldsymbol{\omega}_3^0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}$

⁶Značení $\mathbf{X}[[1, 2, 6], :]$ odpovídá výběru 1., 2., 6. řádku a všech sloupců matice \mathbf{X}

Pro časovou derivaci (zrychlení) rovnic kinematického omezení tedy platí:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{J}}_1 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_1 + \mathbf{J}_1 \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_1 &= \dot{\mathbf{J}}_2 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_2 + \mathbf{J}_2 \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_2 \\ \dot{\mathbf{J}}_3 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_3 + \mathbf{J}_3 \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_3 &= \dot{\mathbf{J}}_4 \cdot \dot{\mathbf{Q}}_4 + \mathbf{J}_4 \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_4\end{aligned}\quad (35)$$

kde \mathbf{Q}_i jsou složeny z pasivních a aktivních kloubových souřadnic a \mathbf{J}_i jsou složeny z vybraných sloupců kinematických jakobiánů a jejich časové derivace.

Předpokládáme-li nyní že již známe závislosti zrychlení, lze ekvivalentně jako v předchozím případě přeuspořádat rovnice do tvaru soustavy 5 lineárních rovnic pro 5 neznámých zrychlení pasivních kloubových souřadnic $\ddot{\mathbf{Q}}_p$ parametrizované zrychleními aktivních kloubových souřadnic $\ddot{\mathbf{Q}}_a$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}}, \mathbf{Q}_{\text{Chain2}}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_p &= \mathbf{b}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}}, \mathbf{Q}_{\text{Chain2}}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \\ &+ \mathbf{c}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}}, \mathbf{Q}_{\text{Chain2}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain1}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain2}}), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{5 \times 2}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{5 \times 1} \\ &\Rightarrow \ddot{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{J}_{PA}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \dot{\mathbf{J}}_{PA}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a, \\ \text{kde: } \mathbf{J}_{PA}(\mathbf{Q}_a) &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{J}}_{PA}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) = \mathbf{c}(\mathbf{Q}_{\text{Chain1}}, \mathbf{Q}_{\text{Chain2}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain1}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{Chain2}})\end{aligned}\quad (36)$$

■

V případě uvažovaného manipulátoru lze však vztah (25, 26) mezi rychlostmi a zrychleními aktivních a pasivních kloubových souřadnic vyřešit opět intuitivně, neboť přímou časovou derivací (20) dostáváme:

$$\begin{aligned}\dot{q}_3 &= -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_{\bar{1}} &= \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 &= -\dot{q}_1 \quad \Rightarrow \dot{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{J}_{PA}(\mathbf{Q}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a \\ \dot{q}_3 &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ \dot{q}_4 &= -\dot{q}_1 - \dot{q}_2\end{aligned}\quad (37)$$

$$\begin{aligned}\ddot{q}_3 &= -\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_{\bar{1}} &= \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 &= -\ddot{q}_1 \quad \Rightarrow \ddot{\mathbf{Q}}_p = \mathbf{J}_{PA}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \underbrace{\dot{\mathbf{J}}_{PA}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a}_{=0 \Leftarrow \text{triviální paralelní kinematika}} \\ \ddot{q}_3 &= \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_4 &= -\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2\end{aligned}\quad (38)$$

DIK manipulátoru, tedy tedy $\dot{\mathbf{Q}}_a \Rightarrow \dot{\mathbf{X}}$ (pro rychlosti) a $\ddot{\mathbf{Q}}_a \Rightarrow \ddot{\mathbf{X}}$ (pro zrychlení), lze s pomocí již známého vztahu (37, 38) psát následovně:

Se znalostí vztahů mezi polohami, rychlostmi a zrychleními aktivních a pasivních souřadnic, můžeme úlohu formulovat na základě libovolného sériového kinematického řetězce ze základny na koncový efektor manipulátoru, např.:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(q_1, q_2, q_3) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{z kin. řetězce Chain 1}) \\ &= \mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 1] \cdot \dot{q}_1 + \mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 2] \cdot \dot{q}_2 + \mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 3] \cdot (-\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \\ &= (\mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 1] - \mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 3]) \cdot \dot{q}_1 + (\mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 2] - \mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 3]) \cdot \dot{q}_2 \\ \dot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{\text{man}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a, \quad \dot{\mathbf{Q}}_a = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (39)$$

kde $\mathbf{J}_{\text{man}} = [\mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 1] - \mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 3], (\mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 2] - \mathbf{J}(q_1, q_2, q_3)[:, 3])]$ je jakobián manipulátoru vztahující rychlosti koncového efektoru $\dot{\mathbf{X}}$ a aktivních kloubových souřadnic $\dot{\mathbf{Q}}_a$ a \mathbf{J} je známý jakobián kinematického řetězce *Chain 1*.

Známe-li nyní závislosti rychlostí, lze závislosti mezi zrychlením koncového efektoru $\ddot{\mathbf{X}}$ a aktivních kloubových souřadnic $\ddot{\mathbf{Q}}_a$ stanovit jako:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{J}}_{\text{man}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{J}_{\text{man}} \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a, \quad \ddot{\mathbf{Q}}_a = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 \end{bmatrix}^T \quad (40)$$

kde $\dot{\mathbf{J}}_{\text{man}}$ je časová derivace jakobiánu manipulátoru (známe ze známých časových derivací jakobiánů kin. řetězců).

IIK manipulátoru, tedy tedy $\dot{\mathbf{X}} \Rightarrow \dot{\mathbf{Q}}_a$ (pro rychlosti) a $\ddot{\mathbf{X}} \Rightarrow \ddot{\mathbf{Q}}_a$ (pro zrychlení), lze zřejmě psát následovně:

$$\ddot{\mathbf{Q}}_a = \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1} \cdot (\ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{J}}_{\text{man}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a) \quad (41)$$

3 Dynamická analýza manipulátoru

Předpokládejme nyní, že jsou známy všechny kinematické vztahy manipulátoru, viz Kapitola 2, a označme jednotlivé funkční vztahy řešící tyto úlohy za účelem zpřehlednění následovně:

Přímý geometrický model (DGM):	$\mathbf{X} = \text{DGM}(\mathbf{Q}_a, \xi)$
Inverzní geometrický model (IGM):	$\mathbf{Q}_a = \text{IGM}(\mathbf{X}, \xi)$
Přímá ok. kin. úloha (DIK):	$\{\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}\} = \text{DIK}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a, \xi)$
Inverzní ok. kin. úloha (IIK):	$\{\dot{\mathbf{Q}}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a\} = \text{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \xi)$
Vztah mezi polohami akt. a pas. kl. souřadnic:	$\mathbf{Q}_p = \text{A2P}(\mathbf{Q}_a, \xi)$
Vztah mezi rych./zrych. akt. a pas. kl. souřadnic:	$\{\dot{\mathbf{Q}}_p, \ddot{\mathbf{Q}}_p\} = \text{IKA2P}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a, \xi)$

kde ξ jsou kinematické návrhové parametry manipulátoru (typicky délky, ramen, umístění kloubů, kompenzace polohy základny a konc. efektoru).

Dynamiku manipulátorů můžeme opět rozdělit na dvě základní úlohy (předpokládejme nejprve manipulátory sériové):

- **Inverzní dynamický model (IDM):** $\{F, Q, \dot{Q}, \ddot{Q}\} \rightarrow \tau$

$$\tau = \text{IDM}(F, Q, \dot{Q}, \ddot{Q}, \xi, \mu) \quad (42)$$

Tedy výpočet sil/silových momentů τ v kloubech (aktuátorech) manipulátoru ze známého pohybu (polohy Q , rychlosti \dot{Q} a zrychlení \ddot{Q}) manipulátoru a požadovaných sil/momentů působících na koncový efektor F .

- **Přímý dynamický model (DDM):** $\{\tau, F, Q, \dot{Q}\} \rightarrow \ddot{Q}$

$$\ddot{Q} = \text{DDM}(\tau, F, Q, \dot{Q}, \xi, \mu) \quad (43)$$

Tedy výpočet zrychlení kloubových souřadnic manipulátoru na základně známé polohy Q a rychlosti \dot{Q} manipulátoru, sil/momentů působících na koncový efektor a sil/momentů působících v kloubech (aktuátorech) manipulátoru. Prostřednictvím DDM lze sestavit dynamické rovnice manipulátoru formulované soustavou nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.

kde ξ jsou kinematické návrhové parametry manipulátoru a μ jsou dynamické návrhové parametry manipulátoru (typicky umístění těžišť ramen, hmotnosti a moment setrvačnosti ramen, vektor gravitačního zrychlení).

Poznamenejme, že v případě sériových kinematických řetězců lze nalézt efektivní algoritmus výpočtu IDM založený na dopředném rekurzivním výpočtu rychlostí a zrychlení navazujících ramen směrem od základny ke koncovému efektoru a zpětného rekurzivního výpočtu distribuce sil/momentů působících na navazující ramena směrem od koncového efektoru k základně. Vhodnou substitucí vstupních proměnných $(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}})$ do IDM lze poté odvodit hodnoty dynamických matic/vektorů $\mathbf{B}(\mathbf{Q})$, $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ v obecném popisu dynamiky sériového kinematického řetězce ve tvaru:

$$\mathbf{B}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (44)$$

kde

$$\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{F}$$

kde $\mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ je matice vlivu zdánlivých sil (odstředivá, Coriolisova), $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ je matice vlivu gravitační síly a \mathbf{J} je kinematický jakobián sériového kin. řetězce.

Popsané algoritmy výpočtu IDM, DDM pro sériové kin. řetězce jsou popsány např. v [15] a podrobně odvozeny v [20].

V případě paralelních manipulátorů existuje celá řada metod nalezení dynamického modelu, např. [11], [8]. V našem případě je možné využít standardní přístup založený na principu virtuální práce. Z principu virtuální práce platí, že elementární přírůstek energie vykonaný v aktivních kloubech manipulátoru musí být roven přírůstku energie všech kloubů manipulátoru za předpokladu, že je paralelní struktura manipulátoru dekomponována na sériové (otevřené) kinematické řetězce. Dekompozice na sériové kinematické řetězce je docílena rozpojením uzavřených kinematických smyček v pasivních kloubech manipulátoru. Předpokládejme dekompozici paralelního uvažovaného manipulátoru v pasivním kloubu *Joint 4* a v pasivním kloubu *Joint 2*⁷ - tedy na dva již dříve zmíněné kinematické řetězce *Chain 1*, *Chain 2*, viz Obrázek 5. Z principu virtuální práce vyplývá:

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot d\mathbf{Q}_a = \boldsymbol{\tau}_{\text{chains}}^T \cdot d\mathbf{Q}_{\text{chains}} \quad (45)$$

kde $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$ jsou silové momenty v rotačních aktuátorech manipulátoru, $d\mathbf{Q}_a = [dq_1 \quad dq_2]^T$ je diferenciální přírůstek polohy aktivních kloubových souřadnic ,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{chains}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{\text{Chain1}} \\ \boldsymbol{\tau}_{\text{Chain2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_{\bar{1}} \\ \tau_{\bar{2}} \\ \tau_3 \\ \tau_{\bar{4}} \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{Q}_{\text{chains}} = \begin{bmatrix} d\mathbf{Q}_{\text{Chain1}} \\ d\mathbf{Q}_{\text{Chain2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ dq_3 \\ dq_{\bar{1}} \\ dq_{\bar{2}} \\ dq_3 \\ dq_{\bar{4}} \end{bmatrix}$$

jsou silové momenty v ekvivalentních dekomponovaných sériových kinematických řetězcích a odpovídající hodnoty kloubových souřadnic.

⁷*Joint 2* je aktivním kloubem kinematického řetězce *Chain 1* ale zároveň také pasivním kloubem kinematického řetězce *Chain 2*.

Ze známých závislostí mezi pasivními a aktivními kloubovými rychlostmi (37) lze odvodit vynásobením rovnice diferencí času dt :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dq_3 \\ dq_{\bar{1}} \\ \vdots \\ dq_{\bar{4}} \end{bmatrix} &= \mathbf{J}_{PA}[:, 1] \cdot dq_1 + \mathbf{J}_{PA}[:, 2] \cdot dq_2 \\ dq_3 &= \mathbf{J}_{PA}[1, 1] \cdot dq_1 + \mathbf{J}_{PA}[1, 2] \cdot dq_2 \\ dq_{\bar{1}} &= \mathbf{J}_{PA}[2, 1] \cdot dq_1 + \mathbf{J}_{PA}[2, 2] \cdot dq_2 \\ &\vdots \\ dq_{\bar{4}} &= \mathbf{J}_{PA}[5, 1] \cdot dq_1 + \mathbf{J}_{PA}[5, 2] \cdot dq_2 \end{aligned} \quad (46)$$

Vztah (45) lze dále formálně upravit na lineární zobrazení mezi silovým momentem všech kloubových souřadnic manipulátoru a silovým momentem aktivních kloubových souřadnic následovně:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \left(\frac{d\mathbf{Q}_{\text{chains}}}{d\mathbf{Q}_a} \right)^T \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{chains}} \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{H}^T(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{chains}} \end{aligned} \quad (47)$$

kde $\mathbf{H}(\mathbf{Q})$ je dána následovně:

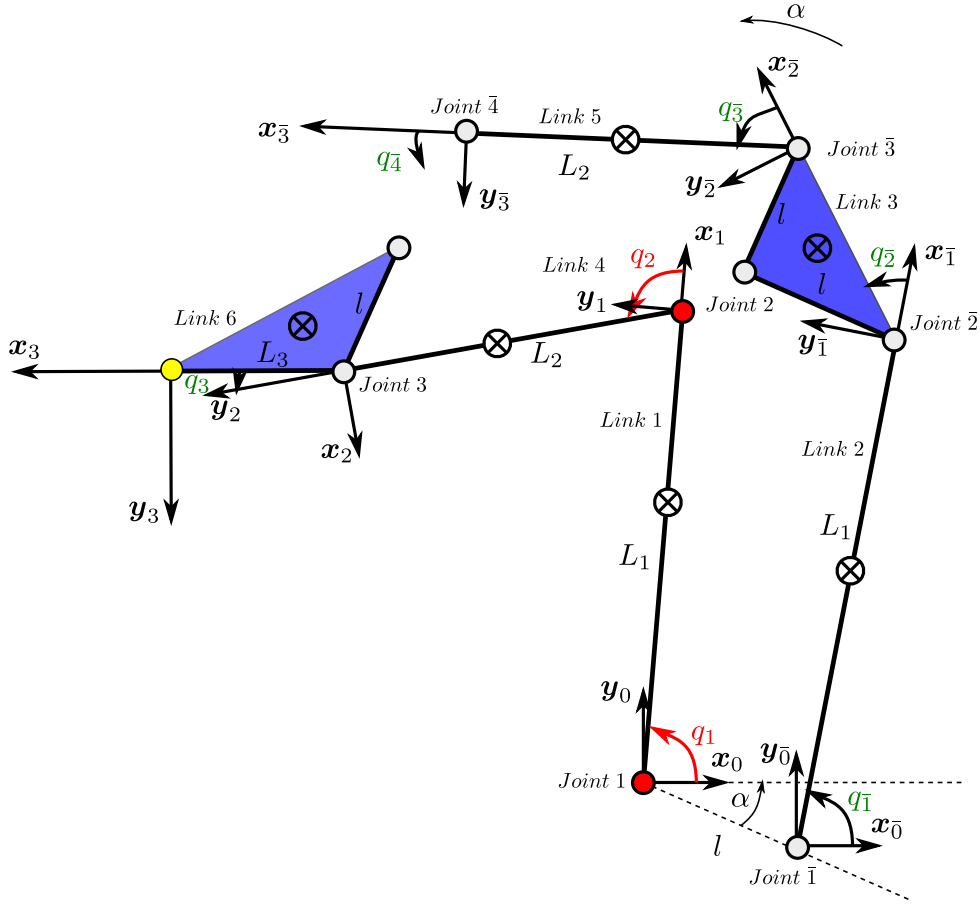
$$\mathbf{H}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dq_1} & \frac{dq_1}{dq_2} \\ \frac{dq_2}{dq_1} & \frac{dq_2}{dq_2} \\ \frac{dq_3}{dq_1} & \frac{dq_3}{dq_2} \\ \frac{dq_{\bar{1}}}{dq_1} & \frac{dq_{\bar{1}}}{dq_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{dq_{\bar{4}}}{dq_1} & \frac{dq_{\bar{4}}}{dq_2} \end{bmatrix} \quad (48)$$

S pomocí (46) lze vyčíslit hodnoty prvků hledané matice $\mathbf{H}(\mathbf{Q})$ (aktivní kloubové souřadnice $\mathbf{Q}_a = [q_1 \quad q_2]^T$ tedy i dq_1, dq_2 jsou již **nezávislé** proměnné):

$$\mathbf{H}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dq_1} & \frac{dq_1}{dq_2} \\ \frac{dq_2}{dq_1} & \frac{dq_2}{dq_2} \\ \frac{dq_3}{dq_1} & \frac{dq_3}{dq_2} \\ \frac{dq_{\bar{1}}}{dq_1} & \frac{dq_{\bar{1}}}{dq_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{dq_{\bar{4}}}{dq_1} & \frac{dq_{\bar{4}}}{dq_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \mathbf{J}_{PA}[1, 1] & \mathbf{J}_{PA}[1, 2] \\ \mathbf{J}_{PA}[2, 1] & \mathbf{J}_{PA}[2, 2] \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{J}_{PA}[5, 1] & \mathbf{J}_{PA}[5, 2] \end{bmatrix} \quad (49)$$

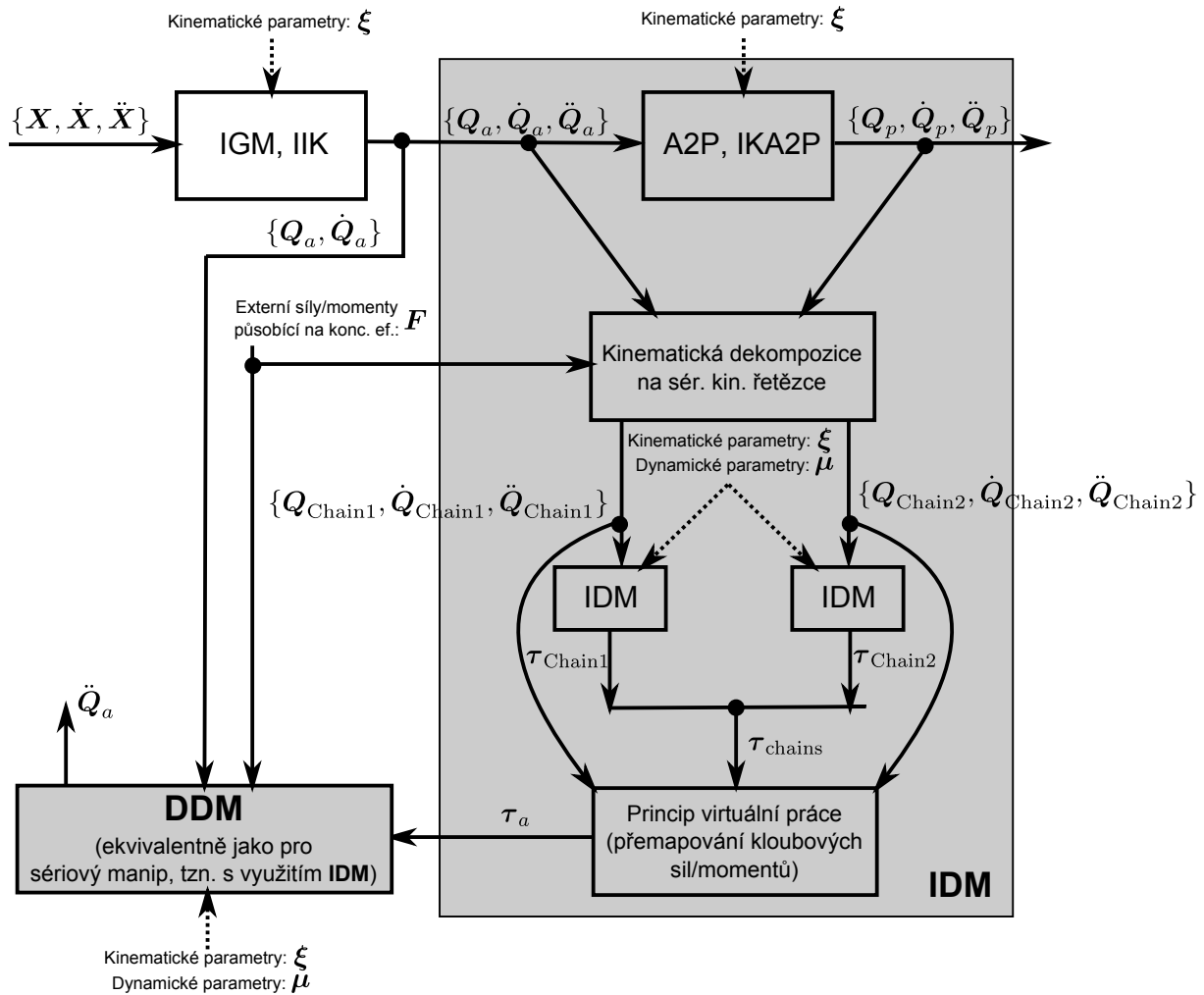
V případě zkoumaného manipulátoru je vzhledem k jednoduchému vyjádření takových závislostí, viz (37) možno přímo psát (konstantní matice z důvodu triviální kinematické architektury):

$$\mathbf{H}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (50)$$



Obrázek 5: Dekompozice paralelního manipulátoru na dílčí kinematické řetězce

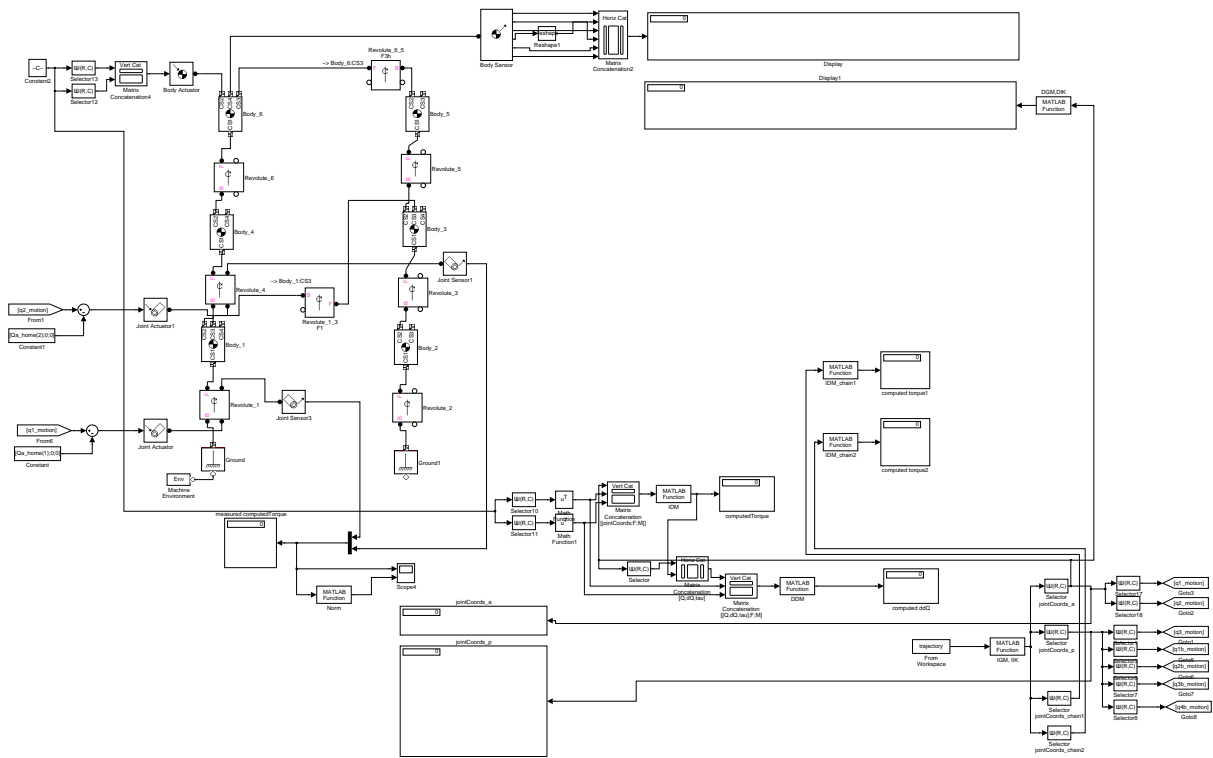
Za předpokladu, že známe požadovaný pohyb manipulátoru, např. ve významu poloh \mathbf{X} , rychlostí $\dot{\mathbf{X}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}$ koncového efektoru, lze z IGM, IIK vypočítat požadované polohy \mathbf{Q}_a , rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}_a$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}_a$ aktivních kloubových souřadnic a dále dle závislostí mezi aktivními a pasivními kloubovými souřadnicemi všechny pasivní kloubové polohy \mathbf{Q}_p , rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}_p$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}_p$. V takovém případě nyní může být spočítán IDM pro všechny dekomponované sériové kinematické řetězce. Získáváme tak požadované síly/silové momenty ve všech (aktivních i pasivních) kloubech. Požadované síly/silové momenty v pasivních kloubech manipulátoru jsou poté promítnuty do sil/silových momentů aktivních kloubů manipulátoru, viz (47) (a kinematické řetězce jsou poté zpět uzavřeny v původně rozpojených pasivních kloubech). Výsledné schéma výpočtu IDM pro paralelní manipulátor lze vyjádřit Obrázkem 6. Poznamenejme, že externí síly/momenty působící na koncový efektor manipulátoru budou zahrnuty do příslušného odpovídajícího kinematického řetězce (resp. do silového/momentového působení na jeho koncový efektor). Obdobně jako v případě po sériové manipulátory, viz [20], je možné s pomocí IDM stanovit následně DDM paralelního manipulátoru (respektive příslušné členy $\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a)$, $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a)$ v rovnici (44)). Poznamenejme, že postup výpočtu IDM, DDM pro paralelní manipulátory lze zobecnit pro libovolné paralelní kinematické řetězce.



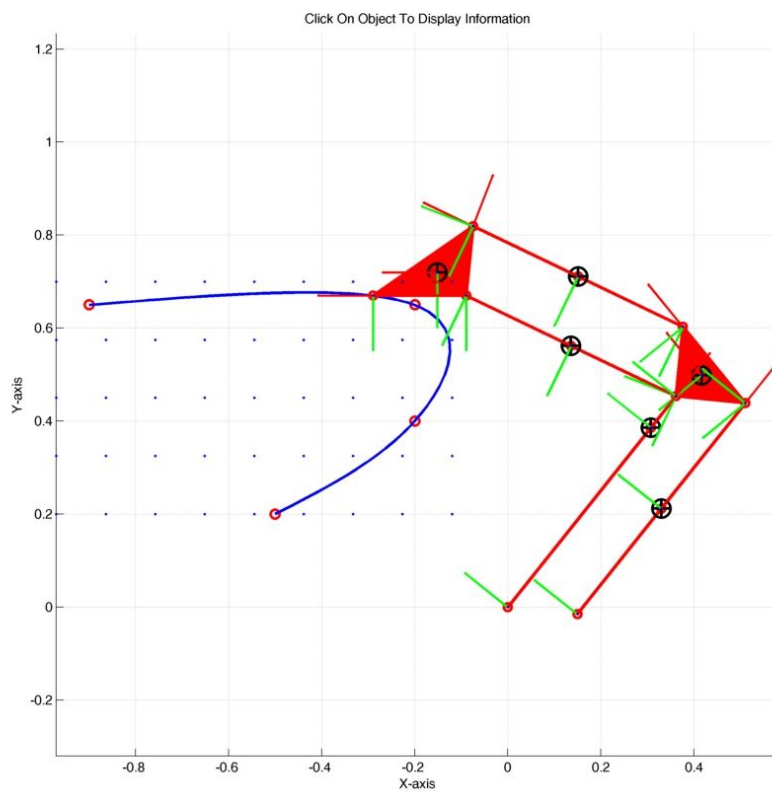
Obrázek 6: Grafické znázornění výpočtu IDM (DDM) pro paralelní manipulátory

4 Model manipulátoru v prostředí SimMechanics

Model manipulátoru včetně všech výše uvedených výpočetních úloha kinematiky, viz Kapitola 2, a dynamiky, viz Kapitola 3 byl realizován ve vývojovém prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics, viz [17], prostřednictvím knihoven a předimplementovaných skriptů pro modelování robotů za účelem kinematické optimalizace a řízení popsaných v [20]. Vlastní model v SimMechanicsu je znázorněn na Obrázku 7 včetně vizualizace pohybu po dané trajektorii na Obrázku 8.



Obrázek 7: Model manipulátoru v prostředí SimMechanics



Obrázek 8: Model manipulátoru v prostředí SimMechanics (vizualizace pohybu)

5 Optimální návrh kinematických parametrů manipulátoru

Optimální návrh manipulátoru hraje klíčovou roli při tvorbě manipulátoru libovolného typu. V našem případě se omezme na situaci, kdy je strukturální tvar manipulátoru znám, tzn. počet, druh a umístění (ve smyslu orientace) všech kloubů manipulátoru je známý, stejně tak jako vzájemná konfigurace kinematických řetězců je dána. Zároveň platí, že počet DoF koncového efektoru odpovídá počtu nezávislých aktuátorů manipulátoru (manipulátor je kinematicky jednoznačně určený, tzn. při uzamčení aktuátorů nevykazuje koncový efektor manipulátoru žádné volné DoF a zároveň při jejich uvolnění vykazuje právě odpovídající počet DoF). Takový strukturální návrh je v drtivé většině případů proveden na základě inženýrské analýzy založené na citu a zkušenostech návrháře (přesto, že v literatuře je možné najít řadu publikací zabývajících se právě strukturální syntézou - především určení počtu DoF paralelních robotických struktur, např. [3]). Zabývejme se proto dále podrobněji druhou významnou částí optimalizace, a to tzv. *parametrickou optimalizací*, kde je hlavním cílem určení kinematických parametrů manipulátoru za účelem optimalizace zvoleného kritéria optimality. Kinematickými parametry manipulátoru rozumíme zvolené DH parametry kinematických řetězců, které mohou být měněny konstrukčními úpravami manipulátoru, např. (délky ramen, kompenzace polohy základny a koncového efektoru, atd.). Kritériem optimality rozumíme indikátor ve tvaru skalární proměnné závislé na kinematických návrhových parametrech manipulátoru a/nebo aktuální poloze (rychlosti, zrychlení) zobecněných/kloubových souřadnic manipulátoru. Takovým indikátorem může být např. maximum z normy sil/momentů či rychlostí na aktuátorech podél požadované trajektorie manipulátoru či přes zvolený pracovní prostor. Cílem optimalizace je poté nalezení takových kinematických parametrů, aby byla hodnota kritéria minimalizována.

Zabývejme se dále tvarem kritéria optimality:

Nechť je kritérium optimality (hodnota kritériální funkce J) v daném bodě pracovního prostoru (poloze koncového efektoru manipulátoru \mathbf{X}) definováno následovně:

$$J = \frac{1}{J_{\text{pen}} + J_{\text{obj}}} \in \langle 0, 1 \rangle \quad (51)$$

kde

- J je výsledná kritériální funkce daná jako suma *penalizační funkce* J_{pen} a *účelové funkce* J_{obj} . Za účelem korektní optimalizace je hodnota kritériální funkce normována na hodnotu v omezeném rozsahu, typicky na interval $\langle 0, 1 \rangle$, kdy hodnota 0 představuje nejhorší případ a hodnota 1 případ optimální.
- J_{pen} je tzv. *penalizační funkce* penalizující daná omezení na optimalizaci parametrů manipulátoru. Užití penalizační funkce je jednou z možných přístupů k optimálnímu návrhu parametrů s daným omezením, kdy tato daná omezení jsou reprezentována zvolenou penalizací a přičítána k výsledné hodnotě účelové funkce J_{obj} . $J_{\text{pen}} \rightarrow 0$ odpovídá splnění všech předepsaných kritérií, $J_{\text{pen}} \rightarrow +\infty$ odpovídá úplnému porušení všech kritérií. Poznamenejme, že dílčí sčítaná omezení optimalizace mohou být různě vážena (dle nastavených podmínek a potřeb optimalizační úlohy, tzn. vážení nízkými hodnotami koeficientů odpovídá tzv. „měkkým“ omezením, vážení vysokými hodnotami koeficientů odpovídá „tvrdým“ omezením optimalizace).

★ Příklad 1 (Omezení pomocí penalizační funkce)

Omezení na maximální výsuv lineárních aktuátorů robotu může být dáno vztahem:

$$J_{\text{pen}} = K_1 \cdot P_1 + K_2 \cdot P_2 \quad (52)$$

kde

$$P_i = \begin{cases} 0 & \text{pro: } (\|d_i\| - d_i^{\max}) < 0 \\ (\|d_i\| - d_i^{\max}) & \text{pro: } (\|d_i\| - d_i^{\max}) \geq 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2$$

a d_i jsou aktuální hodnoty kloubových souřadnic výsuvů lineárních aktuátorů pro dané umístění koncového efektoru do bodu \mathbf{X} v pracovním prostoru, d_i^{\max} jsou maximální povolená vysunutí aktuátorů a $K_i > 0$ jsou příslušné penalizační konstanty. ★

- J_{obj} je tzv. *účelová funkce* zohledňující požadované vlastnosti manipulátoru, které mají být optimalizovány. J_{obj} vyjadřuje míru optimality dle zvoleného hlediska, $J_{\text{obj}} \rightarrow 0$ odpovídá optimálnímu případu (hodnota účelové funkce je minimální možná), $J_{\text{obj}} \rightarrow +\infty$ odpovídá nejvíce vzdálenému případu od optimálního.

★ Příklad 2 (Účelová funkce)

Předpokládejme, že kritériem optimality manipulátoru bude minimalizovat výsledné síly/silové momenty v aktuátorech, účelová funkce může být volena následovně:

$$J_{\text{obj}} = \tau_1^2 + \tau_2^2 \quad (53)$$

kde τ_i představují hodnoty sil/silových momentů v aktivních kloubech manipulátoru pro dané umístění koncového efektoru do bodu \mathbf{X} v pracovním prostoru. ★

5.1 Definice optimalizační úlohy pro uvažovaný manipulátor

V případě optimalizace kinematických parametrů ξ uvažovaného manipulátoru formulujeme optimalizační úlohu následovně:

Uvažujme požadovaný pracovní prostor manipulátoru ve tvaru obdélníku v rovině $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$ specifikovaný body jeho protilehlých rohů \mathbf{LB} , \mathbf{RU} , viz Obrázek 2. Pracovní prostor bude diskretizován na dílčí body \mathbf{X}_{opt} následovně:

$$\mathbf{X}_{\text{opt}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{LB}[1] \\ \mathbf{LB}[1] + \Delta x \\ \mathbf{LB}[1] + 2\Delta x \\ \vdots \\ \mathbf{RU}[1] - \Delta x \\ \mathbf{RU}[1] \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \mathbf{LB}[2] \\ \mathbf{LB}[2] + \Delta y \\ \mathbf{LB}[2] + 2\Delta y \\ \vdots \\ \mathbf{RU}[2] - \Delta y \\ \mathbf{RU}[2] \end{array} \right] \quad (54)$$

kde Δx , Δy jsou zvolené diskretizace v dílčích souřadných osách pracovního prostoru a \times značí kartézský součin vektorů. Množina všech kombinací bodů diskretizovaného pracovního prostoru je tedy dána jako: $\mathbf{X}_{\text{opt}} \in \mathbb{R}^M$, $M = M_1 \cdot M_2$ a M_1 resp. M_2 značí počet diskretizovaných hodnot ve směru souřadnicových os \mathbf{x} resp. \mathbf{y} pracovního prostoru.

Hodnota kritériální funkce $J(\mathbf{X})$ v daném bodě $\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}$ pracovního prostoru manipulátoru bude definována vztahem (51), kde hodnoty penalizační funkce J_{pen} a účelové funkce J_{obj} budou definovány následovně:

5.1.1 Definice hodnoty penalizační funkce J_{pen}

Penalizační funkce $J_{\text{pen}}(\mathbf{X})$ bude zahrnovat následující podmínky pro omezení optimalizační úlohy:

- Koncový efektor manipulátoru lze umístit do všech diskretizovaných bodů pracovního prostoru \mathbf{X}_{opt} , tzn. existuje řešení IDM.
- Paralelogramy tvořící ramena délek L_1 a L_2 budou svírat úhel větší než γ_{\min} , tzn. viz Obrázek 9(a), platí (jinak dochází k přiblížení manipulátoru kinematické singularitě):

$$\begin{aligned} \|\sin(q_1 - \alpha)\| &\geq \|\sin(\gamma_{\min})\| \\ \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| &\geq \|\sin(\gamma_{\min})\| \end{aligned} \quad (55)$$

kde q_1, q_2 jsou polohy aktivních kloubových souřadnic a α je kinematický návrhový parametr manipulátoru.

Výsledná hodnota penalizační funkce bude tedy dána jako:

$$J_{\text{pen}}(\mathbf{X}) = K_1 \cdot P_1 + K_2 \cdot P_2 + K_3 \cdot P_3 \quad (56)$$

kde

$$P_1 = \begin{cases} 0 & \text{pokud pro } \mathbf{X} \exists \text{ řešení IGM} \\ 1 & \text{pokud pro } \mathbf{X} \nexists \text{ řešení IGM} \end{cases}$$

$$P_2 = \begin{cases} 0 & \text{pokud pro } \mathbf{X} \text{ platí: } \|\sin(q_1 - \alpha)\| \geq \|\sin(\gamma_{\min})\| \\ \|\sin(\gamma_{\min})\| - \|\sin(q_1 - \alpha)\| & \text{pokud pro } \mathbf{X} \text{ platí: } \|\sin(q_1 - \alpha)\| < \|\sin(\gamma_{\min})\| \end{cases}$$

$$P_3 = \begin{cases} 0 & \text{pokud pro } \mathbf{X} \text{ platí: } \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| \geq \|\sin(\gamma_{\min})\| \\ \|\sin(\gamma_{\min})\| - \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| & \text{pokud pro } \mathbf{X} \text{ platí: } \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| < \|\sin(\gamma_{\min})\| \end{cases}$$

a K_i jsou zvolené penalizační konstanty.

Poznamenejme, že v uvedené případě omezení optimalizační úlohy je penalizace P_1 prioritní (kritická), neboť vyjadřuje dostupnost bodu \mathbf{X} uvažovaným manipulátorem (existence řešení IGM, resp. požadavek, že \mathbf{X} leží v požadovaném pracovním prostoru manipulátoru). Často se tedy uvažuje $K_1 = +\infty$ a toto omezení se vyhodnocuje nejdříve (před všemi ostatními: P_2, P_3) a v případě, že je omezení porušeno ($P_1 \neq 0$) je další výpočet omezení zastaven (úspora výpočetního času) a výsledná hodnota penalizační funkce prohlášena jako nevyhovující, tzn. $J_{\text{pen}}(\mathbf{X}) = +\infty$, tzn. výsledná kriteriální funkce $J(\mathbf{X}) = 0$.

5.1.2 Definice hodnoty účelové funkce J_{obj}

V případě uvažovaného manipulátoru požadujeme, aby byl minimalizovaný silový moment $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2]^T$, viz Kapitola 3, v aktuátorech manipulátoru. Předpokládejme, že toto lze zajistit minimalizací normy vektoru kloubových silových momentů $\|\boldsymbol{\tau}\| = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$.

Kdybychom nyní předpokládali, že známe konkrétní požadovanou trajektorii koncového efektoru manipulátoru ve smyslu požadovaných poloh \mathbf{X} , rychlostí $\dot{\mathbf{X}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}$, lze vypočítat hodnotu účelové funkce $J_{\text{obj}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}) = \|\boldsymbol{\tau}\|$ v každém příslušném bodě požadované trajektorie na základě řešení IGM, IIK ($\{\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}\} \Rightarrow \{\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a\}$) a IDM ($\{\mathbf{F}, \mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a, \ddot{\mathbf{Q}}_a\} \rightarrow \boldsymbol{\tau}$).

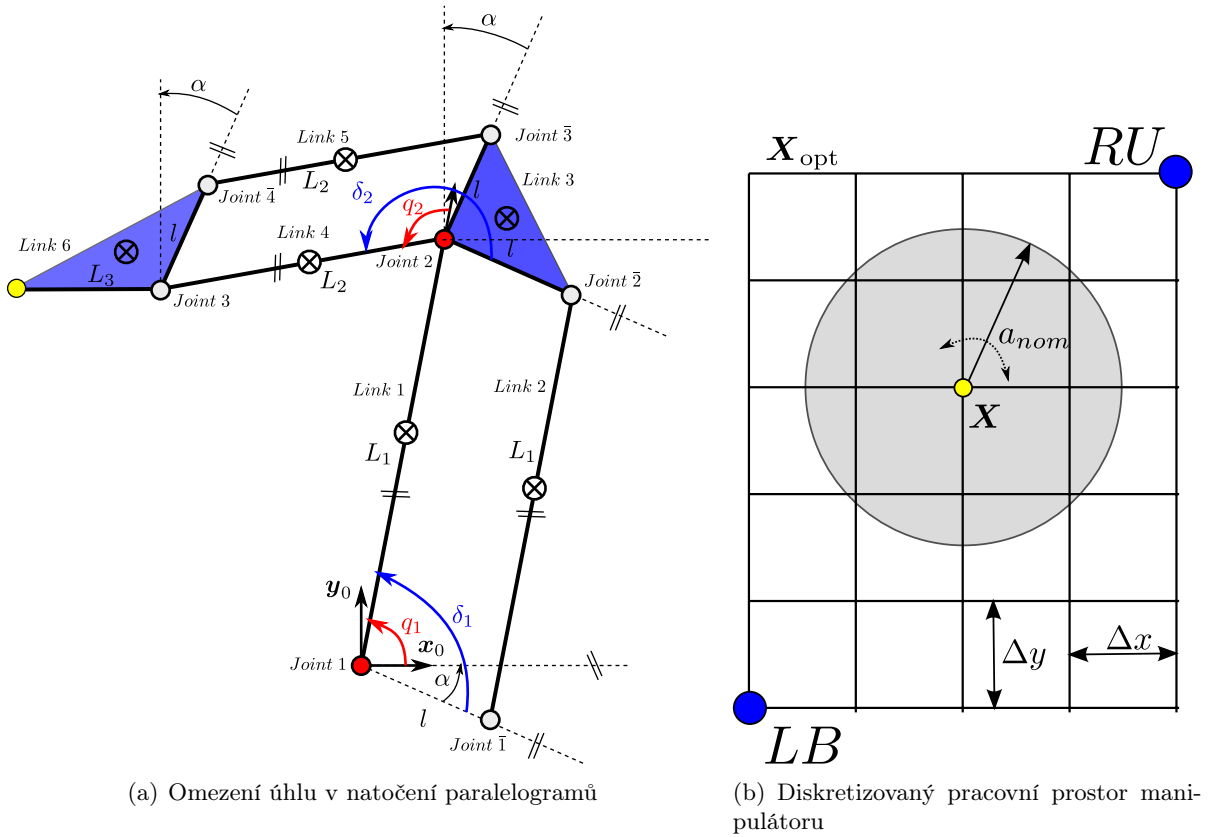
Bohužel, v uvažované optimalizační úloze neznáme konkrétní hodnotu trajektorie koncového efektoru manipulátoru, ale pouze pracovní prostor ve smyslu určených diskretizovaných poloh koncového efektoru \mathbf{X}_{opt} . Neznáme tedy žádné požadované rychlosti ani zrychlení koncového efektoru resp. kloubových souřadnic manipulátoru. Vzhledem k tvaru dynamické rovnice manipulátoru (44) by v takovém případě bylo možné optimalizovat pouze *statické silové momenty*

kompenzující gravitační působení na manipulátor $\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)$ případně vnější sílu/moment \mathbf{F} působící na koncový efektor, které závisí pouze na polohách koncového efektoru resp. kloubových souřadnic, tzn.:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) + \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{F} \quad (57)$$

V případě, že bychom chtěli zahrnout do optimalizace silových momentů v aktuátorech také *dynamické projevy manipulátoru*, lze postupovat např. následovně:

Uvažujme, že kromě minimalizace silových momentů v aktuátorech způsobené statickými projevy (vlivem gravitace a externí síly/momentu na koncový efektor) požadujeme ještě navíc, že manipulátor dokáže z nulové rychlosti $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ zrychlit (ve smyslu $\ddot{\mathbf{X}}$) v každém bodu pracovního prostoru \mathbf{X}_{opt} do libovolného směru s nominálním zrychlením o velikosti a_{nom} , viz Obrázek 9(b). V každém bodu pracovního prostoru tedy definujeme konstantní normu zrychlení $\|\ddot{\mathbf{X}}\| = a_{nom} = \text{konst.}$



Obrázek 9: Omezení a diskretizace pracovního prostoru

Z předpokladu nulové rychlosti $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ lze z dynamické rovnice manipulátoru vyjádřit:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{C}(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) + \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{F} &= \boldsymbol{\tau} \\ \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{Q}}_a = \mathbf{0} : \mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) + \mathbf{J}^T(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{F} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (58)$$

Z DIK/IIK pro paralelní manipulátory (40) zřejmě pro $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ platí:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}_{\text{man}}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}_a \quad \ddot{\mathbf{Q}}_a = \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}} \quad (59)$$

Dosazením (40) do (58) a za předpokladu $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (žádné externí síly/momenty působící na koncový efektor) dostáváme:

$$\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) = \boldsymbol{\tau} \quad \|\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| = \|\boldsymbol{\tau}\| \quad (60)$$

Pro $\|\star\|$ (2-norma signálu) platí, viz (60):

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \|\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \leq \|\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}}\| + \|\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \quad (61)$$

Z lineární algebry po indukované normy matic (v našem případě 2-normou signálu $\|\star\|$), viz [6]:

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a) \cdot \ddot{\mathbf{X}}\| \leq \sigma_{\max}(\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a)) \cdot \underbrace{\|\ddot{\mathbf{X}}\|}_{a_{\text{nom}}} \quad (62)$$

kde $\sigma_{\max}(\star)$ označuje maximální singulární číslo matice \star .

Dosazením nerovnosti (61) do nerovnosti (62) dostáváme:

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \sigma_{\max}(\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a)) \cdot a_{\text{nom}} + \|\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \quad (63)$$

Horní omezením normy kloubových silových momentů manipulátoru v poloze \mathbf{X} koncového efektoru za předpokladu jeho nulové rychlosti $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0}$ a nominální hodnoty $a_{\text{nom}} = \|\ddot{\mathbf{X}}\|$ zrychlení $\ddot{\mathbf{X}}$ do libovolného směru je tedy hodnota:

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\max} = \sigma_{\max}(\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a)) \cdot a_{\text{nom}} + \|\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \quad (64)$$

kde $\mathbf{Q}_a = \text{IGM}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ a členy $\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a)$ a $\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a) = \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{Q}_a, \dot{\mathbf{Q}}_a)$ viz rovnice (44) za předpokladu $\dot{\mathbf{Q}}_a = \mathbf{0}$, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ lze získat z řešení DDM pro paralelní manipulátory, viz Kapitola 3.

Poznamenejme, že hodnota nominálního zrychlení koncového efektoru a_{nom} reprezentuje v podstatě váhovou konstantu, která nastavuje kompromis optimalizace mezi minimalizací silových momentů v aktuátorech odpovídající statickému chování manipulátoru ($a_{\text{nom}} = 0$), tedy kompenzaci statického působení vlivem gravitace, a dynamickému chování ($a_{\text{nom}} \gg 0$), tedy kompenzaci dynamického působení vlivem urychlení pohybu koncového efektoru, v obou případech v daném bodu \mathbf{X} pracovního prostoru manipulátoru.

Hodnota účelové funkce je tedy stanovena jako:

$$J_{\text{obj}}(\mathbf{X}) = \|\boldsymbol{\tau}\|_{\max} = \sigma_{\max}(\mathbf{B}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{\text{man}}^{-1}(\mathbf{Q}_a)) \cdot a_{\text{nom}} + \|\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \quad (65)$$

kde $\mathbf{Q}_a = \text{IGM}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$.

5.1.3 Konkrétní definice optimalizační úlohy

Hodnota kriteriální funkce $J(\mathbf{X})$ v každém bodu pracovního prostoru $\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}$ je tedy z definice podle (51) a vztahů pro výpočet penalizační (56) a účelové (65) funkce dán jako:

$$J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{J_{\text{pen}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, \gamma_{\text{min}}) + J_{\text{obj}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}, a_{\text{nom}})} \quad (66)$$

kde $\boldsymbol{\xi}$ jsou kinematické návrhové parametry manipulátoru, $\boldsymbol{\mu}$ jsou dynamické parametry manipulátoru a γ_{min} resp. a_{nom} jsou parametry optimalizace parametrizující penalizační funkci J_{pen} resp. účelovou funkci J_{obj} .

Optimalizační úlohu budeme definovat přes celý uvažovaný prostor \mathbf{X}_{opt} jako *maxmin* problém, tedy:

$$J^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\mu}) = \max_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} \left(\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) \right) \quad (67)$$

$$\boldsymbol{\xi}^* = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} \left(\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) \right) \quad (68)$$

kde Ξ je přípustná množina kinematických návrhových parametrů manipulátoru.

Tedy hledáme takové parametry ξ pro které platí, že minimální hodnota kritériální funkce $J(\mathbf{X}, \xi, \mu)$ podél celého uvažovaného diskretizovaného pracovního prostoru \mathbf{X}_{opt} je maximalizována. Jinými slovy, maximální hodnota součtu penalizační a účelové funkce podél celého uvažovaného diskretizovaného pracovního prostoru \mathbf{X}_{opt} je minimalizována, a tedy je nejlépe eliminován nejhorší případ (ve smyslu kritéria optimality) přes celý pracovní prostor.

5.2 Metody řešení definované optimalizační úlohy

V Kapitole 5.1 jsme se zabývali formulací optimalizační úlohy. Optimalizační úloha byly v našem případě formulována jako *maxmin* problém nalezení optimálních kinematických parametrů přes celý diskretizovaný pracovní prostor manipulátoru. Takový přístup k definici optimalizační úlohy je vhodný právě v případě, kdy je nutné eliminovat nejhorší případ (ve smyslu kritéria optimality) přes celý uvažovaný pracovní prostor manipulátor. Poznamenejme, že druhou často optimalizační úlohou je situace, kdy chceme eliminovat nikoliv nejhorší případ, ale jakýsi průměr (často integrovanou hodnotu kritéria) přes uvažovaný pracovní prostor (či přes uvažovanou konkrétní trajektorii), viz [20].

Vzhledem k faktu, že je kritériální funkcí optimalizační úlohy je velmi komplikovaná nelineární transcendentní funkce, je v podstatě nezbytné optimalizační úlohu řešit nějakými diskrétními algoritmy prohledávání prostoru řešení, či gradientními a alternativně negradientními algoritmy. Nejprve je problém je rozumné problém rozdělit na dva základní případy, a to:

5.2.1 Globální optimalizace

V případě globální optimalizace se snažíme (většinou v omezeném prostoru hledaných řešení - množina přípustných hodnot kinematických návrhových parametrů Ξ) najít globální optimum. Bohužel nalezení globálního optima kritériální funkce je v obecném případě velmi komplikované. Omezme se proto na diskretizaci prohledávaného prostoru přípustných řešení a diskretizaci prohledávaného pracovního prostoru. Vzhledem k definici požadovaného pracovního prostoru manipulátoru, viz (54), je již pracovní prostor apriori diskretizován do diskrétní množiny hodnot požadovaných poloh koncového efektoru \mathbf{X}_{opt} . Analogicky lze provést diskretizaci m kinematických návrhových parametrů $\xi \in \mathbb{R}^m$ a definovat tím tak i přípustnou množinu jejich diskrétních hodnot Ξ definovanou jako kartézský součin vektorů diskrétních přípustných hodnot dílčích ki-

nematických návrhových parametrů.

$$\begin{aligned}
\Xi = & \left[\begin{array}{c} \xi_C[1] + \Delta\xi[1] \cdot \\ \begin{array}{c} -n_{1_{\min}} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_{1_{\max}} \end{array} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \xi_C[2] + \Delta\xi[2] \cdot \\ \begin{array}{c} -n_{2_{\min}} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_{2_{\max}} \end{array} \end{array} \right] \times \dots \\
& \dots \times \left[\begin{array}{c} \xi_C[m-1] + \Delta\xi[m-1] \cdot \\ \begin{array}{c} -n_{m-1_{\min}} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n_{m-1_{\max}} \end{array} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \xi_C[m] + \Delta\xi[m] \cdot \\ \begin{array}{c} -n_{m_{\min}} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n_{m_{\max}} \end{array} \end{array} \right] \quad (69)
\end{aligned}$$

kde $\xi_C[i]$ jsou středy intervalů (intervaly mohou být i nesymetrické, tzn. $n_{i_{\min}} \neq n_{i_{\max}}$) diskrétní množiny $N_i = n_{i_{\min}} + n_{i_{\max}} + 1$ prvků přípustných kinematických návrhových parametrů s požadovanou diferencí $\Delta\xi[i]$ pro $i = 1 \dots m$. Množina všech kombinací diskretizovaných přípustných kinematických návrhových parametrů je tak dána jako: $\Xi \in \mathbb{R}^N$, $N = N_1 \cdot N_2 \dots N_{m-1} \cdot N_m$.

Poznamenejme, že takový přístup k definici diskrétní množiny přípustných parametrů je výhodný s ohledem na znalost počátečních (nominálních) hodnot kinematických návrhových parametrů, která jsou použity právě jako středy ξ_C příslušných intervalů (tento předpoklad je vhodný zejména pro urychlení globálního optimalizačního algoritmu v Kapitole 5.2.1).

Cílem globálního optimalizačního algoritmu je tedy nalézt takovou příslušnou sadu diskretizovaných kinematických návrhových parametrů⁸ $\xi^* = \Xi\{i^*\}$, $i^* \in \langle 1, N \rangle$, respektive jejich příslušný index i^* , pro který platí, že minimum hodnoty kriteriální funkce J je maximální přes všechny diskrétní hodnoty pracovního prostoru $\mathbf{X}_{\text{opt}}\{j\}$, $j = 1 \dots M$, viz rovnice (67, 68). Takto definovanou úlohu lze řešit samozřejmě hrubou silou, tedy následovně:

◆ **Algoritmus 1 (Algoritmus řešení globální optimalizační úlohy hrubou silou:)**

- Definuj předpis pro výpočet kriteriální funkce $J(\mathbf{X}, \xi, \mu)$ závislé na optimalizovaných kinematických návrhových parametrech ξ a zobecněných souřadnicích \mathbf{X} koncového efektoru manipulátoru.
- Definuj diskretizaci pracovního prostoru manipulátoru ve smyslu množiny \mathbf{X}_{opt} M diskrétních vektorů zobecněných souřadnic $\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}} \in \mathbb{R}^n$, kde n je počet DoF manipulátoru.
- Definuj diskretizaci přípustných hodnot dílčích kinematických návrhových parametrů (parametry N_i , $\Delta\xi[i]$, $\xi_C[i]$) a vypočti množinu $N = N_1 \cdot N_2 \dots N_m$ vektorů (sad) přípustných parametrů Ξ dle (69).

⁸Označení $\Xi\{i\}$ vyjadřuje výběr i -tého vektoru z příslušné množiny vektorů. Bude-li množina realizována jako matice, jejíž sloupce odpovídají příslušným vektorům, platí: $\Xi\{i\} = \Xi[:, i]$.

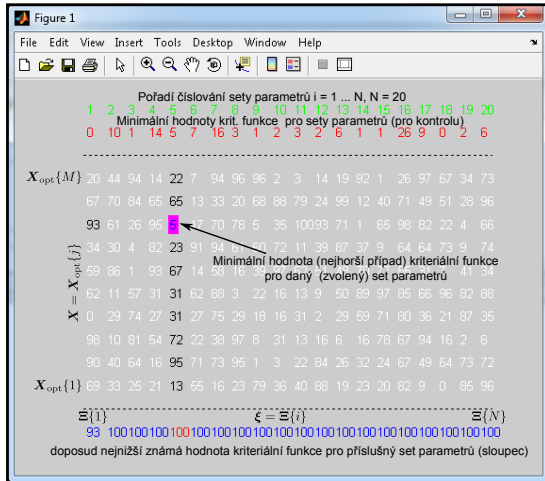
Celkový počet vyčíslení kritériální funkce je tedy: $N_{\text{critFunEval}} = 14641 \cdot 45 = 658845$ a celkový čas potřebný k vyčíslení hodnot kritériální funkce: $T_{\text{critFunEval}} = 658845 \cdot 0.005 = 54.9 \text{min}$. Právě výpočetní náročnost je zásadním problémem diskrétních globálních optimalizačních algoritmů. Pro zefektivnění prohledávání stavového prostoru při řešení úlohy *maxmin* (či ekvivalentně *minmax*) lze s výhodou použít metody prořezávání, kdy jednoznačně dopředu neoptimální podprostory prohledávaného prostoru jsou z algoritmu explicitně vyřazeny. Takovým prořezáváním nedochází ke ztrátě globálního optima, ale výpočetní náročnost (ve smyslu potřebného počtu vyčíslení hodnot kritériální funkce) může být výrazně snížena. Jedním takových algoritmů prořezávání je na př. tzv. **Culling algorithm**, inspirovaný prací [2] a podrobně odvozený a popsáný v práci [20]. Stručně lze charakterizovat algoritmus následovně:

◆ **Algoritmus 2 (Culling algoritmus pro globální prohledávání - úloha *maxmin*)**

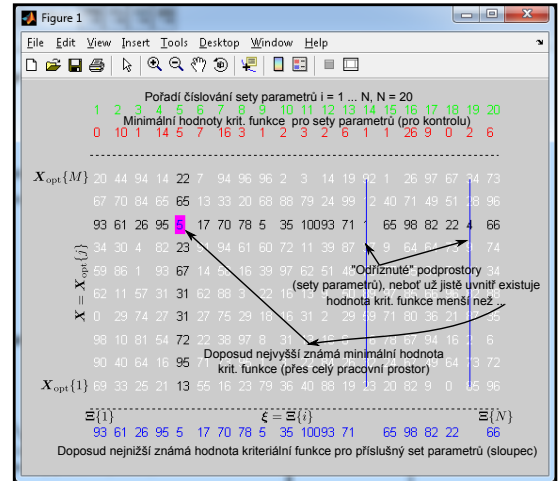
Pro grafické znázornění algoritmu uvažujme, že ve všech dále uvedených souvisejících obrázcích zobrazujeme matici \mathbf{J}_{val} s některými zavedenými přídatnými identifikátory. Předpokládejme v tomto případě, že hodnota kritériální funkce nabývá celočíselné hodnoty od 0 do $+\infty$. Počet setů přípustných návrhových kinematických parametrů je $N = 20$ a počet prohledávaných diskretizovaných bodů pracovního prostoru $M = 10$.

1. Algoritmus začíná výběrem libovolného setu (sloupce) parametrů ξ (ideálním výběrem je takový set, který je nejbližší optimu - má maximální hodnotu minima kritériální funkce přes body v pracovním prostoru. Dále je vyčíslena hodnota kritériální funkce pro všechny odpovídající body pracovního prostoru (řádky), viz Obrázek 10(a) a nalezena minimální hodnota kritériální funkce odpovídající nejhorsímu bodu v pracovním prostoru pro vybraný set parametrů (fialově zvýrazněná hodnota).
2. V odpovídajícím bodě pracovního prostoru (řádku) je vyčíslena hodnota kritériální funkce pro všechny ostatní sety parametrů (sloupce) a aktualizovány hodnoty doposud nejhorsího (nejnižšího) známého případu hodnoty kritériální funkce pro sety prohledávaných parametrů (spodní modrý řádek hodnot, je-li vypočtená hodnota kritériální funkce v příslušném řádku nižší - aktualizuj hodnotu v modrém řádku). Nastane-li situace, že je hodnota kritériální funkce v aktuálně počítaném řádku nižší (horší) než aktuální minimální hodnota nalezená pro vybraný set parametrů přes všechny body v pracovním prostoru (vyznačená fialová hodnota), je celý příslušný sloupec (set parametrů) vyřazen (odříznut) (neboť již zcela jistě existuje sloupec (set parametrů), kde je minimální hodnota kritériální funkce větší), viz Obrázek 10(b).
3. Z řádu hodnot doposud nejhorsího známého případu hodnoty kritériální funkce je vybrán sloupec s největší hodnotou (potenciální kandidát na optimální set parametrů - minimální hodnota kritériální funkce přes pracovní prostor je maximalizována). Opět je vyčíslena hodnota kritériální funkce pro všechny odpovídající body pracovního prostoru (řádky) a vybrána minimální hodnota, pokud je tato hodnota větší než doposud nejvyšší známá hodnota (fialově vyznačená), dojde k nahrazení této původní hodnoty hodnotou novou (přeznačení fialového zvýraznění) a algoritmus pokračuje řádkem 2, viz Obrázek 10(d).
4. Algoritmus pokračuje až do chvíle nalezení optimálního setu parametrů (s maximální možným minimem hodnoty kritériální funkce přes celý pracovní prostor), viz Obrázek . Černě vyznačené hodnoty v matici \mathbf{J}_{val} jsou hodnoty kritériální funkce $\mathbf{J}(\mathbf{X}, \xi)$, které musely být během algoritmu vyčísleny.

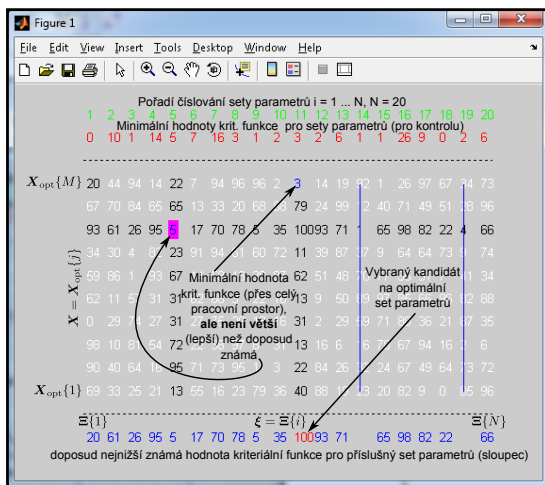
V uvedeném příkladu musela být vyčíslena kritériální funkce ve 97 případech z celkově možných 200 ($N \cdot M = 200$), což odpovídá přibližně dvojnásobku úspory výpočetního času (při zvažování pouze operací vyčíslování kritériální funkce - to bývá v úlohách optimalizace kritické) oproti řešení algoritmem hrubé síly, viz Algoritmus 1.



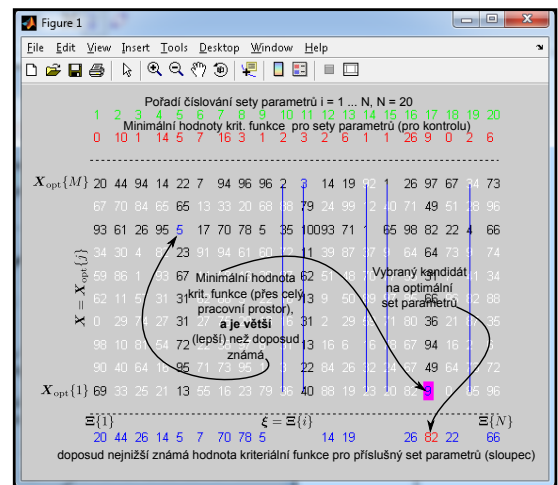
(a) 1. krok algoritmu



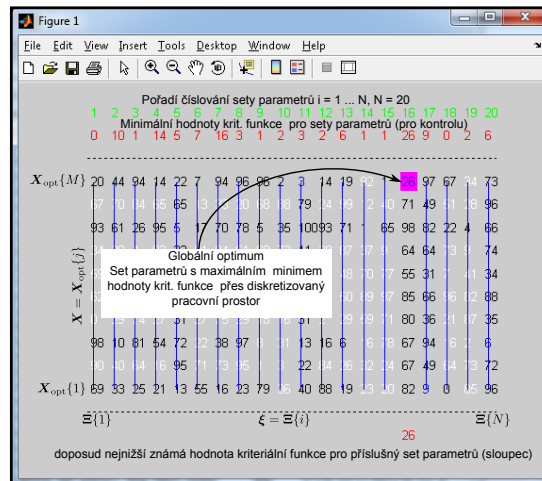
(b) 2. krok algoritmu



(c) 3. krok algoritmu



(d) 4. krok algoritmu (zlepšení doposud známého optima)



(e) 5. krok algoritmu

Obrázek 10: Culling algoritmus globální optimalizace

5.2.2 Lokální optimalizace

V komplexních optimalizačních úlohách bohužel velmi často platí, že algoritmy globální optimalizace, ať už založené na diskretizaci prohledávaného prostoru, viz Kapitola 5.2.1, či některé další pokročilé (např. algoritmy intervalové analýzy, viz [12, 13]), jsou výpočetně příliš náročné (i přes značnou snahu o redukcii výpočetní náročnosti). Navíc dokázat konvergenci ke globálnímu optimu v případě spojitých optimalizačních úloh může být velmi komplikované. Jako rozumný kompromis mezi složitostí a realizovatelností optimalizační úlohy (v rozumném výpočetním čase) se zdá býtí použití jednoduchého globálního optimalizačního algoritmu (např. právě *Culling* prořezávacího algoritmu na vhodně diskretizovaném pracovním prostoru a prostoru kinematických návrhových parametrů) a poté použít nějaký z algoritmů lokální optimalizace (prohledávací negradientní či gradientní algoritmy, rozsáhlá rešerše uvedena v [20]). V našem případě byl zvolen jednoduchý algoritmus lokální optimalizace nazývaný **Nelder-Mead simplexový algoritmus**⁹, [9], [14].

♦ Algoritmus 3 (Nelder-Mead simplexový algoritmus)

Simplexový algoritmus je algoritmus přímého prohledávání s následujícími vlastnostmi:

- Algoritmus nevyužívá analytického výpočtu gradientu kriteriální funkce ani jeho numerický odhad.
- Heuristická metody založená na přímém prohledávání stavového prostoru.
- Negarantuje konvergenci ke globálnímu optimu.
- Relativně relativně nenáročný a robustní algoritmus
- Snadno implementovatelný, např. v Matlabu ve funkci `fminsearch`.
- Poměrně rychlá konvergence.

Předpokládejme, že máme k dispozici kriteriální funkci, se skalární funkční hodnotou závislou na kinematických návrhových parametrech $J(\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}$. Vzhledem k podstatě řešení uvažované optimalizační úlohy (maxmin) a definici kriteriální funkce v Kapitole 5.1.3, budeme tedy jako příslušnou skalární kriteriální funkci dále považovat minimální hodnotu kriteriální funkce $J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ přes uvažovaný diskretizovaný pracovní prostor $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{opt}}$:

$$J(\boldsymbol{\xi}) = \min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m \quad (77)$$

Stručný popis funkce simplexového algoritmu je následující:

Simplexem rozumíme m -rozměrné zobecnění trojúhelníku v euklidovském prostoru (v našem případě v prostoru kinematických návrhových parametrů $\boldsymbol{\xi}$) dimenze m , přesněji řečeno se jedná o konvexní obal tvořený $m + 1$ afinně nezávislými body (vrcholy simplexu)¹⁰. Pro $m = 0$ je simplexem bod, pro $m = 1$ je simplexem přímka, pro $m = 2$ je simplexem trojúhelník v rovině, pro $m = 3$ je simplexem čtyřstěn v prostoru, atd.)

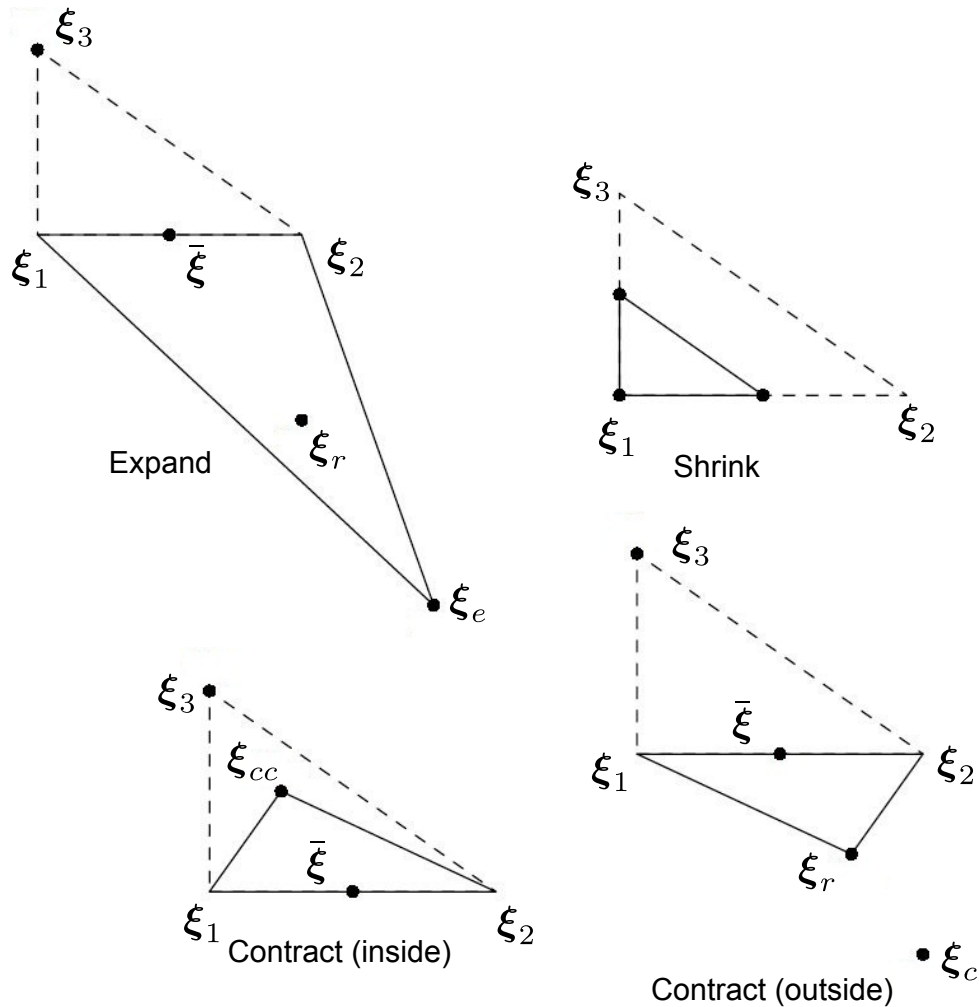
V každém kroku algoritmu je generován nový bod (vrchol) uvnitř či vně simplexu (nová hodnota návrhových parametrů $\boldsymbol{\xi}$), hodnota kriteriální funkce $J(\boldsymbol{\xi})$ je v tomto bodě porovnávána s hodnotou kriteriální funkce ve vrcholech simplexu a některý vrchol (typicky s nejhorší hodnotou kriteriální funkce) je nahrazen generovaným bodem. Algoritmus je opakován až do chvíle, kdy je velikost simplexu (délka, obsah, objem, ...) menší než požadovaná tolerance.

⁹Nemá nic společného se simplexovým algoritmem řešení úloh lineárního programování

¹⁰Afinně nezávislými body v prostoru rozumíme body, jejichž vektory souřadnic jsou lineárně nezávislé (netvoří lineární kombinaci), tedy např. 3 body v rovině ($m = 2$) neleží na jedné přímce, 4 body v prostoru ($m = 3$) neleží v jedné rovině, atd.

Mezi základní možnosti generování nového vrcholu simplexu patří operace: *expand* (zvětšení simplexu), *contract (inside/outside)* (zkrácení simplexu na jednu či druhou stranu) a *shrink* (zmenšení simplexu). Velmi stručně jsou tyto operace znázorněny na Obrázku 11 pro simplex v rovině ($m = 2$, tzn. 2 kinematické návrhové parametry).

Uvažujme uspořádání 3 vrcholů $\xi_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$ simplexu s ohledem na hodnotu kritériální funkce $J(\xi_1) \geq J(\xi_2) \geq J(\xi_3)$, tedy ξ_1 je nejlepší vektor (vrchol) a ξ_3 nejhorší vektor kinematických návrhových parametrů.



Obrázek 11: Simplexový algoritmus, původní simplex (čárkovaně) a nově vzniklý simplex, $\bar{\xi} = (\xi_1 + \xi_2)/2$ (těžiště - centroid nejlepších vrcholů), nově vznikající vrcholy $\xi_{\{e,c,cc\}}$, (dle způsobu generování: *expand*, *contract outside*, *contract inside*) a ukázka zmenšení simplexu (*shrink*) v případě, že předchozí generované vrcholy nezlepšují hodnotu krit., funkce. ξ_r je reflektovaná hodnota zobrazená na přímce (obecně varietě) zve směru z nejhoršího vrcholu ξ_3 do centroidu $\bar{\xi}$. Právě podle vyhodnocení krit. funkce v bodě ξ_r a porovnání s hodnotou krit. funkce v ostatních vrcholech centroidu se vyhodnocuje způsob generování nového bodu (vrcholu).

◆

6 Výsledky a porovnání optimalizace

Uvedená kapitola shrnuje všechny doposud popsané postupy od modelování kinematiky a dynamiky uvažovaného manipulátoru až po definici optimalizační úlohy a jejího řešení. Uvažujme

následující parametry manipulátoru (kinematické a dynamické parametry) a parametry vstupující do optimalizační úlohy (velikost a rozlišení prohledávaného diskretizovaného pracovního prostoru, rozsah a rozlišení diskretizované množiny přípustných parametrů, definice kriteriální funkce):

Parametry manipulátoru (zvolené struktury):

Kinematické parametry manipulátoru ξ (včetně vyčíslení počátečních hodnot - odpovídající středům ξ_C diskretních intervalů):

$$\xi = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ l \ \alpha]^T = [0.6 \ 0.5 \ 0.2 \ 0.15 \ 0]^T = \xi_C \quad (78)$$

Dynamické návrhové parametry manipulátoru:

$$[r_1 \ r_2 \ \rho \ M \ M_{\text{mot}}]^T = [0.05 \ 0.03 \ 2800 \ 50 \ 30]^T \quad (79)$$

Parametry optimalizační úlohy:

Uvažovaný pracovní prostor manipulátoru včetně rozlišení:

$$\begin{aligned} \mathbf{LB} &= [-0.97 \ 0.2]^T, \quad \mathbf{LU} = [-0.12 \ 0.7]^T \\ \Delta x &= 0.10625, \quad \Delta y = 0.125 \Rightarrow M_1 = 9, M_2 = 4, \Rightarrow M = 45 \end{aligned} \quad (80)$$

Výběrem z kinematických parametrů manipulátoru ξ získáváme takové parametry $\xi_{\text{opt}} \in \xi$, které budeme skutečně optimalizovat (nemusí být vždy vybrány všechny), ekvivalentně pro $\xi_{C \text{ opt}}$:

$$\xi_{\text{opt}} = \xi[1, 2, 3, 5] = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ \alpha]^T \Rightarrow \xi_{C \text{ opt}} = [0.6 \ 0.5 \ 0.2 \ 0]^T \quad (81)$$

Parametry penalizační funkce J_{pen} :

Minimální povolený úhel v paralelogramech manipulátoru:

$$\gamma_{\text{min}} = 15 \text{ deg}$$

Penalizační konstanty, striktně nepovoleno nalezení parametrů, kde neexistuje řešení IGM.

$$K_1 = +\infty, K_2 = K_3 = 10^8$$

Hodnota nominálního zrychlení koncového efektoru:

$$a_{\text{nom}} = 1$$

Diskretizace přípustných návrhových kinematických parametrů (které mají být optimalizovány):

$$\Delta \xi_{\text{opt}} = [0.02 \ 0.02 \ 0.02 \ 0.02]^T, \xi_{C \text{ opt}} = [0.6 \ 0.5 \ 0.2 \ 0]^T$$

$$n_{i_{\text{min}}} = n_{i_{\text{max}}} = 5 \text{ (symetrické intervaly)}, N_i = 11, i = 1 \dots 4$$

Kriteriální funkce $J(\mathbf{X}, \xi, \mu)$ je vypočtena dle postupu v Kapitole 5.1.

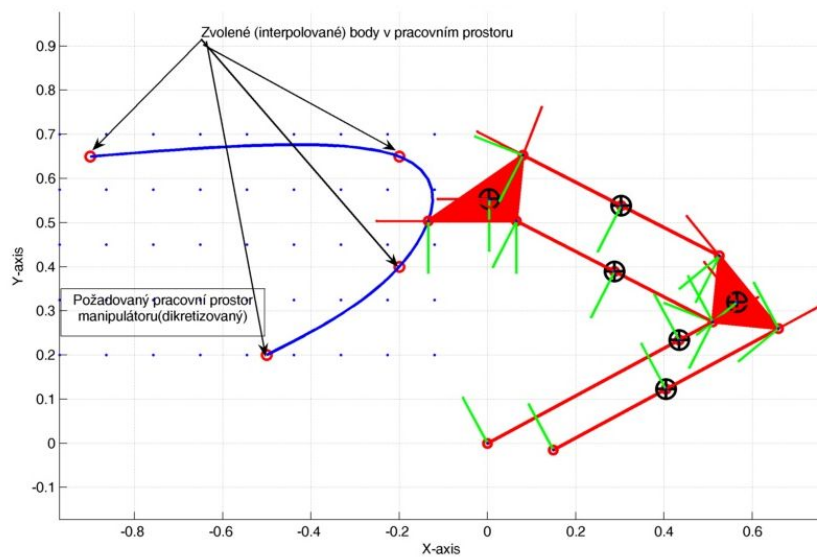
Obrázek 13 vyjadřuje hodnotu kriteriální funkce v bodech uvažovaného pracovního prostoru pro nominální hodnotu optimalizovaných parametrů $\xi_{\text{opt}} = \xi_{C \text{ opt}}$. Minimální hodnota kriteriální funkce je:

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{C \text{ opt}})) = 1.335 \cdot 10^{-3}$$

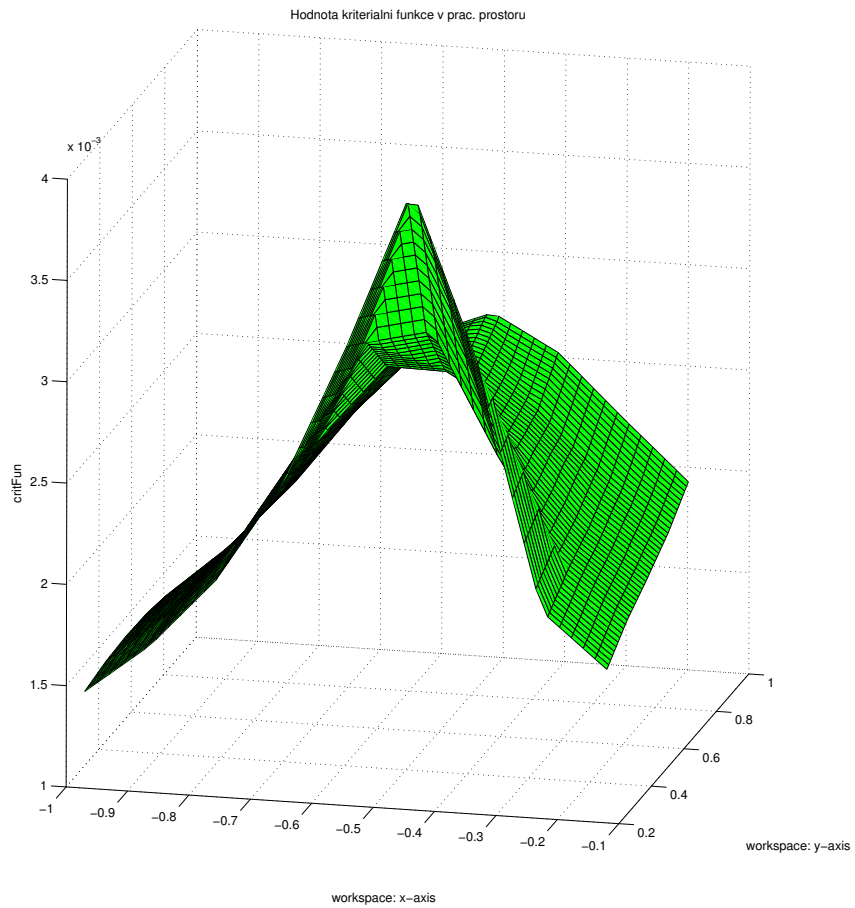
Vzhledem k nastaveným hodnotám penalizačních konstant je zřejmé, že v pracovním prostoru manipulátoru s nominální hodnotou kinematických parametrů nedochází k porušení nastavených omezení (včetně existence řešení IGM), tedy $J_{pen} = 0$, a převrácená hodnota kritériální funkce je tak přímo rovna hodnotě účelové funkce $J_{obj} = \|\tau_{max}\|$ a odpovídá maximálnímu normě požadovaných momentů v aktuátorech manipulátoru.

$$\frac{1}{\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{opt}} (J(\mathbf{X}, \xi_{C opt}))} = (J_{obj} = \|\tau_{max}\|) = 749.1$$

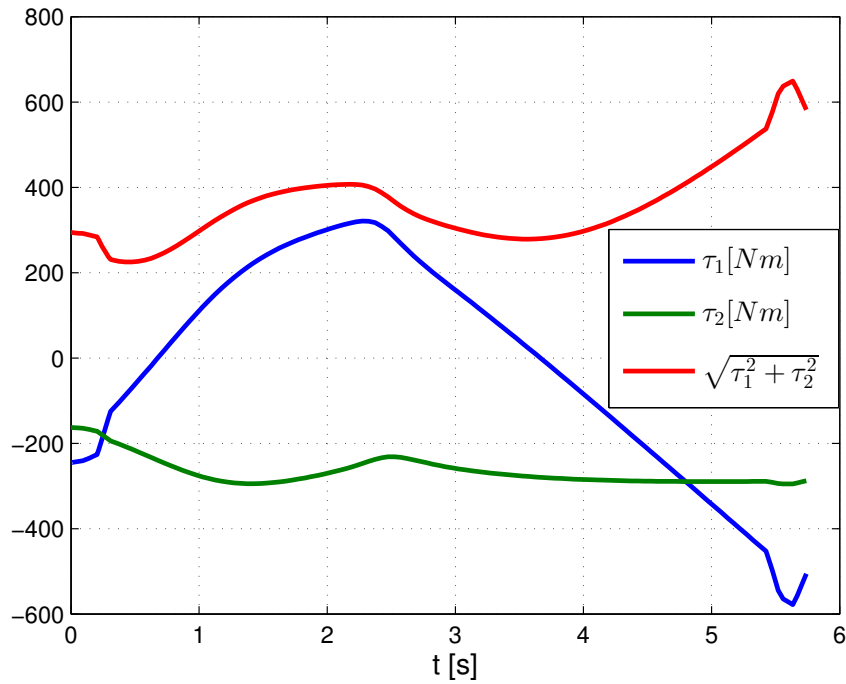
Jako příklad pohybu uvažujme trajektorii procházející 4 zvolenými body, viz Obrázek 12, s požadovaným lichoběžníkovým profilem rychlosti koncového efektoru manipulátoru podél této trajektorie odpovídající omezením na maximální rychlost $v_{max} = 0.25 \frac{m}{s}$ a tečné zrychlení $a_{max} = 1 \frac{m}{s^2}$ a odpovídající průběhy požadovaných momentů na aktuátorech a jejich odpovídající normy, viz Obrázek 14.



Obrázek 12: Požadovaný trajektorie v pracovním prostoru



Obrázek 13: Průběh hodnot kriteriální funkce podél diskretizovaného pracovního prostoru (v rovině \mathbf{xy}) pro nominální hodnotu parametrů $\xi_{C \text{ opt}}$.



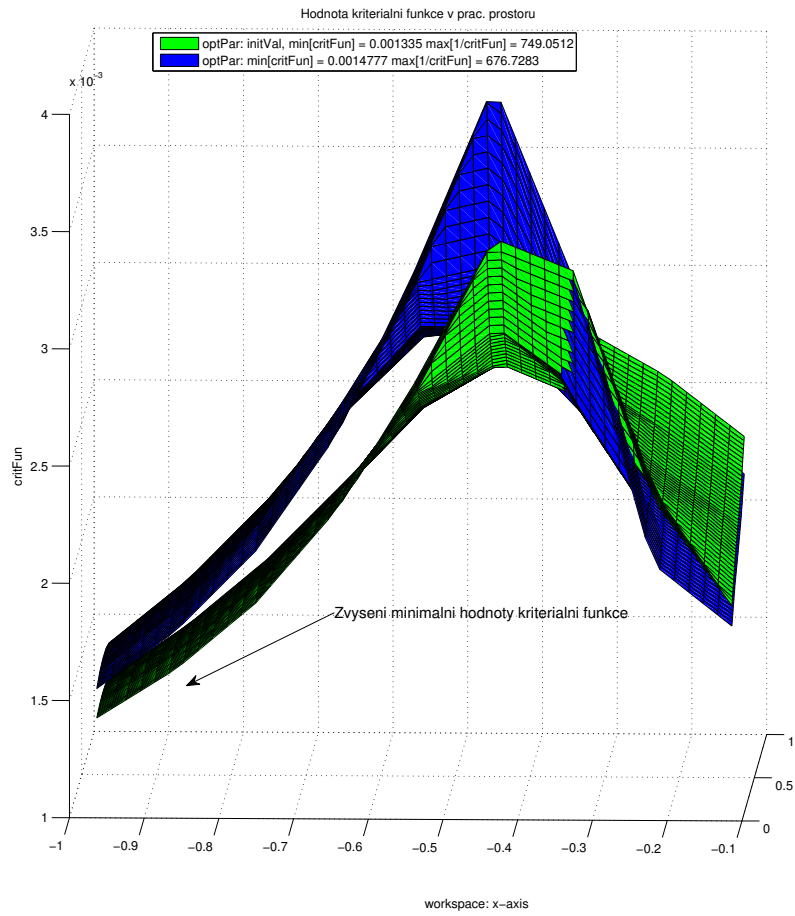
Obrázek 14: Průběh momentů na jednotlivých aktuátorech manipulátoru pro nominální hodnotu parametrů $\xi_{C \text{ opt}}$.

Globální optimalizace

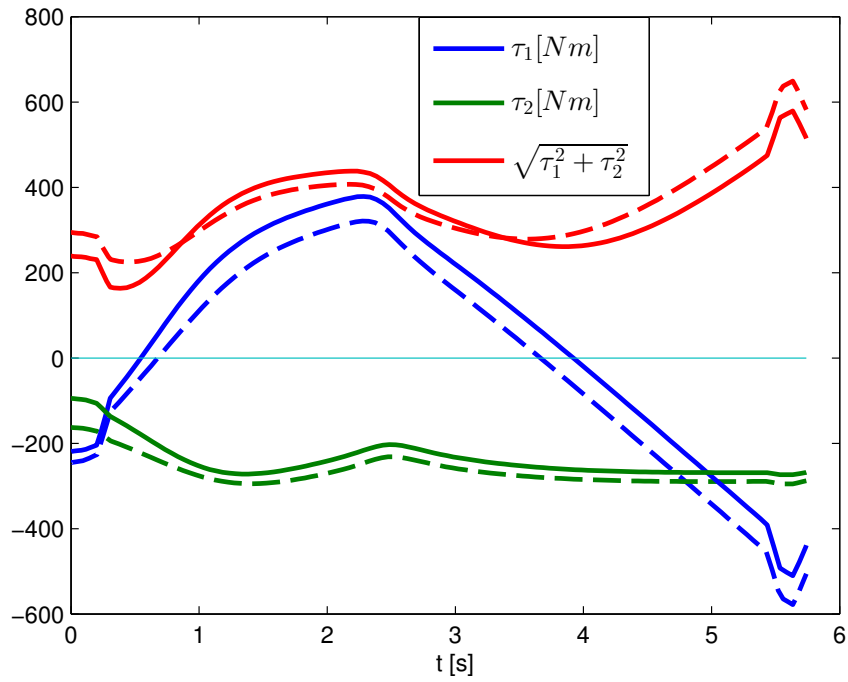
Následně provedeme globální optimalizaci pomocí Algoritmu 2 a dostáváme globálně optimální kinematické parametry manipulátoru ξ_{global}^* z množiny diskretizovaných přípustných hodnot Ξ .

$$\xi_{\text{global}}^* = [0.62 \quad 0.46 \quad 0.28 \quad -0.1]^T \quad (82)$$

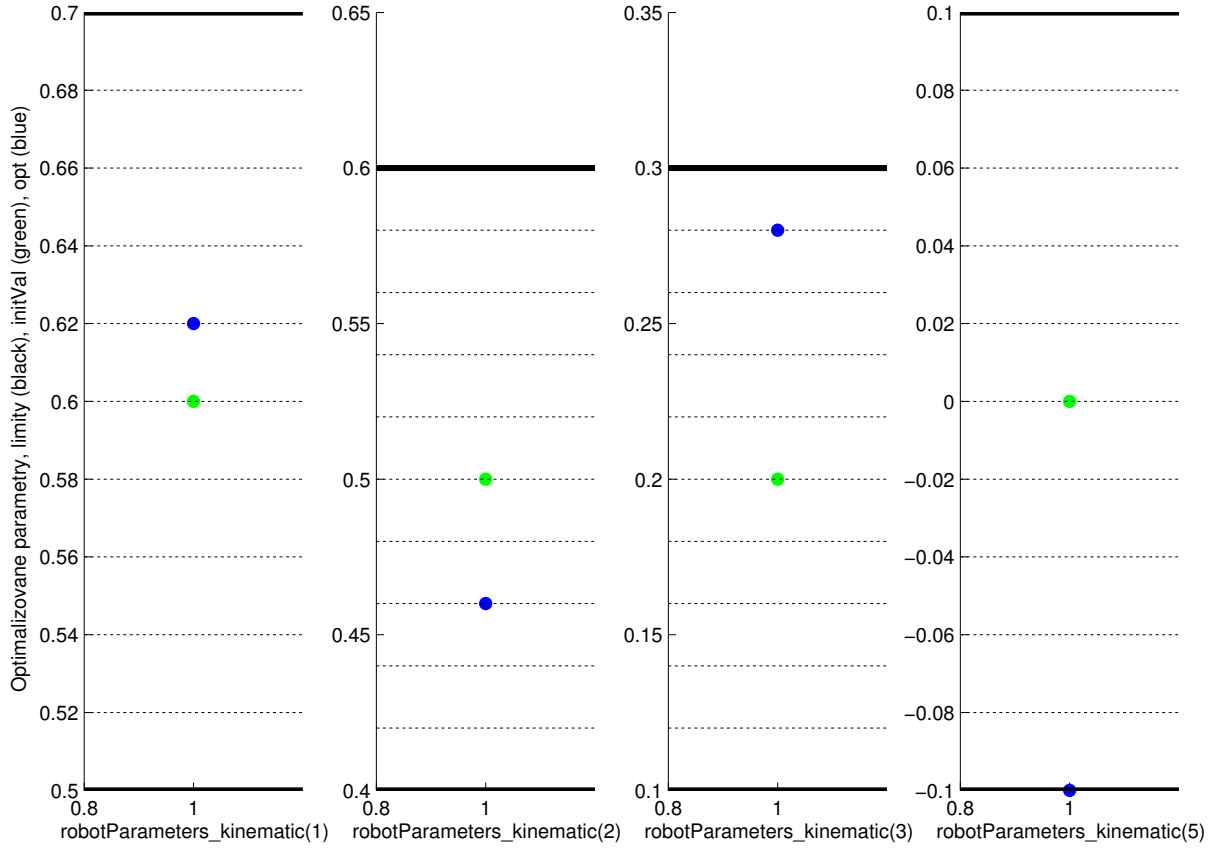
Grafické znázornění výsledků globální optimalizace je znázorněno na Obrázcích 15, 16, 17.



Obrázek 15: Průběh hodnot kritériální funkce podél diskretizovaného pracovního prostoru (v rovině \mathbf{xy}): Porovnání mezi počáteční volbou parametrů $\xi_{C \text{ opt}}$ (zeleně) a parametry po globální optimalizaci ξ_{global}^* (modře).



Obrázek 16: Průběh momentů na jednotlivých aktuátorech manipulátoru: Porovnání mezi počáteční volbou parametrů $\xi_{C \text{ opt}}$ (čárkovaně) a parametry po globální optimalizaci ξ_{global}^* (plnou čarou).



Obrázek 17: Znázornění změny hodnot počátečních parametrů $\xi_{C \text{ opt}}$ (zeleně) a hodnot po globální optimalizaci ξ_{global}^* (modře). Černě jsou zvýrazněny uvažované limity množin diskretizovaných přípustných návrhových kinematických parametrů $\xi_C[i] + \Delta\xi[i] \cdot [n_{i_{\min}}, n_{i_{\max}}]$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Bylo ukázáno, viz Algoritmus 2, že vhodnou metodou prořezávání diskretizovaného prostoru lze docílit výrazného snížení počtu potřebných vyčíslení kritériální funkce, a tedy i výpočetního času. V případě výpočtu optimální úlohy Algoritmem 1 bylo ukázáno, že pro uvažovanou diskretizaci pracovního prostoru a přípustné množiny návrhových kinematických parametrů by bylo potřeba celkem $N_{\text{critFunEval}} = 14641 \cdot 45 = 658845$ operací vyčíslení kritériální funkce a v tomto důsledku by celkový čas optimalizace byl přibližně: $T_{\text{critFunEval}} = 658845 \cdot 0.005 = 54.9 \text{ min}$. V nasazeném algoritmu je však snížen potřebný počet vyčíslení kritériální funkce na $N_{\text{critFunEval}} = 27754$, což je přibližně pouze 4.2% z původního počtu. Dochází tak k výrazné úspoře času, a to na: $T_{\text{critFunEval}} = 138 \text{ s}$.

Minimální hodnota kritériální funkce po globální optimalizaci je:

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{global}}^*)) = 1.478 \cdot 10^{-3}$$

Převrácená hodnota kritériální funkce po globální optimalizaci je:

$$\frac{1}{\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{global}}^*))} = (J_{\text{obj}} = \|\tau_{\text{max}}\|) = 676.7$$

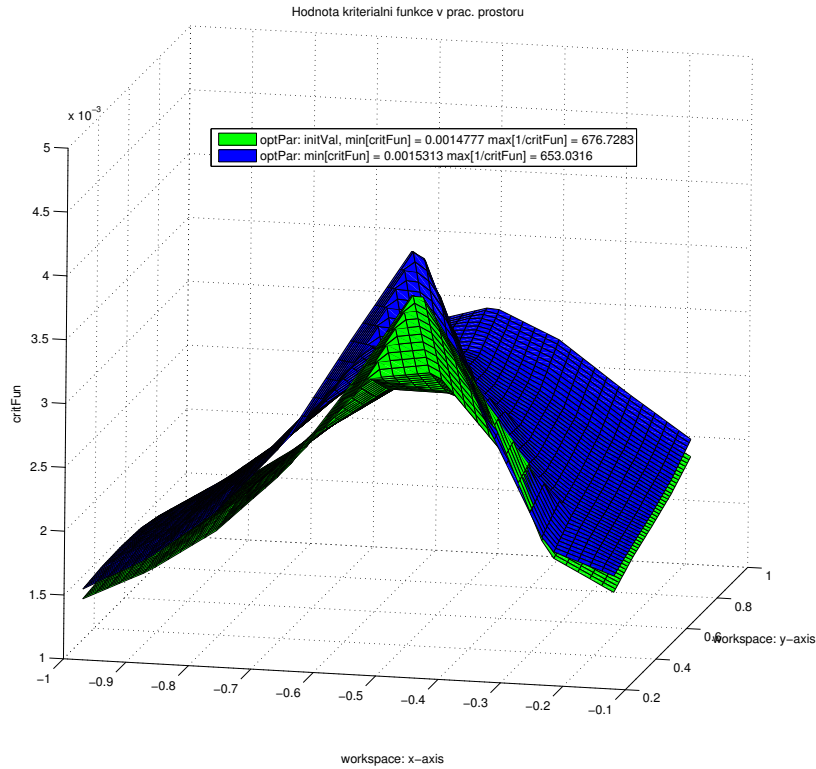
Lokální optimalizace

Následně byly provedena lokální optimalizace podle Algoritmu 3 vedoucí na nalezení optimalizovaných parametrů ξ_{local}^* . Počáteční podmínky optimalizovaných parametrů pro lokální optimalizaci byly voleny jako hodnoty parametrů ξ_{global}^* nalezené předchozím algoritmem globální

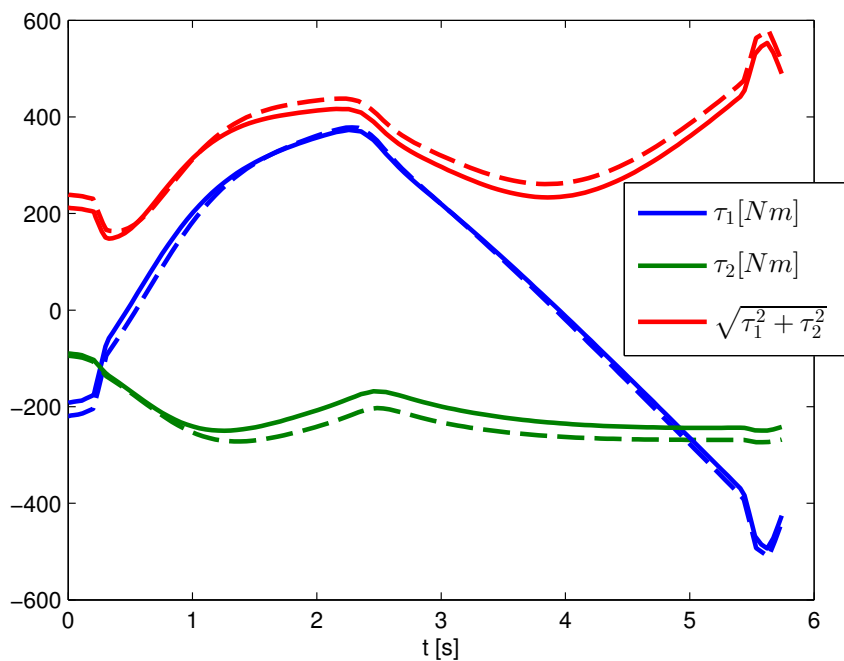
optimalizace. Výsledné parametry po lokální optimalizaci jsou:

$$\xi_{\text{local}}^* = [0.5852 \quad 0.4246 \quad 0.3084 \quad -0.1857]^T \quad (83)$$

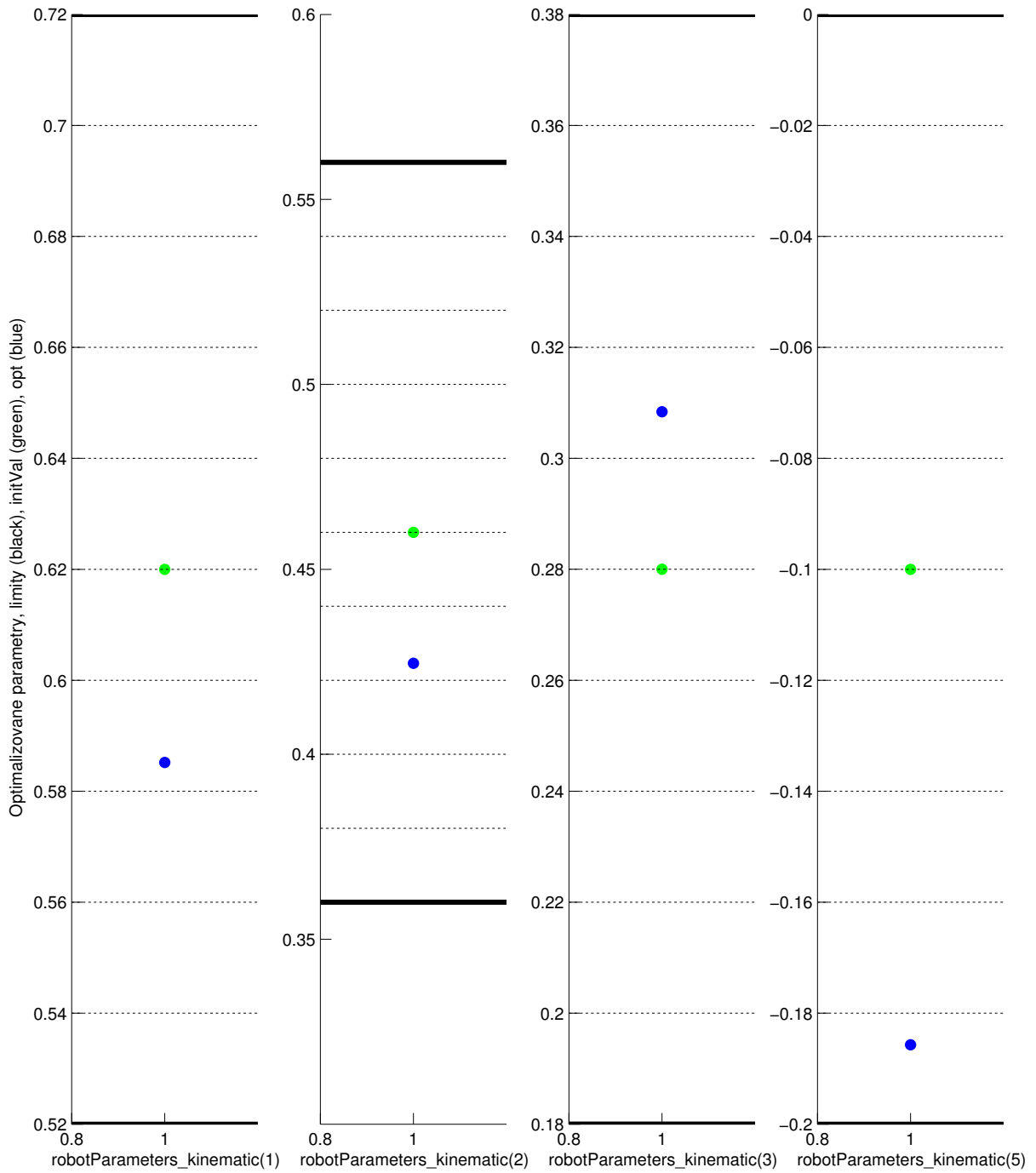
Grafické znázornění výsledků lokální optimalizace je znázorněno na Obrázcích 18, 19, 20.



Obrázek 18: Průběh hodnot kritériální funkce podél diskretizovaného pracovního prostoru (v rovině \mathbf{xy}): Porovnání mezi počáteční hodnotou (výsledkem globální optimalizace) ξ_{global}^* (zeleně) a parametry po lokální optimalizaci ξ_{local}^* (modře).



Obrázek 19: Průběh momentů na jednotlivých aktuátorech manipulátoru: Porovnání mezi počáteční hodnotou (výsledkem globální optimalizace) ξ_{global}^* (čárkovaně) a parametry po lokální optimalizaci ξ_{local}^* (plnou čarou).



Obrázek 20: Znázornění změny hodnot počátečních parametrů (výsledkem globální optimalizace) ξ_{global}^* (zeleně) a hodnot po lokální optimalizaci ξ_{local}^* (modře). Černě jsou zvýrazněny uvažované limity množin diskretizovaných přípustných návrhových kinematických parametrů $\xi_C[i] + \Delta\xi[i] \cdot [n_{i_{\min}}, n_{i_{\max}}]$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Minimální hodnota kritériální funkce po lokální optimalizaci je:

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{local}}^*)) = 1.531 \cdot 10^{-3}$$

Převrácená hodnota kritériální funkce po lokální optimalizaci je:

$$\frac{1}{\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{global}}^*))} = (J_{\text{obj}} = \|\tau_{\text{max}}\|) = 653.0$$

7 Závěr

V práci byl vyvinut virtuální model paralelního manipulátoru, u kterého je paralelní struktura využita k pasivnímu orientování koncového efektoru (a to vodorovně se základnou v libovolné pozici koncového efektoru). Taková struktura manipulátoru byla uvažována jako příklad obecného paralelního manipulátoru. V Kapitolách 2, 3 byly využity známé algoritmy pro výpočet dopředného a zpětného geometrického modelu a dopředné a zpětné okamžité kinematické úlohy (kinematika) a přímého a inverzního dynamického modelu (dynamika) pro sériové kinematické řetězce. Tyto algoritmy byly využity a zobecněny na výpočet totožných problémů pro paralelní manipulátory. Bylo ukázáno, že, analogicky jako v případě sériových manipulátorů, lze v případě, že známe výpočet inverzního geometrického modelu včetně vztahu mezi polohami aktivních a pasivních kloubů, vypočítat všechny zbývající uvažované problémy kinematiky a dynamiky systematickou, algoritmizovatelnou cestou.

Taková možnost je zcela klíčová pro algoritmy kinematické optimalizace robotických architektur. Právě úlohou kinematické optimalizace se zabývá zbylá část předložené zprávy, viz Kapitola 5. Pro předložený manipulátor je nejdříve definována optimalizační úloha, viz Kapitola 5.1. Vzhledem k faktu, že se jedná o optimalizaci kinematických návrhových parametrů manipulátoru (délky ramen L_1, L_2, L_3 a orientace pasivního paralelogramu α) nikoliv podél konkrétní zadané trajektorie (ve smyslu zadaných průběhů polohy, rychlosti a zrychlení koncového efektoru), ale přes uvažovaný pracovní prostor (ve smyslu zadané množiny bodů - poloh koncového efektoru), není definice kriteriální funkce přímočará. Například, chceme-li nalézt takové parametry manipulátoru, které odpovídají minimalizaci maximální síly/momentu v aktuátorech podél celé trajektorie koncového efektoru, bude kriteriální funkcí přímo výsledek inverzního dynamického modelu, tedy požadované síly/momenty (resp. jejich norma) v každém bodu trajektorie, neboť známe ve všech bodech požadovanou polohu, rychlost i zrychlení koncového efektoru. V námi uvažované případě však známe pouze množinu poloh koncového efektoru a chceme opět nalézt parametry manipulátoru, které minimalizují maximální sílu/moment aktuátorů v každém bodě pracovního prostoru (neznáme však explicitně požadovanou rychlost a zrychlení koncového efektoru, protože konkrétní trajektorie v pracovním prostoru není vybrána). V takovém případě se musíme uchýlit ke kompromisu a to tak, že buď budeme optimalizovat pouze statické síly/momenty v aktuátorech (tedy pouze vliv gravitace, eventuálně vliv silového a momentového působení na koncový efektor, a tedy zadané polohy v pracovním prostoru jsou dostačující), nebo chceme zahrnout i vliv dynamiky manipulátoru. V takovém případě je třeba nalézt vhodný postup, jak toto provést. V použitém případě jsme využili předpokladu, že v každém bodu pracovního prostoru uvažujeme, že je koncový efektor v klidu (vykazuje nulovou rychlost) a požadujeme, aby mohlo být vyvinuto zrychlení o dané velikost v libovolném směru, jinými slovy definujeme normu požadovaného zrychlení koncového efektoru. Lze ukázat, viz Kapitola 5.1.2, že v takovém případě můžeme najít předpis pro kriteriální (účelovou) funkci, která udává maximální normu síly/momentu aktuátorů manipulátoru, která může nastat v dané poloze, nulové rychlosti a předepsané normě zrychlení (v libovolném směru) koncového efektoru manipulátoru. Zároveň na tuto skalární hodnotu určující normu zrychlení koncového efektoru lze nahlížet jako na váhovou konstantu určující kompromis mezi minimalizací statických sil/momentů v aktuátorech (pokud bude rovna nule) a statických a dynamických sil/momentů v aktuátorech (pro hodnoty větší než nula - pro vysoké hodnoty jsou naopak statické projevy téměř zanedbány a parametry manipulátoru jsou optimalizovány za účelem minimalizace sil/momentů pro vysoké dynamické nároky na pohyb koncového efektoru manipulátoru). Uvažovaná omezení na optimalizační úlohu jsou zohledněna jako aditivní penalizace přičítaná k hodnotě kriteriální funkce.

Vlastní řešení definované optimalizační úlohy je diskutováno v Kapitole 5.2 a je rozděleno do dvou kategorií. Nejprve je provedena globální optimalizace nad diskretizovaným prostorem přípustných parametrů (v daném rozlišení) prostřednictvím globálního optimalizačního algoritmu, viz Kapitola 5.2.1. Je ukázáno, že, na rozdíl od algoritmu řešení optimalizační úlohy hrubou

silou je, předložený algoritmus, viz Algoritmus 2, globálního prohledávání přípustné množiny kinematických parametrů manipulátoru výrazně efektivnější (počet vyčíslení kritériální funkce je redukován pouze na cca 4 % původního počtu). Nalezené kinematické parametry manipulátoru ξ_{global}^* globálním algoritmem využity jako počáteční hodnota pro následnou lokální optimalizaci, viz Algoritmus 3, kterým je docíleno zpřesnění optimalizovaných kinematických parametrů manipulátoru. Základní vlastnosti předložených optimalizačních algoritmů lze shrnout následovně:

Globální optimalizace (Culling algoritmus):

- + Globální prohledávání diskretizovaného přípustného prostoru kinematických parametrů (nalezení globálního optima)
- + Rapidní úspora výpočetního času (ve srovnání s algoritmem hrubé síly)
- + Nativně jsou vloženy omezení na rozsah optimalizovaných kinematických parametrů
- + Lze dodatečně rozšířit na hledání 2., 3., případně dalšího optima (tzn. druhé, třetí nejlepší řešení)
- Pro rostoucí zjemňování diskretizace přípustné množiny optimalizovaných kinematických parametrů a pracovního prostoru velmi rychle roste počet potřebných vyčíslení kritériální funkce

Lokální optimalizace (Nelder-Mead simplexový algoritmus):

- + Relativně snadná implementace, rychlá konvergence
- + Algoritmus přímého prohledávání (není nutné počítat gradient či vyšší parciální derivace kritériální funkce)
- + Implementace algoritmu v Matlabu (`fminsearch`)
- + Numericky velmi robustní algoritmus
- Konvergence k lokálnímu optimu (ale při spuštění z vhodných počátečních podmínek je toto v pořádku)
- Nativně neuvažuje omezený prostor prohledávaných optimalizovaných parametrů (může konvergovat k parametrům mimo požadovaný rozsah)

Výsledky optimalizační úlohy jsou uvedeny v Tabulce 3:

1: Opt. par.: ξ_{opt}	2: $\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi))$	3: $\ \tau_{\text{max}}\ $	Metoda:
$[0.6 \ 0.5 \ 0.2 \ 0]^T$	$1.335 \cdot 10^{-3}$	749.1	Počáteční (nominální) par.
$[0.62 \ 0.46 \ 0.28 \ -0.1]^T$	$1.478 \cdot 10^{-3}$	676.7	Globální opt.
$[0.5852 \ 0.4246 \ 0.3084 \ -0.1857]^T$	$1.531 \cdot 10^{-3}$	653.0	Lokální opt.

Tabulka 3: Výsledky optimalizace vybraných kinematických parametrů (L_1, L_2, L_3, α) manipulátoru

- 1: Optimalizované kin. parametry $\xi_{\text{opt}} = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ \alpha]^T$
- 2: Min. hodnota kritériální funkce přes prac. prostor
- 3: Max. norma sil. momentu na akt. přes prac. prostor (převrácená hodnota krit. fce) $\frac{1}{\min_{\mathbf{X} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}} (J(\mathbf{X}, \xi_{\text{global}}^*))} = (J_{\text{obj}} = \|\tau_{\text{max}}\|)$

Z provedené optimalizace je zřejmé, že prvotní návrh kinematických parametrů $\xi_{\text{opt}} = \xi_{\text{C opt}}$ byl velmi blízko optimálnímu řešení.

Poděkování

Tento výzkum byl podpořen Technologickou agenturou České republiky z prostředků projektu Centra Kompetence CIDAM TE02000103.

Reference

- [1] EuroTec JKR s.r.o. (Průmyslové odmašťování).
URL <http://www.eurotec-jkr.cz/>
- [2] *Mechanism design for global isotropy with applications to haptic interfaces*, 1997, cited By (since 1996): 5.
URL www.scopus.com
- [3] Alizade, R.; Bayram, C.: Structural synthesis of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 39, č. 8, 2004: s. 857 – 870, ISSN 0094-114X, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2004.02.008>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X04000539>
- [4] Denavit, J.; Hartenberg, R. S.: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, ročník 22, 1955: s. 215–221.
URL <http://ci.nii.ac.jp/naid/10008019314/en/>
- [5] Goubej, M.; Svejda, M.: Dynamic analysis and control of robotic manipulator for chemically aggressive environments. In *Mechatronics (ICM), 2013 IEEE International Conference on*, Feb 2013, s. 273–278, doi:10.1109/ICMECH.2013.6518548.
- [6] Hogben, L.: *Handbook of Linear Algebra*. Discrete Mathematics and Its Applications, CRC Press, 2006, ISBN 9781420010572.
URL <https://books.google.cz/books?id=n2g-x10IbvYC>
- [7] Khalil, W.; Dombre, E.: *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science paper edition, Elsevier Science, 2004, ISBN 9780080536613.
URL <http://books.google.cz/books?id=nyrY0Pu5k10C>
- [8] Khalil, W.; Ibrahim, O.: General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, ročník 49, č. 1, 2007: s. 19–37, ISSN 0921-0296, doi:10.1007/s10846-007-9137-x.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10846-007-9137-x>
- [9] Lagarias, J. C.; Reeds, J. A.; Wright, M. H.; aj.: Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, ročník 9, 1998: s. 112–147.
- [10] Mark W. Spong, M. V., Seth Hutchinson: *Robot Modeling and Control*. Wiley, 2005.
- [11] Merlet, J. P.: Kinematics' not dead! In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, ročník 1, 2000, ISSN 1050-4729, s. 1–6 vol.1, doi: 10.1109/ROBOT.2000.844031.
- [12] Merlet, J.-P.: Interval Analysis and Reliability in Robotics. Březen 2006.
URL <http://hal.inria.fr/inria-00001152>
- [13] Merlet, J.-P.: Interval analysis for Certified Numerical Solution of Problems in Robotics. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, ročník -, 2009: s. –.
URL <http://hal.inria.fr/inria-00362431>
- [14] Reklaitis, G.; Ravindran, A.; Ragsdell, K.: *Engineering Optimization: Methods and Applications*. A Wiley-Interscience Publication, Wiley, 1983, ISBN 9780471055792.
URL <https://books.google.cz/books?id=Tj6NJGvk7b4C>

- [15] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer London, 2000, ISBN 9781852332211.
URL <http://books.google.fr/books?id=v9PLbcYd9aUC>
- [16] Svejda, M.; Goubej, M.: Innovative design and control of robotic manipulator for chemically aggressive environments. In *Carpathian Control Conference (ICCC), 2012 13th International*, May 2012, s. 715–720, doi:10.1109/CarpathianCC.2012.6228739.
- [17] The MathWorks, I.: Matlab (Simulink, SimMechanics).
URL <http://www.mathworks.com/>
- [18] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni (online: http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2011/rigo.pdf), 2011.
- [19] Švejda, M.: Úvod do robotiky a mechatroniky. Přednášky k předmětu, 2012.
URL <http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/>
- [20] Švejda, M.: *Optimalizace robotických architektur*. Dizertační práce, Západočeská univerzita v Plzni, 2016.