TAČR Centrum kompetence CIDAM

Comparison of serial and parallel structures for 3-link manipulator arm, advanced parametric optimization of special construction

Výzkumná zpráva WP5-DV023

Martin Švejda

17. prosince 2015

Abstrakt

Předložená zpráva navazuje bezprostředně na technickou zprávu [17]. Její náplní je kinematická a dynamická analýza modifikovaného paralelního manipulátoru, který vznikl z původního 3-ramenného 2DoF sériového manipulátoru vybaveného přídavným paralelogramem pro držení konstantní orientace koncového efektoru. V původní podobě byl manipulátor vybaven dvěma rotačními pohony z nichž pohon prvního ramene byl umístěn na základně manipulátoru a pohon druhého ramene byl umístěn na konci prvního pohybujícího se ramene (nesený pohon). Modifikovaný manipulátor využívá přídavnou paralelní konstrukci ramen, která umožňuje i umístění pohonu druhého ramene nepohyblivě na základně manipulátoru. Hlavním přínosem zprávy je odpověď na otázku, zda-li a za jakých podmínek je výhodné používat právě paralelní architektury manipulátorů (s pevně umístěnými pohony na základně). Za účelem relevantního porovnání byly oba manipulátory konstruovány jako soustava hmotných ramen a nehmotných kloubů (vyjma hmotnosti aktuátorů reprezentovaných jako hmotné body) a byla provedena optimalizace kinematických parametrů (délky jednotlivých ramen a natočení paralelogramu). Jako kritérium optimalizace byla volena minimalizace maximální normy silových momentů v aktuátorech přes uvažovaný pracovní prostor za podmínky požadavku na dané zrychlení koncového efektoru manipulátoru do libovolného směru (z nulové počáteční rychlosti). Optimalizace byla provedena pro původní manipulátor (s neseným pohonem druhého ramene) pro 3 hodnoty hmotnosti neseného pohonu. Optimalizace obou manipulátorů byly navíc provedeny pro dvě požadované hodnoty zrychlení koncového efektoru (malé a velké požadavky na dynamické chování) a pro dva druhy materiálu, ze kterého byly manipulátory vyrobeny (železo a slitina hliníku). Porovnáním optimalizovaných hodnot kritérií bylo dokázáno, že za jistých podmínek má význam nahrazovat sériové architektury manipulátorů architekturami paralelními.

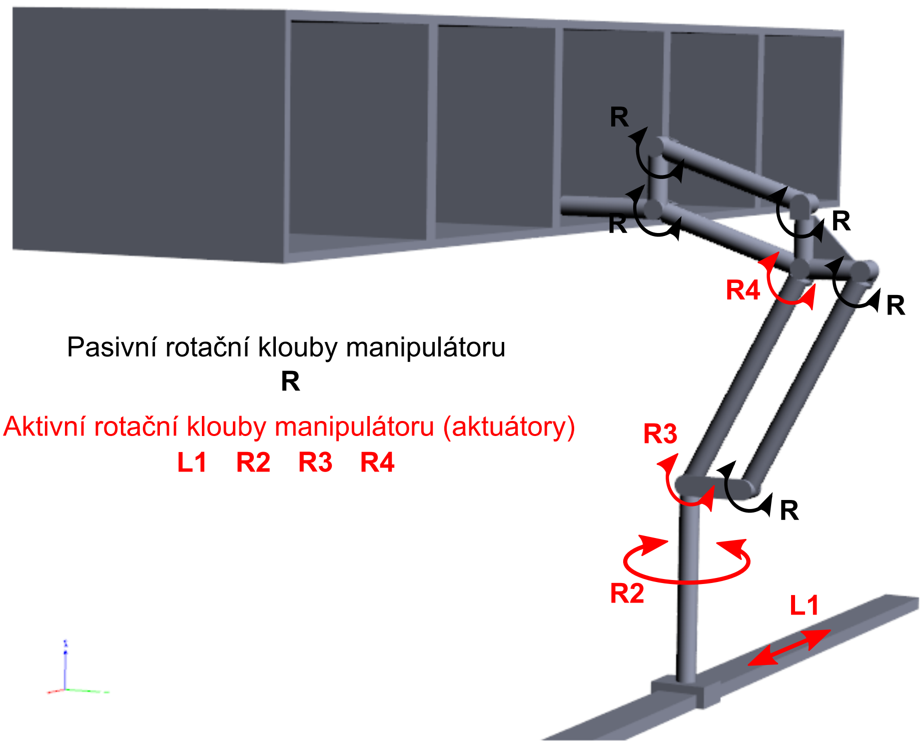
Obsah

1 Úvod

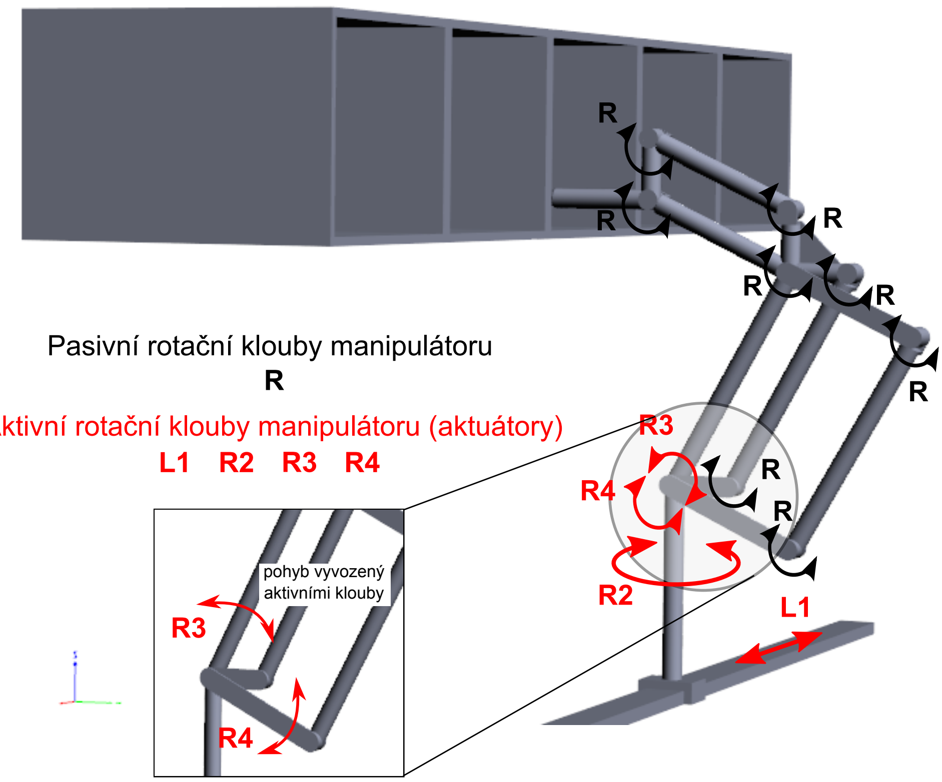
Výzkumná zpráva se zabývá návrhem robotu pro manipulaci s paletou technologických dílů určených k průmyslovému mytí a souvisejícím procesům (oplachování, odlakování, odmašťování, sušení, atd.). S ohledem na technologický proces průmyslového mytí se ukazuje, že manipulátor vhodné konstrukce by mohl výrazně zvýšit efektivitu procesu, neboť doposud jsou mycí linky realizovány v drtivé většině jako průběžné mycí komory, kterými projíždí paleta (koš) s omývanými komponenty případně komponenty samotné, které jsou fixovány v jednoúčelových fixačních přípravcích. Pohyb koše/komponent je realizován prostřednictvím válečkových tratí a pasů. V předložené výzkumné zprávě bude podrobně analyzována varianta manipulátoru, který má za úkol polohovat v horizontálním i vertikálním směru paletu (koš) s omývanými komponentami. Hlavními výhodami oproti standardnímu řešením s průběžnými mycími komorami jsou:

- Možnost přesunu palety libovolně v prostoru (především ve vertikálním směru, který nelze prostřednictvím válečkových tratí uspokojivě realizovat)
- Možnost využití neprůběžných mycích komor sestavených ve specifikovaném uspořádání
- Manipulátor může obsluhovat více mycích komor
- Zefektivnění celého mycího cyklu

Výzkumná zpráva bezprostředně navazuje na výzkumnou zprávu [17], která se zabývala zvolenou strukturou manipulátoru, kdy byl uvažován manipulátor se 4 stupni volnosti (DoF), viz Obrázek 1(a). Manipulátor byl koncipován jako 3-ramenný sériový manipulátor umístěný na lineárním pojezdu a otočném stole. Aktivní klouby manipulátoru (aktuátory) byly realizovány pohony **L1** (lineární pojezd), **R2** (rotační stůl), **R3** (rotační aktuátor prvního ramene - pevně umístěný na základně manipulátoru), **R4** (rotační aktuátor druhého ramene - nesený aktuátor umístěný na konci prvního ramene) a pasivní rotační kloub připojující poslední rameno sériové části manipulátoru. Manipulátor byl dále vybaven přídavným paralelogramem, který pasivně zajišťoval držení orientace posledního ramene manipulátoru ve vodorovné poloze. Právě nesený aktuátor, respektive jeho umístění, je náplní výzkumu v uvedené zprávě. Nabízí se otázka využít 3-ramenného sériového robotu (včetně přídavného paralelogramu) a vhodně jej modifikovat na paralelní strukturu, která umožňuje umístit nesený aktuátor **R4** nikoliv na pohybující se rameno, ale, podobně jako v případě aktuátoru **R3**, pevně na základnu manipulátoru. Navržená modifikace je znázorněna na Obrázku 1(b).



(a) Varianta s neseným pohonem **R4** druhého ramene



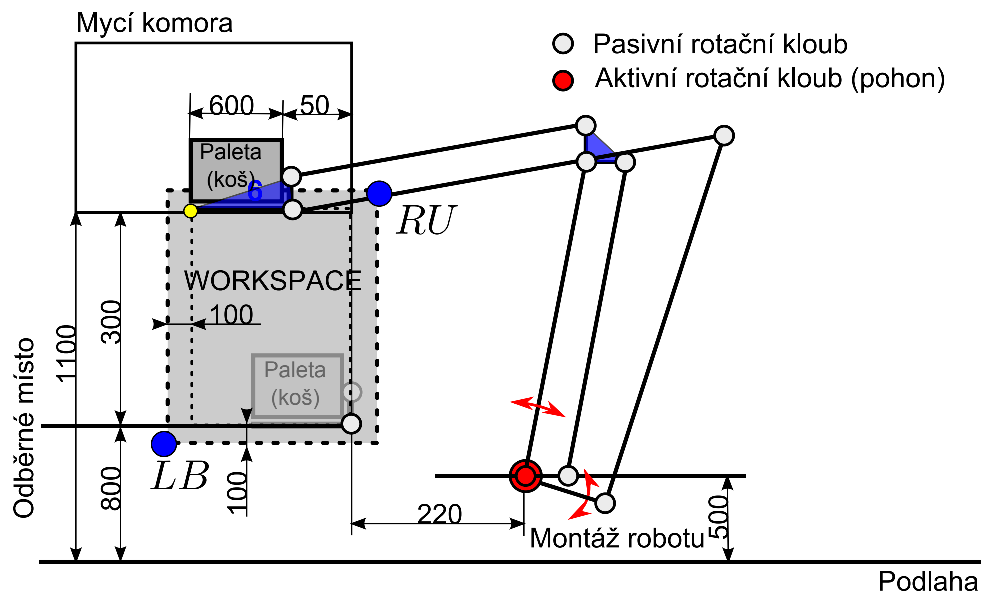
(b) Varianta s paralelní strukturou s pohonem **R4** na základně manipulátoru

Obrázek 1: 4 DoF manipulátor pro zakládání palet do mycích komor - původní a modifikovaná verze

Vzhledem k podstatě definované úlohy je návrh první dvojice pohonů (**L1** a **R2**) z hlediska parametrizace kinematické architektury manipulátoru nezajímavý a jednoznačně daný sestavou lineární pojezd-rotační stůl. Uvažovaný manipulátor lze tak dekomponovat na planární 2 DoF paralelní manipulátor se dvěma rotačními pohony (**R3**, **R4**) a přídavný paralelogramem držící orientaci poslední ramene. Typická situace nasazení manipulátoru při vykládání/nakládání palety do mycí komory (lineární pojezd **L1** a rotační stůl **R2** je zanedbán) je znázorněna na Obrázku 2. Rozměry kótované na scéně převzaty z příkladu umístění mycí komory, odkládacího místa (např. válečkového dopravníku) a samotného robotu po konzultaci s konstruktéry firmy Eurotec. Cílem výzkumné zprávy je analýza, návrh a optimalizace 2DoF (redukovaného) manipulátoru, které sestává z následujících kroků:

- Kinematický model robotu (paralelní kinematika)
- Dynamický model robotu (paralelní kinematika)
- Parametrická optimalizace volných kinematických parametrů (typicky délky ramen, délka koncového efektoru, atd.) dle zvoleného kritéria optimality přes uvažovaný pracovní prostor (workspace) manipulátoru (v našem případě specifikovaný obdélníkem v rovině $\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$)
- Porovnání výsledků optimalizace kinematických parametrů uvažované modifikace (pevně umístěný aktuátor **R4**) s původní verzí manipulátoru (neseným aktuátorem **R4**) analyzovaným ve výzkumné zprávě [17].

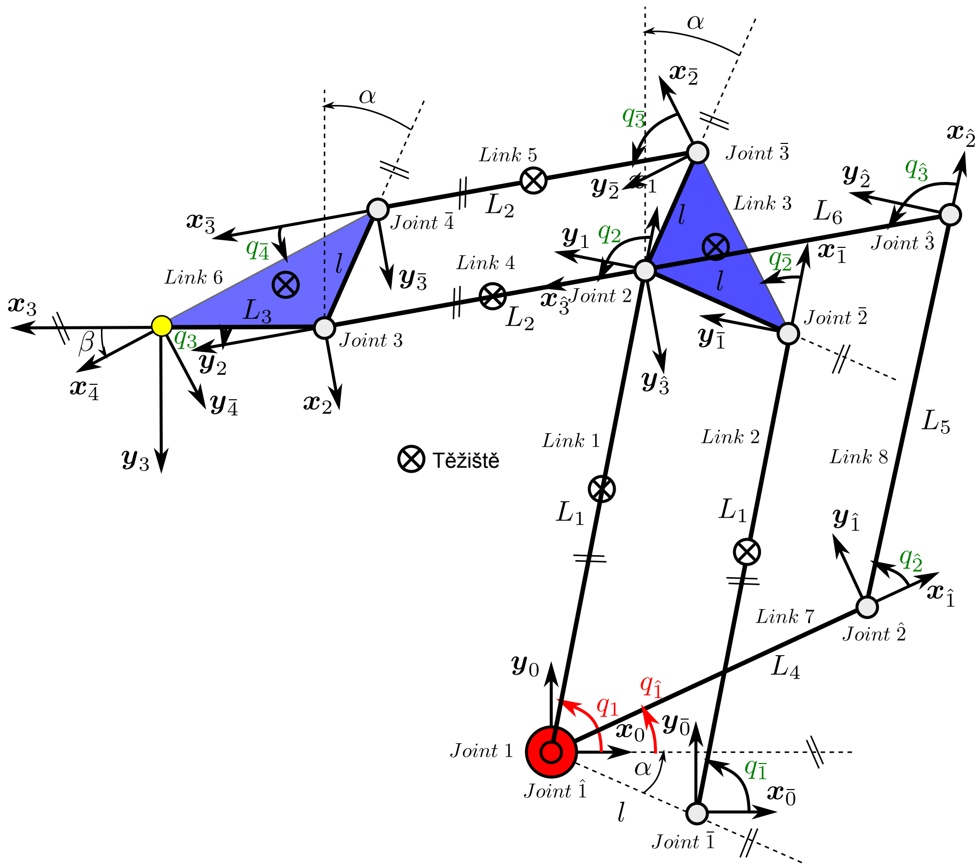
Jednotlivé kroky budou diskutovány dále v textu výzkumné zprávy.



Obrázek 2: 2 DoF planární manipulátor vzniklý z původního 4 DoF manipulátoru (bez uvažování pohonů **L1**, **R2**) umístěný do uvažované scény

2 Kinematická analýza manipulátoru

Redukovaný 2DoF manipulátor (dále jen „manipulátor“) lze z kinematického pohledu popsat prostřednictvím Denavit-Hartenbergovy (D-H) úmluvy [3] pro popis kinematiky sériových kinematických řetězců. Přesto, že, díky přídavnému paralelogramu a poháněnému paralelnímu ramenu, je výsledný manipulátor manipulátorem s uzavřenými kinematickými řetězci, lze, bez újmy na obecnosti, provést dekompozici těchto uzavřených kinematických řetězců na řetězce otevřené (sériové) a použít D-H úmluvu pro tyto sériové řetězce. D-H úmluva přiřazuje každému ramenu manipulátoru souřadný systém (s.s.), kterým je poté poloha takového ramene plně popsána (poloha = translace + rotace). Způsob přiřazení s.s. jednotlivým ramenům manipulátoru a zavedení čtveřic D-H parametrů (d_i, θ_i, a_i, α_i) je vyčerpávajícím způsobem popsáno např. v [13], [8], [15] a nebudeme se jím dále zabývat. Dekompozice manipulátoru na sériové kinematické řetězce a zavedení příslušných s.s. ramen je znázorněno na Obrázku 3.



Obrázek 3: Kinematické schéma manipulátoru (zavedení s.s. dle D-H úmluvy)

Kinematická struktura manipulátoru je tvořena uzavřeným kinematickým řetězcem. Za účelem kinematické analýzy je možné uzavřený kinematický řetězec dekomponovat na řetězce sériové vhodným fiktivním rozpojením. Kinematická struktura manipulátoru na Obrázku 3 lze tak vyjádřit ve smyslu otevřených kinematických řetězců jako:

- Kinematický řetězec: *Chain* 1
  Tvořený rameny: *Link* 1, *Link* 4, *Link* 6 s aktivním kloubem (pohonem) *Joint* 1 (kloubová souřadnice q_1) a pasivními klouby *Joint* 2, *Joint* 3 (kloubové souřadnice q_2, q_3)

  D-H parametry kinematického řetězce *Chain* 1 jsou dány v Tabulce 1.

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	q_1	L_1	0
2	0	q_2	L_2	0
3	0	q_3	L_3	0

Tabulka 1: D-H parametry sériové řetězce *Chain* 1

- Kinematický řetězec: *Chain* 2
  Tvořený rameny: *Link* 2, *Link* 3, *Link* 5 s pasivními klouby *Joint* $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$ (kloubové souřadnice $q_{\bar{1}}$, $q_{\bar{2}}$, $q_{\bar{3}}$, $q_{\bar{4}}$)

  D-H parametry kinematického řetězce *Chain* 2 jsou dány v Tabulce 2.

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	$q_{\bar{1}}$	L_1	0
2	0	$q_{\bar{2}}$	$l\sqrt{2}$	0
3	0	$q_{\bar{3}}$	L_2	0
4	0	$q_{\bar{4}}$	L	0

Tabulka 2: D-H parametry sériové řetězce *Chain* 2

  kde L_4 lze z geometrie *Link* 6 psát jako (kosínová věta): $L = \sqrt{L_3^2 + l^2 - 2L_3 l \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$.

- Kinematický řetězec: *Chain* 3
  Tvořený rameny: *Link* 7, *Link* 8 s aktivním kloubem (pohonem) *Joint* $\hat{1}$ (kloubová souřadnice $q_{\hat{1}}$) a pasivními klouby *Joint* $\hat{2}$, $\hat{3}$ (kloubové souřadnice $q_{\hat{2}}$, $q_{\hat{3}}$) D-H parametry kinematického řetězce *Chain* 3 jsou dány v Tabulce 3.

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	$q_{\hat{1}}$	L_4	0
2	0	$q_{\hat{2}}$	L_5	0
3	0	$q_{\hat{3}}$	L_6	0

Tabulka 3: D-H parametry sériové řetězce *Chain* 3

Každé rameno manipulátoru má nyní přiřazen pevný (nepohyblivý, s ramenem pevně spojený) s.s. následovně:

Link 1 .... s.s. F_1
Link 2 .... s.s. $F_{\bar{1}}$
Link 3 .... s.s. $F_{\bar{2}}$
Link 4 .... s.s. F_2
Link 5 .... s.s. $F_{\bar{3}}$
Link 6 .... s.s. F_3
Link 7 .... s.s. $F_{\hat{1}}$
Link 8 .... s.s. $F_{\hat{2}}$

Uzavřením kinematických řetězců *Chain* 1 , *Chain* 2 a *Chain* 3 v s.s. koncového efektoru F_3 a s.s. F_1 ramene *Link* 1 (pro *Chain* 1 a *Chain* 2) a v s.s. F_2 ramene *Link* 4 (pro *Chain* 1 a *Chain* 3)[1] vzniká uzavřený kinematický řetězec, který reprezentuje modelovaný manipulátor. Pro korektní

[1]Značením F_i, $F_i = \boldsymbol{O}_i - \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i \boldsymbol{z}_i$ rozumíme i-tý s.s. reprezentovaný svým počátkem $\boldsymbol{O}_i$ a souřadnicovými osami $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{y}_i$, $\boldsymbol{z}_i$.

uzavření sériových kinematických řetězců je však nutné ztotožnit s.s. základny (F_0) a koncového efektoru (F_3) těchto dílčích kinematických řetězců. V případě kinematického řetězce $Chain$ 1 tedy nebudeme uvažovat žádné transformace polohy základny a koncového efektoru, zatímco v případě kinematického řetězce $Chain$ 2 uvažujeme kompenzaci polohy základny $F_0 \rightarrow F_{\bar{0}}$ a koncového efektoru $F_{\bar{4}} \rightarrow F_3$ a v případě kinematického řetězce $Chain$ 3 uvažujeme kompenzaci polohy koncového efektoru $F_{\hat{3}} \rightarrow F_2$.

Vyjádříme-li tedy transformace mezi jednotlivými s.s. v dílčích sériových kinematických řetězcích prostřednictvím homogenních transformačních matic $\boldsymbol{T}_i^{i-1}$, viz [13, 8, 15, 5], dostáváme:

- Pro $Chain$ 1:

$$\boldsymbol{T}_3^0 = \boldsymbol{T}_1^0(q_1) \cdot \boldsymbol{T}_2^1(q_2) \cdot \boldsymbol{T}_3^2(q_3) \tag{1}$$

  Kloubové souřadnice $Chain$ 1:

$$\boldsymbol{Q}_{\text{Chain1}} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \tag{2}$$

- Pro $Chain$ 2:

$$\boldsymbol{T}_3^0 = \boldsymbol{T}_{\bar{0}}^0 \cdot \boldsymbol{T}_{\bar{1}}^{\bar{0}}(q_{\bar{1}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\bar{2}}^{\bar{1}}(q_{\bar{2}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\bar{3}}^{\bar{2}}(q_{\bar{3}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\bar{4}}^{\bar{3}}(q_{\bar{4}}) \cdot \boldsymbol{T}_3^{\bar{4}} \tag{3}$$

  kde homogenní transformační matice kompenzace polohy základny $\boldsymbol{T}_{\bar{0}}^0$ a koncového efektoru $\boldsymbol{T}_3^{\bar{4}}$ jsou dány jako:

$$\boldsymbol{T}_{\bar{0}}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l\cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 & l\sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}_3^{\bar{4}} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & sin(-\beta) & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

  kde $\beta = \arcsin\left(\frac{l\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{L}\right)$.

  Kloubové souřadnice $Chain$ 2:

$$\boldsymbol{Q}_{\text{Chain2}} = \begin{bmatrix} q_{\bar{1}} & q_{\bar{2}} & q_{\bar{3}} & q_{\bar{4}} \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

- Pro $Chain$ 3:

$$\boldsymbol{T}_2^0 = \boldsymbol{T}_{\hat{1}}^0(q_{\hat{1}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{2}}^{\hat{1}}(q_{\hat{2}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{3}}^{\hat{2}}(q_{\hat{3}}) \cdot \boldsymbol{T}_2^{\hat{3}} \tag{6}$$

  kde homogenní transformační matice kompenzace polohy koncového efektoru $\boldsymbol{T}_2^{\hat{3}}$ je dána jako:

$$\boldsymbol{T}_2^{\hat{3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

  Kloubové souřadnice $Chain$ 3:

$$\boldsymbol{Q}_{\text{Chain3}} = \begin{bmatrix} q_{\hat{1}} & q_{\hat{2}} & q_{\hat{3}} \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

Homogenní transformace $\boldsymbol{T}_i^{i-1}(q_i)$ pro $i = \{1, 2, 3, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ mezi s.s. jsou dány z D-H parametrů, viz Tabulky 1, 2 dle obecného předpisu:

$$\boldsymbol{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{q_i} & -s_{q_i}c_{\alpha_i} & s_{q_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{q_i} \\ s_{q_i} & c_{q_i}c_{\alpha_i} & -c_{q_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{q_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

kde $s_\star = \sin(\star)$, $c_\star = \cos(\star)$.

Pasivní $\boldsymbol{Q}_p$, aktivní $\boldsymbol{Q}_a$ a celkové $\boldsymbol{Q}$ kloubové souřadnice manipulátoru jsou dány jako:

$$\boldsymbol{Q}_p = \begin{bmatrix} q_2 & q_3 & q_{\bar{1}} & q_{\bar{2}} & q_{\bar{3}} & q_{\bar{4}} & q_{\hat{2}} & q_{\hat{3}} \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{Q}_a = \begin{bmatrix} q_1 & q_{\hat{1}} \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_a^T & \boldsymbol{Q}_p^T \end{bmatrix}^T \tag{10}$$

Návrhové kinematické parametry manipulátoru jsou dány jako:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & l & \alpha \end{bmatrix}^T \tag{11}$$

Dynamické parametry manipulátoru:
Dynamickými parametry manipulátoru rozumíme takové parametry, která ovlivňují dynamické chování manipulátoru, typicky jsou jimi hmotnosti, umístění těžiště a tensor setrvačnosti vzhledem k s.s. těžiště jednotlivých ramen. V uvažovaném modelovém případě manipulátoru uvažujeme, že jsou tyto parametry přímo závislé na parametrech kinematických $\boldsymbol{\xi}$, neboť, s ohledem na optimalizaci těchto kinematických parametrů (zejména délky ramen), viz Kapitola 4, se budou dynamické parametry měnit. Závislosti mezi dynamickými $\boldsymbol{\mu}$ a kinematickými $\boldsymbol{\xi}$ parametry jsou plně určeny zvolenou geometrií ramen případně dalšími materiálovým vlastnostmi. V uvažované případě manipulátoru uvažujme, že ramena jsou realizována jako plné tyče o poloměru r_1 pro *Link* $1, 4, 7, 8$ a poloměru r_2 ramena *Link* $2, 5$. Ramena *Link* 3 resp. *Link* 6 jsou realizována jako příslušné trojúhelníky tloušťky r_2 resp. r_1. Hustota materiálu všech ramen je dána hodnotou ρ. Vektor gravitační síly je neměnný ve tvaru $\begin{bmatrix} 0 & -9.81 & 0 \end{bmatrix}^T$ vzhledem k s.s. F_0. Dále uvažujme, že v těžišti posledního ramene (koncového efektoru) *Link* 6 je umístěna přidaná hmotnost (břemeno) daná hmotným bodem o hmotnosti M. Hmotnost pohonů *Joint* 1, *Joint* $\hat{1}$ je bezvýznamná (pohony umístěny nepohyblivě na základně manipulátoru). Výsledná dynamické parametry jsou tedy dány jako:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \rho & M \end{bmatrix}^T \tag{12}$$

Hmotnosti ramen:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \pi r_1^2 L_1 \rho \\
m_2 &= \pi r_2^2 L_1 \rho \\
m_3 &= 0.5 l^2 r_2 \rho \\
m_4 &= \pi r_1^2 (L_2 + L_6) \rho \\
m_5 &= \pi r_2^2 L_2 \rho \\
m_6 &= 0.5 L_3 l \cos(\alpha) r_1 \rho + M \\
m_7 &= \pi r_1^2 L_4 \rho \\
m_8 &= \pi r_1^2 L_5 \rho
\end{aligned} \tag{13}$$

Umístění těžišť ramen (vzhledem k s.s. příslušného ramena, viz předchozí přiřazený vztažných s.s.):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_1 &= \left[\begin{array}{ccc} -0.5L_1 & 0 & 0 \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{T}_2 &= \left[\begin{array}{ccc} -0.5L_1 & 0 & 0 \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{T}_3 &= \left[\begin{array}{ccc} -\frac{\sqrt{2}}{2}l & \frac{\sqrt{2}}{6}l & 0 \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{T}_4 &= \left[\begin{array}{ccc} -0.5(L_2+L_6) & 0 & 0 \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{T}_5 &= \left[\begin{array}{ccc} -0.5L_2 & 0 & 0 \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{T}_6 &= \frac{1}{3}\left[\begin{array}{ccc} -2L_3 - l\sin(-\alpha) & -l\cos(-\alpha) & 0 \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{T}_7 &= \left[\begin{array}{ccc} -0.5L_4 & 0 & 0 \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{T}_8 &= \left[\begin{array}{ccc} -0.5L_5 & 0 & 0 \end{array}\right]^T
\end{aligned} \tag{14}$$

Hlavní momenty setrvačnosti (vzhledem k s.s. příslušného ramena, viz předchozí přiřazený vztažných s.s., deviační momenty jsou rovny nule):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I}_1 &= \left[\begin{array}{ccc} 0.5m_1r_1^2 & 0.5m_1(r_1^2+\frac{1}{3}L_1) & 0.5m_1(r_1^2+\frac{1}{3}L_1) \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{I}_2 &= \left[\begin{array}{ccc} 0.5m_2r_2^2 & 0.5m_2(r_2^2+\frac{1}{3}L_1) & 0.5m_2(r_2^2+\frac{1}{3}L_1) \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{I}_3 &= \ldots \text{Irelevantní, neboť } \textit{Link } 3 \text{ (trojúhelník) nerotuje} \\
\boldsymbol{I}_4 &= \left[\begin{array}{ccc} 0.5m_4r_1^2 & 0.5m_4(r_1^2+\frac{1}{3}(L_2+L_6)) & 0.5m_4(r_1^2+\frac{1}{3}(L_2+L_6)) \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{I}_5 &= \left[\begin{array}{ccc} 0.5m_5r_2^2 & 0.5m_5(r_2^2+\frac{1}{3}L_2) & 0.5m_5(r_2^2+\frac{1}{3}L_2) \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{I}_6 &= \ldots \text{Irelevantní, neboť } \textit{Link } 6 \text{ (trojúhelník) nerotuje} \\
\boldsymbol{I}_7 &= \left[\begin{array}{ccc} 0.5m_7r_1^2 & 0.5m_7(r_1^2+\frac{1}{3}L_4) & 0.5m_7(r_1^2+\frac{1}{3}L_4) \end{array}\right]^T \\
\boldsymbol{I}_8 &= \left[\begin{array}{ccc} 0.5m_8r_1^2 & 0.5m_8(r_1^2+\frac{1}{3}L_5) & 0.5m_8(r_1^2+\frac{1}{3}L_5) \end{array}\right]^T
\end{aligned} \tag{15}$$

Zobecněné souřadnice manipulátoru (řízené souřadnice v pracovním prostoru manipulátoru) jsou dány jako[2]:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}_3^0[1:2] = \left[\begin{array}{cc} x & y \end{array}\right]^T \tag{16}$$

2.1 Přímý a inverzní geometrický model manipulátoru

Zabývejme se nyní výpočtem polohových závislostí mezi zobecněnými $\boldsymbol{X}$ a kloubovými $\boldsymbol{Q}$ souřadnicemi. Vztah mezi aktivními kloubovými souřadnicemi $\boldsymbol{Q}_a$ a zobecněnými souřadnicemi $\boldsymbol{X}$ (polohou koncového efektoru) jsou známy jako přímý (dopředný) ($\boldsymbol{X} = \mathbf{F}(\boldsymbol{Q}_a)$) resp. inverzní ($\boldsymbol{Q}_a = \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{X})$) geometrický model (**DGM** resp **IGM**). V případě sériových manipulátorů je DGM jednoznačný a vždy analyticky spočitatelný, neboť může být jednoduše formulován prostřednictvím skládání transformací s.s., což je ekvivalentní maticovému násobení homogenních transformačních matic $\boldsymbol{T}_i^{i-1}$. V případě sériových manipulátorů jsou kloubové souřadnice $\boldsymbol{Q}$ přímo rovny souřadnicím aktivním $\boldsymbol{Q}_a$ neboť pasivní klouby nemohou být obsaženy v kinematickém řetězci sériového manipulátoru (manipulátor by v takovém případě nabyl staticky určen - jinými slovy, v případě „uzamčení“ aktivních kloubů by koncový efektor vykazoval neřiditelné stupně volnosti). IGM pro sériové manipulátory zahrnuje řešit inverzi DGM, tedy řešit obecně

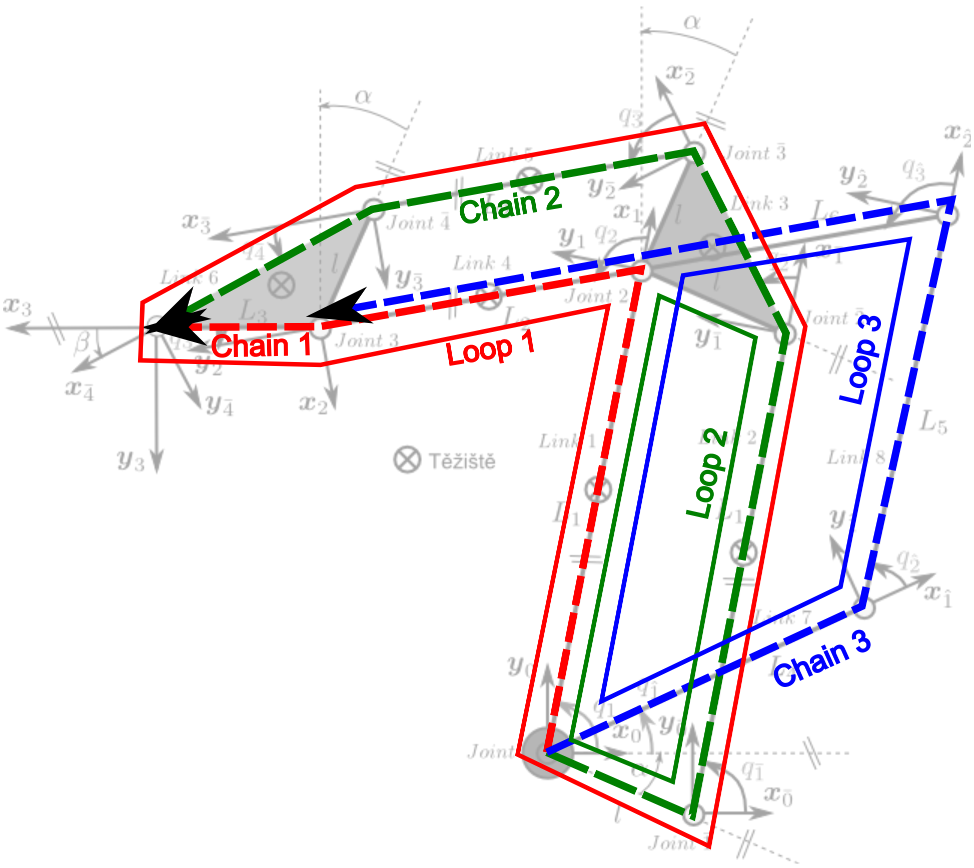
[2]Značení $\boldsymbol{O}[i:j, m:n]$ značí výběr prvků z vektoru/matice $\boldsymbol{O}$ ve smyslu výběru i-tého až j-tého řádku a m-tého až n-tého sloupce. Zároveň horní index vektoru/matice určuje vztažný s.s., tedy s.s. ve kterém jsou příslušné prvky vektoru/matice vyjádřeny.

soustavu nelineárních transcendentních rovnic - je známo, že v takovém případě obecně nemusí řešení IGM existovat v analytickém tvaru, zároveň může existovat více izolovaných řešení IGM.

V našem případě se zabýváme manipulátorem paralelním. V takovém případě nelze v obecném případě zaručit nalezení analytického řešení ani DGM ani IGM. Je zřejmé, ž případě paralelního manipulátoru v dílčích kinematických řetězcích vystupují pasivní a aktivní kloubové souřadnice. Budeme-li uvažovat dále, že počet aktivních kloubových souřadnic odpovídá počtu DoF koncového efektoru a zároveň platí, že kinematická struktura manipulátoru je plně určena (tzn. při uvolnění obecně n aktivních kloubových souřadnic vykazuje koncový efektor manipulátoru právě n DoF a při jejich „uzamčení“ právě žádný DoF), lze nalézt vztah mezi aktivními a pasivními kloubovými souřadnicemi, tedy:

$$\boldsymbol{Q}_p = \mathbf{G}(\boldsymbol{Q}_a) \tag{17}$$

Ve zprávě [17] byl uveden obecný přístup k řešení závislosti mezi $\boldsymbol{Q}_a$ a $\boldsymbol{Q}_p$ založený na formulování podmínek uzavřenosti kinematických smyček manipulátoru (tedy z podmínek tzv. kinematického omezení). Analogicky v našem případě můžeme geometricky nezávislé kinematické smyčky manipulátoru určit dle Obrázku 4.



Obrázek 4: Vyznačené nezávislé geometrické smyčky formované dílčími kinematickými řetězci

Nejprve se zabývejme smyčkou $LOOP$ 3, ve které se vyskytují obě aktivní kloubové souřadnice. Z podmínky uzavřenosti kinematické smyčky lze psát:

$$\boldsymbol{T}_{\hat{1}}^{0}(q_{\hat{1}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{2}}^{\hat{1}}(q_{\hat{2}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{3}}^{\hat{2}}(q_{\hat{3}}) \cdot \boldsymbol{T}_{2}^{\hat{3}} = \boldsymbol{T}_{1}^{0}(q_1) \cdot \boldsymbol{T}_{2}^{1}(q_2) \tag{18}$$

Rovnici lze dále upravit tak, že na pravé straně vystupují známé hodnoty (závislé na známých aktivních kloubových souřadnicích $\boldsymbol{Q}_a$) a na levé straně zbývající kloubové souřadnice:

$$\boldsymbol{T}_{\hat{2}}^{\hat{1}}(q_{\hat{2}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{3}}^{\hat{2}}(q_{\hat{3}}) \cdot \boldsymbol{T}_{2}^{\hat{3}} \cdot \left(\boldsymbol{T}_{2}^{1}(q_2)\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{T}_{\hat{1}}^{0}(q_{\hat{1}})\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{1}^{0}(q_1) \tag{19}$$

Vybereme-li z výsledných homogenních rovnic na levé a pravé straně pouze prvky odpovídající x a y souřadnici, dostáváme soustavu dvou nelineárních rovnic pro dvě neznámé $q_{\hat{2}}$, $q_{\hat{3}}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{\hat{2}}^{\hat{1}}(q_{\hat{2}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{3}}^{\hat{2}}(q_{\hat{3}}) \cdot \boldsymbol{T}_{2}^{\hat{3}} \cdot \left(\boldsymbol{T}_{2}^{1}(q_2)\right)^{-1}[1:2,4] &= \left(\boldsymbol{T}_{\hat{1}}^{0}(q_{\hat{1}})\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{1}^{0}(q_1)[1:2,4] \\ \begin{bmatrix} L_6\cos(q_{\hat{2}}+q_{\hat{3}})+\cos(q_{\hat{2}})L_5 \\ L_6\sin(q_{\hat{2}}+q_{\hat{3}})+\sin(q_{\hat{2}})L_5 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} L_1\cos(-q_1+q_{\hat{1}})-L_7\cos(q_{\hat{1}})-L_4 \\ -L_1\sin(-q_1+q_{\hat{1}})+\sin(q_{\hat{1}})L_7 \end{bmatrix}}_{\left[\begin{array}{cc} o_{1x}^{\hat{1}} & o_{1y}^{\hat{1}} \end{array}\right]^T} \end{aligned} \tag{20}$$

neboť lze ukázat, že $\left(\boldsymbol{T}_{2}^{1}(q_2)\right)^{-1}[1:2,4]$ nezávisí na q_2.

Umocněním a sečtením prvků na levé a pravé straně rovnice (20) dostáváme kloubovou souřadnici $q_{\hat{3}}$.

$$\begin{aligned} \cos(q_{\hat{3}}) = \frac{(o_{1x}^{\hat{1}})^2+(o_{1y}^{\hat{1}})^2-L_5^2-L_6^2}{2L_5L_6} \;&\Rightarrow\; \sin(q_{\hat{3}}) = \pm\sqrt{1-\cos(q_{\hat{3}}^2)} \\ &\Rightarrow\; q_{\hat{3}} = \operatorname{atan2}\left(\sin(q_{\hat{3}}),\cos(q_{\hat{3}})\right) \end{aligned} \tag{21}$$

Zároveň se znalostí $q_{\hat{3}}$ lze rovnici (20) přepsat na soustavu dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé $\sin(q_{\hat{2}})$, $\cos(q_{\hat{2}})$:

$$\begin{aligned} \sin(q_{\hat{2}}) &= \frac{\cos(q_{\hat{3}})L_6o_{1y}^{\hat{1}}+L_5o_{1y}^{\hat{1}}-o_{1x}^{\hat{1}}\sin(q_{\hat{3}})L_6}{L_6^2+2L_6L_5\cos(q_{\hat{3}})+L_5^2} \\ \cos(q_{\hat{2}}) &= \frac{o_{1y}^{\hat{1}}\sin(q_{\hat{3}})L_6+o_{1x}^{\hat{1}}\cos(q_{\hat{3}})L_6+o_{1x}^{\hat{1}}L_5}{L_6^2+2L_6L_5\cos(q_{\hat{3}})+L_5^2} \\ &\Rightarrow q_{\hat{2}} = \operatorname{atan2}\left(\sin(q_{\hat{2}}),\cos(q_{\hat{2}})\right) \end{aligned} \tag{22}$$

Z rovnic (21, 22) tak hodnoty pasivních kloubových souřadnic $q_{\hat{2}}$, $q_{\hat{3}}$ v závislosti na aktivních souřadnicích $\boldsymbol{Q}_a$:

$$\begin{bmatrix} q_{\hat{2}} \\ q_{\hat{3}} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_1(q_1, q_{\hat{1}}) \tag{23}$$

Kloubová souřadnice q_2 lze vypočítat analogickou úpravou z rovnice (18), kde levou stranu známe ze známých (zadaných q_1, $q_{\hat{1}}$ a vypočítaných $q_{\hat{2}}$, $q_{\hat{3}}$) kloubových souřadnic a ze symbolického vyjádření pravé strany:

$$\left(\boldsymbol{T}_{1}^{0}(q_1)\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{1}}^{0}(q_{\hat{1}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{2}}^{\hat{1}}(q_{\hat{2}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{3}}^{\hat{2}}(q_{\hat{3}}) \cdot \boldsymbol{T}_{2}^{\hat{3}} = \boldsymbol{T}_{2}^{1}(q_2) \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Porovnáním vybraných prvků homogenní transformační matice dostáváme intuitivně zřejmý vztah (součet úhlů v uzavřené planární smyčce):

$$q_2 = -q_1 + q_{\hat{1}} + q_{\hat{2}} + q_{\hat{3}} \;\Rightarrow\; q_2 = \mathbf{G}_2(q_1, q_{\hat{1}}, q_{\hat{2}}, q_{\hat{3}}) \tag{26}$$

Lze snadno ukázat, viz [17], že ze smyček *LOOP* 1 a *LOOP* 2 lze obecně formulovat soustavu 5 nezávislých nelineárních rovnic pro 5 neznámých pasivních kloubových souřadnic $q_3, q_{\bar{1}}, q_{\bar{2}}, q_{\bar{3}}, q_{\bar{4}}$ parametrizované aktivní kloubovou souřadnicí q_1 a nyní již známou hodnotou pasivní kloubové souřadnice q_2. Vzhledem však k jednoduché kinematické architektuře 3-ramenného sériového manipulátoru s přídavným paralelogramem (udržení rovnoběžnosti paralelních ramen) lze přímo (intuitivně) odvodit (a soustava nelineárních rovnic by to dokazovala) vztah, viz [17]:

$$\left.\begin{aligned} q_1+q_2+q_3=\pi &\Rightarrow q_3=\pi-q_1-q_2 \\ q_{\bar{1}} &= q_1 \\ q_{\bar{1}}+q_{\bar{2}}=\frac{3}{4}\pi+\alpha &\Rightarrow q_{\bar{2}}=\frac{3}{4}\pi+\alpha-q_1 \\ q_{\bar{1}}+q_{\bar{2}}+q_{\bar{3}}=q_1+q_2 &\Rightarrow q_{\bar{3}}=q_1+q_2-\frac{3}{4}\pi-\alpha \\ q_{\bar{1}}+q_{\bar{2}}+q_{\bar{3}}+q_{\bar{4}}=\pi+\beta &\Rightarrow q_{\bar{4}}=\pi+\beta-q_1-q_2 \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{bmatrix} q_3 \\ q_{\bar{1}} \\ q_{\bar{2}} \\ q_{\bar{3}} \\ q_{\bar{4}} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_3(q_1,q_2) \tag{27}$$

Kombinací nalezených závislostí $\mathbf{G}_{1,2,3}$ lze snadno získat hledanou závislost (17) mezi pasivními a aktivními klouby manipulátoru.

DGM manipulátoru, tedy $\boldsymbol{Q}_a \Rightarrow \boldsymbol{X}$, lze s pomocí již známého vztahu (17) psát následovně:[3]

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\boldsymbol{T}_1^0(q_1)\cdot\boldsymbol{T}_2^1(q_2)\cdot\boldsymbol{T}_3^2(q_3)[1:2,3]=\begin{bmatrix} L_2c_{12}+L_1c_1-L_3 \\ L_2s_{12}+L_1s_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \boldsymbol{X}=\mathbf{F}(\boldsymbol{Q}_a) \tag{28}$$

kde q_1 je známá aktivní kloubová souřadnice a q_2, q_3 jsou pasivní kloubové souřadnice vypočtené z aktivních dle (17).

IGM manipulátoru, tedy $\boldsymbol{X} \Rightarrow \boldsymbol{Q}_a$, lze psát následovně:

Vzhledem ke konstantní orientaci koncového efektoru (ramene *Link* 6) je zřejmé, že bod $\boldsymbol{O}_2^0 = \begin{bmatrix} x+L_3 & y \end{bmatrix}^T$. Ramena *Link* 1 a *Link* 4 poté tvoří již jednoduchý 2 DoF planární sériový manipulátor, jehož řešení IGM lze psát ve tvaru, viz [16], jako:

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} c_2 &= \frac{(x+L_3)^2+y^2-L_1^2-L_2^2}{2L_1L_2} \\ s_2 &= \pm\sqrt{1-c_2^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad q_2=\operatorname{atan2}(s_2,c_2) \\ &\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{c_2L_2y+L_1y-(x+L_3)s_2L_2}{L_2^2+2L_2L_1c_2+L_1^2} \\ c_1 &= \frac{ys_2L_2+(x+L_3)c_2L_2+(x+L_3)L_1}{L_2^2+2L_2L_1c_2+L_1^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow q_1=\operatorname{atan2}(s_1,c_1) \end{aligned} \tag{29}$$

Dostáváme tak jednu aktivní q_1 a jednu pasivní q_2 kloubovou souřadnici. Známe tedy přímo směr osy $\boldsymbol{x}_2$ s.s. F_2 vzhledem k s.s. F_0, neboť platí $\boldsymbol{x}_2^0=\boldsymbol{T}_1^0(q_1)\cdot\boldsymbol{T}_2(q_2)[1:3,1]$. Tedy pro bod počátek $\boldsymbol{O}_{\hat{2}}^0$ s.s. $F_{\hat{2}}$ vzhledem k s.s. F_0 platí: $\boldsymbol{O}_{\hat{2}}^0=\boldsymbol{O}_2^0-\boldsymbol{x}_2^0\cdot(L_2+L_6)$. Ramena *Link* 7, *Link* 8 tak opět tvoří 2 DoF planární sériový manipulátor s ekvivalentním řešením jako v rovnici 29:

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} c_{\hat{2}} &= \frac{(\boldsymbol{O}_{\hat{2}}^0[1]+L_3)^2+\boldsymbol{O}_{\hat{2}}^0[2]^2-L_4^2-L_5^2}{2L_4L_5} \\ s_{\hat{2}} &= \pm\sqrt{1-c_{\hat{2}}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad q_{\hat{2}}=\operatorname{atan2}(s_{\hat{2}},c_{\hat{2}}) \\ &\left.\begin{aligned} s_{\hat{1}} &= \frac{c_{\hat{2}}L_5\boldsymbol{O}_{\hat{2}}^0[2]+L_4\boldsymbol{O}_{\hat{2}}^0[2]-(\boldsymbol{O}_{\hat{2}}^0[1]+L_3)s_{\hat{2}}L_5}{L_5^2+2L_5L_4c_{\hat{2}}+L_4^2} \\ c_{\hat{1}} &= \frac{\boldsymbol{O}_{\hat{2}}^0[2]s_{\hat{2}}L_5+(\boldsymbol{O}_{\hat{2}}^0[1]+L_3)c_{\hat{2}}L_5+(\boldsymbol{O}_{\hat{2}}^0[1]+L_3)L_4}{L_5^2+2L_5L_4c_{\hat{2}}+L_4^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow q_{\hat{1}}=\operatorname{atan2}(s_{\hat{1}},c_{\hat{1}}) \end{aligned} \tag{30}$$

[3]Zkrácené značení: $s_1=\sin(q_1)$, $c_1=\cos(q_1)$, $s_{12}=\sin(q_1+q_2)$, $c_{12}=\cos(q_1+q_2)$.

Dostáváme tak druhou aktivní $q_{\hat{1}}$ a jednu další pasivní $q_{\hat{2}}$ kloubovou souřadnici a kombinací rovnic (29, 30) zároveň řešení **IGM**:

$$\boldsymbol{Q}_a = \mathbf{F}(\boldsymbol{X}) \tag{31}$$

2.2 Přímá a inverzní kinematická úloha

Přímá (DIK) a inverzní (IIK) kinematická úloha se zabývá vztahem mezi aktuálními rychlostmi a zrychleními mezi zobecněnými a aktivními kloubovými souřadnicemi manipulátoru. V případě sériových kinematických řetězců lze snadno ukázat [15, 13], že vztah mezi kloubovými a zobecněnými rychlostmi definovaný v dané aktuální poloze manipulátoru (známé polohy kloubových potažmo zobecněných souřadnic - z DGM, IGM) je dán lineárním vztahem:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{Q}) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}} \\ \ddot{\boldsymbol{X}} &= \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{Q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{Q}} \end{aligned} \quad \text{(pro DIK)} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{Q}} &= \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{Q}) \cdot \dot{\boldsymbol{X}} \\ \ddot{\boldsymbol{Q}} &= \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{Q}) \cdot \left(\ddot{\boldsymbol{X}} - \dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}} \right) \end{aligned} \quad \text{(pro IIK)} \tag{33}$$

kde $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{Q}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{Q})}{\partial \boldsymbol{Q}}$ resp. $\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{Q})$ je jakobián resp. časová derivace jakobiánu zobrazení mezi kloubovými a zobecněnými rychlostmi. Lze ukázat, [15], že prvky matice jakobiánu a jeho časové derivace lze (kromě standardního přístupu časovým derivování polohových vztahů **DGM**, **IGM**) získat přímo výpočtem z prvků homogenních transformačních matic $\boldsymbol{T}_i^{i-1}$ příslušných kinematických řetězců.

V případě paralelních manipulátorů je nezbytně nutné nejprve určit vztah mezi rychlostmi a zrychleními aktivních a pasivních kloubových souřadnic (analogicky jako v případě poloh v Kapitole 2.1), daný vztahy:

$$\dot{\boldsymbol{Q}}_p = \boldsymbol{J}_{PA}(\boldsymbol{Q}_a) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_a \tag{34}$$

$$\ddot{\boldsymbol{Q}}_p = \boldsymbol{J}_{PA}(\boldsymbol{Q}_a) \cdot \ddot{\boldsymbol{Q}}_a + \dot{\boldsymbol{J}}_{PA}(\boldsymbol{Q}_a, \dot{\boldsymbol{Q}}_a) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_a \tag{35}$$

Ve zprávě [17] byl popsán obecný postup řešení okamžité kinematické úlohy na základě uzavření geometricky nezávislých smyček tvořenými kinematickými řetězci. Vyžijeme-li nastíněného postupu, lze pro smyčku *LOOP* 3 zapsat rovnice kinematického omezení, tedy rovnost rychlostí (planární robot ⇒ translace v rovině $\boldsymbol{xy}$, rotace okolo osy $\boldsymbol{z}$) s.s. F_2 v části kinematického řetězce *Chain* 1 daného transformacemi: $\boldsymbol{T}_1^0(q_1) \cdot \boldsymbol{T}_2^1(q_2)$ a s.s. F_2 na konci kinematického řetězce *Chain* 3, daného transformacemi: $\boldsymbol{T}_{\hat{1}}^0(q_{\hat{1}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{2}}^{\hat{1}}(q_{\hat{2}}) \cdot \boldsymbol{T}_{\hat{3}}^{\hat{2}}(q_{\hat{3}}) \cdot \boldsymbol{T}_2^{\hat{3}}$.

$$\dot{\boldsymbol{X}}_1 \stackrel{!}{=} \dot{\boldsymbol{X}}_3 \tag{36}$$

kde

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{X}}_1 &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{O}}_2^0[1] \\ \dot{\boldsymbol{O}}_2^0[2] \\ \boldsymbol{\omega}[3] \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_1(q_1, q_2) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ \dot{\boldsymbol{X}}_2 &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{O}}_2^0[1] \\ \dot{\boldsymbol{O}}_2^0[2] \\ \boldsymbol{\omega}[3] \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_3(q_{\hat{1}}, q_{\hat{2}}, q_{\hat{3}}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{\hat{1}} \\ \dot{q}_{\hat{2}} \\ \dot{q}_{\hat{3}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a $\boldsymbol{J}_1 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $\boldsymbol{J}_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jsou kinematické jakobiány (jejich restrikce pro planární případ) příslušných kinematických řetězců[4].

Z podmínky (36) lze snadno sestavit následující soustavu lineárních rovnic závislosti rychlosti pasivních souřadnic $\dot{q}_2$, $\dot{q}_{\hat{2}}$, $\dot{q}_{\hat{3}}$ ve zkoumané smyčce na rychlosti aktivních souřadnic $\dot{q}_1$, $\dot{q}_{\hat{1}}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_{\hat{2}} \\ \dot{q}_{\hat{3}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_P^{-1} \cdot \boldsymbol{J}_A \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_{\hat{1}} \end{bmatrix} \tag{37}$$

kde

$$\boldsymbol{J}_A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1[:,1] & -\boldsymbol{J}_3[:,1] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad \boldsymbol{J}_P = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{J}_1[:,2] & \boldsymbol{J}_3[:,2:3] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Opět, vzhledem k jednoduché kinematické architektuře 3-ramenného sériového manipulátoru s přídavným paralelogramem lze odvodit, viz [17][5].

$$\begin{aligned} \dot{q}_3 &= -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \\ \dot{q}_{\bar{1}} &= \dot{q}_1 \\ \dot{q}_{\bar{2}} &= -\dot{q}_1 \\ \dot{q}_{\bar{3}} &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ \dot{q}_{\bar{4}} &= -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_{\bar{1}} \\ \dot{q}_{\bar{2}} \\ \dot{q}_{\bar{3}} \\ \dot{q}_{\bar{4}} \end{bmatrix} = \mathbf{dG}_3(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \tag{38}$$

Kombinací rovnice (37, 38) dostáváme hledanou závislost mezi rychlostmi pasivních a aktivních kloubových souřadnic (34).

Uvedený postup lze dále rozšířit na výpočet závislostí zrychlení mezi pasivními a aktivními kloubovými souřadnicemi, viz [17]. Časovou derivací podmínky (36) dostáváme:

$$\ddot{\boldsymbol{X}}_1 \stackrel{!}{=} \ddot{\boldsymbol{X}}_3 \tag{39}$$

kde

$$\ddot{\boldsymbol{X}}_1 = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{O}}_2^0[1] \\ \ddot{\boldsymbol{O}}_2^0[2] \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}[3] \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{J}}_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{J}_1(q_1, q_2) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\boldsymbol{X}}_2 = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{O}}_2^0[1] \\ \ddot{\boldsymbol{O}}_2^0[2] \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}[3] \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{J}}_3(q_{\hat{1}}, q_{\hat{2}}, q_{\hat{3}}, \dot{q}_{\hat{1}}, \dot{q}_{\hat{2}}, \dot{q}_{\hat{3}}) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{\hat{1}} \\ \dot{q}_{\hat{2}} \\ \dot{q}_{\hat{3}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{J}_3(q_{\hat{1}}, q_{\hat{2}}, q_{\hat{3}}) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_{\hat{1}} \\ \ddot{q}_{\hat{2}} \\ \ddot{q}_{\hat{3}} \end{bmatrix}$$

a $\boldsymbol{J}_1, \dot{\boldsymbol{J}}_1 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $\boldsymbol{J}_3, \dot{\boldsymbol{J}}_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jsou kinematické jakobiány a jejich příslušné časové derivace (jejich restrikce pro planární případ) příslušných kinematických řetězců.

Z podmínky (39) lze opět snadno sestavit následující soustavu lineárních rovnic závislosti zrychlení pasivních souřadnic $\ddot{q}_2$, $\ddot{q}_{\hat{2}}$, $\ddot{q}_{\hat{3}}$ ve zkoumané smyčce na zrychleních aktivních souřadnic $\ddot{q}_1$, $\ddot{q}_{\hat{1}}$:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_{\hat{2}} \\ \ddot{q}_{\hat{3}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_P^{-1} \cdot \left(\boldsymbol{J}_A \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_{\hat{1}} \end{bmatrix} + \dot{\boldsymbol{J}}_1 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} - \dot{\boldsymbol{J}}_3 \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_{\hat{1}} \\ \dot{q}_{\hat{2}} \\ \dot{q}_{\hat{3}} \end{bmatrix} \right) \tag{40}$$

[4]Poznamenejme, že kinematické jakobiány a jejich příslušné časové derivace lez získat přímým výpočtem z prvků homogenních transformačních matic kinematických řetězců bez nutnosti explicitně derivovat rovnice formulující **DGM**.

[5]Jinak je možné tyto vztahy opět odvodit z rovnic kinematického omezení smyček *LOOP* 1, 2.

Opět, vzhledem k jednoduché kinematické architektuře 3-ramenného sériového manipulátoru s přídavným paralelogramem lze odvodit, viz [17][5]:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_3 &= -\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_{\bar{1}} &= \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_{\bar{2}} &= -\ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_{\bar{3}} &= \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_{\bar{4}} &= -\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_{\bar{1}} \\ \ddot{q}_{\bar{2}} \\ \ddot{q}_{\bar{3}} \\ \ddot{q}_{\bar{4}} \end{bmatrix} = \mathbf{ddG}_3(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2) \tag{41}$$

Kombinací rovnice (40, 41) dostáváme hledanou závislost mezi zrychleními pasivních a aktivních kloubových souřadnic (35).

DIK manipulátoru, tedy tedy $\dot{\boldsymbol{Q}}_a \Rightarrow \dot{\boldsymbol{X}}$ (pro rychlosti) a $\ddot{\boldsymbol{Q}}_a \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{X}}$ (pro zrychlení), lze s pomocí již známého vztahu (34, 35) psát následovně:
Se znalostí vztahů mezi polohami, rychlostmi a zrychleními aktivních a pasivních souřadnic, můžeme úlohu formulovat na základě libovolného sériového kinematického řetězce ze základny na koncový efektor manipulátoru, navíc je zřejmé, že translační rychlost $\dot{\boldsymbol{O}}_3^0$ s.s. F_3 koncového efektoru je shodná (koncový efektor nerotuje) s rychlostí $\dot{\boldsymbol{O}}_2^0$ s.s. F_2, tedy platí:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{O}}_3^0[1:2] = \dot{\boldsymbol{O}}_2^0[1:2] = \boldsymbol{J}_1(q_1, q_2) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad \text{(z části kin. řetězce } Chain \text{ 1)} \tag{42}$$

kde $\boldsymbol{J}_1$ je známý kinematický jakobián části řetězce $Chain$ 1, kde jsou uvažovány pouze první 2. řádky (úhlová rychlost nás nezajímá), viz (36).

Dosazením za rychlost pasivní kloubové souřadnice $\dot{q}_2$ ze známého vztahu (34) $\dot{q}_2 = \boldsymbol{J}_{PA}[1,:] \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_a$ a reorganizací získáváme kinematický jakobián $\boldsymbol{J}_{\text{man}}$ celého paralelního manipulátoru:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{J}_1[:,1] \cdot \dot{q}_1 + \boldsymbol{J}_1[:,2] \cdot \dot{q}_2 \\ \dot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{J}_1[:,1] \cdot \dot{q}_1 + \boldsymbol{J}_1[:,2] \cdot \boldsymbol{J}_{PA}[1,:] \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_a \\ \dot{\boldsymbol{X}} &= \boldsymbol{J}_1[:,1] \cdot \dot{q}_1 + \boldsymbol{J}_1[:,2] \cdot \boldsymbol{J}_{PA}[1,:] \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_{\hat{1}} \end{bmatrix} \\ \dot{\boldsymbol{X}} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_{\text{man}} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_a, \quad \ddot{\boldsymbol{Q}}_a = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_{\hat{1}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{43}$$

kde

$$\boldsymbol{J}_{\text{man}} = \Big[\boldsymbol{J}_1[:,1] + \boldsymbol{J}_1[:,2] \cdot \boldsymbol{J}_{PA}[1,1] \ \ \vdots \ \ \boldsymbol{J}_1[:,2] \cdot \boldsymbol{J}_{PA}[1,2] \Big]$$

Známe-li nyní závislosti rychlostí, lze závislosti mezi zrychlením koncového efektoru $\ddot{\boldsymbol{X}}$ a aktivních kloubových souřadnic $\ddot{\boldsymbol{Q}}_a$ stanovit jako:

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{J}}_{\text{man}} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_a + \boldsymbol{J}_{\text{man}} \cdot \ddot{\boldsymbol{Q}}_a, \quad \ddot{\boldsymbol{Q}}_a = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 \end{bmatrix}^T \tag{44}$$

kde $\dot{\boldsymbol{J}}_{\text{man}}$ je časová derivace jakobiánu manipulátoru (známe ze známých časových derivací jakobiánů kin. řetězců).

IIK manipulátoru, tedy tedy $\dot{\boldsymbol{X}} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{Q}}_a$ (pro rychlosti) a $\ddot{\boldsymbol{X}} \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{Q}}_a$ (pro zrychlení), lze zřejmě psát následovně:

$$\ddot{\boldsymbol{Q}}_a = \boldsymbol{J}_{\text{man}}^{-1} \cdot \left(\ddot{\boldsymbol{X}} - \dot{\boldsymbol{J}}_{\text{man}} \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_a \right) \tag{45}$$

3 Dynamická analýza manipulátoru

Předpokládejme nyní, že jsou známy všechny kinematické vztahy manipulátoru, viz Kapitola 2, a označme jednotlivé funkční vztahy řešící tyto úlohy za účelem zpřehlednění následovně:

Přímý geometrický model (DGM):.................... $\boldsymbol{X} = \mathbf{DGM}(\boldsymbol{Q}_a, \boldsymbol{\xi})$
Inverzní geometrický model (IGM)):................. $\boldsymbol{Q}_a = \mathbf{IGM}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi})$
Přímá ok. kin. úloha (DIK):......................... $\{\dot{\boldsymbol{X}}, \ddot{\boldsymbol{X}}\} = \mathbf{DIK}(\boldsymbol{Q}_a, \dot{\boldsymbol{Q}}_a, \ddot{\boldsymbol{Q}}_a, \boldsymbol{\xi})$
Inverzní ok. kin. úloha (IIK): .... $\{\dot{\boldsymbol{Q}}_a, \ddot{\boldsymbol{Q}}_a\} = \mathbf{IIK}(\boldsymbol{X}, \dot{\boldsymbol{X}}, \ddot{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{\xi})$
Vztah mezi polohami akt. a pas. kl. souřadnic: ...... $\boldsymbol{Q}_p = \mathbf{A2P}(\boldsymbol{Q}_a, \boldsymbol{\xi})$
Vztah mezi rych./zrych. akt. a pas. kl. souřadnic:.... $\{\dot{\boldsymbol{Q}}_p, \ddot{\boldsymbol{Q}}_p\} = \mathbf{IKA2P}(\boldsymbol{Q}_a, \dot{\boldsymbol{Q}}_a, \ddot{\boldsymbol{Q}}_a, \boldsymbol{\xi})$

kde $\boldsymbol{\xi}$ jsou kinematické návrhové parametry manipulátoru (typicky délky, ramen, umístění kloubů, kompenzace polohy základny a konc. efektoru).

Dynamiku manipulátorů můžeme opěr rozdělit na dvě základní úlohy (předpokládejme nejprve manipulátory sériové):

- **Inverzní dynamický model (IDM)**: $\{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, \ddot{\boldsymbol{Q}}\} \rightarrow \boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{IDM}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, \ddot{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) \tag{46}$$

  Tedy výpočet sil/silových momentů $\boldsymbol{\tau}$ v kloubech (aktuátorech) manipulátoru ze známého pohybu (polohy $\boldsymbol{Q}$, rychlosti $\dot{\boldsymbol{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\boldsymbol{Q}}$) manipulátoru a požadovaných sil/momentů působící na koncový efektor $\boldsymbol{F}$.

- **Přímý dynamický model (DDM)**: $\{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}\} \rightarrow \ddot{\boldsymbol{Q}}$

$$\ddot{\boldsymbol{Q}} = \mathbf{DDM}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) \tag{47}$$

  Tedy výpočet zrychlení kloubových souřadnic manipulátoru na základně známé polohy $\boldsymbol{Q}$ a rychlosti $\dot{\boldsymbol{Q}}$ manipulátoru, sil/momentů působící na koncový efektor a sil/momentů působící v kloubech (aktuátorech) manipulátoru. Prostřednictvím DDM lze sestavit dynamické rovnice manipulátoru formulované soustavou nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu.

kde $\boldsymbol{\xi}$ jsou kinematické návrhové parametry manipulátoru a $\boldsymbol{\mu}$ jsou dynamické návrhové parametry manipulátoru (typicky umístění těžišť ramen, hmotnosti a moment setrvačnosti ramen, vektor gravitačního zrychlení).

Poznamenejme, že v případě sériových kinematických řetězců lze nalézt efektivní algoritmus výpočtu IDM založený na dopředném rekurzivním výpočtu rychlostí a zrychleních navazujících ramen směrem od základny ke koncovému efektoru a zpětného rekurzivního výpočtu distribuce sil/momentů působících na navazující ramena směrem od koncového efektoru k základně. Vhodnou substitucí vstupných proměnných ($\boldsymbol{Q}$, $\dot{\boldsymbol{Q}}$, $\ddot{\boldsymbol{Q}}$) do IDM lze poté odvodit hodnoty dynamických matic/vektorů $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q})$, $\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}})$ v obecném popisu dynamiky sériového kinematického řetězce ve tvaru:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) = \boldsymbol{\tau} \tag{48}$$

kde

$$\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) \cdot \dot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{F}$$

kde $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}})$ je matice vlivu zdánlivých sil (odstředivá, Coriolisova), $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q})$ je matice vlivu gravitační síly a $\boldsymbol{J}$ je kinematický jakobián sériového kin. řetězce.

Popsané algoritmy výpočtu IDM, DDM pro sériové kin. řetězce jsou popsány např. v [13] a podrobně odvozeny v [18].

V případě paralelních manipulátorů existuje celá řada metod nalezení dynamického modelu, např. [9], [6]. V našem případě je možné využít standardní přístup založený na principu virtuální práce. Z principu virtuální práce platí, že elementární přírůstek energie vykonaný v aktivních kloubech manipulátoru musí být roven přírůstku energie všech kloubů manipulátoru za předpokladu, že je paralelní struktura manipulátoru dekomponována na sériové (otevřené) kinematické řetězce. Dekompozice na sériové kinematické řetězce je docílena rozpojením uzavřených kinematických smyček v pasivních kloubech manipulátoru. Předpokládejme dekompozici paralelního uvažovaného manipulátoru v pasivním kloubu *Joint* $\bar{4}$, v pasivním kloubu *Joint* 2[6] a v pasivním kloubu *Joint* $\hat{3}$ - tedy na tři již dříve zmíněné kinematické řetězce *Chain* 1, *Chain* 2 a *Chain* 3 viz Obrázek 5. Z principu virtuální práce vyplývá:

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_a = \boldsymbol{\tau}_{\text{chains}}^T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\text{chains}} \tag{49}$$

kde $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_{\hat{1}} \end{bmatrix}^T$ jsou silové momenty v rotačních aktuátorech manipulátoru, $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_a = \begin{bmatrix} \mathrm{d}q_1 & \mathrm{d}q_{\hat{1}} \end{bmatrix}^T$ je diferenciální přírůstek polohy aktivních kloubových souřadnic,

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{chains}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{\text{Chain1}} \\ \boldsymbol{\tau}_{\text{Chain2}} \\ \boldsymbol{\tau}_{\text{Chain3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_{\bar{1}} \\ \tau_{\bar{2}} \\ \tau_{\bar{3}} \\ \tau_{\bar{4}} \\ \tau_{\hat{1}} \\ \tau_{\hat{2}} \\ \tau_{\hat{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\text{chains}} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\text{Chain1}} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\text{Chain2}} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\text{Chain3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}q_1 \\ \mathrm{d}q_2 \\ \mathrm{d}q_3 \\ \mathrm{d}q_{\bar{1}} \\ \mathrm{d}q_{\bar{2}} \\ \mathrm{d}q_{\bar{3}} \\ \mathrm{d}q_{\bar{4}} \\ \mathrm{d}q_{\hat{1}} \\ \mathrm{d}q_{\hat{2}} \\ \mathrm{d}q_{\hat{3}} \end{bmatrix}$$

jsou silové momenty v ekvivalentních dekomponovaných sériových kinematických řetězcích a odpovídající hodnoty kloubových souřadnic.

Ze známých závislostí mezi pasivními a aktivními kloubovými rychlostmi (34) lze odvodit vynásobením rovnice diferencí času dt :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathrm{d}q_2 \\ \mathrm{d}q_3 \\ \mathrm{d}q_{\bar{1}} \\ \vdots \\ \mathrm{d}q_{\bar{4}} \\ \mathrm{d}q_{\hat{2}} \\ \mathrm{d}q_{\hat{3}} \end{bmatrix} &= \boldsymbol{J}_{PA}[:,1] \cdot \mathrm{d}q_1 + \boldsymbol{J}_{PA}[:,2] \cdot \mathrm{d}q_{\hat{1}} \\
\mathrm{d}q_2 &= \boldsymbol{J}_{PA}[1,1] \cdot \mathrm{d}q_1 + \boldsymbol{J}_{PA}[1,2] \cdot \mathrm{d}q_{\hat{1}} \\
\mathrm{d}q_3 &= \boldsymbol{J}_{PA}[2,1] \cdot \mathrm{d}q_1 + \boldsymbol{J}_{PA}[2,2] \cdot \mathrm{d}q_{\hat{1}} \\
\mathrm{d}q_{\bar{1}} &= \boldsymbol{J}_{PA}[3,1] \cdot \mathrm{d}q_1 + \boldsymbol{J}_{PA}[3,2] \cdot \mathrm{d}q_{\hat{1}} \\
&\vdots \\
\mathrm{d}q_{\bar{4}} &= \boldsymbol{J}_{PA}[6,1] \cdot \mathrm{d}q_1 + \boldsymbol{J}_{PA}[6,2] \cdot \mathrm{d}q_{\hat{1}} \\
\mathrm{d}q_{\hat{2}} &= \boldsymbol{J}_{PA}[7,1] \cdot \mathrm{d}q_1 + \boldsymbol{J}_{PA}[7,2] \cdot \mathrm{d}q_{\hat{1}} \\
\mathrm{d}q_{\hat{3}} &= \boldsymbol{J}_{PA}[8,1] \cdot \mathrm{d}q_1 + \boldsymbol{J}_{PA}[8,2] \cdot \mathrm{d}q_{\hat{1}}
\end{aligned} \tag{50}$$

[6] *Joint* 2 je aktivním kloubem kinematického řetězce *Chain* 1 ale zároveň také pasivním kloubem kinematického řetězce *Chain* 2.

Vztah (49) lze dále formálně upravit na lineární zobrazení mezi silovým momentem všech kloubových souřadnic manipulátoru a silovým momentem aktivních kloubových souřadnic následovně:

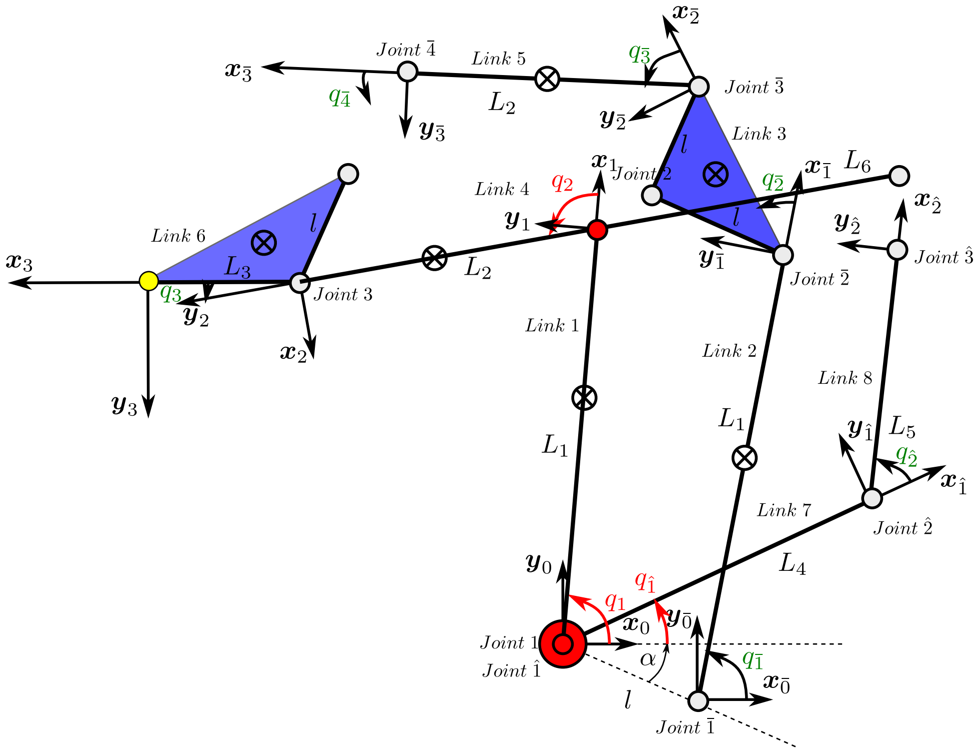
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{chains}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_a}\right)^T \cdot \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{chains}} \\ \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{H}^T(\boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{chains}}\end{aligned} \tag{51}$$

kde $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q})$ je dána následovně:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_3}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_3}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_{\bar{1}}}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_{\bar{1}}}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}q_{\bar{4}}}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_{\bar{4}}}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_{\hat{1}}}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_{\hat{1}}}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_{\hat{2}}}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_{\hat{2}}}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_{\hat{3}}}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_{\hat{3}}}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \end{bmatrix} \tag{52}$$

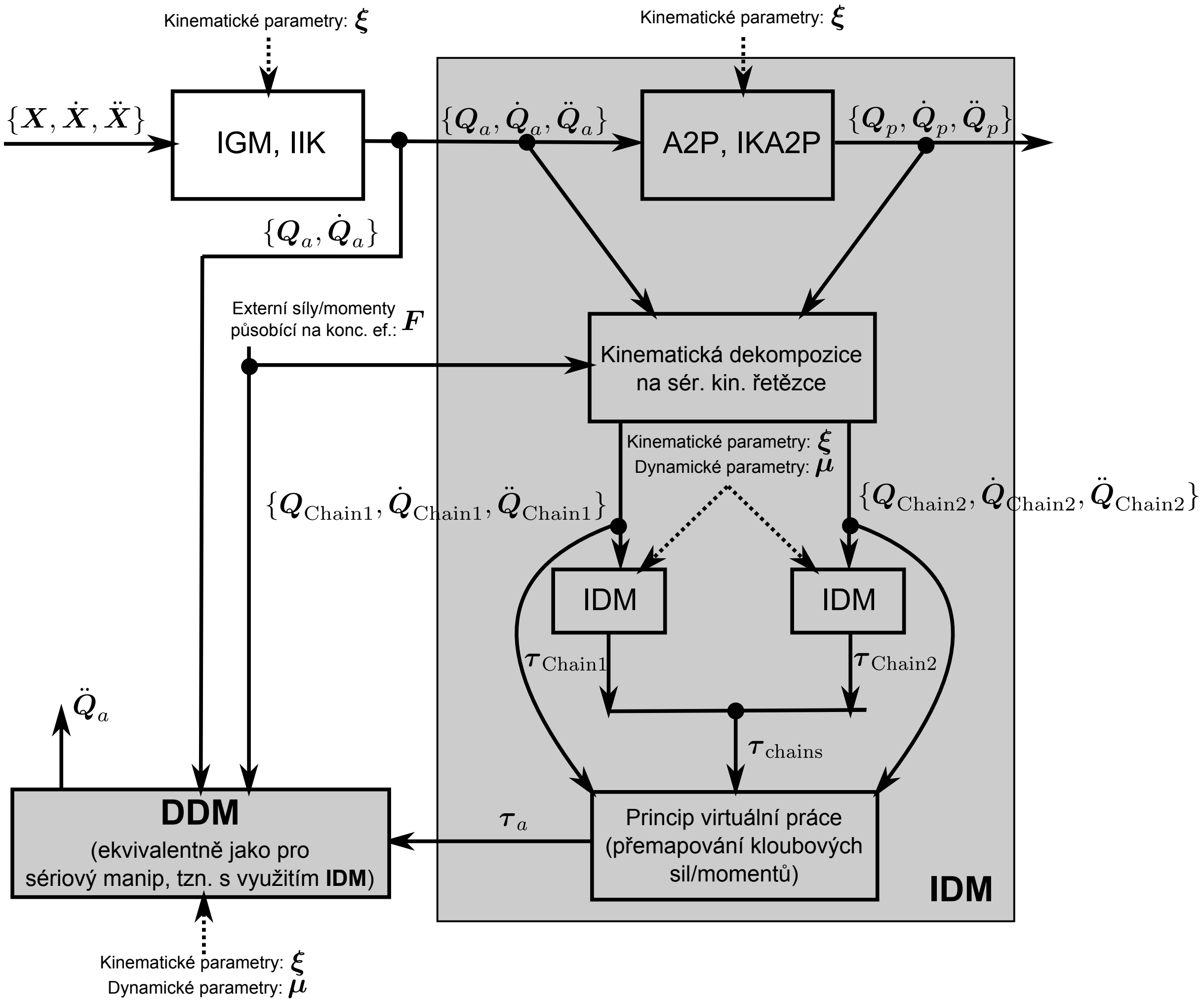
S pomocí (50) lze vyčíslit hodnoty prvků hledané matice $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q})$ (aktivní kloubové souřadnice $\boldsymbol{Q}_a = \begin{bmatrix} q_1 & q_{\hat{1}} \end{bmatrix}^T$ tedy i $\mathrm{d}q_1$, $\mathrm{d}q_{\hat{1}}$ jsou již **nezávislé** proměnné):

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_3}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_3}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_{\bar{1}}}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_{\bar{1}}}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}q_{\bar{4}}}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_{\bar{4}}}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_{\hat{1}}}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_{\hat{1}}}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_{\hat{2}}}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_{\hat{2}}}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \\ \frac{\mathrm{d}q_{\hat{3}}}{\mathrm{d}q_1} & \frac{\mathrm{d}q_{\hat{3}}}{\mathrm{d}q_{\hat{1}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{J}_{PA}[1,1] & \boldsymbol{J}_{PA}[1,2] \\ \boldsymbol{J}_{PA}[2,1] & \boldsymbol{J}_{PA}[2,2] \\ \boldsymbol{J}_{PA}[3,1] & \boldsymbol{J}_{PA}[3,2] \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{J}_{PA}[6,1] & \boldsymbol{J}_{PA}[6,2] \\ 0 & 1 \\ \boldsymbol{J}_{PA}[7,1] & \boldsymbol{J}_{PA}[7,2] \\ \boldsymbol{J}_{PA}[8,1] & \boldsymbol{J}_{PA}[8,2] \end{bmatrix} \tag{53}$$



Obrázek 5: Dekompozice paralelního manipulátoru na dílčí kinematické řetězce

Za předpokladu, že známe požadovaný pohyb manipulátoru, např. ve významu poloh $\boldsymbol{X}$, rychlostí $\dot{\boldsymbol{X}}$ a zrychlení $\ddot{\boldsymbol{X}}$ koncového efektoru, lze z IGM, IIK vypočítat požadované polohy $\boldsymbol{Q}_a$, rychlosti $\dot{\boldsymbol{Q}}_a$ a zrychlení $\ddot{\boldsymbol{Q}}_a$ aktivních kloubových souřadnic a dále dle závislostí mezi aktivními a pasivními kloubovými souřadnicemi všechny pasivní kloubové polohy $\boldsymbol{Q}_p$, rychlosti $\dot{\boldsymbol{Q}}_p$ a zrychlení $\ddot{\boldsymbol{Q}}_p$. V takovém případě nyní může být spočítán IDM pro všechny dekomponované sériové kinematické řetězce. Získáváme tak požadované síly/silové momenty ve všech (aktivních i pasivních) kloubech. Požadované síly/silové momenty v pasivních kloubech manipulátoru jsou poté promítnuty do sil/silových momentů aktivních kloubů manipulátoru, viz (51) (a kinematické řetězce jsou poté zpět uzavřeny v původně rozpojených pasivních kloubech). Výsledné schéma výpočtu IDM pro paralelní manipulátor lze vyjádřit Obrázkem 6. Poznamenejme, že externí síly/momenty působící na koncový efektor manipulátoru budou zahrnuty do příslušného odpovídajícího kinematického řetězce (resp. do silového/momentového působení na jeho koncový efektor). Obdobně jako v případě po sériové manipulátory, viz [18], je možné s pomocí IDM stanovit následně DDM paralelního manipulátoru (respektive příslušné členy $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_a)$, $\boldsymbol{\tau}'(\boldsymbol{Q}_a, \dot{\boldsymbol{Q}}_a)$ v rovnici (48)). Poznamenejme, že postup výpočtu IDM, DDM pro paralelní manipulátory lze zobecnit pro libovolné paralelní kinematické řetězce.



Obrázek 6: Grafické znázornění výpočtu IDM (DDM) pro paralelní manipulátory (pouze pro dva kinematické řetězce, lze obecně rozšířit)

4 Optimální návrh kinematických parametrů manipulátoru

Optimalizační úloha uvažovaného manipulátoru, viz Obrázek 1(b), bude definována záměrně stejným způsobem jako ve zprávě [17] (optimalizační úloha pro 3-ramenný sériový manipulátor s přídavným paralelogramem a neseným pohonem druhého ramene, viz Obrázek 1(a)).

Hodnota **kriteriální** funkce v daném bodě pracovním prostoru $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ pro uvažované kinematické $\boldsymbol{\xi}$ a dynamické μ návrhové parametry je tedy opět dána jako:

$$J(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{J_{\text{pen}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}, \gamma_{min}) + J_{\text{obj}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}, a_{nom})} \tag{54}$$

kde pro **penalizační** J_{pen} a **účelovou** J_{obj} skalární funkci platí:

Penalizační funkce:
Zohledňuje zvolená omezení, v našem případě jsou omezeními: podmínka na existenci řešení IGM a omezení minimálního náklonu γ_{min} přídavného paralelogramu (z důvodu zamezení blízkosti kinematické singularity).

$$J_{\text{pen}}(\boldsymbol{X}) = K_1 \cdot P_1 + K_2 \cdot P_2 + K_3 \cdot P_3 \tag{55}$$

kde

$$P_1 = \begin{cases} 0 & \text{pokud pro } \boldsymbol{X} \ \exists \text{ řešení IGM} \\ 1 & \text{pokud pro } \boldsymbol{X} \ \nexists \text{ řešení IGM} \end{cases}$$

$$P_2 = \begin{cases} 0 & \text{pokud pro } \boldsymbol{X} \text{ platí: } \|\sin(q_1 - \alpha)\| \geq \|\sin(\gamma_{min})\| \\ \|\sin(\gamma_{min})\| - \|\sin(q_1 - \alpha)\| & \text{pokud pro } \boldsymbol{X} \text{ platí: } \|\sin(q_1 - \alpha)\| < \|\sin(\gamma_{min})\| \end{cases}$$

$$P_3 = \begin{cases} 0 & \text{pokud pro } \boldsymbol{X} \text{ platí: } \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| \geq \|\sin(\gamma_{min})\| \\ \|\sin(\gamma_{min})\| - \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| & \text{pokud pro } \boldsymbol{X} \text{ platí: } \|\cos(q_1 + q_2 - \alpha)\| < \|\sin(\gamma_{min})\| \end{cases}$$

a K_i jsou zvolené penalizační konstanty.

Účelová funkce:
Účelová funkce v našem případě opět udává maximální normu $\|\boldsymbol{\tau}\| = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_{\hat{1}}^2}$ momentů aktuátorů manipulátoru, která může nastat v dané poloze $\boldsymbol{X}$, nulové rychlosti $\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{0}$ a předepsané normě zrychlení $a_{nom} = \|\ddot{\boldsymbol{X}}\|$ (v libovolném směru) koncového efektoru manipulátoru.

$$J_{\text{obj}}(\boldsymbol{X}) = \|\boldsymbol{\tau}\|_{max} = \sigma_{max}\left(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_a) \cdot \boldsymbol{J}_{\text{man}}^{-1}(\boldsymbol{Q}_a)\right) \cdot a_{nom} + \|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}_a)\| \tag{56}$$

kde $\boldsymbol{Q}_a = \mathbf{IGM}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi})$, matice $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{G}$ lze získat řešením IDM, DDM, viz[17], J_{man} je kinematický jakobián manipulátoru, viz 43.

Optimalizační úlohu budeme opět definovat přes celý uvažovaný dikretizovaný prostor $\boldsymbol{X}_{\text{otp}}$ jako *maxmin* problém, tedy:

$$J^{\star}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}^{\star}, \boldsymbol{\mu}) = \max_{\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}} \left(\min_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{\text{opt}}} J(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) \right) \tag{57}$$

$$\boldsymbol{\xi}^{\star} = \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Xi}} \left(\min_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{\text{opt}}} J(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu}) \right) \tag{58}$$

kde $\boldsymbol{\Xi}$ je přípustná množina kinematických návrhových parametrů manipulátoru.

Tedy hledáme takové kinematické návrhové parametry $\boldsymbol{\xi}$ pro které platí, že minimální hodnota kriteriální funkce $J(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu})$ podél celého uvažovaného diskretizovaného pracovního prostoru $\boldsymbol{X}_{\text{opt}}$ je maximalizována. Jinými slovy, maximální hodnota součtu penalizační a účelové funkce podél celého uvažovaného diskretizovaného pracovního prostoru $\boldsymbol{X}_{\text{opt}}$ je minimalizována, a tedy je nejlépe eliminován nejhorší případ (ve smyslu kritéria optimality) přes celý pracovní prostor.

Diskretizace pracovního prostoru manipulátoru $\boldsymbol{X}_{\text{opt}}$ vymezeného obdélníkem s příslušnými body $\boldsymbol{LB}$, $\boldsymbol{RU}$ definujících rohy, viz Obrázek 2 a přípustných hodnot kinematických návrhových parametrů $\boldsymbol{\Xi}$ je provedeno stejným způsobem jako v [17], tzn:

$$\boldsymbol{X}_{\text{opt}} = \left[\begin{bmatrix} \boldsymbol{LB}[1] \\ \boldsymbol{LB}[1] + \Delta x \\ \boldsymbol{LB}[1] + 2\Delta x \\ \vdots \\ \boldsymbol{RU}[1] - \Delta x \\ \boldsymbol{RU}[1] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{LB}[2] \\ \boldsymbol{LB}[2] + \Delta y \\ \boldsymbol{LB}[2] + 2\Delta y \\ \vdots \\ \boldsymbol{RU}[2] - \Delta y \\ \boldsymbol{RU}[2] \end{bmatrix} \right] \tag{59}$$

kde Δx, Δy jsou zvolené dikretizace v dílčích souřadných osách pracovního prostoru a $\times$ značí kartézský součin vektorů. Množina všech kombinací bodů dikretizovaného pracovního prostoru je tedy dána jako: $\boldsymbol{X}_{\text{opt}} \in \mathbb{R}^M$, $M = M_1 \cdot M_2$ a M_1 resp. M_2 značí počet diskretizovaných hodnot ve směru souřadnicových os $\boldsymbol{x}$ resp. $\boldsymbol{y}$ pracovního prostoru.

$$\Xi = \left[\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C}}[1] + \Delta\boldsymbol{\xi}[1] \cdot \begin{bmatrix} -n_{1_{\min}} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_{1_{\max}} \end{bmatrix} \right] \times \left[\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C}}[2] + \Delta\boldsymbol{\xi}[2] \cdot \begin{bmatrix} -n_{2_{\min}} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n_{2_{\max}} \end{bmatrix} \right] \times \dots$$

$$\dots \times \left[\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C}}[m-1] + \Delta\boldsymbol{\xi}[m-1] \cdot \begin{bmatrix} -n_{m-1_{\min}} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n_{m-1_{\max}} \end{bmatrix} \right] \times \left[\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C}}[m] + \Delta\boldsymbol{\xi}[m] \cdot \begin{bmatrix} -n_{m_{\min}} \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ n_{m_{\max}} \end{bmatrix} \right] \tag{60}$$

kde $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C}}[i]$ jsou středy intervalů (intervaly mohou být i nesymetrické, tzn. $n_{i_{\min}} \neq n_{i_{\max}}$) diskrétní množiny $N_i = n_{i_{\min}} + n_{i_{\max}} + 1$ prvků přípustných kinematických návrhových parametrů s požadovanou diferencí $\Delta\boldsymbol{\xi}[i]$ pro $i = 1 \dots m$. Množina všech kombinací dikretizovaných přípustných kinematických návrhových parametrů je tak dána jako: $\Xi \in \mathbb{R}^N$, $N = N_1 \cdot N_2 \dots N_{m-1} \cdot N_m$.

Optimalizační úloha byly řešena opět dvoufázově. Nejprve proběhla globální optimalizace na základě prořezávacího algoritmu (**Culling algorithm**, viz [17]), která vybrala optimální set parametrů $\boldsymbol{\xi}$ z diskretizované množiny přípustných hodnot Ξ. Následně byla provedena lokální (zpřesňující) optimalizace na základě negradientního algoritmu (**Nelder-Mead simplex algorithm**, viz [17]), která využila jako počáteční podmínku vybraný set parametrů z globální optimalizace a provedla následující zpřesnění (konvergence na hodnoty parametrů, které nepodléhají zvolené diskretizaci).

5 Výsledky a porovnání optimalizace

V uvedené kapitole nejprve demonstrujme výsledky optimalizace pro konkrétní zadání parametrů:

Parametry manipulátoru (zvolené struktury):

Kinematické parametry manipulátoru $\boldsymbol{\xi}$ (včetně vyčíslení počátečních hodnot - odpovídající středům $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C}}$ diskrétních intervalů):

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & l & \alpha \end{bmatrix}^T = \\ = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.2 & 0.24 & 0.6 & 0.15 & 0.15 & 0 \end{bmatrix}^T = \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C}} \tag{61}$$

Dynamické návrhové parametry manipulátoru:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \rho & M \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.03 & 7800 & 50 \end{bmatrix}^T \tag{62}$$

Parametry optimalizační úlohy:

Uvažovaný pracovní prostor manipulátoru včetně rozlišení:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{LB} = \begin{bmatrix} -0.97 & 0.2 \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{LU} = \begin{bmatrix} -0.12 & 0.7 \end{bmatrix}^T \\ \Delta x = 0.10625, \quad \Delta y = 0.125 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 9,\ M_2 = 4, \quad \Rightarrow \quad M = 45 \end{array} \tag{63}$$

Výběrem z kinematických parametrů manipulátoru $\boldsymbol{\xi}$ získáváme takové parametry $\boldsymbol{\xi}_{\text{opt}} \in \boldsymbol{\xi}$, které budeme skutečně optimalizovat (nemusí být vždy vybrány všechny), ekvivalentně pro $\boldsymbol{\xi}_{\text{C opt}}$ (středy intervalů):

$$\boldsymbol{\xi}_{\text{opt}} = \boldsymbol{\xi}[1:6,8] = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & \alpha \end{bmatrix}^T \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi}_{\text{C opt}} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.2 & 0.24 & 0.6 & 0.15 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{64}$$

Parametry penalizační funkce J_{pen}:

Minimální povolený úhel v paralelogramech manipulátoru:

$$\gamma_{min} = 15\,\text{deg}$$

Penalizační konstanty, striktně nepovoleno nalezení parametrů, kde neexistuje řešení IGM.

$$K_1 = +\infty,\ K_2 = K_3 = 10^8$$

Hodnota nominálního zrychlení koncového efektoru:

$$a_{nom} = 1$$

Diskretizace přípustných návrhových kinematických parametrů (které mají být optimalizovány), viz diskretizace (60):

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\xi}_{\text{opt}} &= \begin{bmatrix} 0.033 & 0.033 & 0.033 & 0.033 & 0.033 & 0.033 & 0.1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\xi}_{\text{C opt}} &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.2 & 0.24 & 0.6 & 0.15 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{n}_{min} = [n_{i_{min}}] &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{n}_{max} = [n_{i_{max}}] &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{N}[N_i] &= \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Kriteriální funkce $J(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\mu})$ je vypočtena dle postupu v Kapitole 4.

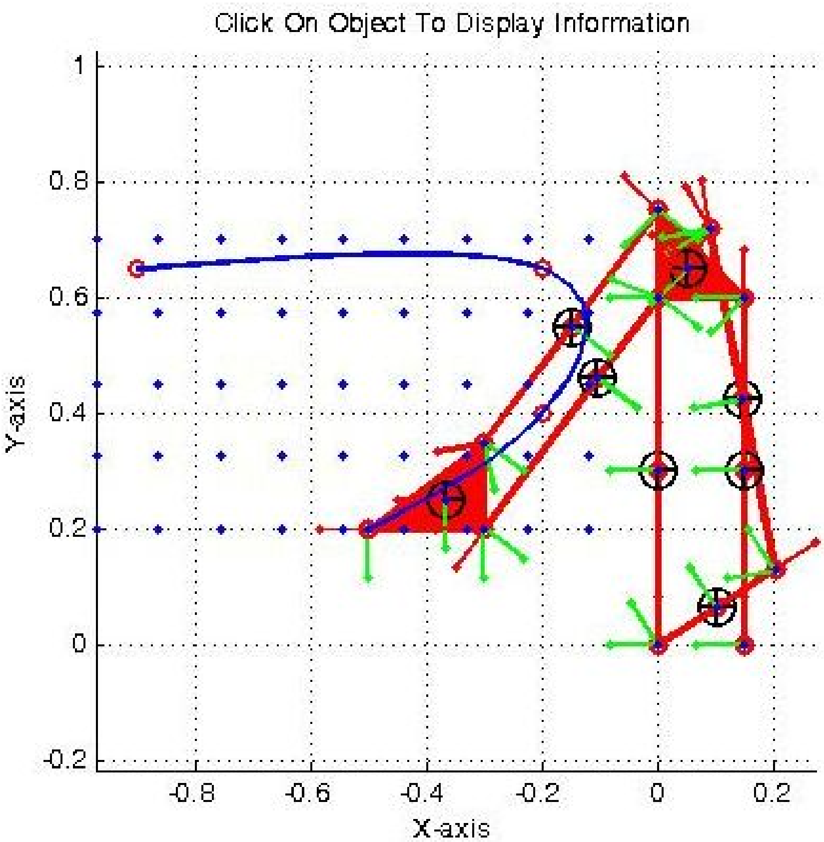
Obrázek 8 vyjadřuje hodnotu kriteriální funkce v bodech uvažovaného pracovního prostoru pro nominální hodnotu optimalizovaných parametrů $\boldsymbol{\xi}_{\text{opt}} = \boldsymbol{\xi}_{\text{C opt}}$. Minimální hodnota kriteriální funkce je:

$$\min_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{\text{opt}}} \left(J(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}_{\text{C opt}}) \right) = 5.4873 \cdot 10^{-4}$$

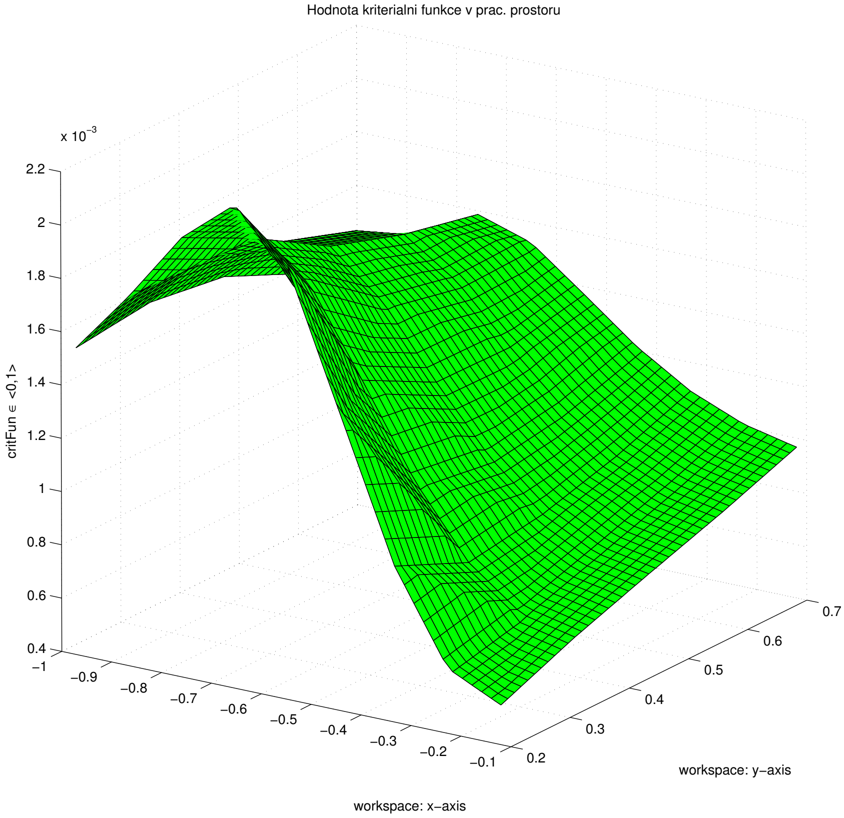
Vzhledem k nastaveným hodnotám penalizačních konstant je zřejmé, že v pracovním prostoru manipulátoru s nominální hodnotou kinematických parametrů nedochází k porušení nastavených omezení (včetně existence řešení IGM), tedy $J_{\text{pen}} = 0$, a převrácená hodnota kriteriální funkce je tak přímo rovna hodnotě účelové funkce $J_{\text{obj}} = \|\tau_{max}\|$ a odpovídá maximálnímu normě požadovaných momentů v aktuátorech manipulátoru.

$$\frac{1}{\min_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{\text{opt}}} \left(J(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}_{\text{C opt}}) \right)} = (J_{\text{obj}} = \|\tau_{max}\|) = 1822.4$$

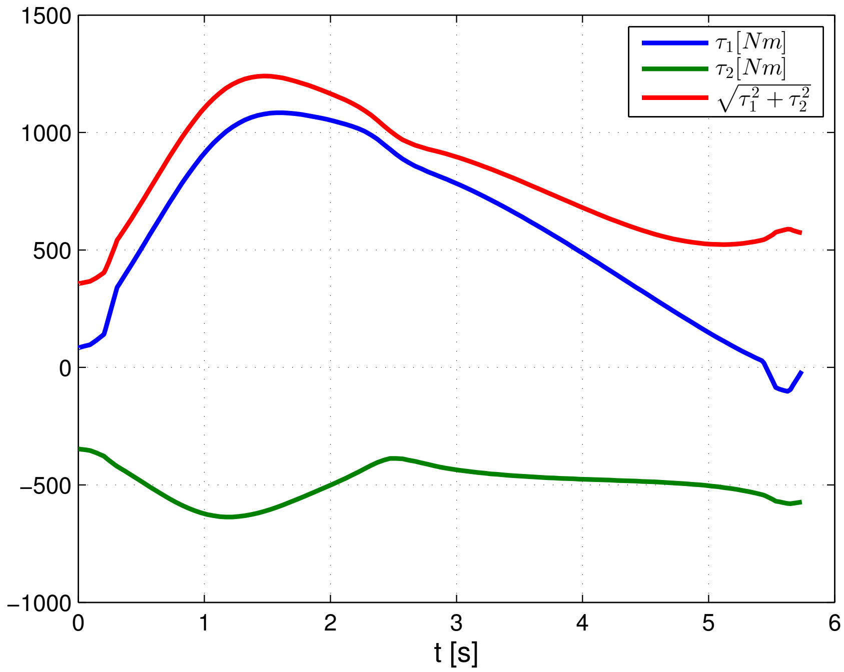
Jako příklad pohybu uvažujme trajektorii procházející 4 zvolenými body, viz Obrázek 7, s požadovaným lichoběžníkovým profilem rychlosti koncového efektoru manipulátoru podél této trajektorie odpovídající omezením na maximální rychlost $v_{max} = 0.25\frac{m}{s}$ a tečné zrychlení $a_{max} = 1\frac{m}{s^2}$ a odpovídající průběhy požadovaných momentů na aktuátorech a jejich odpovídající normy, viz Obrázek 9.



Obrázek 7: Požadovaný trajektorie v pracovním prostoru



Obrázek 8: Průběh hodnot kriteriální funkce podél diskretizovaného pracovního prostoru (v rovině $\boldsymbol{xy}$) pro nominální hodnotu parametrů $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C\ opt}}$.

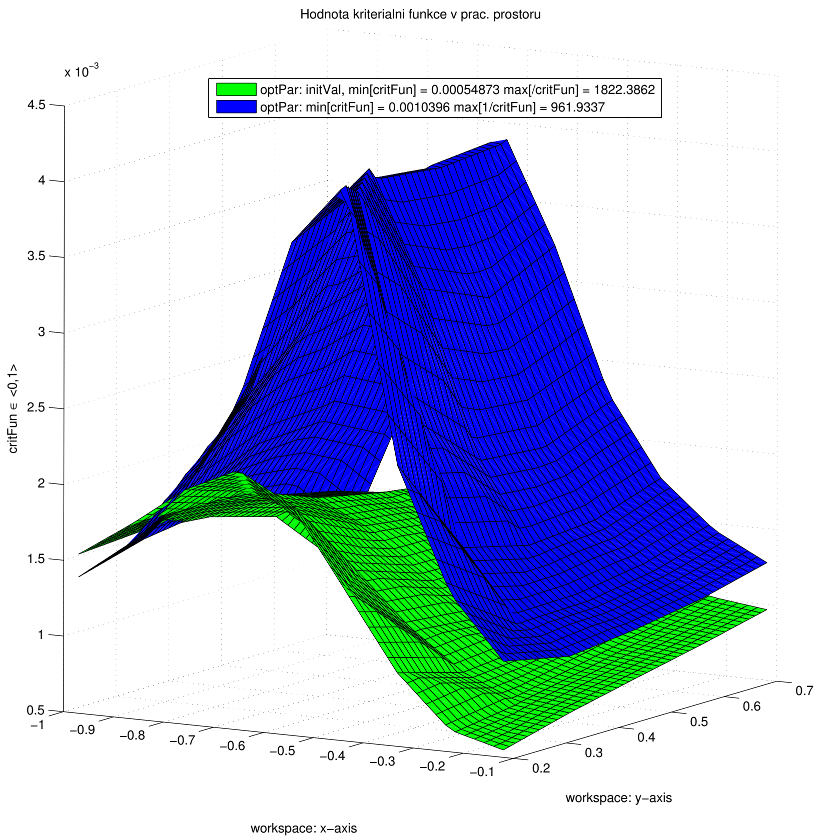


Obrázek 9: Průběh momentů na jednotlivých aktuátorech manipulátoru pro nominální hodnotu parametrů $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C\ opt}}$.

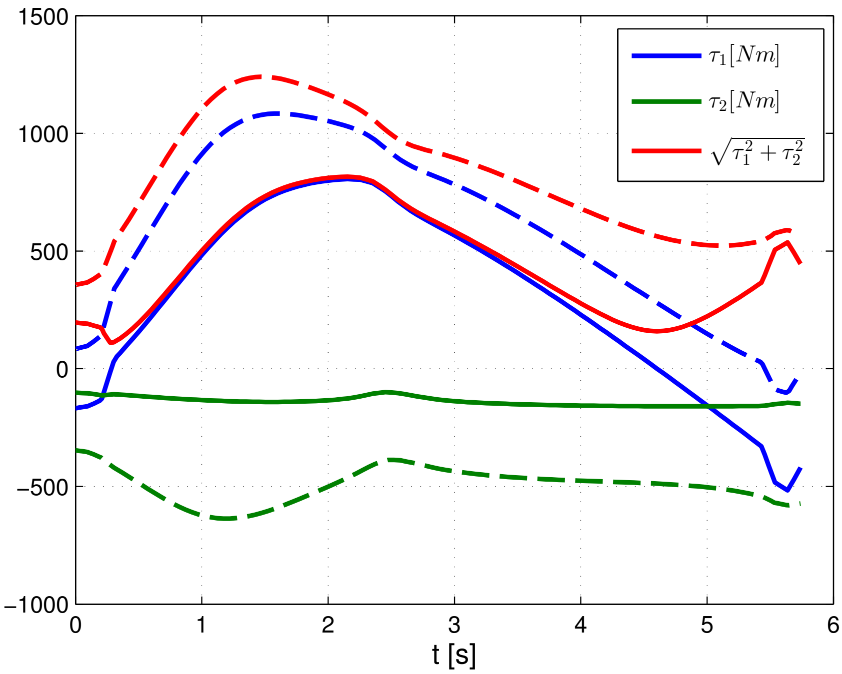
Následně byla provedena optimalizace kinematických návrhových parametrů (globální i lokální optimalizace). Výsledné parametry po optimalizaci jsou:

$$\boldsymbol{\xi}^{\star} = \begin{bmatrix} 0.5818 & 0.4902 & 0.1707 & 0.3396 & 0.5806 & 0.3516 & -0.4208 \end{bmatrix} \tag{65}$$

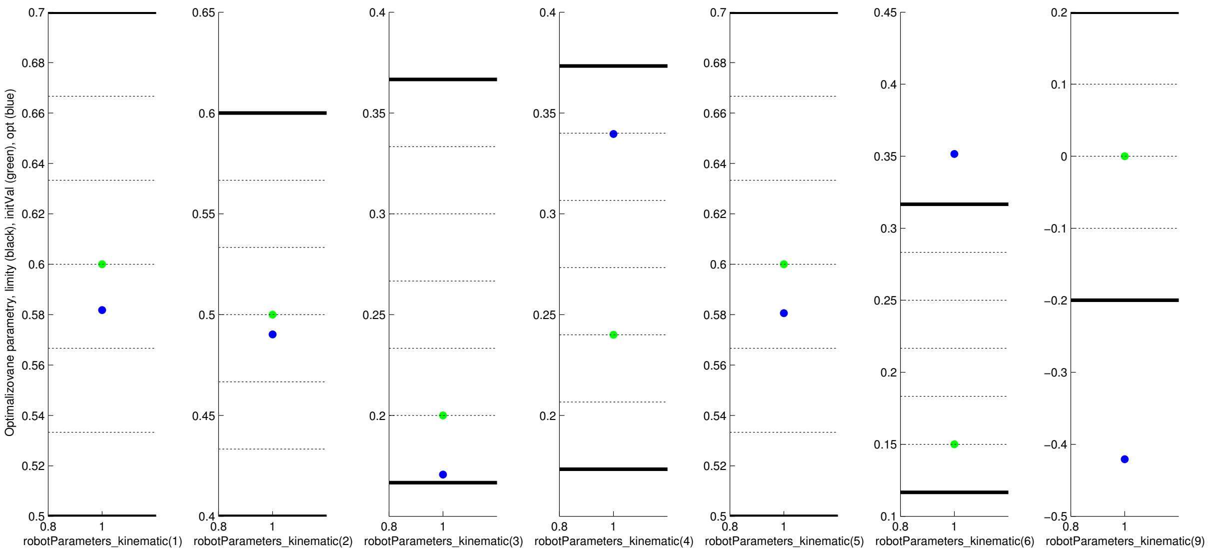
Grafické znázornění výsledků optimalizace je znázorněno na Obrázcích 10, 11, 12.



Obrázek 10: Průběh hodnot kriteriální funkce podél diskretizovaného pracovního prostoru (v rovině $\boldsymbol{xy}$): Porovnání mezi počáteční hodnotou parametrů $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C\ opt}}$ (zeleně) a hodnotou parametrů po optimalizaci $\boldsymbol{\xi}^{\star}$ (modře).



Obrázek 11: Průběh momentů na jednotlivých aktuátorech manipulátoru: Porovnání mezi počáteční hodnotou parametrů $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C\ opt}}$ (čárkovaně) a hodnotou parametrů po optimalizaci $\boldsymbol{\xi}^{\star}$ (plnou čarou).



Obrázek 12: Znázornění změny hodnot počátečních parametrů $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C\ opt}}$ (zeleně) a hodnot po optimalizaci $\boldsymbol{\xi}^{\star}$ (modře). Černě jsou zvýrazněny uvažované limity množin diskretizovaných přípustných návrhových kinematických parametrů $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{C}}[i] + \Delta\boldsymbol{\xi}[i] \cdot [n_{i_{min}}, n_{i_{max}}]$, $i = 1 \ldots 7$.

Minimální hodnota kriteriální funkce po lokální optimalizaci je:

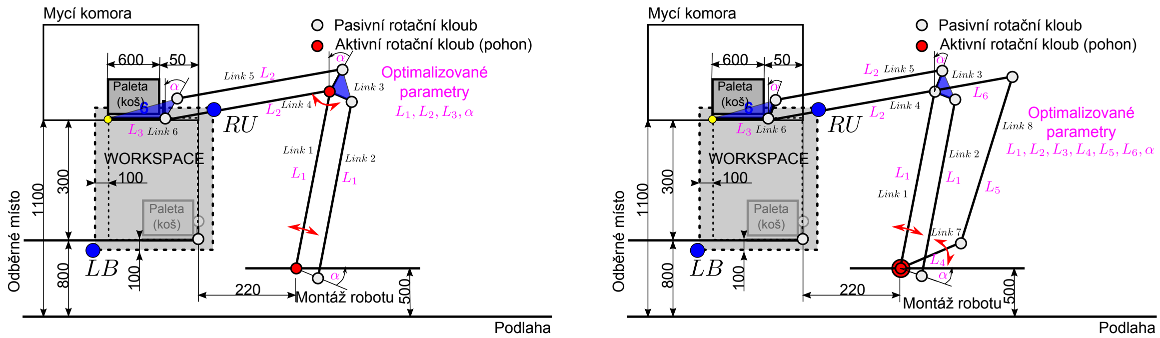
$$\min_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{\mathrm{opt}}} (J(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}^{\star}_{\mathrm{local}})) = 1.0396 \cdot 10^{-3}$$

Převrácená hodnota kriteriální funkce po lokální optimalizaci je:

$$\frac{1}{\min_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{\mathrm{opt}}} (J(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}^{\star}_{\mathrm{global}}))} = (J_{\mathrm{obj}} = \|\tau_{max}\|) = 961.9$$

Porovnání variant manipulátorů

Vraťme se nyní k hlavnímu cíli výzkumné zprávy a proveďme diskusi nad možnými výhodami či nevýhodami nahrazení **původního manipulátoru s neseným aktuátorem druhého ramene**, dále jen **PM**, viz Obrázek 1(a) a **modifikovaným manipulátorem s přidaným paralelním ramenem a aktuátorem druhého ramene umístěným na základně**, dále jen **MM**, viz Obrázek 1.



(a) Původní manipulátor (**PM**) (b) Modifikovaný manipulátor (**MM**)

Obrázek 13: Původní a modifikovaný manipulátor, purpurově zvýrazněny optimalizované kinematické návrhové parametry

Optimalizované kinematické parametry jsou pro obě varianty znázorněny na obrázcích a souhrnně je lze psát jako:

$$\boldsymbol{\xi}_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & \alpha \end{bmatrix}^T \tag{66}$$

U obou variant předpokládáme ramena z pevných tuhých kulatin o průměru $r_1 = 0.05m$ (ramena *Link* $1, 4, 7, 8$) resp. $r_2 = 0.03m$ (ramena *Link* $2, 5$). Ramena *Link* 3 resp *Link* 6 jsou realizována trojúhelníky tloušťky r_2 resp. r_1. Materiál ramen má hustotu ρ. V těžišti *Link* 3 (koncový efektor) je umístěno břemeno (hmotný bod) o hmotnosti $M = 50\,kg$. V případě **PM** hraje roli hmotnost M_{mot} neseného aktuátoru druhého ramene. Dynamické parametry jsou tak dány jako:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \rho & M & M_{\text{mot}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.03 & \rho & 50 & M_{\text{mot}} \end{bmatrix}^T \tag{67}$$

Uvažovanými (optimalizovanými) vlastnostmi manipulátoru pro dané hodnoty návrhových parametrů $\boldsymbol{\xi}_{\text{opt}}$ rozumíme minimální hodnotu kriteriální funkce podél celého pracovního prostoru manipulátoru J_{OW} (OW - Over Workspace):

$$J_{\text{OW}}(\boldsymbol{\xi}_{\text{opt}}) = \min_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{\text{opt}}} J(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}_{\text{opt}}) \tag{68}$$

Připomeňme, že převrácená hodnota J_{OW}^{-1} odpovídá maximální hodnotě normy momentů aktuátorů ($\sqrt{\tau_1^2 + \tau_1^2}$), v případě, že nejsou porušena omezení (k účelové funkci se nepřičítá funkce penalizační, vzhledem k vysokým hodnotám nastavených penalizačních konstant lze snadno pozorovat, kdy dojde k porušení: $J_{\text{OW}} \to 0$, neboť $J_{\text{pen}} \to +\infty$).

Je zřejmé, že pokud chceme porovnávat mezi sebou uvažované architektury manipulátorů (**PM** versus **MM**), je nezbytně nutné porovnávat mezi sebou vždy manipulátory, jejichž parametry jsou optimalizované vzhledem k danému kritériu, v našem případě tedy architektury s návrhovými kinematickými parametry, které vedou na maximální (optimální) hodnotu J_{OW}.

Cílem porovnání uvažovaných architektur manipulátorů je odpověď na otázku, za jakých podmínek (a jestli vůbec) je výhodné použít paralelní architekturu manipulátoru **MM** namísto původní

		a_nom = 1 (zrychleni v libovolném směru)				a_nom = 5 (zrychleni v libovolném směru)			
		rho = 7800 (ocel)		rho = 2800 (EN AW-2024-slitina hliníku)		rho = 7800 (ocel)		rho = 2800 (EN AW-2024-slitina hliníku)	
		rho = 7800 kg/m3, a = 1 m/s2		rho = 2800 kg/m3, a = 1 m/s2		rho = 7800 kg/m3, a = 5 m/s2		rho = 2800 kg/m3, a = 5 m/s2	
PM	**M_mot**	**J_ow**	**1/J_ow**	**J_ow**	**1/J_ow**	**J_ow**	**1/J_ow**	**J_ow**	**1/J_ow**
	0	0.0012496	800.2560819	0.0018148	551.0249063	0.00082755	1208.3862	0.0011938	837.6612498
	30	0.00112643	887.7604467	0.0015313	653.0399007	0.00067636	1478.502573	0.00095862	1043.166218
	60	0.000985804	1014.400326	0.0013115	762.4857034	0.00054687	1828.588147	0.00072493	1379.443532
MM		rho = 7800 kg/m3, a = 1 m/s2 (paralelní)		rho = 2800 kg/m3, a = 1 m/s2 (paralelní)		rho = 7800 kg/m3, a = 5 m/s2 (paralelní)		rho = 2800 kg/m3, a = 5 m/s2 (paralelní)	
		0.00103975	961.7696562	0.0019239	519.7775352	0.00068947	1450.38943	0.0013451	743.4391495

Tabulka 4: Výsledky optimalizací uvažovaných architektur manipulátorů - hodnoty kriteriální funkce J_{OW} resp. J_{OW}^{-1}

			a_nom = 1 (zrychleni v libovolném směru)		a_nom = 5 (zrychleni v libovolném směru)	
			rho = 7800 (ocel)	rho = 2800 (EN AW-2024-slitina hliníku)	rho = 7800 (ocel)	rho = 2800 (EN AW-2024-slitina hliníku)
			rho = 7800 kg/m3, a = 1 m/s2	rho = 2800 kg/m3, a = 1 m/s2	rho = 7800 kg/m3, a = 5 m/s2	rho = 2800 kg/m3, a = 5 m/s2
PM	0	L1 [m]	0.5945	0.5769	0.5962	0.5908
		L2 [m]	0.4127	0.4042	0.4241	0.4084
		L3 [m]	0.293	0.3016	0.2981	0.2933
		alpha [rad]	-0.0398	-0.1079	-0.1035	-0.0371
	30	L1 [m]	0.5872	0.5852	0.5927	0.6004
		L2 [m]	0.4318	0.4246	0.4579	0.4406
		L3 [m]	0.3066	0.3084	0.2613	0.2851
		alpha [rad]	-0.2055	-0.1857	-0.1092	-0.1034
	60	L1 [m]	0.5833	0.5889	0.5796	0.5652
		L2 [m]	0.4302	0.4288	0.4731	0.5624
		L3 [m]	0.2994	0.3066	0.235	0.1677
		alpha [rad]	-0.2189	-0.186	-0.1179	-0.3006
MM		L1 [m]	0.5818	0.5564	0.5577	0.5595
		L2 [m]	0.4902	0.4975	0.532	0.5018
		L3 [m]	0.1707	0.2081	0.1733	0.2061
		L4 [m]	0.3396	0.2036	0.2411	0.2048
		L6 [m]	0.5806	0.5613	0.5309	0.5633
		L6 [m]	0.3516	0.219	0.2259	0.219
		alpha [rad]	-0.4208	-0.2084	-0.2108	-0.206

Tabulka 5: Výsledky optimalizací uvažovaných architektur manipulátorů - nalezené optimální kinematické návrhové parametry $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{opt}}$

PM. Uvažujme proto tři uvažované hodnoty $M_{\mathrm{mot}} = \{0\,kg,\ 30\,kg,\ 60\,kg\}$ hmotnosti neseného aktuátoru (relevantní pro **PM**), dva typy materiálů, ze kterých jsou ramena manipulátorů vyrobena, a to železo ($\rho = 7800\,\frac{kg}{m^3}$) a výrazně lehčí slitinu hliníku známou pod označením EN AW-2024[7] ($\rho = 2800\,\frac{kg}{m^3}$), a dvě hodnoty požadovaného zrychlení $a_{nom} = \{1\,\frac{m}{s^2}, 5\,\frac{m}{s^2}\}$ koncového efektoru manipulátoru (v libovolném směru, z nulové rychlosti). Tabulka 5 shrnuje optimalizované hodnoty kinematických návrhových parametrů $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{opt}}$, Tabulka 4 potom odpovídající hodnoty kriteriální funkce J_{OW} podél pracovního prostoru pro všechny možné kombinace.

Shrňme, že význam hodnoty kritéria optimality J_{OW} je následující:

- Horší (ve smyslu maximální požadované normy momentu na aktuátorech) vlastnosti manipulátoru:

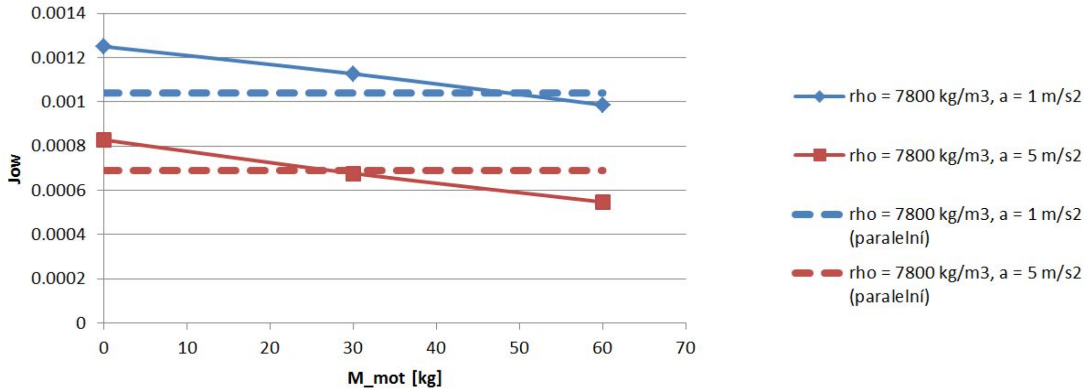
$$J_{\mathrm{OW}} \to 0 \Rightarrow J_{\mathrm{OW}}^{-1} = |\text{pro neporušení omezení, } J_{\mathrm{pen}} = 0| = \max_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{\mathrm{opt}}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_{\hat{1}}^2} \to +\infty$$

- Lepší (ve smyslu maximální požadované normy momentu na aktuátorech) vlastnosti manipulátoru:

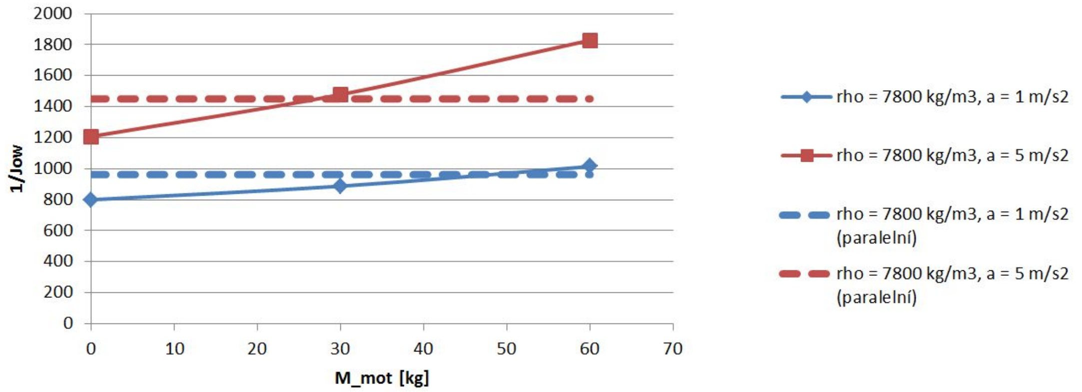
$$J_{\mathrm{OW}} \to +\infty \Rightarrow J_{\mathrm{OW}}^{-1} = |\text{pro neporušení omezení, } J_{\mathrm{pen}} = 0| = \max_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{X}_{\mathrm{opt}}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_{\hat{1}}^2} \to 0$$

[7]Slitina se obvykle využívá pro výrobu dopravních prostředků, zvláště pak v leteckém průmyslu, a také na výrobu šroubovaných produktů. Dále se využívá pro výrobu vědeckých nástrojů, veterinárních a ortopedických výztuh, a také pro nýtování, viz `http://www.begroup.com/`.

Grafické znázornění výsledků je reprezentováno grafy na Obrázcích 14, 15. V Grafech jsou znázorněna kritéria optimality J_{OW} resp. J_{OW}^{-1} v závislosti na hmotnosti M_{mot} neseného pohonu druhého ramene pro těžkou variantu manipulátoru (konstrukční materiál je železo), lehkou variantu manipulátoru (konstrukčním materiálem je slitina hliníku) a zároveň variantu s nízkými a vysokými požadavky na zrychlení koncového efektoru.

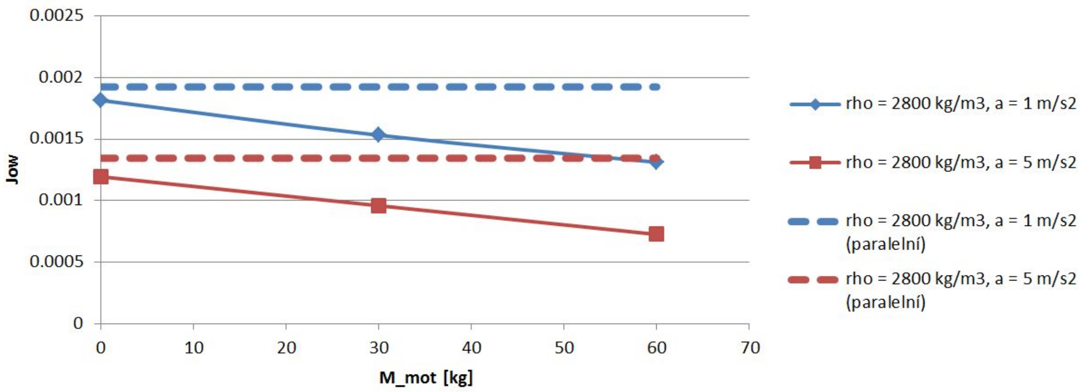


(a) Hodnota kritéria optimality J_{OW} pro optimální parametry.

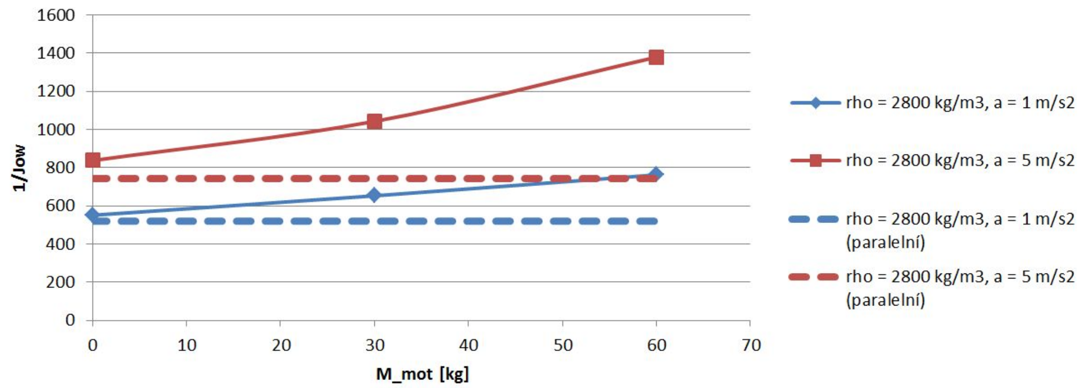


(b) Převrácená hodnota kritéria optimality J_{OW}^{-1} pro optimální parametry.

Obrázek 14: Výsledky pro **„těžkou" variantu manipulátoru**, $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$, plná čára odpovídá **PM**, čárkovaná **MM** (stejná pro všechny hmotnosti M_{mot} - **MM** má aktuátor fixovaný na základně).



(a) Hodnota kritéria optimality J_{OW} pro optimální parametry.



(b) Převrácená hodnota kritéria optimality J_{OW}^{-1} pro optimální parametry.

Obrázek 15: Výsledky pro **„lehkou" variantu manipulátoru**, $\rho = 2800\frac{kg}{m^3}$, plná čára odpovídá **PM**, čárkovaná **MM** (stejná pro všechny hmotnosti M_{mot} - **MM** má aktuátor fixovaný na základně).

6 Závěr

V uvedené zprávě byly porovnány dvě architektury manipulátoru určené pro ten samý účel (zakládání do mycích komor průmyslové myčky). Jednalo se o manipulátor s neseným aktuátorem druhého ramene (**PM**), viz Obrázek 1(a), 13(a) a modifikovaný manipulátor s přidaným paralelním ramenem a aktuátorem druhého ramene umístěným na základně (**MM**), viz Obrázek 1(b), 13(b). Kritériem optimality bylo minimalizovat (v normě) maximální silový moment na aktuátorech manipulátoru. Všechny varianty manipulátoru byly podrobeny optimalizaci svých kinematických návrhových parametrů a optimalizované manipulátory byly mezi sebou porovnány s následujícími výsledky:

- V případě „těžké varianty manipulátoru", kdy uvažujeme výrobu ramen manipulátoru ze železa je z Obrázku 14 zřejmé, že použít **MM** místo **PM** je výhodné až pro hmotnost použitého neseného pohonu M_{mot} převyšující hodnotu $50\,kg$ (pro malé požadavky na zrychlení koncového efektoru) a hodnotu $30\,kg$ (pro velké požadavky na zrychlení koncového efektoru).
- V případě „lehké varianty manipulátoru", kdy uvažujeme výrobu ramen manipulátoru ze slitiny hliníku je z Obrázku 15 zřejmé, že **použít MM místo PM je výhodné vždy**, a to i za předpokladu, **že nesený pohon by nic nevážil!** ($M_{\mathrm{mot}} = 0\,kg$)

Je tedy zřejmé, že využití paralelních struktur umožňující fixní umístění pohonů na základnu manipulátoru má praktický význam při konstrukci průmyslových manipulátorů.

Poděkování

Tento výzkum byl podpořen Technologickou agenturou České republiky z prostředků projektu Centra Kompetence CIDAM TE02000103.

Reference

[1] *Mechanism design for global isotropy with applications to haptic interfaces*, 1997, cited By (since 1996): 5.
URL www.scopus.com

[2] Alizade, R.; Bayram, C.: Structural synthesis of parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 39, č. 8, 2004: s. 857 – 870, ISSN 0094-114X, doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2004.02.008.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X04000539

[3] Denavit, J.; Hartenberg, R. S.: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, ročník 22, 1955: s. 215–221.
URL http://ci.nii.ac.jp/naid/10008019314/en/

[4] Hogben, L.: *Handbook of Linear Algebra*. Discrete Mathematics and Its Applications, CRC Press, 2006, ISBN 9781420010572.
URL https://books.google.cz/books?id=n2g-x1OIbvYC

[5] Khalil, W.; Dombre, E.: *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science paper edition, Elsevier Science, 2004, ISBN 9780080536613.
URL http://books.google.cz/books?id=nyrY0Pu5kl0C

[6] Khalil, W.; Ibrahim, O.: General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, ročník 49, č. 1, 2007: s. 19–37, ISSN 0921-0296, doi:10.1007/s10846-007-9137-x.
URL http://dx.doi.org/10.1007/s10846-007-9137-x

[7] Lagarias, J. C.; Reeds, J. A.; Wright, M. H.; aj.: Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, ročník 9, 1998: s. 112–147.

[8] Mark W. Spong, M. V., Seth Hutchinson: *Robot Modeling and Control*. Wiley, 2005.

[9] Merlet, J. P.: Kinematics' not dead! In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, ročník 1, 2000, ISSN 1050-4729, s. 1–6 vol.1, doi:10.1109/ROBOT.2000.844031.

[10] Merlet, J.-P.: Interval Analysis and Reliability in Robotics. Březen 2006.
URL http://hal.inria.fr/inria-00001152

[11] Merlet, J.-P.: Interval analysis for Certified Numerical Solution of Problems in Robotics. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, ročník -, 2009: s. –.
URL http://hal.inria.fr/inria-00362431

[12] Reklaitis, G.; Ravindran, A.; Ragsdell, K.: *Engineering Optimization: Methods and Applications*. A Wiley-Interscience Publication, Wiley, 1983, ISBN 9780471055792.
URL https://books.google.cz/books?id=Tj6NJGvk7b4C

[13] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer London, 2000, ISBN 9781852332211.
URL http://books.google.fr/books?id=v9PLbcYd9aUC

[14] The MathWorks, I.: Matlab (Simulink, SimMechanics).
URL http://www.mathworks.com/

[15] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni (online: http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2011/rigo.pdf), 2011.

[16] Švejda, M.: Úvod do robotiky a mechatronicky. Přednášky k předmětu, 2012. URL http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/

[17] Švejda, M.: Kinematical, kinetostatical and dynamical analysis of 4DoF manipulator, parametric optimization of mechanical construction (WP5-DV026). Technická zpráva, NTIS, ZČU v Plzni, 2015.

[18] Švejda, M.: *Optimalizace robotických architektur*. Dizertační práce, Západočeská univerzita v Plzni, 2016.