

TAČR Centrum kompetence CIDAM

Návrh, řízení a optimalizace manipulátoru do průmyslových
myček („vodník“)

Výzkumná zpráva DV068

Martin Švejda

14. září 2017

T A
Č R



Abstrakt

Technická zpráva se zabývá návrhem architektury a řízením specifického manipulátoru, který má být umístěn do vnitřních prostor oplachovací komory průmyslové mycí linky. Standardní varianta navrženého manipulátoru je rozšířena o další aktuátor (lineární výtah) za účelem zvětšení pracovního prostoru manipulátoru. Specifický plánovač trajektorie pohybu manipulátoru je navržen pro optimalizaci pohybu na základě splnění požadavků na minimalizaci kloubových přejezdů a vyloučení (omezení) kolizí manipulátoru s technologickým dílem či komorou samotnou. V rámci práce byla provedena parametrická optimalizace standardní varianty manipulátoru (minimalizace momentového zatížení aktuátorů).

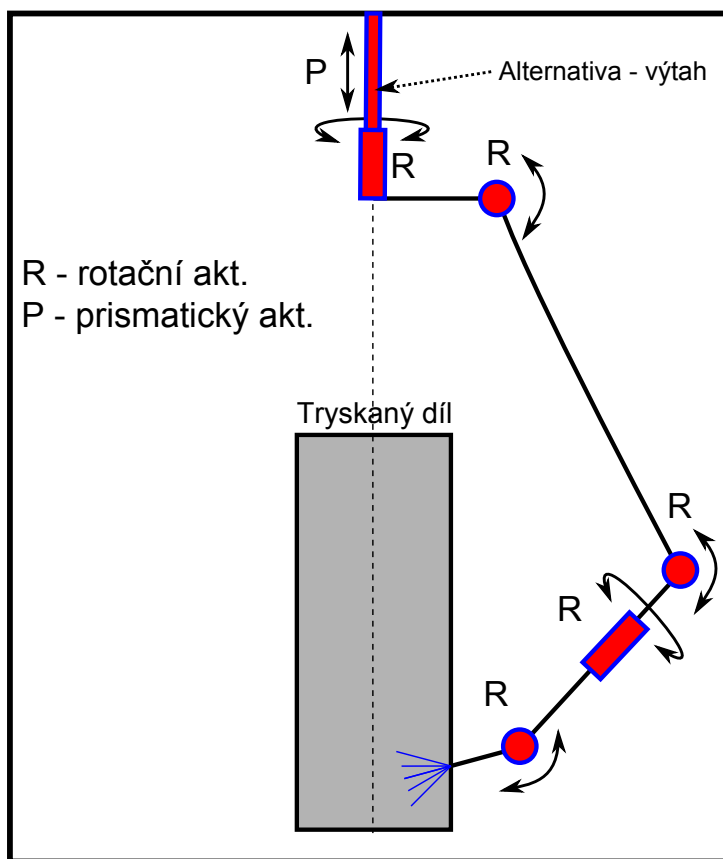
Obsah

1	Úvod	4
2	Virtuální simulační model manipulátoru	4
2.1	Model standardní varianty manipulátoru	5
2.2	Model redundantní varianty manipulátoru	10
3	Generátor trajektorie koncového efektoru (zjednodušený model tryskaného dílu)	15
4	Řízení pohybu manipulátoru	17
5	Simulační výsledky	22
5.1	Standardní manipulátor	23
5.2	Redundantní manipulátor	27
6	Závěr	31

1 Úvod

Předložená technická zpráva zahrnuje prvotní analýzu návrhu a možnosti řízení sériového manipulátoru speciální konstrukce určeného k polohování oplachovací trysky uvnitř mycích komor průmyslových myček. Předpokládá se, že výsledné provedení manipulátoru bude umožňovat jeho zavěšení na strop do vnitřních prostor mycí komory. Schématické uspořádání manipulátoru je znázorněno na Obrázku 1. Cílem předložené zprávy je:

- Analýza provedení (včetně dílčí parametrické optimalizace) manipulátoru ve třech velikostech (řadách) určeného pro tryskání třech obecných (zjednodušených, modelových) součástí
- Zobecnění manipulátoru přidáním redundantního aktuátoru (lineární výtah) za účelem docílení univerzálního zařízení pro širokou škálu tryskaných součástí
- Návrh vhodného řízení manipulátoru



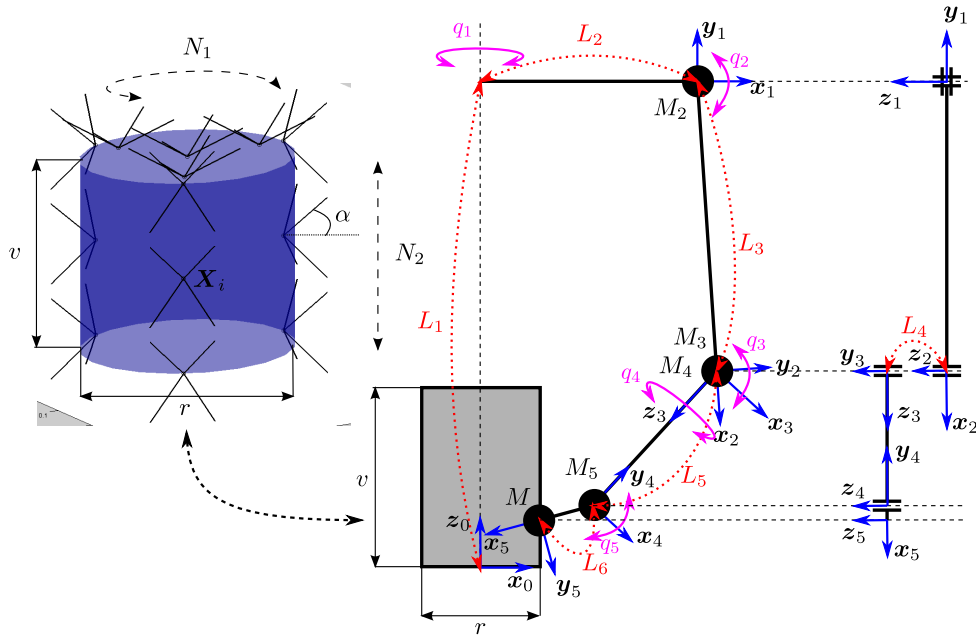
Obrázek 1: Navrhovaný robot v mycí komoře průmyslové myčky

2 Virtuální simulační model manipulátoru

Zabývejme se nyní vytvořením virtuálního simulačního modelu manipulátoru ve variantě s 5 DoF, dále jen **standardní varianta** a v rozšířené (redundantní) variantě s uvažováním výtahu (6 DoF), dále jen **redundantní varianta**. Simulační model byl realizován v prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics, viz [4]. Kinematický popis manipulátoru je založen na standardním kinematickém popisu manipulátoru Denavit-Hartenbergovou (DH) úmluvou, viz [5, 6].

2.1 Model standardní varianty manipulátoru

Schématické uspořádání souřadných systémů (s.s.) manipulátoru je znázorněno na Obrázku 2. Tabulka 1 shrnuje hodnoty DH parametrů manipulátoru.



Obrázek 2: Zavedení s.s. manipulátoru dle DH úmluvy, definice koincidenčních bodů (a směrů) na zjednodušeném modelu tryskané součásti

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	L_1	θ_1	L_2	$\frac{\pi}{2}$
2	0	θ_2	L_3	0
3	L_4	θ_3	0	$\frac{\pi}{2}$
4	L_5	θ_4	0	$-\frac{\pi}{2}$
5	0	θ_5	L_6	0

Tabulka 1: DH parametry manipulátoru (standardní varianta)

Kinematické návrhové parametry (délky ramen robotu):

$$\xi = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4 \ L_5 \ L_6]^T \quad (1)$$

Kloubové souřadnice (polohy aktuátorů):

$$Q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5]^T \quad (2)$$

Zobecněné souřadnice (poloha a orientace koncového efektoru)¹

$$X = \begin{bmatrix} O_5^0 \\ x_5^0 \end{bmatrix}, \quad \|x_5^0\| = 1 \quad (3)$$

kde O_5^0 je umístění počátku s.s. F_5 (poloha konce trysky) a x_5^0 je jednotkový směrový vektor osy x_5 (orientace trysky). Poznamenejme, že zobecněné souřadnice obsahují tedy pouze 5 nezávislých proměnných (s 5 nezávislými aktuátory $q_{1..5}$ se tak zřejmě jedná o **neredundantní** manipulátor).

¹Značení bodu/vektoru/matice x_i^j reprezentuje bod/vektor/matici x_i jejíž souřadnice (prvky) jsou vyjádřeny vzhledem k s.s. F_j .

Přímá kinematická úloha - standardní varianta

Přímá kinematická úloha je dána standardním přístupem skládání transformací mezi zavedenými s.s. reprezentované postupným násobením homogenních transformačních matic² T_i^{i-1} :

$$\mathbf{T}_5^0 = \prod_{i=1}^5 \mathbf{T}_i^{i-1}(d_i, \theta_i, a_i, \alpha_i), \quad \mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O}_5^0 = \mathbf{T}_5^0[1 : 3, 4], \quad \mathbf{x}_5^0 = \mathbf{T}_5^0[1 : 3, 3], \quad \mathbf{R}_5^0 = \mathbf{T}_5^0[1 : 3, 1 : 3] \quad (4)$$

Okamžitá přímá kinematická úloha (závislosti rychlostí a zrychlení) lze odvodit ze známého vztahu mezi rychlostmi zobecněných a kloubových souřadnic:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_5^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_5^0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_5^0 \\ \ddot{\boldsymbol{\omega}}_5^0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \quad (5)$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ resp. $\dot{\mathbf{J}}(\dot{\mathbf{Q}}, \mathbf{Q})$ je kinematický jakobián manipulátoru resp. jeho časová derivace, která lze systematicky odvodit přímo z hodnot prvků homogenních transformačních matic, podrobnosti lze nalézt v [6].

Vlastní přímou okamžitou kinematickou úlohu pro rychlosti a zrychlení translačního pohybu, tedy počátku \mathbf{O}_5^0 s.s. F_5 , lze tak stanovit přímo ze vztahů (5), rychlost/zrychlení směrového vektoru \mathbf{x}_5^0 lze vypočítat s pomocí známého vztahu transformace úhlových rychlostí/zrychlení $\boldsymbol{\omega}_5^0, \dot{\boldsymbol{\omega}}_5^0$ a časových derivací prvků matice rotace $\mathbf{R}_5^0, \dot{\mathbf{R}}_5^0$:

$$\dot{\mathbf{R}}_5^0 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_5^0) \cdot \mathbf{R}_5^0, \quad \ddot{\mathbf{R}}_5^0 = (\mathbf{S}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_5^0) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_5^0) \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_5^0)) \cdot \mathbf{R}_5^0, \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}[3] & \boldsymbol{\omega}[2] \\ \boldsymbol{\omega}[3] & 0 & -\boldsymbol{\omega}[1] \\ -\boldsymbol{\omega}[2] & \boldsymbol{\omega}[1] & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_5^0 = \dot{\mathbf{R}}_5^0[1 : 3, 1], \quad \ddot{\mathbf{x}}_5^0 = \ddot{\mathbf{R}}_5^0[1 : 3, 1] \quad (6)$$

Inverzní kinematická úloha - standardní varianta

Závislosti polohy kloubových souřadnic \mathbf{Q} na poloze zobecněných souřadnic \mathbf{X} (poloze koncového efektoru) lze vyjádřit následujícím algoritmem:

♦ Algoritmus 1 (Inverzní kinematika - standardní varianta)

Vstup:

Poloha, rychlost, zrychlení zobecněných souřadnic

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_5^0 \\ \mathbf{x}_5^0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_5^0 \\ \dot{\mathbf{x}}_5^0 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_5^0 \\ \ddot{\mathbf{x}}_5^0 \end{bmatrix}$$

Výstup:

Polohy, rychlost, zrychlení kloubových souřadnic:

$$\mathbf{Q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T, \quad \dot{\mathbf{Q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4 \ \dot{q}_5]^T, \quad \ddot{\mathbf{Q}} = [\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \ddot{q}_3 \ \ddot{q}_4 \ \ddot{q}_5]^T$$

Algoritmus pro závislosti POLOHY:

²Označení $\mathbf{O}[a : b, c : d]$ je výběr a -tého až b -tého řádku a c -tého až d -tého sloupce matice/vektoru \mathbf{O} .

1. Kloubová souřadnice θ_1 (2 řešení):

Známe souřadnice bodu \mathbf{O}_4^0 :

$$\mathbf{O}_4^0 = \mathbf{O}_5^0 - L_6 \cdot \mathbf{x}_5^0 \quad (7)$$

A řešením rovnice dané průmětem bodu \mathbf{O}_4^0 do směru osy \mathbf{z}_2^0 :

$$\sin(\theta_1)\mathbf{O}_4^0[1] - \cos(\theta_1)\mathbf{O}_4^0[2] = L_4$$

dostáváme:

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1) &= \frac{\pm \mathbf{O}_4^0[2] \sqrt{\mathbf{O}_4^0[1]^2 (\mathbf{O}_4^0[2]^2 + \mathbf{O}_4^0[1]^2 - L_4^2)} + L_4 \mathbf{O}_4^0[1]^2}{(\mathbf{O}_4^0[2]^2 + \mathbf{O}_4^0[1]^2) \mathbf{O}_4^0[1]} \\ \cos(\theta_1) &= \frac{-\mathbf{O}_4^0[2] L_4 \pm \sqrt{\mathbf{O}_4^0[1]^2 (\mathbf{O}_4^0[2]^2 + \mathbf{O}_4^0[1]^2 - L_4^2)}}{\mathbf{O}_4^0[2]^2 + \mathbf{O}_4^0[1]^2} \\ \theta_1 &= \text{atan2}(\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)) \end{aligned} \quad (8)$$

2. Kloubová souřadnice θ_3 (2 řešení):

Nyní známe souřadnice bodu \mathbf{O}_4^1 :

$$\mathbf{O}_4^1 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1)\mathbf{O}_4^0[2] - L_2 + \mathbf{O}_4^0[1] \cos(\theta_1) \\ \mathbf{O}_4^0[3] - L_1 \\ \sin(\theta_1)\mathbf{O}_4^0[1] - \cos(\theta_1)\mathbf{O}_4^0[2] \end{bmatrix}$$

a ze symbolického tvaru bodu \mathbf{O}_4^1

$$\mathbf{O}_4^1 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2 + \theta_3)L_5 + \cos(\theta_2)L_3 \\ -L_5 \cos(\theta_2 + \theta_3) + \sin(\theta_2)L_3 \\ L_4 \end{bmatrix}$$

lze snadno ukázat, že platí (součet kvadrátů prvních dvou složek bodu):

$$\begin{aligned} \sin(\theta_3) &= \frac{(\mathbf{O}_4^1[1 : 2])^T \cdot \mathbf{O}_4^1[1 : 2] - L_3^2 - L_5^2}{2L_3L_5}, \quad \cos(\theta_3) = \pm \sqrt{1 - \sin(\theta_3)^2} \\ \theta_3 &= \text{atan2}(\sin(\theta_3), \cos(\theta_3)) \end{aligned} \quad (9)$$

3. Kloubová souřadnice θ_2 :

Pro nyní známou hodnotu θ_3 lze z porovnání prvních dvou složek bodu \mathbf{O}_4^1 nalézt (řešením lineární soustavy rovnic):

$$\begin{aligned} \sin(\theta_2) &= \frac{L_5 \sin(\theta_3)\mathbf{O}_4^1[2] + L_3\mathbf{O}_4^1[2] + \mathbf{O}_4^1[1]L_5 \cos(\theta_3)}{L_5^2 + 2L_5L_3 \sin(\theta_3) + L_3^2} \\ \cos(\theta_2) &= \frac{-\mathbf{O}_4^1[2]L_5 \cos(\theta_3) + \mathbf{O}_4^1[1]L_5 \sin(\theta_3) + \mathbf{O}_4^1[1]L_3}{L_5^2 + 2L_5L_3 \sin(\theta_3) + L_3^2} \\ \theta_2 &= \text{atan2}(\sin(\theta_2), \cos(\theta_2)) \end{aligned} \quad (10)$$

4. Kloubové souřadnice θ_4, θ_5 :

Z nyní již známé hodnoty matice rotace $\mathbf{R}_3^0 = \mathbf{R}_3^0(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathbf{T}_3^0[1 : 3, 1 : 3]$ lze vypočítat hodnotu směrového vektoru \mathbf{x}_5^3 (vzhledem k s.s. F_3) ze zadané (známé) hodnoty \mathbf{x}_5^0

(vzhledem k s.s. F_5). Porovnáním vektoru s jeho symbolickým vyjádřením pak dostáváme hledané kloubové souřadnice:

$$\mathbf{x}_5^3 = (\mathbf{R}_3^0)^T \cdot \mathbf{x}_5^0 \stackrel{!}{=} \mathbf{T}_5^3(\theta_4, \theta_5)[1 : 3, 1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \\ \sin(\theta_4) \cos(\theta_5) \\ -\sin(\theta_5) \end{bmatrix}$$

Kloubová souřadnice θ_5 (2 řešení):

$$\begin{aligned} \sin(\theta_5) &= -\mathbf{x}_5^3[3], \quad \cos(\theta_5) = \pm \sqrt{(\mathbf{x}_5^3[1 : 2])^T \cdot \mathbf{x}_5^3[1 : 2]} \\ \theta_5 &= \text{atan2}(\sin(\theta_5), \cos(\theta_5)) \end{aligned} \quad (11)$$

Kloubová souřadnice θ_4 :

Z porovnání známé a symbolické hodnoty vektoru \mathbf{x}_5^3 lze dostat:

$$\begin{aligned} \sin(\theta_4) &= \frac{\mathbf{x}_5^3[2]}{\cos(\theta_5)}, \quad \cos(\theta_4) = \frac{\mathbf{x}_5^3[1]}{\cos(\theta_5)} \\ \theta_4 &= \text{atan2}(\sin(\theta_4), \cos(\theta_4)) \end{aligned} \quad (12)$$

Celkem tedy existuje 6 izolovaných řešení, viz rovnice (8, 9, 11) inverzní kinematiky pro polohy kloubové souřadnice $\theta_1, \theta_3, \theta_5$, dále je budeme rozlišovat parametrem *sol*:

$$\text{sol} = [i, j, k] \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro } \theta_1 : \quad i &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \begin{bmatrix} \sin(\theta_1) = \frac{+\mathcal{O}_4^0[2]\sqrt{\mathcal{O}_4^0[1]^2(\mathcal{O}_4^0[2]^2+\mathcal{O}_4^0[1]^2-L_4^2)}+L_4\mathcal{O}_4^0[1]^2}{(\mathcal{O}_4^0[2]^2+\mathcal{O}_4^0[1]^2)\mathcal{O}_4^0[1]} \\ \cos(\theta_1) = \frac{-\mathcal{O}_4^0[2]L_4+\sqrt{\mathcal{O}_4^0[1]^2(\mathcal{O}_4^0[2]^2+\mathcal{O}_4^0[1]^2-L_4^2)}}{\mathcal{O}_4^0[2]^2+\mathcal{O}_4^0[1]^2} \end{bmatrix} \\ 2 & \text{pro } \begin{bmatrix} \sin(\theta_1) = \frac{-\mathcal{O}_4^0[2]\sqrt{\mathcal{O}_4^0[1]^2(\mathcal{O}_4^0[2]^2+\mathcal{O}_4^0[1]^2-L_4^2)}+L_4\mathcal{O}_4^0[1]^2}{(\mathcal{O}_4^0[2]^2+\mathcal{O}_4^0[1]^2)\mathcal{O}_4^0[1]} \\ \cos(\theta_1) = \frac{-\mathcal{O}_4^0[2]L_4-\sqrt{\mathcal{O}_4^0[1]^2(\mathcal{O}_4^0[2]^2+\mathcal{O}_4^0[1]^2-L_4^2)}}{\mathcal{O}_4^0[2]^2+\mathcal{O}_4^0[1]^2} \end{bmatrix} \end{cases} \\ \text{Pro } \theta_3 : \quad j &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \cos(\theta_3) = +\sqrt{1 - \cos(\theta_3)^2} \\ 2 & \text{pro } \cos(\theta_3) = -\sqrt{1 - \cos(\theta_3)^2} \end{cases} \\ \text{Pro } \theta_5 : \quad k &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \cos(\theta_5) = +\sqrt{(\mathbf{x}_5^3[1 : 2])^T \cdot \mathbf{x}_5^3[1 : 2]} \\ 2 & \text{pro } \cos(\theta_5) = -\sqrt{(\mathbf{x}_5^3[1 : 2])^T \cdot \mathbf{x}_5^3[1 : 2]} \end{cases} \end{aligned}$$

Algoritmus pro závislosti RYCHLOSTI, ZRYCHLENÍ:

Obecný vztah (5) mezi závislostmi rychlostí/zrychlení lze s pomocí vztahů (6) upravit následovně:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_5^0) \cdot \mathbf{R}_5^0 = \dot{\mathbf{R}}_5^0 \Rightarrow \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_5^0) \cdot \mathbf{x}_5^0 = \dot{\mathbf{x}}_5^0 \Rightarrow \mathbf{S}(-\mathbf{x}_5^0) \cdot \boldsymbol{\omega}_5^0 = \dot{\mathbf{x}}_5^0 \quad (14)$$

Tedy:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_5^0 \\ \dot{\mathbf{x}}_5^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(-\mathbf{x}_5^0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_5^0 \\ \boldsymbol{\omega}_5^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(-\mathbf{x}_5^0) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (15)$$

Skutečný kinematický jakobián manipulátoru \hat{J} (a jeho časová derivace) vztahující rychlostní závislosti s reálně reprezentovanými rychlostmi - orientace - koncového efektoru je tedy dána jako:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_5^0 \\ \dot{\mathbf{x}}_5^0 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(-\mathbf{x}_5^0) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \\ \ddot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_5^0 \\ \ddot{\mathbf{x}}_5^0 \end{bmatrix} = \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}, \quad \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(-\mathbf{x}_5^0) \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(-\dot{\mathbf{x}}_5^0) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q})\end{aligned}\quad (16)$$

Poznamenejme, že složky vektoru \mathbf{x}_5^0 jsou závislé $\|\mathbf{x}_5^0\| = 1$, stejně tak jako složky vektoru $\dot{\mathbf{x}}_5^0$, neboť platí:

$$(\mathbf{x}_5^0)^T \cdot \dot{\mathbf{x}}_5^0 = (\mathbf{x}_5^0)^T \cdot \mathbf{S}(-\mathbf{x}_5^0) \cdot \omega_5^0 = \omega_5^0 \cdot (\mathbf{S}(-\mathbf{x}_5^0))^T \cdot \mathbf{x}_5^0 = \omega_5^0 \cdot \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{x}_5^0) \cdot \mathbf{x}_5^0}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0} \quad (17)$$

a vektory \mathbf{x}_5^0 a $\dot{\mathbf{x}}_5^0$ jsou tak vzájemně kolmé.

Zřejmě tedy platí, že jakobián $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})$ je přirozeně singulární maticí (i v případě nesingulární konfigurace manipulátoru), což je způsobeno právě neminimálním výběrem (závislé prvky) reprezentace orientace \mathbf{x}_5^0 (singularity v reprezentaci orientace).

Pro výpočet inverzní kinematiky pro rychlosti a zrychlení je však nutno invertovat jakobián $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})$. Vzhledem k závislosti jeho řádků, lze (navíc s ohledem na numerickou přesnost) jeho inverzi počítat po vypuštění příslušného (závislého) řádku následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pro: } (\mathbf{x}_5^0[1])^2 &\geq (\mathbf{x}_5^0[2])^2 + (\mathbf{x}_5^0[3])^2 \Rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[(1 : 3, 5 : 6), :] \\ &\Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})[(1 : 3, 5 : 6), :]\end{aligned}$$

A odpovídající kloubové rychlosti/zrychlení:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}} &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})\right)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}}[1 : 3, 5 : 6] \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})\right)^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}}[1 : 3, 5 : 6] - \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}\right)\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}\text{Pro: } (\mathbf{x}_5^0[2])^2 &\geq (\mathbf{x}_5^0[1])^2 + (\mathbf{x}_5^0[3])^2 \Rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[(1 : 4, 6), :] \\ &\Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}) \rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q})[(1 : 4, 6), :]\end{aligned}$$

A odpovídající kloubové rychlosti/zrychlení:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}} &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})\right)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}}[1 : 4, 6] \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})\right)^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}}[1 : 4, 6] - \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}\right)\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}\text{Pro: } (\mathbf{x}_5^0[3])^2 &\geq (\mathbf{x}_5^0[1])^2 + (\mathbf{x}_5^0[2])^2 \Rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[1 : 5, :] \\ &\Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}) \rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q})[1 : 5, :]\end{aligned}$$

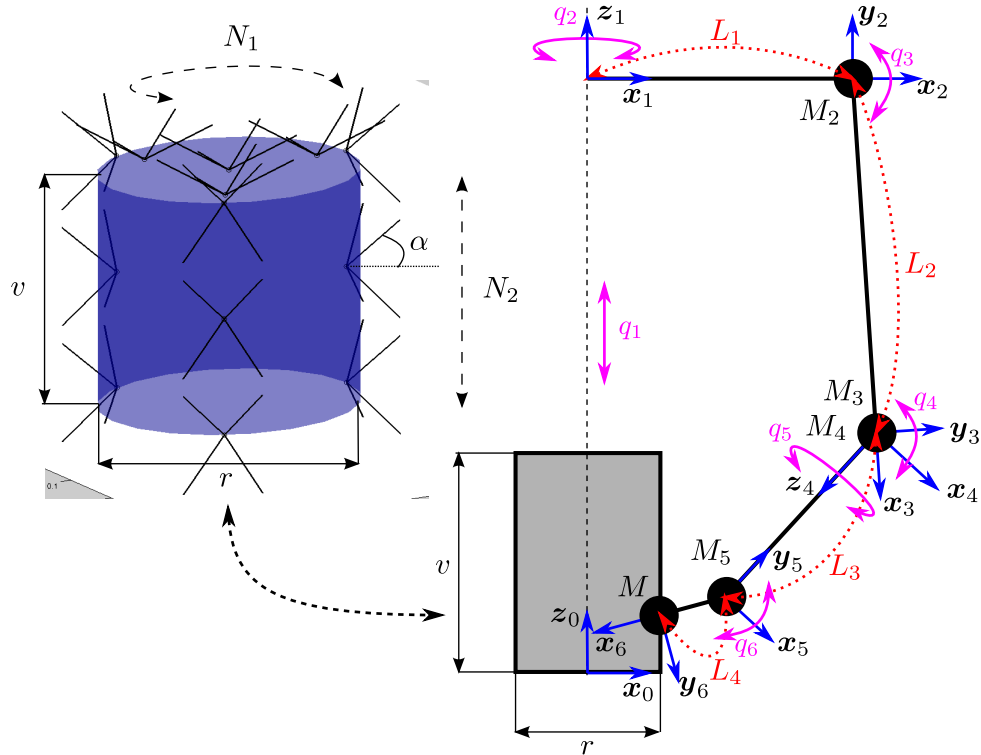
A odpovídající kloubové rychlosti/zrychlení:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}} &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})\right)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{X}}[1 : 5] \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})\right)^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}}[1 : 5] - \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}\right)\end{aligned}\quad (20)$$

◆

2.2 Model redundantní varianty manipulátoru

Redundantní varianta manipulátoru je od standardní varianty rozšířena o lineární aktuátor (výtah) umožňující polohovat první kloub standardního manipulátoru ve směru osy z_0 . Schématické uspořádání souřadných systémů (s.s.) manipulátoru je znázorněno na Obrázku 3. Tabulka 2 shrnuje hodnoty DH parametrů manipulátoru.



Obrázek 3: Zavedení s.s. manipulátoru dle DH úmluvy, definice koincidenčních bodů (a směrů) na zjednodušeném modelu tryskané součásti

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	d_1	0	0	0
2	0	θ_2	L_1	$\frac{\pi}{2}$
3	0	θ_3	L_2	0
4	0	θ_4	0	$\frac{\pi}{2}$
5	L_3	θ_5	0	$-\frac{\pi}{2}$
6	0	θ_6	L_4	0

Tabulka 2: DH parametry manipulátoru (redundantní varianta)

Poznamenejme, že v případě redundantního manipulátoru je volena mírně odlišná konstrukce, kdy dochází k zarovnání ve čtvrtém aktuátoru (ve standardní variantě manipulátoru tato změna odpovídá volbě parametru $L_4 = 0$, viz Tabulka 1). Taková změna je konstrukčně poměrně snadno proveditelná vhodným natvarováním ramene za čtvrtým aktuátorem, nicméně v případě navrženého řízení redundantního manipulátoru, kdy je dopočítávána poloha redundantní souřadnice $q_1 = d_1$ takovým způsobem, aby byla dodržena omezení na pohyb manipulátoru, viz Kapitola 4, je tato změna natolik zásadní, že již úlohu nelze rozumně počítat.

Kinematické návrhové parametry (délky ramen robotu):

$$\xi = [L_1 \ L_2 \ L_3 \ L_4]^T \quad (21)$$

Kloubové souřadnice (polohy aktuátorů):

$$\mathbf{Q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T = [d_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5 \ \theta_6]^T \quad (22)$$

Zobecněné souřadnice (poloha a orientace koncového efektoru):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_6^0 \\ \mathbf{x}_6^0 \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{x}_6^0\| = 1 \quad (23)$$

kde \mathbf{O}_6^0 je umístění počátku s.s. F_6 (poloha konce trysky) a \mathbf{x}_6^0 je jednotkový směrový vektor osy \mathbf{x}_6 (orientace trysky). Poznamenejme, že zobecněné souřadnice obsahují tedy opět pouze 5 nezávislých proměnných (s 6 nezávislými aktuátory $q_{1...6}$ se tak zřejmě jedná o **redundantní** manipulátor).

Přímá kinematická úloha - redundantní varianta

Přímá kinematická úloha je dána analogicky jako v případě standardní varianty manipulátoru:

$$\mathbf{T}_6^0 = \prod_{i=1}^6 \mathbf{T}_i^{i-1}(d_i, \theta_i, a_i, \alpha_i), \quad \mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{O}_6^0 = \mathbf{T}_6^0[1 : 3, 4], \quad \mathbf{x}_6^0 = \mathbf{T}_6^0[1 : 3, 3], \quad \mathbf{R}_6^0 = \mathbf{T}_6^0[1 : 3, 1 : 3] \quad (24)$$

Okamžitá přímá kinematická úloha:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_6^0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \ddot{\boldsymbol{\omega}}_6^0 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} \quad (25)$$

kde $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ resp. $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ je kinematický jakobián manipulátoru resp. jeho časová derivace.

Vlastní přímou okamžitou kinematickou úlohu pro rychlosti a zrychlení translačního pohybu, tedy počátku \mathbf{O}_6^0 s.s. F_6 , lze stanovit opět jako:

$$\dot{\mathbf{R}}_6^0 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_6^0) \cdot \mathbf{R}_6^0, \quad \ddot{\mathbf{R}}_6^0 = (\mathbf{S}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_6^0) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_6^0) \cdot \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_6^0)) \cdot \mathbf{R}_6^0, \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}[3] & \boldsymbol{\omega}[2] \\ \boldsymbol{\omega}[3] & 0 & -\boldsymbol{\omega}[1] \\ -\boldsymbol{\omega}[2] & \boldsymbol{\omega}[1] & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_6^0 = \dot{\mathbf{R}}_6^0[1 : 3, 1], \quad \ddot{\mathbf{x}}_6^0 = \ddot{\mathbf{R}}_6^0[1 : 3, 1] \quad (26)$$

Inverzní kinematická úloha - redundantní varianta

Závislosti polohy kloubových souřadnic \mathbf{Q} na poloze zobecněných souřadnic \mathbf{X} (poloze koncového efektoru) je v případě redundantního manipulátoru nejednoznačná úloha a existuje pro ni nekonečně mnoho řešení. V takovém případě často přistupujeme k parametrizaci (výběru) řešení zavedením tzv. redundantních kloubových souřadnic (počet je dán stupněm redundance), které jsou vstupními proměnnými inverzní kinematické úlohy. V případě předloženého manipulátoru byla volena redundantní souřadnicí poloha lineárního pojezdu $q_1 = d_1$. Formálně lze tak inverzní kinematickou úlohu definovat následovně:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, q_1) \\ \dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, q_1, \dot{q}_1) \\ \ddot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1) \end{aligned} \quad (27)$$

kde \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} jsou funkce přímé resp. okamžité přímé kinematické úlohy.

◆ **Algoritmus 2 (Inverzní kinematika - redundantní varianta)**

Poznamenejme, že výpočet je analogický jako v případě standardní varianty manipulátoru (pro $L_4 = 0$), viz Algoritmus 1, s rozdílem, že redundantní kloubová souřadnice q_1 je známá.

Vstup:

Poloha, rychlost, zrychlení zobecněných souřadnic a redundantní kloubové souřadnice $q_1 = d_1$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_6^0 \\ \mathbf{x}_6^0 \\ q_1 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \dot{\mathbf{x}}_6^0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \ddot{\mathbf{x}}_6^0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Výstup:

Polohy, rychlost, zrychlení kloubových souřadnic:

$$\mathbf{Q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T, \quad \dot{\mathbf{Q}} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_6]^T, \\ \ddot{\mathbf{Q}} = [\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \ddot{q}_3 \ \ddot{q}_4 \ \ddot{q}_5 \ \ddot{q}_6]^T$$

Algoritmus pro závislosti POLOHY:

1. Kloubová souřadnice θ_2 (2 řešení):

$$\mathbf{O}_5^0 = \mathbf{O}_6^0 - L_4 \cdot \mathbf{x}_6^0, \quad \theta_2 = \begin{cases} \text{atan2}(\mathbf{O}_5^0[2], \mathbf{O}_5^0[1]) \\ \text{atan2}(\mathbf{O}_5^0[2], \mathbf{O}_5^0[1]) + \pi, \end{cases} \quad (28)$$

2. Kloubová souřadnice θ_4 (2 řešení):

$$\mathbf{O}_5^2 = \begin{bmatrix} [\sin(\theta_2)\mathbf{O}_5^0[2] - L_1 + \mathbf{O}_5^0[1] \cos(\theta_2)] \\ \mathbf{O}_5^0[3] - q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sin(\theta_4) = \frac{(\mathbf{O}_5^2[1:2])^T \cdot \mathbf{O}_5^2[1:2] - L_2^2 - L_3^2}{2L_2L_3} \\ \Rightarrow \cos(\theta_4) = \pm \sqrt{1 - \sin(\theta_4)^2} \\ \theta_4 = \text{atan2}(\sin(\theta_4), \cos(\theta_4)) \quad (29)$$

3. Kloubová souřadnice θ_3 :

$$\sin(\theta_3) = \frac{L_3 \sin(\theta_4)\mathbf{O}_5^2[2] + L_2\mathbf{O}_5^2[2] + \mathbf{O}_5^2[1]L_3 \cos(\theta_4)}{L_3^2 + 2L_3L_2 \sin(\theta_4) + L_2^2} \\ \cos(\theta_3) = \frac{-\mathbf{O}_5^2[2]L_3 \cos(\theta_4) + \mathbf{O}_5^2[1]L_3 \sin(\theta_4) + \mathbf{O}_5^2[1]L_2}{L_3^2 + 2L_3L_2 \sin(\theta_4) + L_2^2} \\ \theta_3 = \text{atan2}(\sin(\theta_3), \cos(\theta_3)) \quad (30)$$

4. Kloubové souřadnice θ_5, θ_6 :

$$\mathbf{x}_6^4 = (\mathbf{R}_4^0)^T \cdot \mathbf{x}_6^0$$

Kloubová souřadnice θ_6 (2 řešení):

$$\sin(\theta_6) = -\mathbf{x}_6^4[3], \quad \cos(\theta_6) = \pm \sqrt{(\mathbf{x}_6^4[1:2])^T \cdot \mathbf{x}_6^4[1:2]} \\ \theta_6 = \text{atan2}(\sin(\theta_6), \cos(\theta_6)) \quad (31)$$

Kloubová souřadnice θ_5 :

$$\begin{aligned}\sin(\theta_5) &= \frac{\mathbf{x}_6^4[2]}{\cos(\theta_6)}, & \cos(\theta_5) &= \frac{\mathbf{x}_6^4[1]}{\cos(\theta_6)} \\ \theta_5 &= \text{atan2}(\sin(\theta_5), \cos(\theta_5))\end{aligned}\quad (32)$$

Celkem tedy existuje 6 izolovaných řešení, viz rovnice (28, 29, 31) inverzní kinematiky pro polohy kloubové souřadnice $\theta_2, \theta_4, \theta_6$, dále je budeme opět rozlišovat parametrem *sol*:

$$\text{sol} = [i, j, k] \quad (33)$$

$$\begin{aligned}\text{Pro } \theta_2 : \quad i &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \theta_2 = \text{atan2}(\mathbf{O}_5^0[2], \mathbf{O}_5^0[1]) \\ 2 & \text{pro } \theta_2 = \text{atan2}(\mathbf{O}_5^0[2], \mathbf{O}_5^0[1]) + \pi \end{cases} \\ \text{Pro } \theta_4 : \quad j &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \cos(\theta_4) = +\sqrt{1 - \sin(\theta_4)^2} \\ 2 & \text{pro } \cos(\theta_4) = -\sqrt{1 - \sin(\theta_4)^2} \end{cases} \\ \text{Pro } \theta_6 : \quad k &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \cos(\theta_6) = +\sqrt{(\mathbf{x}_6^4[1:2])^T \cdot \mathbf{x}_6^4[1:2]} \\ 2 & \text{pro } \cos(\theta_6) = -\sqrt{(\mathbf{x}_6^4[1:2])^T \cdot \mathbf{x}_6^4[1:2]} \end{cases}\end{aligned}$$

Algoritmus pro závislosti RYCHLOSTI, ZRYCHLENÍ:

Obecný vztah (25) mezi závislostmi rychlostí/zrychlení lze s pomocí vztahů (26) upravit následovně:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_6^0) \cdot \mathbf{R}_6^0 = \dot{\mathbf{R}}_6^0 \Rightarrow \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_6^0) \cdot \mathbf{x}_6^0 = \dot{\mathbf{x}}_6^0 \Rightarrow \mathbf{S}(-\mathbf{x}_6^0) \cdot \boldsymbol{\omega}_6^0 = \dot{\mathbf{x}}_6^0 \quad (34)$$

Tedy:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \dot{\mathbf{x}}_6^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(-\mathbf{x}_6^0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \boldsymbol{\omega}_6^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(-\mathbf{x}_6^0) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} \quad (35)$$

Skutečný kinematický jakobián manipulátoru $\hat{\mathbf{J}}$ (a jeho časová derivace) vztahující rychlostní závislosti s reálně reprezentovanými rychlostmi - orientace - koncového efektoru je tedy dána jako:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \dot{\mathbf{x}}_6^0 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, & \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(-\mathbf{x}_6^0) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \\ \ddot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{O}}_6^0 \\ \ddot{\mathbf{x}}_6^0 \end{bmatrix} = \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}}, & \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(-\mathbf{x}_6^0) \end{bmatrix} \cdot \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(-\dot{\mathbf{x}}_6^0) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q})\end{aligned}\quad (36)$$

Pro výpočet inverzní kinematiky pro rychlosti a zrychlení je opět nutno invertovat jakobián $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})$. Analogicky jako v případě neredundantního manipulátoru, lze jeho inverzi počítat po vypuštění příslušného (závislého) řádku následovně:

$$\begin{aligned}\text{Pro: } (\mathbf{x}_6^0[1])^2 &\geq (\mathbf{x}_6^0[2])^2 + (\mathbf{x}_6^0[3])^2 \Rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[(1:3, 5:6), :] \\ &\Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})[(1:3, 5:6), :]\end{aligned}$$

A odpovídající kloubové rychlosti/zrychlení:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}}[2:6] &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 2:6] \right)^{-1} \cdot \left(\dot{\mathbf{X}}[1:3, 5:6] - \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 1] \cdot \dot{q}_1 \right) \\ \ddot{\mathbf{Q}}[2:6] &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 2:6] \right)^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}}[1:3, 5:6] - \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 1] \cdot \ddot{q}_1 \right)\end{aligned}\quad (37)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro: } (\mathbf{x}_6^0[2])^2 &\geq (\mathbf{x}_6^0[1])^2 + (\mathbf{x}_6^0[3])^2 \Rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[(1 : 4, 6), :] \\ &\Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}) \rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q})[(1 : 4, 6), :] \end{aligned}$$

A odpovídající kloubové rychlosti/zrychlení:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}[2 : 6] &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 2 : 6] \right)^{-1} \cdot \left(\dot{\mathbf{X}}[1 : 4, 6] - \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 1] \cdot \dot{q}_1 \right) \\ \ddot{\mathbf{Q}}[2 : 6] &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 2 : 6] \right)^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}}[1 : 4, 6] - \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 1] \cdot \ddot{q}_1 \right) \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \text{Pro: } (\mathbf{x}_6^0[3])^2 &\geq (\mathbf{x}_6^0[1])^2 + (\mathbf{x}_6^0[2])^2 \Rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q}) \rightarrow \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[1 : 5, :] \\ &\Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}) \rightarrow \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q})[1 : 5, :] \end{aligned}$$

A odpovídající kloubové rychlosti/zrychlení:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}[2 : 6] &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 2 : 6] \right)^{-1} \cdot \left(\dot{\mathbf{X}}[1 : 5] - \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 1] \cdot \dot{q}_1 \right) \\ \ddot{\mathbf{Q}}[2 : 6] &= \left(\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 2 : 6] \right)^{-1} \cdot \left(\ddot{\mathbf{X}}[1 : 5] - \dot{\hat{\mathbf{J}}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} - \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{Q})[:, 1] \cdot \ddot{q}_1 \right) \end{aligned} \quad (39)$$

◆

Dynamické úlohy manipulátorů

Dynamika sériového manipulátoru (přímá a inverzní) lze vypočítat standardními přístupy, viz [8, 5, 2], s pomocí znalosti kinematických závislostí (polohy, rychlosti, zrychlení) kloubových souřadnic manipulátoru a dynamických návrhových parametrů. Za účelem výpočtu dynamiky v prvotních fázích návrhu manipulátoru a následné parametrické optimalizace rozměrů manipulátoru byl vytvořen zjednodušený dynamický model, pro který platí:

- Ramena manipulátoru jsou uvažována jako plné tyče o hustotě ρ o poloměru r_1 a délce L_i , tedy jejich hmotnost m_i^L , poloha těžiště \mathbf{T}_i^L a tensor setrvačnosti \mathbf{I}_i^L je dán jako (pro osu z s.s. ramene (tedy i těžiště) zarovnanou podél osy tyče - v algoritmech modifikováno dle skutečného přiřazení s.s. příslušnému ramenu dle D-H úmluvy):

$$m_i^L = \pi r_1^2 L_i \rho, \quad \mathbf{T}_i^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5L_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_i^L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_i^L(r_1^2 + \frac{1}{3}L_i) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m_i^L(r_1^2 + \frac{1}{3}L_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0.5m_i^L r_1^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

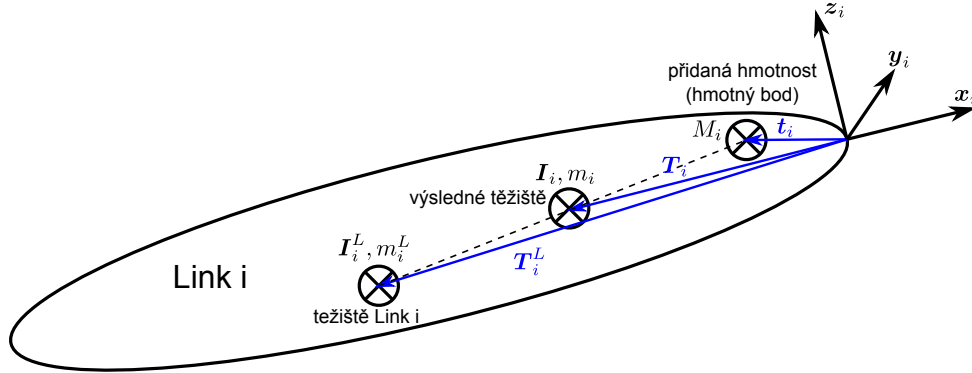
- Pohony manipulátoru jsou umístěny v příslušných kloubech, viz Obrázek 2, a jsou reprezentovány hmotnými body o hmotnosti $M_2 \dots M_5$, (M_6) (pohon M_1 prvního ramene je pevně fixován k základně a neovlivňuje dynamiku).
- Břemeno na koncovém efektoru je reprezentováno hmotným bodem o hmotnosti M .

Obecná rovnice inverzní dynamické úlohy (transformace známého pohybu robotu na požadované síly/silové momenty v aktuátorech), která byla dále využívána lze zapsat v následujícím tvaru:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{Q}) \cdot \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \cdot \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{G}(\mathbf{Q}) \quad (41)$$

kde $\mathbf{M}(\mathbf{Q})$ je matice setrvačnosti, $\mathbf{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})$ je matice zdánlivých sil/momentů a $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ je matice generovaná gravitačním působením na manipulátor. $\boldsymbol{\tau}$ je požadovaný vektor sil/silových momentů v aktuátorech manipulátoru. \mathbf{Q} , $\dot{\mathbf{Q}}$, $\ddot{\mathbf{Q}}$ je známý pohyb manipulátoru (trajektorie odpovídajících kloubových souřadnic).

Poznamenejme, že inverzní dynamickou úlohu lze řešit iteračními algoritmy založenými na reprezentaci kinematiky manipulátoru prostřednictvím D-H úmluvy. Výsledné dynamické parametry dílčích ramen (hmotnosti, momenty setrvačnosti v těžišti a jeho umístění) lze vypočítat ze zjednodušeného dynamického modelu - „tyčkový“ model s aktuátory reprezentovanými hmotnými body.



Obrázek 4: Zjednodušený „tyčkový“ model ramene manipulátoru

Zjednodušený „tyčkový“ model ramen manipulátoru je znázorněn na Obrázku 4, kde \mathbf{T}_i^L , \mathbf{I}_i^L a m_i^L reprezentuje popořadě vektor umístění těžiště, tensor setrvačnosti v těžišti a hmotnost ramene *Link i* (v našem případě reprezentované plnou hmotnou tyčkou příslušné délky L_i , poloměrem r_1 a hustoty materiálu ρ). Pohon umístěný na ramenu je reprezentovaný hmotným bodem o hmotnosti M_i umístěným v poloze \mathbf{t}_i . \mathbf{T}_i , \mathbf{I}_i a m_i reprezentuje popořadě vektor umístění těžiště, tensor setrvačnosti v těžišti a hmotnost výsledného ramene s umístěným aktuátorem a lze jej vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned}
 m_i &= m_i^L + M_i \\
 \mathbf{T}_i &= \frac{1}{m_i} (\mathbf{T}_i^L m_i^L + \mathbf{t}_i M_i) \\
 \mathbf{I}_i &= \mathbf{I}_i^L + (\mathbf{R}^T \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{R} \mathbf{R}^T) m_i^L + (\mathbf{r}^T \mathbf{r} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T) M_i \\
 \text{kde: } \mathbf{R} &= \mathbf{T}_i^L - \mathbf{T}_i, \mathbf{r}_i = \mathbf{t}_i - \mathbf{T}_i, \mathbf{I}
 \end{aligned} \tag{42}$$

Poznamenejme, že v našem případě manipulátorů jsou uvažovány všechny aktuátory vždy v počátku příslušného s.s. ramene $\mathbf{t}_i = \mathbf{0}$.

3 Generátor trajektorie koncového efektoru (zjednodušený model tryskaného dílu)

Za účelem plánování požadované trajektorie manipulátoru byl vytvořen zjednodušený model tryskaného dílu jako válcové těleso s definovanými body \mathbf{O} požadované polohy koncového efektoru (trysky) a definovanými směrovými vektory \boldsymbol{x} udávající požadovaný směr koncového efektoru (trysky), viz Obrázek 5, kde r je průměr válce, v je výška válce, N_1 je počet koincidenčních bodů po obvodu a N_2 je počet koincidenčních bodů na výšce. Požadované polohy koincidenčních bodů \mathbf{O} a odpovídající směry \boldsymbol{x} lze vypočítat následovně³

³Funkce $\text{linspace}(a, b, N)$ generuje N prvkový vektor s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle a, b \rangle$ (viz Matlab).

$$\mathbf{O} = 0.5 \cdot r \cdot \begin{bmatrix} \cos(r_{\text{vect}}) \\ \sin(r_{\text{vect}}) \\ v_{\text{vect}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{R}_{z_2} \cdot \mathbf{R}_{y_2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

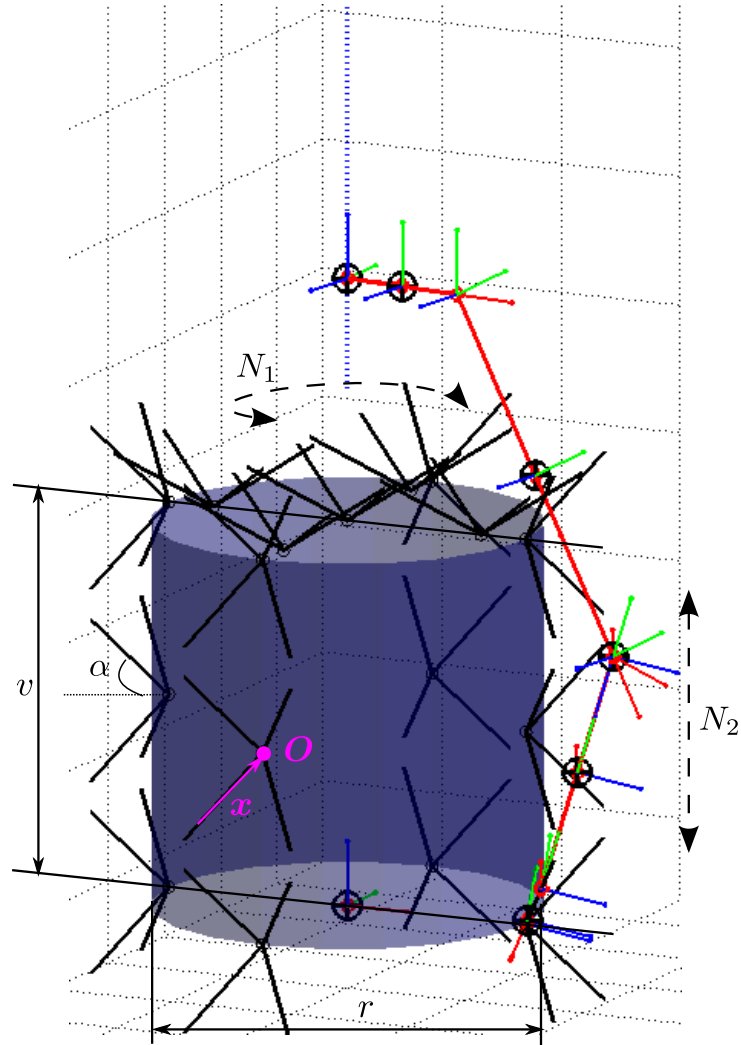
kde

$$v_{\text{vect}} = \text{linspace}(0, v, N_2)$$

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos(r_{\text{vect}}) & -\sin(r_{\text{vect}}) & 0 \\ \sin(r_{\text{vect}}) & \cos(r_{\text{vect}}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_{\text{vect}} = \text{linspace}(0, 2\pi \frac{(N_1 - 1)}{N_1}, N_1)$$

$$\mathbf{R}_{y_2} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\text{vect}}) & 0 & \sin(\alpha_{\text{vect}}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_{\text{vect}}) & 0 & \cos(\alpha_{\text{vect}}) \end{bmatrix}, \quad \alpha_{\text{vect}} = \{-\alpha, \alpha\}$$

$$\mathbf{R}_{z_2} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\text{vect}}) & -\sin(\alpha_{\text{vect}}) & 0 \\ \sin(\alpha_{\text{vect}}) & \cos(\alpha_{\text{vect}}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Obrázek 5: Zjednodušený model dílu

4 Řízení pohybu manipulátoru

Při řízení pohybu manipulátorů se lze setkat s principiálně dvěma odlišnými přístupy, a to:

- **Koordinované řízení pohybu v prostoru zobecněných souřadnic manipulátoru (polohy koncového efektoru)**

Jedná je o řízení pohybu koncového efektoru přesně podél uvažované plánované trajektorie, a to takovým způsobem, že plánovaná trajektorie je parametrizována (interpolována, aproximována, atd.) v prostoru zobecněných souřadnic \mathbf{X} manipulátoru a takto parametrizovaná trajektorie je poté s konkrétní periodou řídicího systému přepočítávána prostřednictvím inverzní kinematické úlohy do prostoru kloubových souřadnic \mathbf{Q} .

Výhody:

Přesné řízení pohybu (polohy, rychlosti, zrychlení) koncového efektoru (např. obrábění, svařování, atd.).

Nevýhody:

Potřeba řešit algoritmy inverzní kinematiky v každém kroku řídicího algoritmu, reálná možnost přiblížení k singulárním polohám manipulátoru (nemožnost realizace koordinovaného pohybu), omezené možnosti přechodu mezi izolovanými řešení inverzní kinematické úlohy (průchody přes singularity).

- **Kloubové (nekoordinované) řízení pohybu v prostoru kloubových souřadnic**

Jedná se o řízení pohybu koncového efektoru pouze v konkrétních definovaných koincidenčních bodech \mathbf{X}_i , pohyb koncového efektoru mezi těmito body je nekoordinovaný a daný kinematikou manipulátoru. Plánování trajektorie vychází ze zadaných koincidenčních bodů \mathbf{X}_i v prostoru zobecněných souřadnic manipulátoru, pro které jsou vypočítány odpovídající polohy kloubových souřadnic \mathbf{Q}_i prostřednictvím inverzní kinematické úlohy. Interpolace trajektorie poté probíhá v prostoru kloubových souřadnic, tedy skutečný pohyb koncového efektoru je „neznámý“ (resp. daný nelineární dopřednou kinematikou) a žádaný pohyb koncového efektoru je dosažen pouze v koincidenčních bodech.

Výhody:

Výpočet inverzní kinematiky (pro polohy) pouze v koincidenčních bodech, singulární polohy nepřinášejí problém v okamžicích přejezdů (nepočítá se inverzní kinematická úloha kontinuálně), vhodné pro aplikace, kde není nutný koordinovaný pohyb (pick and place, atd.)

Nevýhody:

Nekoordinovaný pohyb.

V případě řízení pohybu zkoumaných manipulátorů byl volen právě druhý přístup řízení, který je s ohledem na charakter vykonávané úlohy robotem vhodný. Algoritmus byl dále doplněn o metody optimalizace pohybu splňující následující požadavky (zabýváme se nejprve algoritmem řízení standardní varianty manipulátoru.):

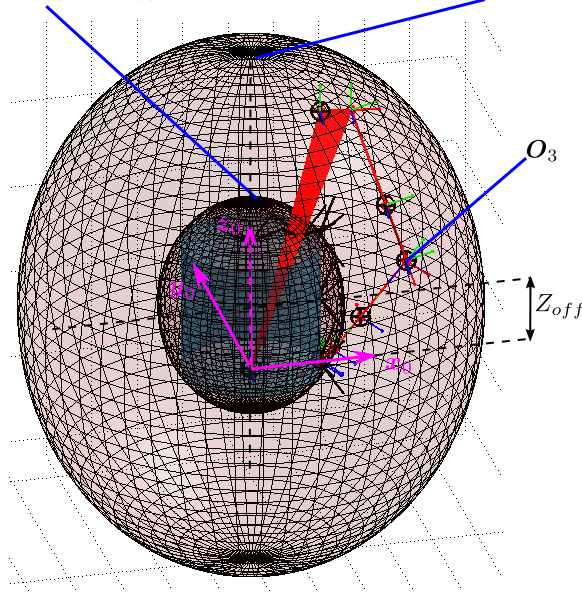
- *Možnost specifikovat řešení inverzní kinematické úlohy:*

V každém koincidenčním bodu může být robot umístěn svým koncovým efektoem ve více možných konfiguracích (řešení inverzní kinematické úlohy). Výběr konkrétního řešení může být buď fixován uživatelem či ponechán na rozhodnutí řídicího systému. V takovém případě je zvolen přístup, že je vybráno takové řešení inverzní kinematické úlohy, které zajistí minimální vzdálenost přejezdu mezi kloubovými souřadnicemi (minimalizace doby přejezdu manipulátoru - při fixovaných omezení na max. rychlost a zrychlení).

- *Omezení na pohyb manipulátoru:*

V případě předloženého manipulátoru je žádoucí, aby část manipulátoru nemohla vstoupit do daného zakázaného pásma z důvodu omezení případných kolizí robotu s technologickým dílem uvnitř oplachovací komory či s komorou samotnou. Vzhledem ke komplexnosti takového požadavku (výpočetní náročnost) byla taková úloha specifikována jako omezení pohybu „lokte“ manipulátoru reprezentovaného bodem O_3 (počátek s.s. F_3) na prostor vymezený dvěma elipsoidy E_{min} resp. E_{max} s parametry: K , Z_{off} a R_{min} resp. R_{max} viz Obrázek 6.

$$E_{min} : x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 = R_{min}^2 \quad E_{max} : x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 = R_{max}^2$$



Obrázek 6: Omezení pohybu manipulátoru (definice omezujících elipsoidů)

Pro splnění definované podmínky tak musí pro bod O_3 platit:

$$\begin{aligned} \text{Z kinematiky platí: } \mathbf{O}_3^0(\mathbf{Q}) &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_2) \cos(q_3)L_2 + \cos(q_2)L_1 \\ \sin(q_2) \cos(q_3)L_2 + \sin(q_2)L_1 \\ \sin(q_3)L_2 + d_1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 &\geq R_{min}^2 \wedge x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 \leq R_{max}^2 \end{aligned} \quad (44)$$

Nástin algoritmu výpočtu trajektorie standardního manipulátoru bez bližších implementačních detailů lze shrnout následovně:

◆ **Algoritmus 3 (Plánování trajektorie - standardní manipulátor)**

Vstupy:

- Požadované koincidenční body \mathbf{X}_i v prostoru zobecněných souřadnic (poloha a orientace trysky získaná z generátoru trajektorie, viz Kapitola 3).
- Preferované řešení inverzní kinematické úlohy: $sol = [i, j, k]$, $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$, kde 0 znamená, že algoritmus vybírá automaticky mezi příslušným řešením, viz výše.
- Parametry omezujících elipsoidů E_{min} , E_{max} : K , Z_{off} a R_{min} , R_{max}
- Specifikace maximální rychlosti v_{max} a zrychlení a_{max} pro interpolaci v prostoru kloubových souřadnic s minimálním časem přejezdu.



Výstupy:

- Polohy \mathbf{Q} , rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}$ kloubových souřadnic.

Vlastní algoritmus:

1. Z inverzní kinematické úlohy (pro polohy), viz Algoritmus 1, vypočti odpovídající kloubové polohy \mathbf{Q}_i^j odpovídající koincidenčnímu bodu \mathbf{X}_i pro všechna povolená řešení inverzní kinematické úlohy ($j = 1, 2, \dots, \max. 8$) specifikovaná parametrem sol (pro $sol[\star] = 0$ vypočti vždy obě možnosti). Pokud řešení neexistuje, ukonči algoritmus (řešení neexistuje).
2. Z nalezených kloubových poloh \mathbf{Q}_i^j vyber pouze takové, které vyhovují omezení (44). Pokud takové neexistují, ukonči algoritmus (řešení neexistuje).
3. Ze zbývajících kloubových poloh \mathbf{Q}_i^j vyber tu, která má od předchozí známé kloubové polohy \mathbf{Q}_{i-1} nejmenší kloubovou vzdálenost:

$$\mathbf{Q}_i^* = \underset{j=1,2,\dots}{\operatorname{argmin}} d(\mathbf{Q}_{i-1}, \mathbf{Q}_i^j) \quad (45)$$

kde $d(\star)$ je funkce vracející normu minimální vzájemné vzdálenosti odpovídajících kloubových (rotačních) souřadnic $q_k = \mathbf{Q}_{i-1}[k]$, $q_k^j = \mathbf{Q}_i^j[k]$:

$$dir = \sin(q_k - q_k^j)$$

$$\operatorname{rec} q_k^j = q_k + \operatorname{sign}(dir) \arccos(\cos(q_k - q_k^j)) \Rightarrow \operatorname{rec} \mathbf{Q}_i^j = \begin{bmatrix} \operatorname{rec} q_1^j \\ \operatorname{rec} q_2^j \\ \vdots \end{bmatrix}$$

(přepočtený úhel v minimální vzdálenosti (o periodu 2π))

$$d(\mathbf{Q}_{i-1}, \mathbf{Q}_i^j) = \|\mathbf{Q}_{i-1} - \operatorname{rec} \mathbf{Q}_i^j\|$$

4. Interpolace odpovídajících nalezených kloubových souřadnic \mathbf{Q}_i^* pohybem z klidu do klidu s lichoběžníkovým profilem rychlosti s omezením na max. rychlost v_{max} a zrychlení a_{max} , viz např. [1, 7].

V případě redundantní varianty manipulátoru, kdy je možnost využít redundantní kloubové souřadnice q_1 (tedy přidaného lineárního výtahu), lze výrazně zvýšit pohyblivost manipulátoru ve smyslu většího pracovního prostoru při zachování stejného omezení na jeho pohyb (omezení elipsoidy). Důvodem je právě možnost optimalizovat některá vedlejší kritéria optimality na základě výběru vhodného řešení inverzní kinematické úlohy z nekonečného počtu parametrizovaného právě redundantní kloubovou souřadnicí q_1 . Těmito kritérii byly v našem případě voleny následující:

- **Nalezení polohy lineárního pojezdu s ohledem na pracovní prostor manipulátoru**

Z řešení inverzní kinematiky je zřejmé (neuvažujeme limity na rotačních kloubech), že pracovní prostor manipulátoru je limitován délkami ramen L_2 , L_3 , respektive dvěma krajními stavy, kdy jsou příslušná ramena zarovnána (natažená či složená), viz Obrázek 3. Takovou podmínku lze vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned} \text{Natažená ramena: } & \|\mathbf{O}_5^2[1 : 2]\|^2 = (L_2 + L_3)^2 \\ \text{Složená ramena: } & \|\mathbf{O}_5^2[1 : 2]\|^2 = (L_2 - L_3)^2 \end{aligned} \quad (46)$$

kde \mathbf{O}_5^2 je počátek s.s. F_5 , vzhledem k s.s. F_2 a lze vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{O}_5^2[1 : 2] = \begin{bmatrix} A \\ B - q_1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

kde A , B jsou konstanty nezávislé na hodnotě kloubových souřadnic dané kinematickými parametry manipulátoru $\boldsymbol{\xi}$ a hodnotou známých zobecněných souřadnic \mathbf{X} (řešeno postupným dosazováním do inverzní kinematiky manipulátoru, viz Algoritmus 2).

$$\begin{aligned} \text{Pro řešení: } sol = [1, \star, \star] : \mathbf{O}_5^2[1 : 2] = \\ = \begin{bmatrix} -\frac{-x_2^2 + 2x_2L_4x_5 - L_4^2x_5^2 + L_1\sqrt{x_2^2 - 2x_2L_4x_5 + L_4^2x_5^2 + x_1^2 - 2x_1L_4x_4 + L_4^2x_4^2} - x_1^2 + 2x_1L_4x_4 - L_4^2x_4^2}{\sqrt{x_2^2 - 2x_2L_4x_5 + L_4^2x_5^2 + x_1^2 - 2x_1L_4x_4 + L_4^2x_4^2}} \\ x_3 - L_4x_6 - q_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pro řešení: } sol = [2, \star, \star] : \mathbf{O}_5^2[1 : 2] = \\ \begin{bmatrix} -\frac{x_2^2 - 2x_2L_4x_5 + L_4^2x_5^2 + L_1\sqrt{x_2^2 - 2x_2L_4x_5 + L_4^2x_5^2 + x_1^2 - 2x_1L_4x_4 + L_4^2x_4^2} + x_1^2 - 2x_1L_4x_4 + L_4^2x_4^2}{\sqrt{x_2^2 - 2x_2L_4x_5 + L_4^2x_5^2 + x_1^2 - 2x_1L_4x_4 + L_4^2x_4^2}} \\ x_3 - L_4x_6 - q_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kde:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_6^0 \\ \mathbf{x}_6^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Pracovní prostor manipulátoru lze tedy formulovat podmínkami:

$$A^2 + (B - q_1)^2 \leq (L_2 + L_3)^2 \wedge A^2 + (B - q_1)^2 \geq (L_2 - L_3)^2 \quad (48)$$

V případě, že dojde k porušení podmínek (požadovaná poloha koncového efektoru \mathbf{X}) se nenachází v pracovním prostoru manipulátoru, je nutné modifikovat polohu lineárního pojezdu následovně:

- Pokud $A^2 + (B - q_1)^2 > (L_3 + L_3)^2 \Rightarrow$ vypočti $q_1 : A^2 + (B - q_1)^2 = (L_2 + L_3)^2$ (snížení polohy výtahu)

$$q_1 = B \pm \sqrt{-A^2 + (L_2 + L_3)^2} \quad (49)$$

- Pokud $A^2 + (B - q_1)^2 < (L_2 - L_3)^2 \Rightarrow$ vypočti $q_1 : A^2 + (B - q_1)^2 = (L_2 - L_3)^2$ (zvýšení polohy výtahu)

$$q_1 = B \pm \sqrt{-A^2 + (L_2 - L_3)^2} \quad (50)$$

- Pokud $-A^2 + (L_2 + L_3)^2 < 0 \vee -A^2 + (L_2 - L_3)^2 < 0$, neexistuje řešení inverzní kinematické úlohy.

• Nalezení polohy lineárního pojezdu s ohledem na omezení elipsoidy

Dosazením řešení inverzní kinematické úlohy (pro $q_2 = \theta_2$, $q_3 = \theta_3$), viz Algoritmus 2, do vztahu pro omezení elipsoidy, viz 44, (resp. jejich hraničních případů)

$$x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 = R^2, \quad \text{kde: } R = \{R_{min}, R_{max}\} \quad (51)$$

$$\text{Kde: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_2) \cos(q_3) L_2 + \cos(q_2) L_1 \\ \sin(q_2) \cos(q_3) L_2 + \sin(q_2) L_1 \\ \sin(q_3) L_2 + q_1 \end{bmatrix}$$

dostáváme polynomy 8. stupně v proměnné q_1 s koeficienty závislé opět na kinematických návrhových parametrech ξ a známých zobecněných souřadnicích \mathbf{X} (záměrně zde z důvodu složitosti neuvádíme):

$$a_8 q_1^8 + a_7 q_1^7 + \dots + a_1 q_1 + a_0 = R, \quad a_j = a_j(\xi, \mathbf{X}) \quad (52)$$

a lze tedy nalézt maximálně 8 reálných řešení pro polohu lineárního výtahu q_1 , pro kterou se nachází loket manipulátoru na hranici omezení (ploše příslušného elipsoidu E_{min} resp. E_{max}).

Polohu lineárního pojezdu je tedy třeba modifikovat následovně:

- Pokud $x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 < R_{min}^2$
 \Rightarrow vypočti $q_1 : a_8 q_1^8 + a_7 q_1^7 + \dots + a_1 q_1 + a_0 = R_{min}$
- Pokud $x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 > R_{max}^2$
 \Rightarrow vypočti $q_1 : a_8 q_1^8 + a_7 q_1^7 + \dots + a_1 q_1 + a_0 = R_{max}$

Nástin algoritmu výpočtu trajektorie pohybu redundantního manipulátoru lze shrnout následovně:

◆ Algoritmus 4 (Plánování trajektorie - redundantní manipulátor)

Vstupy:

- Požadované koincidenční body \mathbf{X}_i v prostoru zobecněných souřadnic (poloha a orientace trysky získaná z generátoru trajektorie, viz Kapitola 3).
- Preferované řešení inverzní kinematické úlohy: $sol = [i, j, k]$, $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$, kde 0 znamená, že algoritmus vybírá automaticky mezi příslušným řešením, viz výše.
- Parametry omezujících elipsoidů: K , Z_{off} a R_{min} , R_{max}
- Omezení na pohyb lineárního výtahu: d_{min} , d_{max}
- Specifikace maximální rychlosti v_{max} a zrychlení a_{max} pro interpolaci v prostoru kloubových souřadnic s minimálním časem přejezdu.

Výstupy:

- Polohy \mathbf{Q} , rychlosti $\dot{\mathbf{Q}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{Q}}$ kloubových souřadnic.

Vlastní algoritmus:

Předpokládejme, že konfigurace manipulátoru je známá a daná jako: $\mathbf{Q}_{i-1} = [q_1^{prev}, q_2^{prev}, \dots, q_6^{prev}]$. Hledáme následující hodnotu kloubových souřadnic \mathbf{Q}_i ze znalosti požadované polohy koncového efektoru \mathbf{X}_i .

1. Zkontroluj existenci řešení inverzní kinematické úlohy pro daný koincidenční bod \mathbf{X}_i pro všechna povolená řešení inverzní kinematické úlohy specifikovaná parametrem sol , a případně modifikuj polohu lineárního výtahu, viz rovnice (49, 50):

- Pokud $-A^2 + (L_2 + L_3)^2 < 0 \vee -A^2 + (L_2 - L_3)^2 < 0$ pro všechna uvažovaná řešení (*sol*), neexistuje řešení inverzní kinematické úlohy pro zadané \mathbf{X} , ukonči algoritmus (řešení neexistuje).

- Pokud $A^2 + (B - q_1)^2 > (L_3 + L_3)^2 \Rightarrow q_1 = B \pm \sqrt{-A^2 + (L_2 + L_3)^2}$

- Pokud $A^2 + (B - q_1)^2 < (L_2 - L_3)^2 \Rightarrow q_1 = B \pm \sqrt{-A^2 + (L_2 - L_3)^2}$

Ze dvou možných řešení vyber takové q_1 , které má k předchozí hodnotě známé z minulého kroku algoritmu q_1^{prev} minimální vzdálenost (minimalizace přejezdů lineárního výtahu).

Pokud $q_1 < d_1^{min} \vee q_1 > d_1^{max}$, nelze nalézt řešení splňující omezení na výsv lineárního výtahu, ukonči algoritmus (řešení neexistuje).

- Pokud nenastává ani jedna z předchozích podmínek (existuje řešení inverzní kinematiky bez nutné modifikace q_1^{prev}), potom $q_1 = q_1^{prev}$ (lineární výtah zůstává v předchozí poloze).

2. Z inverzní kinematické úlohy (pro polohy) pro nyní známou polohu lineárního výtahu q_1 , viz Algoritmus 2, vypočti odpovídající kloubové polohy \mathbf{Q}_i^j odpovídající koincidenčnímu bodu \mathbf{X}_i pro všechna povolená řešení (*sol*).

3. Zkontroluj splnění omezení pohybu manipulátoru dané elipsoidy, viz podmínka (44), případně opět modifikuj polohu lineárního výtahu:

- Pokud $x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 < R_{min}^2 \vee x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 > R_{max}^2$, vypočti kořeny polynomu, viz (52), jinak $q_1 = q_1^{prev}$ a pokračuj bodem 4.:

$$q_1 : x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 = R_{min}^2 \vee q_1 : x^2 + y^2 + K \cdot (z - Z_{off})^2 = R_{max}^2$$

- Vyber všechny kořeny q_1 , které jsou reálné (a vyhovují podmínkám (51)) a z této množiny vyber opět takový, který má minimální vzdálenost k předchozí hodnotě q_1^{prev} a zároveň neporuší omezení na maximální výsv lineárního výtahu $q_1 \geq d_1^{min} \wedge q_1 \leq d_1^{max}$. Dostáváme tak pro každé uvažované řešení inverzní kinematické úlohy (*sol*) konkrétní hodnotu redundantní souřadnice q_1 . Pokud neexistují reálné kořeny vyhovující omezení pro žádné řešení (*sol*), neexistuje řešení inverzní kinematiky pro danou polohu koncového efektoru \mathbf{X}_i , které splňuje omezení dané elipsoidy a omezení na výsv lineárního výtahu, pak ukonči algoritmus (řešení neexistuje).

4. Spočti řešení inverzní kinematiky s nyní známou (optimální) hodnotou redundantní souřadnice q_1 pro všechna uvažovaná řešení (*sol*, pozn. pro některá řešení nemusí existovat) a analogicky jako v Algoritmu 3 bodu 3 vyber taková řešení \mathbf{Q}_i^* kloubových souřadnic \mathbf{Q}_i , které má od předchozí známé polohy \mathbf{Q}_{i-1} nejmenší kloubovou vzdálenost.

5. Interpolace odpovídajících nalezených kloubových souřadnic \mathbf{Q}_i^* pohybem z klidu do klidu s lichoběžníkovým profilem rychlosti s omezením na max. rychlost v_{max} a zrychlení a_{max} .

◆

5 Simulační výsledky

V této kapitole se budeme zabývat simulačními výsledky nad zkoumanými typy manipulátorů. V případě standardního manipulátoru byl jeho návrh doplněn navíc o jednoduchý algoritmus optimalizace rozměrů manipulátoru pro tři různé výrobní řady (velikosti) dle uvažovaného tryskaného dílu (daného parametry r, v, N_1, N_2, α , viz Kapitola 3).

5.1 Standardní manipulátor

Standardní varianta manipulátoru byla optimalizována s ohledem na délky ramen L_2, L_3, L_5 . Ramena L_1 (uložení robotu - strop mycí komory), L_4 (zarovnání aktuátorů), L_6 (koncový efektor - tryska). Optimalizační algoritmus byl rozdělen do dvou částí: Globální prohledávání stavového prostoru hrubou silou nad diskretizovanou množinou optimalizovaných parametrů (počáteční odhad pro lokální algoritmus) a Lokální optimalizace z nalezené počáteční podmínky simplexovou metodou [3]. Jako (minimalizované) kritérium byla volena maximální norma $\|\boldsymbol{\tau}\|$ *statického* momentu (nezahrnuje dynamické momenty) aktuátorů $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5]^T$ přes uvažovaný pracovní prostor daný koincidenčními body \mathbf{X}_i z generátoru trajektorie. Jedná se tedy o optimalizaci rozměrů manipulátoru tak, aby výsledné statické zatížení aktuátorů v „nejhorší“ uvažované poloze v pracovním prostoru bylo minimalizováno. Hodnota kritéria byla získána z dynamického modelu manipulátoru (v uvažovaných koincidenčních bodech \mathbf{X}_i).

Uvažované dynamické parametry (pro zjednodušený „tyčkový“ model manipulátoru):

$$\rho = 7800 \left[\frac{kg}{m^3} \right], \quad r_1 = 0.03 [m]$$

Hmotnosti aktuátorů (hmotnost prvního aktuátoru M_1 neuvažujeme - pevně připojen na základně) a hmotnost břemene (M), viz Obrázek 2:

$$M_2 = 3, \quad M_3 = 3, \quad M_4 = 2, \quad M_5 = 2, \quad M = 4 [kg]$$

Omezení pro přejezdy mezi koincidenčními body v prostoru kloubových souřadnic:

$$v_{max} = 0.3 \left[\frac{m}{s} \right], \quad a_{max} = 0.8 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

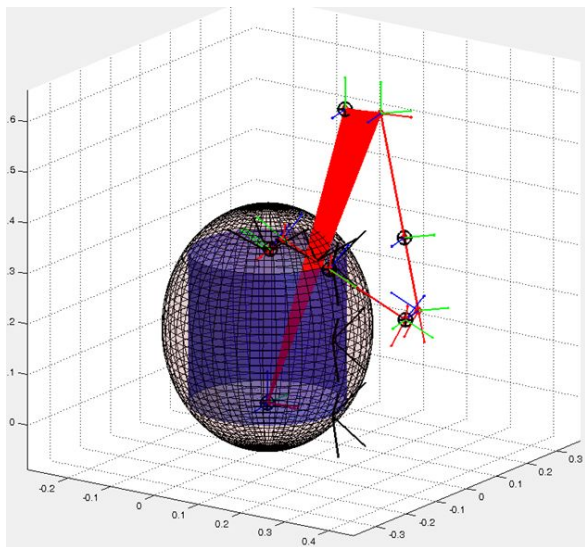
Uvažovaný výběr možných řešení inverzní kinematiky:

$$sol = [0, 0, 0] \quad (\text{automatický výběr algoritmem pro nejkratší přejezdy v kloubech})$$

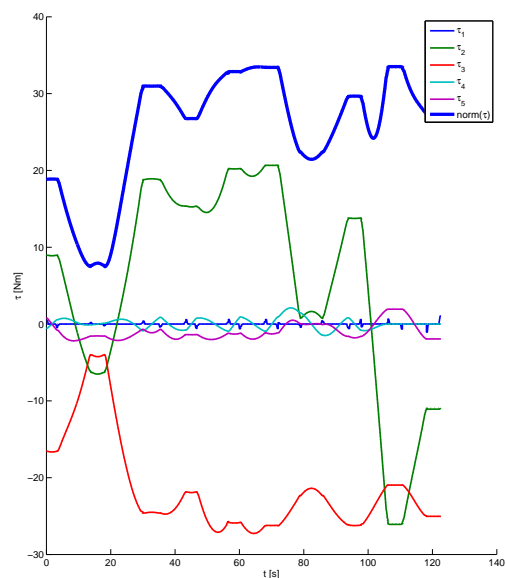
Optimalizované rozměry manipulátoru ve třech variantách, jsou společně s hodnotami kritériální funkce $\|\boldsymbol{\tau}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^5 \tau_i^2}$ uvedeny v Tabulce 3. Konkrétní hodnoty silových momentů na aktuátorech jsou znázorněny na Obrázcích 7, 8, 9. V předložených grafech jsou znázorněny statické silové momenty generované v aktuátorech pouze vlivem gravitace (plnou čarou), pro které byla provedena optimalizace a celkové momenty včetně dynamických projevů (čárkovaná čára). Poznamenejme, že rozdíl mezi statickými a dynamickými projevy není v podstatě pozorovatelný (vyjma např. malých dynamických momentů na prvním aktuátoru, který není vystavován z konstrukce manipulátoru vlivům gravitace). Na Obrázcích 10, 11, 12 jsou znázorněny vizualizace simulačních modelů v prostředí SimMechanics (včetně omezení definované elipsoidem E_{min} , elipsoid E_{max} neuvažujeme).

Var.	Par. trysk. dílu [r, v, N_1, N_2, α]	Fix. rozměry [L_1, L_4, L_6]	Opt. rozměry [L_2, L_3, L_5]	Opt. hodnota krit. $\ \boldsymbol{\tau}\ [Nm]$	Omezení (elipsa) (R_{min}, Z_{off}, K)
1	[0.3, 0.3, 1, 3, $\frac{\pi}{4}$]	[0.6, 0.064, 0.1]	[0.232, 0.389, 0.283]	40.7	[0.2, $\frac{v}{2}, 0.7]$
2	[0.6, 0.6, 1, 3, $\frac{\pi}{4}$]	[1.0, 0.064, 0.1]	[0.434, 0.634, 0.441]	73.8	[0.4, $\frac{v}{2}, 0.7]$
3	[0.9, 0.9, 1, 3, $\frac{\pi}{4}$]	[1.4, 0.064, 0.1]	[0.637, 0.827, 0.652]	130.2	[0.6, $\frac{v}{2}, 0.7]$

Tabulka 3: Výsledky optimalizace pro výrobní řady standardní varianty manipulátoru (dévkové rozměry [m], úhlové [rad])

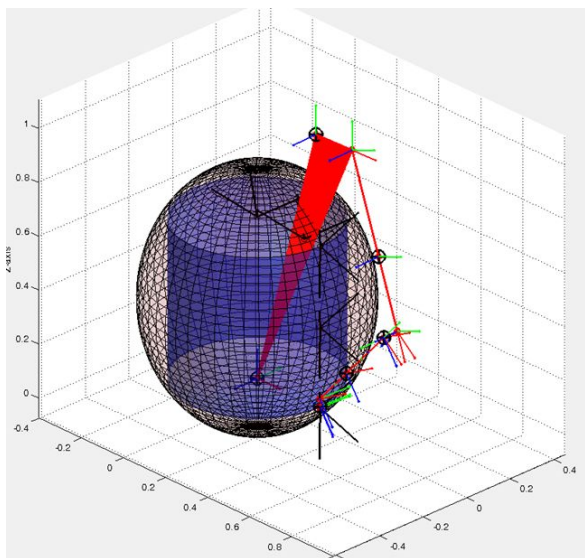


(a) Simulační model

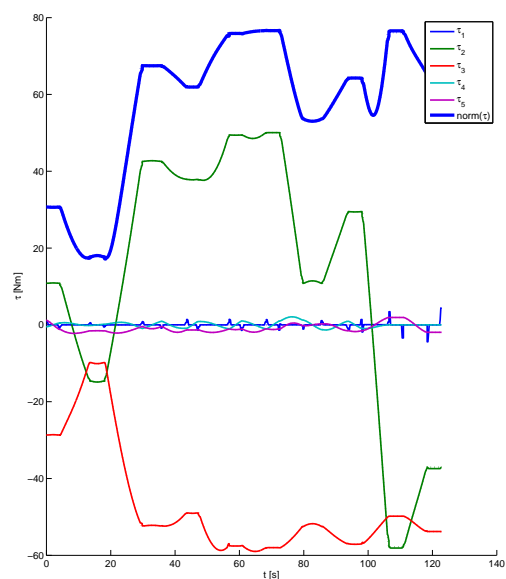


(b) Silové momenty na aktuátorech

Obrázek 7: Varianta 1 standardního manipulátoru (nejmenší rozměr tryskaného dílu)

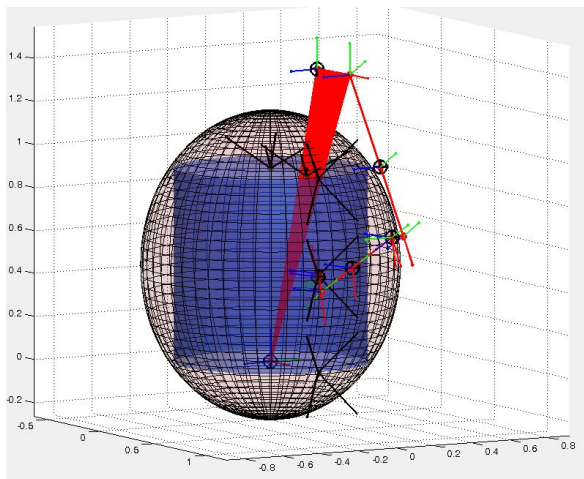


(a) Simulační model

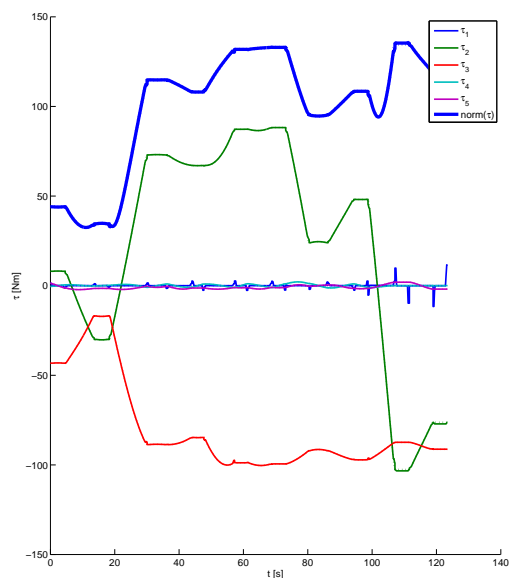


(b) Silové momenty na aktuátorech

Obrázek 8: Varianta 2 standardního manipulátoru (prostřední rozměr tryskaného dílu)

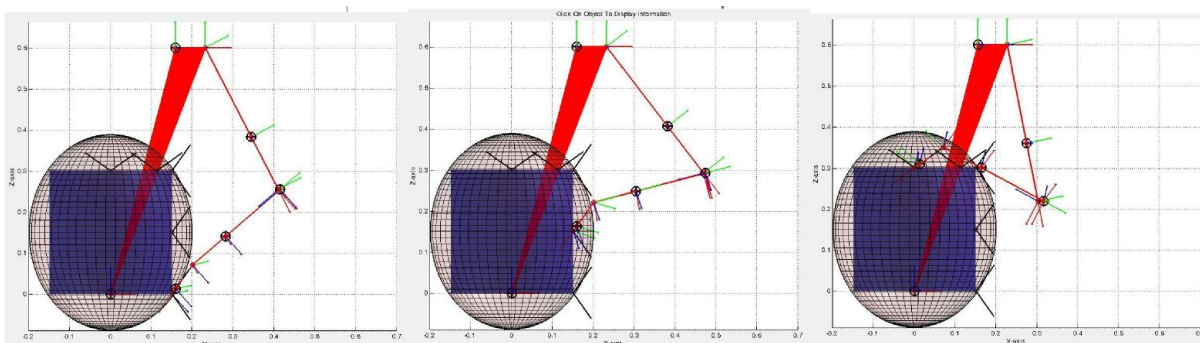


(a) Simulační model

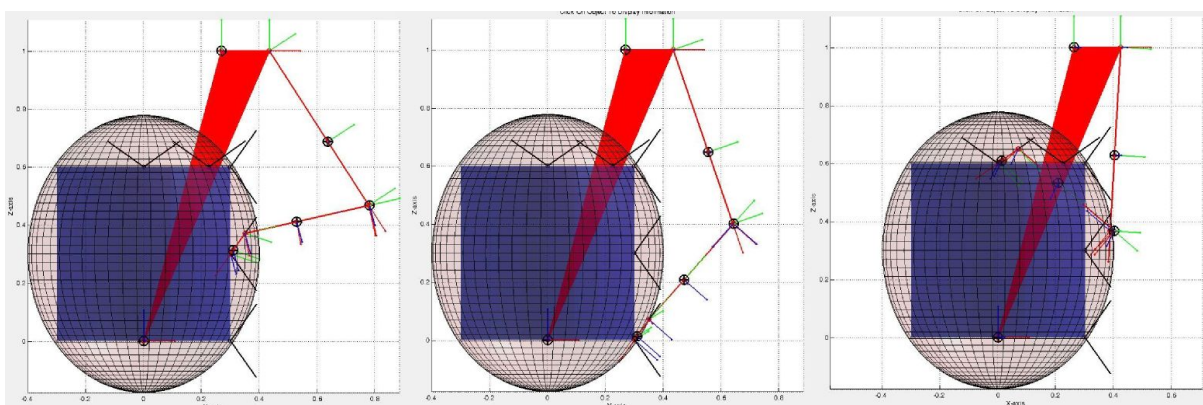


(b) Silové momenty na aktuátorech

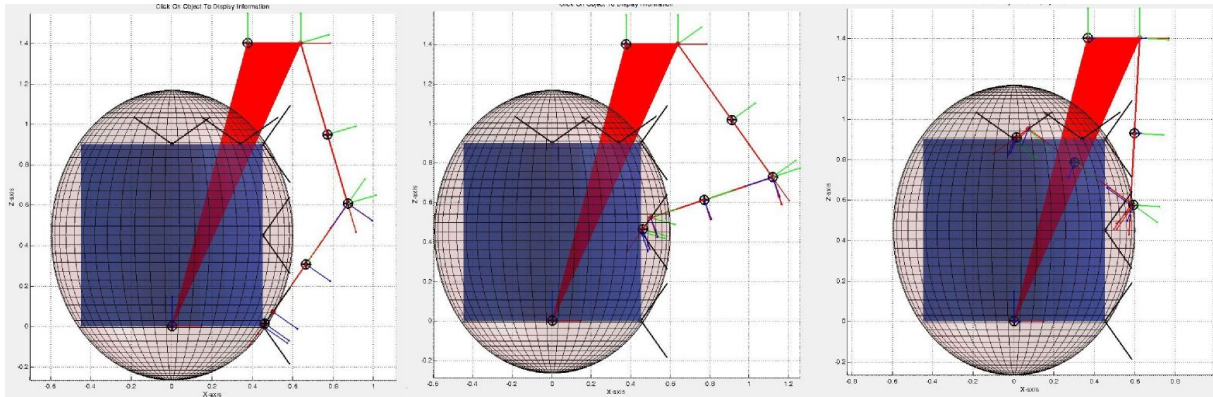
Obrázek 9: Varianta 3 standardního manipulátoru (prostřední rozměr tryskaného dílu)



Obrázek 10: SimMechanics: Varianta 1 standardního manipulátoru

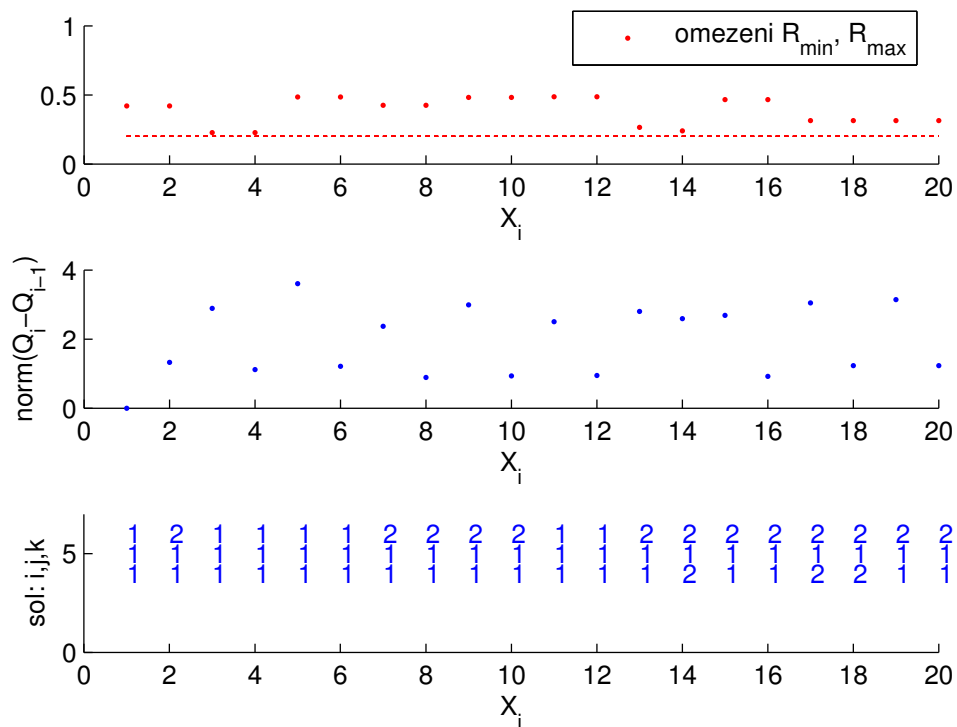


Obrázek 11: SimMechanics: Varianta 2 standardního manipulátoru

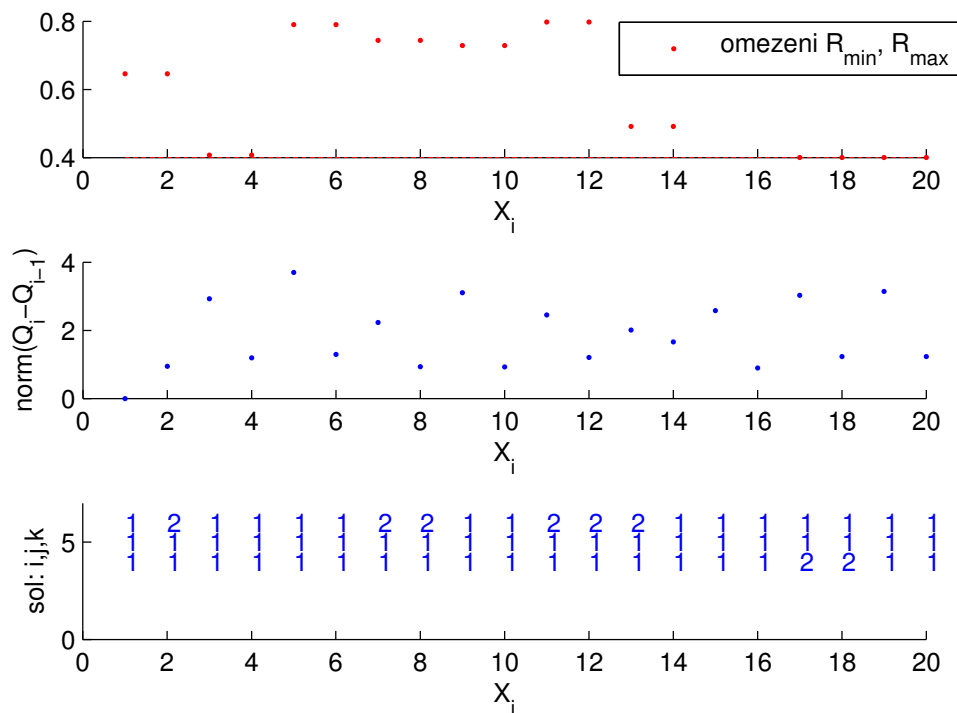


Obrázek 12: SimMechanics: Varianta 3 standardního manipulátoru

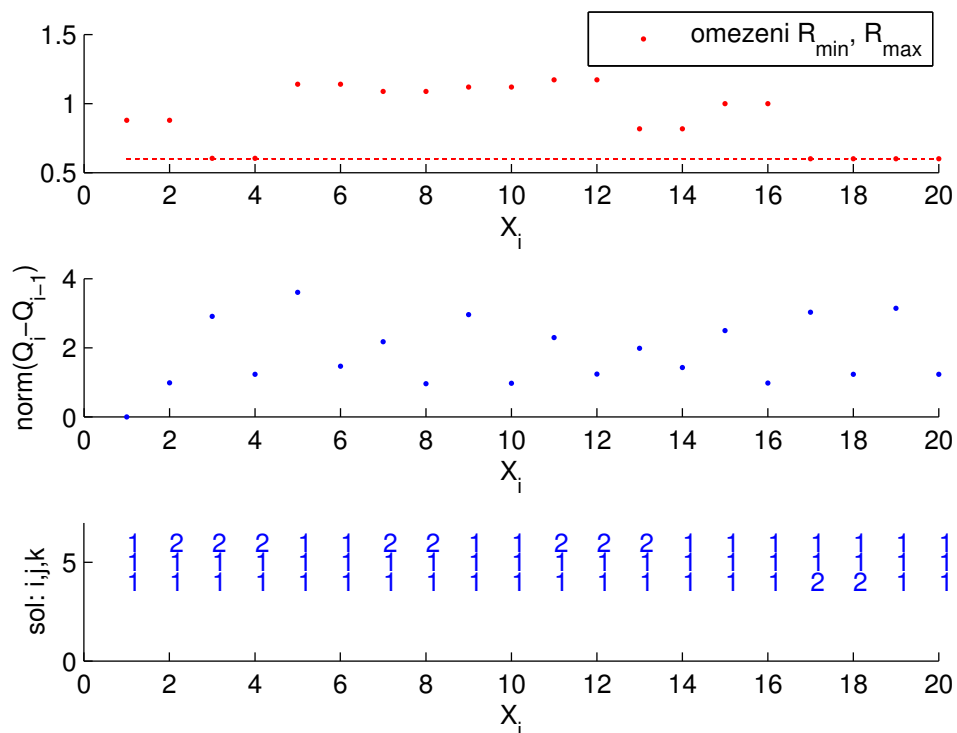
Na Obrázcích 13, 14, 15 jsou znázorněny výsledky plánovače trajektorie (výpočet odpovídajících kloubových souřadnic Q_i ze zadaných koincidenčních bodů X_i), viz Kapitola 4. V prvním podgrafu jsou znázorněny hodnoty levé strany rovnice (51), tedy míra vzdálenosti od limitů R_{min} a R_{max} včetně zadaného omezení. Druhý podgraf znázorňuje kloubové vzdálenosti mezi po sobě jdoucími koincidenčními body. V posledním podgrafu jsou znázorněny řešení inverzní kinematické úlohy (*sol*), které byly plánovačem zvoleny (pokud nebylo zadáno fixně) jako optimální (vzhledem k omezení dané elipsoidy a minimalizaci ujeté kloubové vzdálenosti) v konkrétních koincidenčních bodech.



Obrázek 13: Výsledky plánovače trajektorie: Varianta 1 standardního manipulátoru



Obrázek 14: Výsledky plánovače trajektorie: Varianta 2 standardního manipulátoru



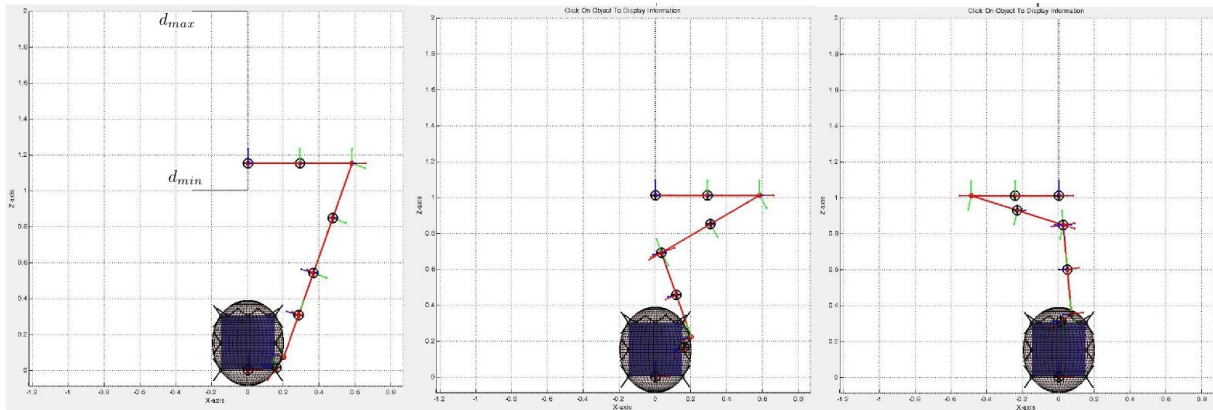
Obrázek 15: Výsledky plánovače trajektorie: Varianta 3 standardního manipulátoru

5.2 Redundantní manipulátor

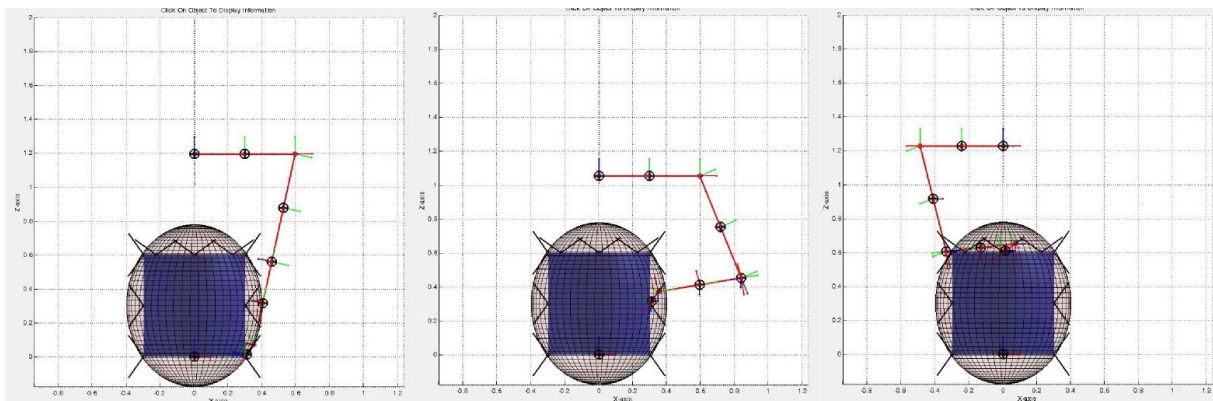
Redundantní varianta manipulátoru se od standardní varianty liší možností využití redundance (posuv lineárního výtahu), na základě které lze dále optimalizovat jeho pohyb. Optimalizace po-

hybu v našem případě zajistí větší rozsah pracovního prostoru (při dodržení uvažovaných omezení dané elipsoidy E_{min} , E_{max} a omezení na lineární výsuv d_{min} , d_{max}). Zásadní výhodou redundantního manipulátoru je především možnost splňovat omezení dané elipsoidy E_{min} , E_{max} pro výrazně větší škálu tryskaných dílů, což v technické praxi umožňuje nahradit více standardních manipulátorů jedním manipulátorem redundantním.

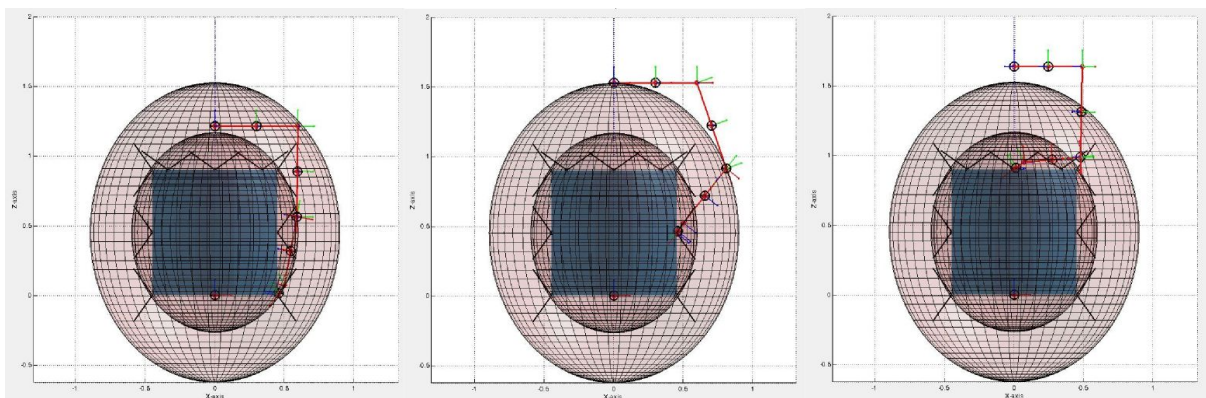
Na Obrázcích 16, 17, 18 jsou opět znázorněny vizualizace simulačních modelů v prostředí SimMechanics včetně omezení definované elipsoidem E_{min} a E_{max} (pouze pro největší uvažovaný tryskaný díl) pro nasazení redundantního manipulátoru pro výše uvažované tři velikosti tryskaného dílu. Na Obrázcích 19, 20, 21 jsou znázorněny výsledky plánovače trajektorie analogicky jako v případě standardní varianty manipulátoru.



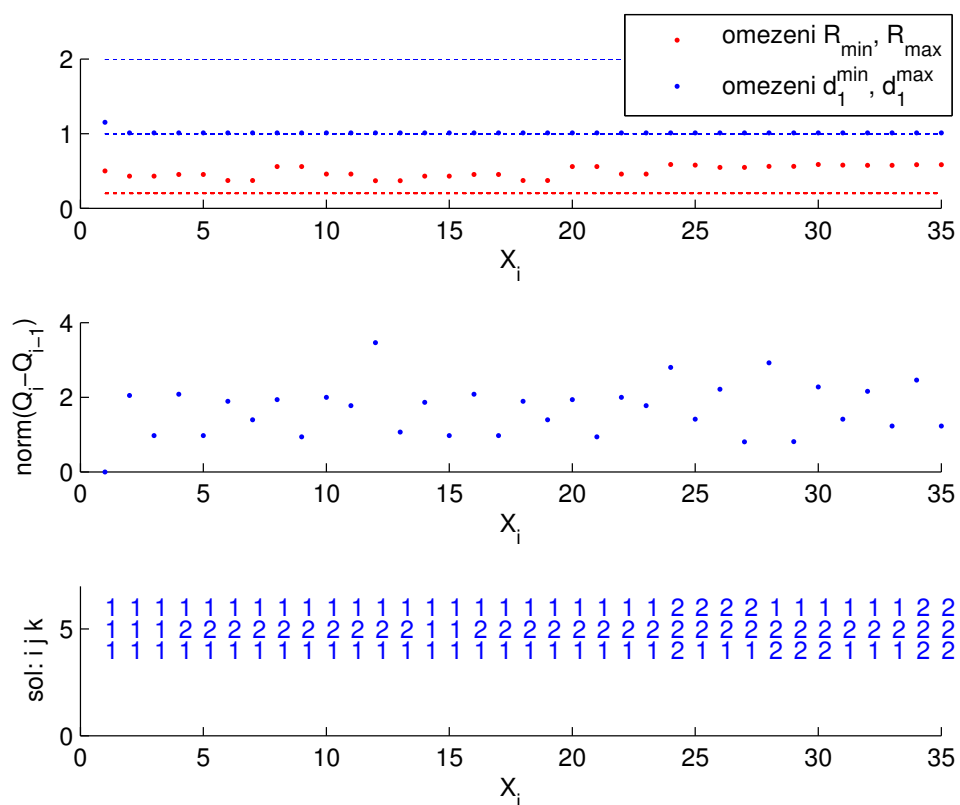
Obrázek 16: SimMechanics: Redundantní manipulátor pro malý tryskaný díl, $sol = [0, 0, 0]$, uvažováno jen omezení elipsoidem E_{min}



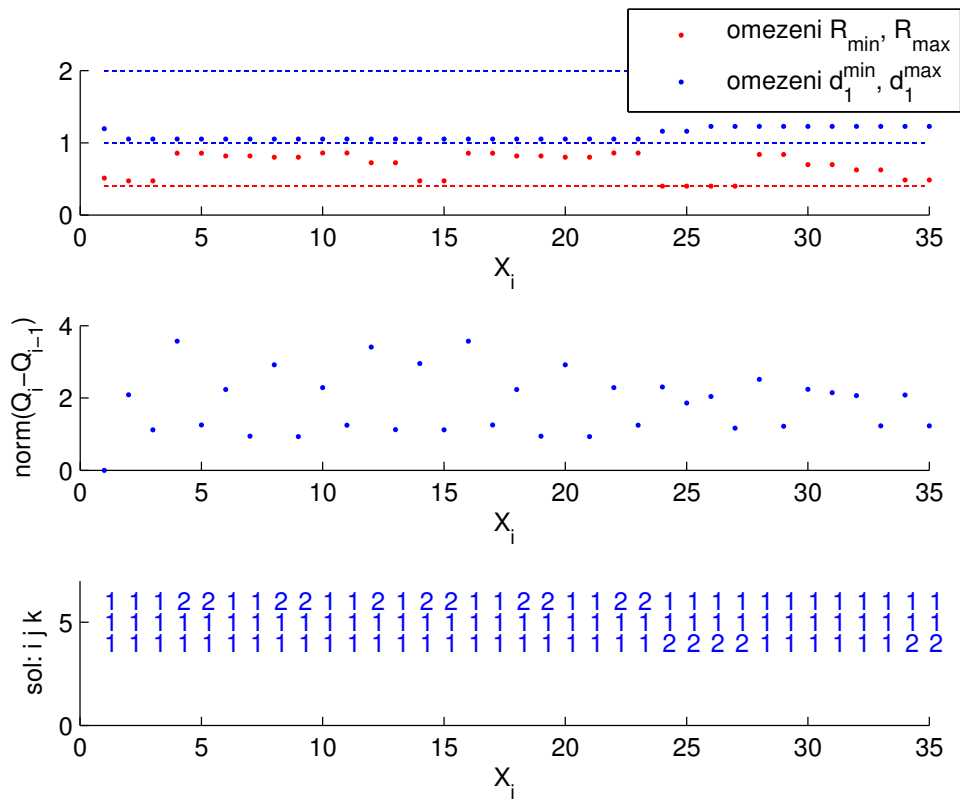
Obrázek 17: SimMechanics: Redundantní manipulátor pro střední tryskaný díl, $sol = [0, 1, 0]$ (fixované řešení „lokte“), uvažováno jen omezení elipsoidem E_{min}



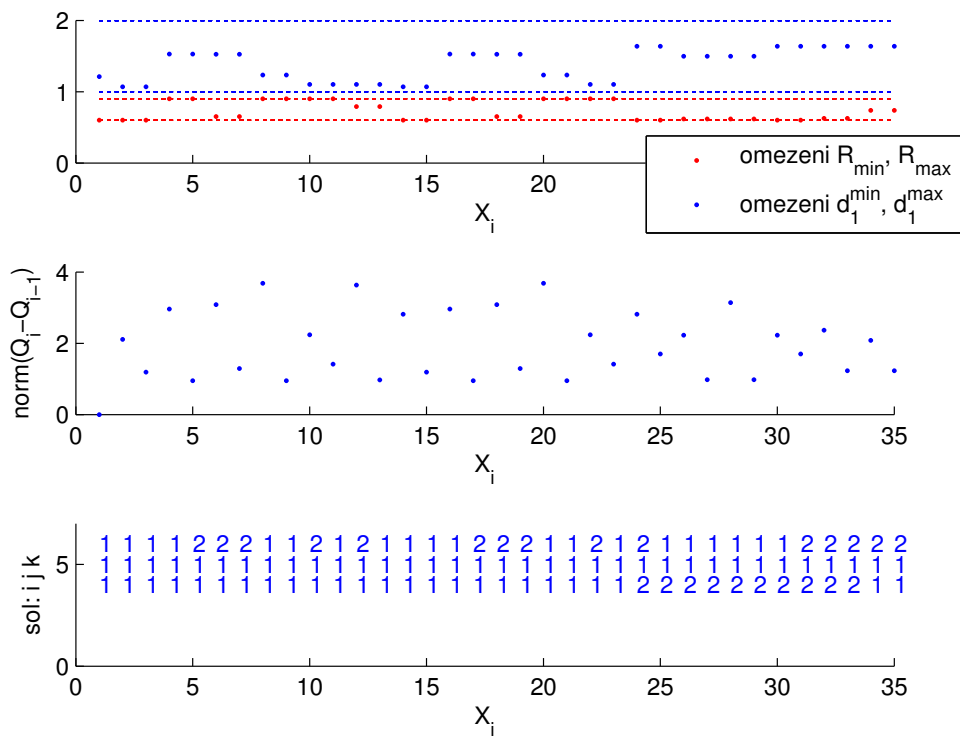
Obrázek 18: SimMechanics: Redundantní manipulátor pro velký tryskaný díl, $sol = [0, 1, 0]$ (fixované řešení „lokte“)



Obrázek 19: Výsledky plánovače trajektorie: Redundantní manipulátor pro malý tryskaný díl



Obrázek 20: Výsledky plánovače trajektorie: Redundantní manipulátor pro střední tryskaný díl, $sol = [0, 1, 0]$ (fixované řešení „lokte“)



Obrázek 21: Výsledky plánovače trajektorie: Redundantní manipulátor pro velký tryskaný díl, $sol = [0, 1, 0]$ (fixované řešení „lokte“)

6 Závěr

Uvedená zpráva byla věnována návrhu manipulátoru s 5 DoF koncového efektoru (translace v prostoru a orientace oplachovací trysky) pro umístění do vnitřních prostor komor průmyslových myček. V práci byla vyřešena přímá a inverzní kinematická úloha pro dvě uvažované varianty manipulátorů: standardní s 5 aktuátory a redundantní s 6 aktuátory, kde redundantním aktuátorem je lineární výtah polohující celý robot). Dynamický model manipulátorů byl založen na zjednodušeném „tyčkovém“ modelu ramen manipulátoru s aktuátory reprezentovanými hmotnými body. Jako referenční model pro generování pohybu manipulátoru byl zvolen zjednodušený model skutečného technologického tryskaného dílu.

Algoritmus řízení pohybu byl v obou uvažovaných případech manipulátorů založen na nekoordinovaném pohybu mezi zadanými koincidenčními body, v našem případě lineární přejezdy mezi kloubovými souřadnicemi odpovídající zadaným koincidenčním bodům v pracovním prostoru manipulátoru. Algoritmus výpočtu kloubových souřadnic (v koincidenčních bodech) byl motivován standardním přístupem programování průmyslových robotů, kdy o volbě konkrétního řešení inverzní kinematické úlohy rozhoduje buď přímo operátor (manuální volba) či vlastní řídicí systém dle daného kritéria. V našem případě bylo toto kritérium voleno jako minimální kloubová vzdálenost mezi následujícími koincidenčními body. Zároveň byl algoritmus doplněn o kontrolu splnění omezení na vstup části manipulátoru (lokte) do zakázané oblasti vymezené dvěma elipsoidy. Na standardní variantě manipulátoru byla dále provedena optimalizace rozměrů zajišťující minimální zatížení aktuátorů manipulátoru v pracovním prostoru s ohledem na vliv gravitace (statické momenty na aktuátorech), a to pro tři návrhové varianty (rozměry) manipulátoru.

Klíčovým přínosem bylo doplnění standardní varianty manipulátoru o lineární výtah (s omezeným rozsahem pohybu), který umožňoval polohovat celý robot uvnitř oplachovací komory. Pro vzniklý redundantní manipulátor byl navržen specifický jednoduchý algoritmus řízení, který automaticky dopočítává pro každý koincidenční bod takovou polohu lineárního výtahu, která zajistí, že manipulátor může realizovat zadanou polohu koincidenčního bodu a zároveň nevstoupí do omezení vymezené elipsoidy (to vše s omezením na výsuv lineárního výtahu a minimalizaci jeho přejezdů). Navržený přístup se vymyká běžným způsobům řízení redundantních manipulátorů založeného na numerickém řešení inverzní kinematické úlohy (typicky. minimalizace vzdálenosti od singulárních poloh, limitů aktuátorů, atd.) a je vyvinut na základě reálných technologických požadavků.

Poznamenejme, že navržený způsob řízení manipulátorů pro aplikaci do vnitřních prostor mycích komor lze shrnout následovně:

- Specifická kinematická architektura vhodná pro zadanou aplikaci
- Intuitivní algoritmus řízení s možností diktovat zadané řešení inverzní kinematické úlohy (pro každý koincidenční bod zvlášť), či nechat toto řešení zvolit algoritmem řízení
- Optimalizace (minimalizace) kloubových přejezdů mezi koincidenčními body
- Možnost zahrnout kritérium na omezení pohybu lokte manipulátoru v zadané oblasti (eliminace kolizí manipulátoru s tryskaným dílem či komorou)
- Možnost rozšíření o lineární výtah se řízeným pohybem za účelem zvětšení pracovního prostoru manipulátoru (při zahrnutém omezení - eliminaci kolizí)
- Možnost doplňovat průjezdné koincidenční body za účelem uživatelského tvarování pohybu manipulátoru mezi koincidenčními body v polohách, kdy dochází k oplachu

Poděkování

Tento výzkum byl podpořen Technologickou agenturou České republiky z prostředků projektu Centra Kompetence CIDAM TE02000103.

Reference

- [1] Goubej, M.; Švejda, M.; Schlegel, M.: *Úvod do mechatroniky, robotiky a systémů řízení pohybu (skripta)*. Západočeská univerzita v Plzni, 2012.
URL <http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/materialy/Uvod%20do%20mechatroniky.pdf>
- [2] Khalil, W.; Dombre, E.: *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science paper edition, Elsevier Science, 2004, ISBN 9780080536613.
URL <http://books.google.cz/books?id=nyrY0Pu5kl0C>
- [3] Lagarias, J. C.; Reeds, J. A.; Wright, M. H.; aj.: Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, ročník 9, 1998: s. 112–147.
- [4] MathWorks, T.: *SimMechanics User's Guide*, www.mathworks.com.
- [5] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer London, 2000, ISBN 9781852332211.
URL <http://books.google.fr/books?id=v9PLbcYd9aUC>
- [6] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni (online: http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2011/rigo.pdf), 2011.
- [7] Švejda, M.: Úvod do robotiky a mechatronicky. Přednášky k předmětu, 2012.
URL <http://home.zcu.cz/~msvejda/URM/>
- [8] Švejda, M.: „robotLib“ (knihovna předimplementovaných funkcí a funkčních bloků). 2016.
URL http://home.zcu.cz/~msvejda/PhD_disertace/Algoritmy/robotLib/