

T A
Č R



TAČR Centrum kompetence CIDAM

SW Tools and methodology for optimization of mechatronic systems in terms of structure, parameters and control

Výzkumná zpráva DV037

Martin Švejda

5. 1. 2017

Abstrakt

Předložená výzkumná zpráva se zabývá problematikou kinematické optimalizace robotických architektur formující klíčovou úlohu syntézy zejména v případě nestandardních kinematických architektur manipulátorů pro speciální aplikace. V práci jsou předloženy základní aspekty a požadavky pro strukturální a parametrickou syntézu (optimalizaci) manipulátorů. Hlavní náplň práce je věnována parametrické optimalizaci manipulátorů. Cílem je nalezení efektivních algoritmů optimalizace pro obecný manipulátor umožňující splnění reálných technických požadavků na manipulátorem vykonávanou úlohu. Dosažené výsledky jsou kategorizovány do tří sekcí věnovaných statické optimalizaci (nalezení konstantních kinematických návrhových parametrů), optimalizaci pohybu redundantních manipulátorů a využití optimálního řízení pohybu redundantních manipulátorů s ohledem na parametrickou a strukturální optimalizaci. Součástí práce je vlastní knihovna předimplementovaných funkcí a funkčních bloků (robotLib) pro tvorbu virtuálních simulačních modelů a implementaci optimalizačních algoritmů. Použití navržených metod je demonstrováno na příkladech a podpořeno experimentálními výsledky.

Obsah

1	Úvod	2
2	Současný stav parametrické optimalizace	3
2.1	Kritéria optimality a definice optimalizační úlohy	3
2.2	Standardní přístupy k řešení	5
2.3	Standardní přístupy k řízení redundantních manipulátorů	7
3	Dosažené výsledky práce	9
3.1	V oblasti statické optimalizace	9
3.2	V oblasti optimálního řízení redundantních manipulátorů	12
3.3	Využití optimálního řízení redundantních manipulátorů	15
3.4	Knihovna „robotLib“	19
4	Závěr	20

1 Úvod

Nástroje a metodologie pro optimální návrh struktury, parametrů a v neposlední řadě samotného řízení hrají klíčovou roli při konstruování robotických zařízení (zejména pak takových, která jsou určena pro speciální aplikace a vyznačují se tak v mnoha případech nestandardní kinematickou architekturou). Přesto, že se může zdát, že takové „elementární“ problémy jsou v současnosti odsouvány odbornou veřejností do pozadí a v souvislosti s robotikou se tak dnes především hovoří o problémech spojených s umělou inteligencí jako je automatické rozpoznávání pro navádění robotů, autonomní chování a rozhodování, procesy učení atd., právě tyto elementární problémy nakonec diktují, jestli celé robotické zařízení je vůbec funkční s ohledem na realizování požadovaných pohybů, energetické náročnosti, volbu a dimenzování nosných konstrukcí, kloubů a pohonů, realizace řídicích algoritmů, a je tedy možné efektivně aplikovat další „vyšší“ algoritmy umělé inteligence.

Neformálně lze problém **optimalizace mechatronických (robotických) architektur** formulovat jako zásadní otázku, a to: *Jakým způsobem konstruovat robotický manipulátor, aby vyhověl všem požadavkům a zároveň maximálním možným způsobem redukoval komplikace při řešení přidružených problémů (výpočet kinematiky, návrh algoritmů řízení, atd.)*. Tato oblast návrhu je bohužel často opomíjena, což s sebou v řadě případů nese nemalé problémy, které mnohdy lze jen obtížně dále řešit, nebo dokonce tyto není možné řešit vůbec.

Hlavními výsledky práce v oblasti optimalizace robotických architektur jsou:

- **Vývoj a implementace podpůrných SW prostředků pro efektivní tvorbu virtuálních simulačních modelů:** Jedná se o soubor předimplementovaných funkcí v programovém prostředí Matlab a funkčních bloků v prostředí Matlab/Simulink/SimMechanics (knihovna **robotLib**), které umožňují efektivně realizovat standardní kinematické a dynamické úlohy a rychlým modulárním způsobem tak vytvářet komplexní simulační virtuální modely. Současně je výhodné tyto SW prostředky využívat přímo v optimalizačních algoritmech (např. za účelem vyčíslení hodnoty kritériální funkce, atd.).
- **Algoritmy parametrické optimalizace**
Hlavní náplň práce spadá do tématu *parametrické syntézy (optimalizace)*, kterou budeme dále kategorizovat následovně:
 - **Statická optimalizace:** Nalezení takových *konstantních* kinematických návrhových parametrů manipulátoru (např. Denavit-Hartenbergovy parametry), které optimalizují hodnotu zvoleného kritéria optimality. Mezi navržené přístupy patří modifikace a implementace *Culling* algoritmu globální optimalizace (i pro více hledaných optim, 2., 3. atd. optimum) a demonstrace na vlastním komplexním příkladu paralelního manipulátoru zakladače (analýza vhodnosti paralelních architektur oproti sériovým).
 - **Optimální řízení redundantních manipulátorů:** Souvislost optimálního řízení pohybu redundantních manipulátorů s *parametrickou optimalizací* je motivována myšlenkou rozvolnění některých původně konstantních kinematických návrhových parametrů a jejich uvažování jako přídatné redundantní kloubové souřadnice. V takovém případě může být úloha *parametrické optimalizace* transformována na problém optimalizace pohybu redundantních manipulátorů. Optimalizační algoritmus byl založen na principu optimálního řízení (s uvažováním kritérií optimality: minimalizace normy kloubových rychlostí a minimalizace normy kloubových sil/silových momentů).
- **Využití optimálního řízení pohybu redundantních manipulátorů s ohledem na strukturální a parametrickou optimalizaci:** Nastíněn nový přístup k optimalizaci robotických architektur založený na využití optimalizace pohybu redundantních manipulátorů s uvažováním zobecněného kinematického popisu manipulátoru. Předložený přístup

je diskutován s ohledem na využití pro statickou parametrickou optimalizaci a jako dílčí nástroj strukturální optimalizace (konkrétně s ohledem na optimální volbu aktuátorů).

2 Současný stav parametrické optimalizace

S ohledem na parametrickou optimalizaci kinematické architektury manipulátoru, tedy nalezení optimálních hodnot kinematických návrhových parametrů, které splňují podmínky optimality, lze formulovat následující klíčové problémy:

- **Kritéria optimality a definice opt. úlohy:** Je intuitivně zřejmé, že nevhodná formulace optimalizační úlohy může snadno vést ke zcela nesmyslným či nerealizovatelným výsledkům i za předpokladu, že je tato úloha, ve smyslu své definice, vyřešena korektně. Klíčový faktorem je vhodná volba kritéria optimality.
- **Řešení optimalizační úlohy:** Nalezení extrému (lokálního, globálního) hodnoty kritériální funkce a odpovídajícího argumentu reprezentovaného zvolenými kinematickými návrhovými parametry. Právě zde existuje celá řada metod, zahrnující standardní gradientní či negradientní přístupy, metody přímého prohledávání, intervalovou analýzu, heuristické metody atd. V literatuře lze nalézt i řadu alternativních přístupů k řešení. Jedná se o oblast výzkumu, která otevírá nové možnosti optimalizace a syntézy manipulátorů za účelem jejich optimálního chování vzhledem k definované úloze. Klasická úloha kritériální optimalizace je ekvivalentně nahrazena úlohou, která principiálně umožňuje takový problém řešit s využitím odlišných přístupů a jejich výsledky lze potom vhodně interpretovat na problém původní. Zásadním přínosem takových metod je možnost získání určité přidané hodnoty.
- **Optimální řízení pohybu redundantních manipulátorů - motivace práce - nový směr k optimalizaci robotických architektur?** Odlišný přístup od *statické* parametrické optimalizace (nalezení konstantních hodnot kinematických parametrů manipulátoru), kdy je apriori uvažováno rozvolnění původně konstantních návrhových parametrů a jejich další interpretace v podobě redundantních kloubových souřadnic (kinematická redundance). Z optimálního průběhu kloubových souřadnic lze následně specifikovat takové kloubové souřadnice, které:
 - By měly být voleny jako fixní na určité hodnotě, neboť vykazují např. malou varianci během pohybu manipulátoru) - vede na úlohy *statické parametrické optimalizace*
 - By měly být voleny jako aktuátory, neboť vykazují největší varianci během pohybu manipulátoru - vede na dílčí úlohu *strukturální optimalizace*

V literatuře lze nalézt řadu algoritmů pro řešení kinematických úloh redundantních manipulátorů s ohledem na dané kritérium optimality.

2.1 Kritéria optimality a definice optimalizační úlohy

Definice kritéria optimality jsou s ohledem na parametrickou optimalizaci klíčovým problémem zahrnující kvalitativní zhodnocení chování daného manipulátoru pro konkrétní hodnotu jeho kinematických návrhových parametrů. Drtivá většina všech dnes používaných lokálních kritérií optimality vychází z vlastností kinematického jakobiánu manipulátoru. Kinematický jakobián manipulátoru vztahuje rychlosti kloubových a zobecněných souřadnic a zároveň kloubových sil/silových momentů a sil/silových momentů působících na jeho koncový efektor. Souhrnně jsou

tyto závislosti označovány jako **kinetostatická dualita**, viz [24, 9, 17], a lze je formulovat následujícími vztahy:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(\mathbf{Q}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{J}^T(\mathbf{Q}))^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

kde $\dot{\mathbf{X}}$ je vektor rychlostí zobecněných souřadnic (typicky vektor translační a úhlové rychlosti posledního ramena manipulátoru), $\dot{\mathbf{Q}}$ je vektor rychlostí kloubových souřadnic, \mathbf{F} je vektor sil/silových momentů působící na koncový efektor a $\boldsymbol{\tau}$ je vektor sil/silových momentů působících v jednotlivých kloubech manipulátoru (aktuátorech).

Mezi základní standardně používaná kritéria optimality, definované skalární funkcí $J(\mathbf{Q})$ (vyplývající z vlastností kin. jakobiánu), patří:

- **Maximalizace rychlostí koncového efektoru manipulátoru:** Omezení na max. normu kloubových rychlostí (maximalizace minimálního singulárního čísla σ_{\min} jakobiánu):

$$\|\dot{\mathbf{Q}}\| \leq \frac{1}{\sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))} \cdot \|\dot{\mathbf{X}}\|, \quad \sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) \rightarrow \text{MAX} \quad (2)$$

- **Maximalizace sil/silových momentů koncového efektoru manipulátoru:** Omezení na max. normu kloubových sil/silových momentů (minimalizace maximálního singulárního čísla σ_{\max} jakobiánu):

$$\|\boldsymbol{\tau}\| \leq \sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) \cdot \|\mathbf{F}\|, \quad \sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q})) \rightarrow \text{MIN} \quad (3)$$

- **Podmíněnost kinematického jakobiánu manipulátoru:** Kompromis mezi maximalizací požadovaných rychlostí a sil/silových momentů (jako zřejmě přirozeně protichůdných kritérií). Často definováno jako maximalizace převrácené hodnoty tzv. *číslo podmíněnosti* $\text{cond}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))$ jakobiánu (poměru min. a max. singulárního čísla):

$$\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))} = \frac{\sigma_{\min}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))}{\sigma_{\max}(\mathbf{J}(\mathbf{Q}))} \in \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \text{MAXIMALIZACE} \quad (4)$$

Převrácená hodnota čísla podmíněnosti je nazývána často v literatuře jako tzv. *dexterity index*.

I přesto, že podmíněnost jakobiánu reprezentuje vhodné kritérium pro optimalizaci manipulátorů, stále lze v takovém přístupu odhalit celou řadu problémů, které iniciují k hledání jiných kritérií optimality, s ohledem na dostupnou literaturu jmenujme některé klíčové:

- **Nekonzistentnost fyzikálních jednotek:** Kinematický jakobián vztahuje prvky vektorů s různými fyzikálními jednotkami a číslo podmíněnosti jakobiánu závisí na aktuálně uvažovaných hodnotách, např. nelze relevantně porovnávat translační a úhlovou rychlost. Tento problém lze kompenzovat vhodným normováním kinematického jakobiánu, tzv. proces homogenizace jakobiánu [33, 5, 37, 13]. Bez explicitního uvažování fyzikálních jednotek mluvíme někdy o tzv. vyvažování matic (jakobiánu) založeném na podobnostním zobrazení matic, viz algoritmizace např. v Matlabu (funkce `balance`) či součást knihovny metod LAPACK (Linear Algebra PACKage) pro řešení problémů lineární algebry. V literatuře lze dále nalézt celou řadu dalších přístupů k nalezení vhodného kritéria optimality na základě daných konzistentních měření (vlastností), které jsou nezávislé na skutečných fyzikálních jednotkách či velikosti (měřítku) manipulátoru a zároveň je možné kritérium snadno vypočítat, např. zcela nový přístup založený na základě generovaného výkonu koncovým efektem manipulátoru je popsán v [15, 16].

- **Pouze polohové závislosti:** Kinetostatická kritéria optimality (singulární čísla, číslo podmíněnosti) nezahrnují vyčerpávajícím způsobem dynamické vlastnosti manipulátoru, neboť jsou závislá výhradně na jeho aktuální poloze. Zároveň kompromisní přístup (na základě *dexterity* indexu) je vhodný přístup zejména v případě nutnosti obecného vzájemného porovnávání zvolených manipulátorů na základě právě kinetostatických ukazatelů. V reálně definovaných problémech však často potřebujeme manipulátor dimenzovat výhradně pro konkrétní typ úlohy, a to často přímo na danou předepsanou trajektorii pohybu. V takových případech jsou kinetostatická kritéria optimality nedostačující a je třeba přistoupit ke generování kritérií s uvažováním kompletních dynamických rovnic chování manipulátoru (závislých nejen na poloze, ale i na rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic).
- **Zahrnutí omezení, vypořádání se se singularitami:** Během optimalizačního procesu, kdy dochází ke změně kinematických parametrů manipulátoru se může snadno manipulátor dostávat do blízkosti singulárních poloh nebo dokonce za hranice pracovního prostoru (neexistuje řešení inverzní kin. úlohy). Společně s dalšími možnostmi omezení kladenými na manipulátor je tak třeba taková omezení integrovat do algoritmů optimalizace. Často se tak děje prostřednictvím penalizací [29, 22, 28], kdy je k danému kritériu optimality aditivně přičítána penalizační část (spolehlivý, robustní přístup s možností diferencovat omezení na „měkká a tvrdá“).

Z matematického hlediska lze optimalizační úlohu definovat následovně:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^* &= \underset{\boldsymbol{\xi} \in \Xi}{\operatorname{argmin}} (J(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi})) \\ J^*(\mathbf{X}_{\text{opt}}) &= J(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi}^*) = \min_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi} (J(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi})) \end{aligned} \quad (5)$$

vzhledem k omezení: $\mathbf{Eq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) = 0$
 $\mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) > 0$

kde $J(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \boldsymbol{\xi})$ je skalární hodnota kritériální funkce, $\boldsymbol{\xi}$ je vektor vyšetřovaných parametrů z přípustné množiny Ξ , \mathbf{X} je stav manipulátoru (např. poloha, rychlost, zrychlení) v pracovním prostoru z uvažované množiny, přes kterou dochází k optimalizaci \mathbf{X}_{opt} . Funkce $\mathbf{Eq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ resp. $\mathbf{Ineq}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ definují omezení daná rovnostmi resp. nerovnostmi.

2.2 Standardní přístupy k řešení

Budeme-li na optimalizační úlohu nahlížet jako na obecný problém nalezení optima nelineární skalární funkce $J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ více proměnných (vektor $\boldsymbol{\xi}$) s uvažováním omezení typu rovností a nerovností, viz definice (5), lze nalézt celou řadu přístupů, které jsou velmi detailně shrnuty v celé řadě publikací, viz [28, 22, 20]. Vzhledem k tomu, že cílem předložené práce není explicitně hledat nové metody řešení obecné optimalizační úlohy, soustředíme se pouze na základní možnosti a charakteristiky s ohledem na využití standardních algoritmů pro optimalizaci kinematiky manipulátorů.

V případě apriori uvažovaných omezení typu rovností a nerovností na optimalizační úlohu se jedná především o metody jako: *Metoda Lagrangeových multiplikátorů* (obecná nelineární kritériální funkce i funkce omezení rovnostmi), *lineární programování* (lineární kritériální funkce a lineární funkce omezení nerovnostmi), *kvadratické programování* (kvadratická kritériální funkce a lineární funkce omezení nerovnostmi), *sekvenční kvadratické programování* (aproximace obecné nelineární kritériální funkce a funkce omezení nerovnostmi metodou kvadratického programování v každém kroku iteračního algoritmu).

V předložené práci je výhradně využívána metoda penalizací (viz výše uvedené výhody), v takovém případě je problém nalezení opt. řešení redukován na optimalizaci bez omezení a nabízí

se tak možnost využití standardních *gradientních* [20, 22, 28] a *negradientních* algoritmů (algoritmy *přímého prohledávání* [11], *heuristické metody* [6]) a některých dalších *speciálních* algoritmů (např. algoritmy intervalové analýzy [18]). Stručně lze takové metody optimalizace bez omezení shrnout následovně:

- **Gradientní algoritmy** (typicky využívají výpočet gradientu/Hessiánu krit. funkce), řadí se mezi ně zejména: *metoda největšího spádu* (požadován výpočet pouze gradientu, horší konvergence v blízkosti optima), *Newtonova metoda* (nutný navíc výpočet Hessiánu, lepší konvergence v blízkosti optima), metody *Line search* (zlepšení konvergence, problém s explicitním nalezením velikosti posunu v prohledávaném směru), metody *Trust region* (doplňují metody *Line search*, nejprve nalezena důvěryhodná oblast daná vhodnou aproximací, např. kvadratickou, kriteriální funkce a velikost posunu je vypočtena exaktně, typicky např. *Levenberg-Marguardt* algoritmus efektivně využívající kompromis mezi metodami *největšího spádu* a *Newtonovou metodou*), metoda *konjungovaných gradientů* (nalezení optima kvadratické kriteriální funkce v konečném počtu kroků díky vhodné (ortogonální) volbě směrů prohledávání a v nich dílčích posunů, vede na efektivní metody i pro obecné nelineární krit. funkce), *Qasi-Newtonova metoda* (analogie k *Newtonově metodě* s uvažováním aproximace Hessiánu pozitivně definitní maticí v každém kroku algoritmu - např. algoritmy *Davidon-Fletcher-Powell*, *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*), alternativu tvoří jednoduché aproximační metody *Spherical quadratic steepest descent* [30] (vychází z aproximace krit. funkce sférickou kvadratickou funkcí s diagonální maticí Hessiánu).

- **Negradientní metody** (apriori nevyžadující explicitní výpočet gradientu, Hessiánu), robustní, jednoduché algoritmy založené často pouze na vyčíslení hodnot krit. funkce mezi něž se řadí:

Algoritmy přímého prohledávání a jejich zástupci: *Pattern search algorithm* (přímé prohledávání stavového prostoru krit. funkce na základě předlohy (pattern) a její vhodné modifikace), *Nelder-Mead algoritmus* [14] (simplexové prohledávání), *Controlled random search* [8, 21] (pravděpodobnostní přístup v generování směru prohledávání), *Monte Carlo* metody [23, 12] (pravděpodobnostní přístup v generování kandidátů na optimum).

Heuristické metody (integrace empirických znalostí, poznatků a pozorování) a jejich zástupci: *Genetic algorithms* (evoluční přístup), *Simulated annealing* (pravděpodobnostní přístup ponechání „horších“ kandidátů na optimum), *Particle swarm optimization* (analogie k chování hejna jedinců), *Gravitational search algorithm* (analogie k chování hmotných částic v grav. poli).

- Speciální přístupy - např. **intervalová analýza** (intervalový přístup k vyčíslení a hodnocení krit. funkce) je zajímavým přístupem k optimalizaci s následujícími klíčovými vlastnostmi: Umožňuje nativně integrovat zaokrouhlovací numerické chyby a omezení na uvažovanou výrobní toleranci, nalezené opt. řešení je dáno kontinuem (intervalem, množinou) - nikoliv jediným řešením (navíc jsou nativně vyloučeny diskretizační chyby), možno hledat množiny opt. řešení pro různá kritéria a poté vybírat kompromis, algoritmus lze přirozeně paralelizovat.

Vedle standardních algoritmů lze v literatuře nalézt různé podoby alternativních algoritmů a postupů, které se buď původní problém definované optimalizační úlohy snaží vyřešit jeho transformací na ekvivalentní problém, či je optimalizační úloha nativně formulována specificky k uvažovanému druhu optimalizace. Zajímavé oblasti lze kategorizovat následovně:

- **Dynamická metoda optimalizace** [26, 28] - převedení klasické optimalizační úlohy s obecně definovanou kriteriální funkcí na ekvivalentní problém pohybu hmotné částice v konzervativním silovém poli, tzv. *Leap Frog OPTimizer* (relativně spolehlivá a robustní

metoda, není nutné počítat Hessián, obecně pomalejší konvergence pro „plochá“ optima, lineární nárůst výpočetního času pro zvyšování dimenze hledaných parametrů, modifikace pro uvažování omezení formou penalizací, tzv. *Leap Frog Optimizer for Constrained optimization* [31, 27])

- **Metoda rozvolnění kinematických parametrů manipulátoru** [4, 7, 2] - rozvolnění kinematických parametrů manipulátoru a jejich optimalizace, kinematická redundance manipulátoru. Idea metody spočívá v zavedení elastických vazeb (lineární pružina s danou přirozenou délkou) na původní místa pevných ramen manipulátoru. Cílem optimalizačního algoritmu je minimalizace výsledné potenciální energie pružin nalezením vhodných přirozených délek (kinematických parametrů) podél požadované trajektorie. Přirozené délky pružin jsou poté modifikovány v dílčích iteracích algoritmu za účelem dosažení jejich minimální variance (vedoucí na konstantní či téměř konstantní kinematické návrhové parametry).
- **Vyvažování sil/silových momentů manipulátoru** [19, 34, 35] - specifický problém minimalizace sil/silových momentů v aktuátorech manipulátoru prostřednictvím vyvažování. Vyvažování manipulátorů tvoří určitou alternativu k obecnému problému parametrické optimalizace manipulátoru, neboť se snaží specifickými strukturálními změnami (např. přidáním protizávaží či pružných elementů) pasivně docílit eliminace silového/momentového působení vyvozované pohybem hmotných ramen manipulátoru. Existují dva základní typy vyvažování: *Statické vyvažování* (celková potenciální energie zůstává konstantní pro všechny uvažované polohy manipulátoru, což odpovídá konstantní poloze těžiště manipulátoru, vyvažování je typicky prováděno přidáním protizávaží či pružin do konstrukce manipulátoru), *dynamické vyvažování* (zobecněný případ statického vyvažování, kdy předpokládáme nulové působení všech sil/silových momentů na základnu manipulátoru při pohybu - potažmo redukci reziduálních vibrací, silového /momentového namáhání aktuátorů).

2.3 Standardní přístupy k řízení redundantních manipulátorů

V rámci předložené práce byly analyzovány současné standardní přístupy k optimalizaci pohybu redundantních manipulátorů vycházející z numerických řešení inverzní kinematiky neredundantních manipulátorů (v případech, kdy je výpočetně náročné či nemožné získat analytické řešení). Lze ukázat [24], že standardní numerický iterační algoritmus je dán jako:

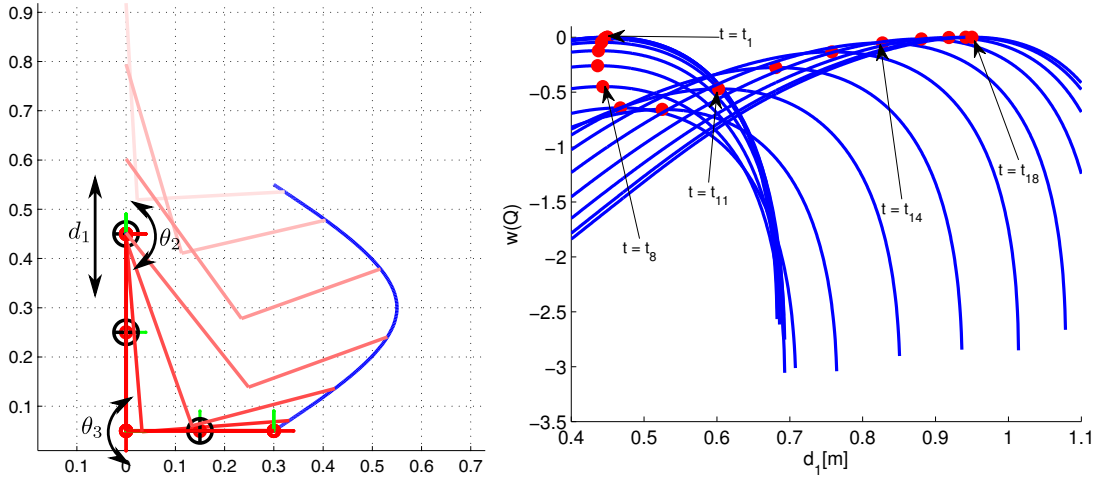
$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t_{k+1}) = \mathbf{Q}(t_k) + \left[\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}(t_k)) \left(\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}[\mathbf{X} - \mathbf{G}(\mathbf{Q}(t_k))] \right) + \right. \\ \left. + \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{Q}(t_k)) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{Q}(t_k)) \right) \cdot k_0 \cdot \left(\frac{\partial w(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \right)^T \Big|_{t=t_k} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (6)$$

kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ jsou kloubové souřadnice, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ jsou požadované zobecněné souřadnice (poloha konc. efektoru), $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m,n}$ je jakobián, $\mathbf{G}(\mathbf{Q})$ je řešení přímého geometrického modelu manipulátoru ($\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{X}$), \mathbf{J}^\dagger je zobecněná inverze, \mathbf{K} je pozitivně stabilní matice, k_0 je váhová konstanta, \mathbf{I} je jednotková matice, t_k resp. Δt je diskrétní čas resp. jeho přírůstek a $w(\mathbf{Q})$ je (polohově závislá) optimalizovaná (maximalizovaná) kriteriální funkce, typicky volena např. jako:

- Maximalizace vzd. od singulárních poloh: $w(\mathbf{Q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)}$
- Maximalizace vzd. od limitních poloh aktuátorů:
 $w(\mathbf{Q}) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_i^{max} - q_i^{min}} \right)^2$, \bar{q}_i je střed intervalu $\langle q_i^{min}, q_i^{max} \rangle$.

Příklad optimalizace pohybu planárního redundantního manipulátoru typu **PRR** (redundantní souřadnice - pohyb lin. pojezdu d_1) a průběh kriteriální funkce $w(\mathbf{Q})$ v závislosti na posunu d_1

pro vybrané časové okamžiky je znázorněn na Obrázku 1 (v případě maximálního požadovaného přiblížení natočení ramen úhlům $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$).



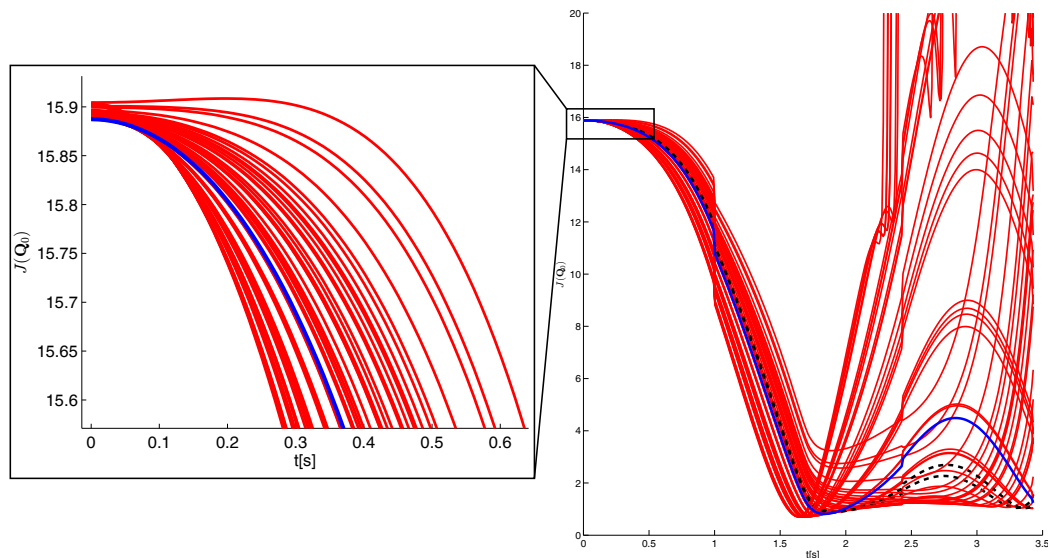
Obrázek 1: Optimalizace - polohově závislé kritérium (minimalizace vzd. od limitních poloh)

Problémem v předloženém přístupu optimalizace pohybu redundantních manipulátorů je zejména fakt, že optimalizační algoritmus nikterak nezohledňuje dynamické chování manipulátoru (pouze polohově závislé kritérium). Navíc může v tomto důsledku docházet k nalezení nedosažitelných (byť optimálních) poloh kloubových souřadnic s ohledem na požadovanou rychlost/zrychlení. V případě, že je cílem optimalizace minimalizovat síly/silové momenty v aktuátorech (integrace dynamického modelu), je možné původní algoritmus přeformulovat [10, 3] a hledat tak optimální hodnoty zrychlení kloubových souřadnic:

$$\ddot{Q} = J^\dagger \cdot (\ddot{X} - \dot{J} \cdot \dot{Q}) - [M \cdot (I - J^\dagger \cdot J)]^\dagger \cdot [M \cdot J^\dagger \cdot (\ddot{X} - \dot{J} \cdot \dot{Q}) + C \cdot \dot{Q} + G] \quad (7)$$

kde M , C , G jsou matice dynamického modelu manipulátoru: $\tau = M \cdot \ddot{Q} + C \cdot \dot{Q} + G$ (τ jsou kloubové síly/silové momenty).

Na Obrázku 2 je znázorněn optimální průběh hodnoty kriteriální funkce $J = \tau^T \tau$ (modře) podél uvažované trajektorie pohybu manipulátoru. Červeně jsou znázorněny průběhy kriteriální funkce pro perturbované optimální hodnoty zrychlení kloubových souřadnic. Přesto, že je integrován dynamický model manipulátoru, uvedený přístup optimalizace pohybu redundantních manipulátorů vykazuje klíčový nedostatek.



Obrázek 2: Optimalizace - integrace dyn. modelu (minimalizace kloubových sil/momentů)

Vzhledem k faktu, že optimalizační algoritmus hledá v daném časovém okamžiku taková kloubová zrychlení, které optimalizují v tomto konkrétním časovém okamžiku hodnotu kritéria jedná se o *lokální algoritmus*. Tzn. výsledky optimalizace nemají globální platnost a nelze zajistit, že podél uvažované trajektorie koncového efektoru neexistuje v globálním měřítku (např. ve smyslu obsahu plochy pod průběhem kritéria - tzn. integrální kritérium) „vhodnější“ řešení. Z Obrázku 2 je patrné, že zřejmě existují taková řešení, která zajišťují globálně nižší hodnotu kritéria podél trajektorie a nejsou přitom z lokálního hlediska optimálními řešeními (černé čárkované průběhy kritéria pro jednotlivé perturbace). Pro lokální optimální řešení zároveň nutně platí, že kritériální funkce bude na počátku pohybu manipulátoru vždy nabývat optimálních (minimálních) hodnot (viz detail počátku vývoje kritéria), neboť optimalizací je nalezeno v čase $t = 0$ takové řešení, pro které je hodnota kritéria minimální a zároveň hodnotu kritéria neovlivňuje žádný předchozí vývoj stavu manipulátoru. Taková vlastnost může být velmi nepříjemná v případě, kdy optimalizace je prováděna podél dlouhých trajektorií, kdy lokální optimalizace může s rostoucím časem snadno vézt do stavu, který je z hlediska hledaného minima v globálním měřítku nevhodný. Jinými slovy, lokální optimální průběh stavu manipulátoru negarantuje žádná omezení či podmínky na vývoj tohoto stavu, snadno se může stát, že (byť lokálně optimální) průběh pohybu manipulátoru povede s rostoucím časem na vysoké požadavky na síly/silové momenty v některých aktuátorech, které zajistí udržení polohy koncového efektoru na požadované trajektorii. Vyvstává tedy otázka, jak pohyb redundantního manipulátoru plánovat takovým způsobem, aby bylo splněno nějaké globálně platné kritérium.

3 Dosažené výsledky práce

3.1 V oblasti statické optimalizace

Nový přístup ke globální statické optimalizaci robotických architektur byl založen na tzv. *Culling* algoritmu. Optimalizační úloha statické optimalizace byla definována jako metoda *maxmin* (resp.

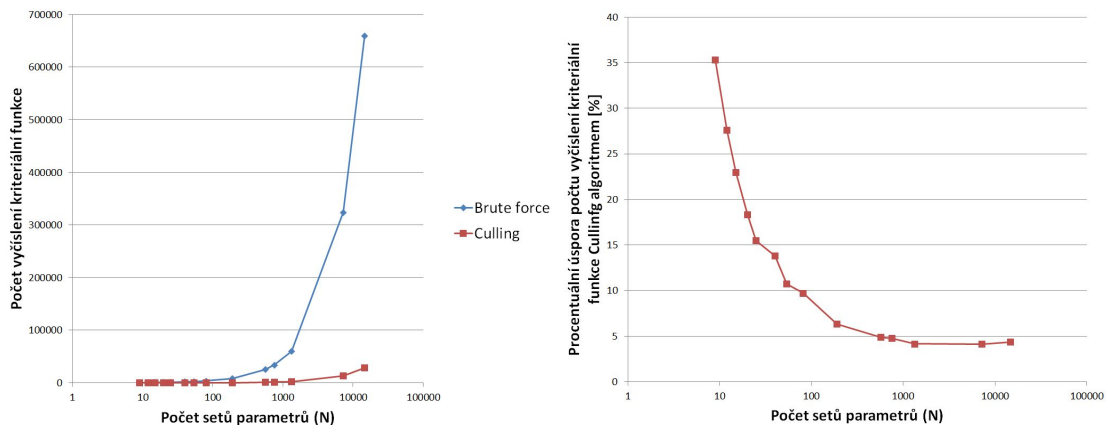
minmax s uvažováním převrácené hodnoty kritériální funkce):

$$\begin{aligned} J^*(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}^*) &= \max_{i=1\dots N} \left(\min_{j=1\dots M} J_{\text{val}}(j, i) \right) \\ i^* &= \operatorname{argmax}_{i=1\dots N} \left(\min_{j=1\dots M} J_{\text{val}}(j, i) \right), \quad \boldsymbol{\xi}^* = \Xi\{i^*\} \end{aligned} \quad (8)$$

kde \mathbf{J}_{val} je matice reprezentující stavový prostor: M řádků reprezentující diskretizované hodnoty poloh pracovního prostoru manipulátoru přes který se optimalizuje \mathbf{X}_{opt} , N sloupců reprezentující diskretizované hodnoty kinematických návrhových parametrů (optimalizovaných) z přípustného prostoru hodnot Ξ , prvky matice jsou dány hodnotou uvažované kritériální funkce v daném bodě pracovního prostoru $\mathbf{X}\{j\} \in \mathbf{X}_{\text{opt}}$ pro danou hodnotu diskretizovaných návrhových parametrů $\boldsymbol{\xi}\{i\} \in \Xi$:

$$\mathbf{J}_{\text{val}} = \begin{bmatrix} J(\mathbf{X}\{1\}, \boldsymbol{\xi}\{1\}) & J(\mathbf{X}\{1\}, \boldsymbol{\xi}\{2\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{1\}, \boldsymbol{\xi}\{i\}) & \dots \\ J(\mathbf{X}\{2\}, \boldsymbol{\xi}\{1\}) & J(\mathbf{X}\{2\}, \boldsymbol{\xi}\{2\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{2\}, \boldsymbol{\xi}\{i\}) & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ J(\mathbf{X}\{j\}, \boldsymbol{\xi}\{1\}) & J(\mathbf{X}\{j\}, \boldsymbol{\xi}\{2\}) & \dots & J(\mathbf{X}\{j\}, \boldsymbol{\xi}\{i\}) & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

Cílem algoritmu je nalezení takové sady $\boldsymbol{\xi}^* = \Xi\{i^*\}$ kinematických návrhových parametrů, pro kterou vykazuje manipulátor nejvyšší minimální hodnotu kritériální funkce $J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$ přes celý diskretizovaný pracovní prostor \mathbf{X}_{opt} . *Culling* algoritmus s výhodou využívá tzv. metody prořezávání, kdy jednoznačně apriori neoptimální podmnožiny prohledávaného prostoru přípustných kinematických návrhových parametrů jsou z algoritmu explicitně vyřazeny. Takovým prořezáváním nedochází ke ztrátě globálního optima, ale výpočetní náročnost (ve smyslu potřebného počtu vyčíslení hodnot kritériální funkce) může být výrazně snížena. *Culling* algoritmus byl z původní podoby [1, 32] modifikován na použití pro formulovaný optimalizační problém, implementován (součást knihovny **robotLib**) a dále nově rozšířen o nalezení dalších následujících extrémů (2., 3., atd. globální optimum), které umožňuje spouštět následné algoritmy zpřesňující lokální optimalizace z různým počátečních podmínek a minimalizovat tak možnost konvergence algoritmu do lokálních extrémů. Zároveň bylo provedeno relevantní porovnání výpočetní náročnosti (ve smyslu počtu vyčíslení hodnot kritériální funkce) *Culling* algoritmu s metodou *hrubé síly* prohledávání stavového prostoru, viz Obrázek 3 (na příkladu optimalizace architektury planárního paralelního zakladače, viz Obrázek 4).



Obrázek 3: Výpočetní náročnost *Culling* algoritmu ($M = 45$)

Algoritmus globální optimalizace byl demonstrován na vlastním příkladu optimalizace kinematických parametrů paralelního manipulátoru zakladače s cílem odpovědět na otázku, zda-li je

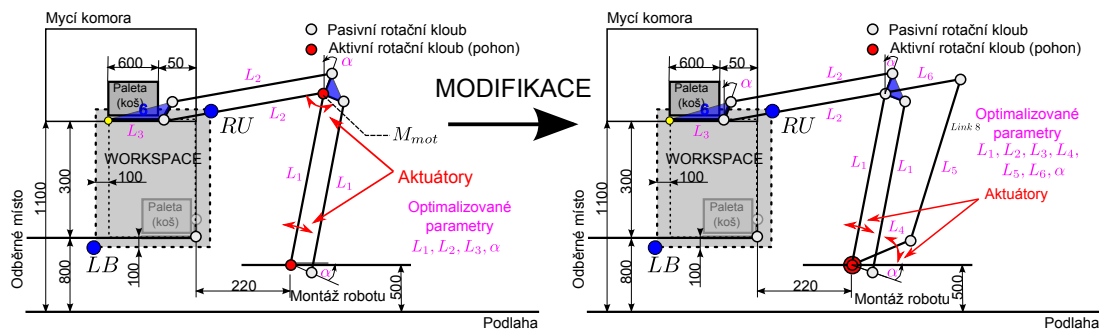
vhodné modifikovat původní návrh zakladače (s jedním neseným aktuátorem o hmotnosti M_{mot} na prvním pohyblivém ramenu) přídatnou paralelní konstrukcí umožňující umístění aktuátorů nepohyblivě na základně manipulátoru, viz Obrázek 4. Optimalizovanou (minimalizovanou) účelovou funkcí byla maximální norma silových momentů v aktuátorech manipulátoru při uvažování pohybu manipulátoru s definovaným zrychlením a_{nom} koncového efektoru z nulové rychlosti (z klidu) do libovolného směru v diskretizovaném pracovním prostoru. Takto nově definovaná účelová funkce umožňuje zahrnovat nejen projevy gravitačního působení, ale zároveň i zohledňovat dynamické chování manipulátoru (vážené parametrem a_{nom}) pouze z definice dosažitelných poloh manipulátorem bez nutnosti konkrétní znalosti trajektorie koncového efektoru (ve smyslu polohy, rychlosti, zrychlení). Bylo ukázáno, že výpočetní tvar účelové funkce je dán jako:

$$J_{obj}(\mathbf{X}) = \|\boldsymbol{\tau}\|_{max} = \sigma_{max}(\mathbf{M}(\mathbf{Q}_a) \cdot \mathbf{J}_{man}^{-1}(\mathbf{Q}_a)) \cdot a_{nom} + \|\mathbf{G}(\mathbf{Q}_a)\| \quad (9)$$

kde \mathbf{Q}_a jsou polohy aktuátorů, $\sigma_{max}(\star)$ je max. sing. číslo matice, \mathbf{J}_{man} je jakobián manipulátoru a matice \mathbf{M} a \mathbf{G} jsou definovány dynamickým modelem manipulátoru (ve výpočetním tvaru prostřednictvím knihovny **robotLib**). Výsledná kritériální funkce byla definována jako:

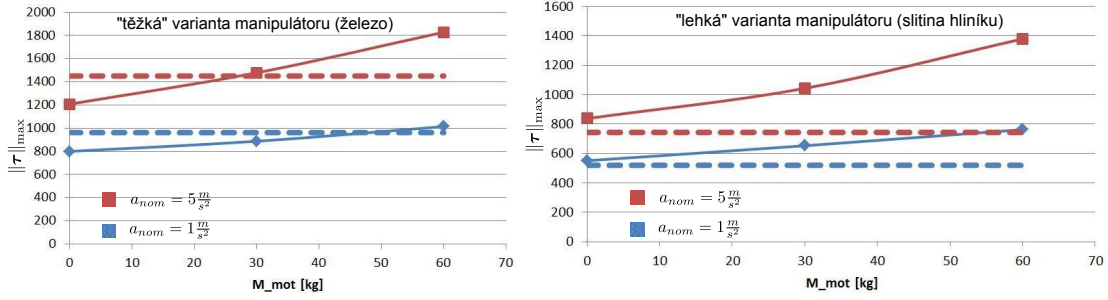
$$J(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{J_{pen} + J_{obj}} \quad (10)$$

kde J_{pen} byla zvolená penalizační funkce zahrnující omezení na existenci řešení inverzní kinematické úlohy (prioritní omezení) a minimální úhel γ_{min} svíraný paralelogramy ramen manipulátoru (jinak dochází k přiblížení kinematické singularitě).



Obrázek 4: Optimalizované architektury planárního zakladače: Původní manipulátor (PM, vlevo) a modifikovaný manipulátor (MM, vpravo)

Výsledky optimalizace jsou shrnuty na Obrázku 5 pro „těžkou“ (ramena vyrobená ze železa) a „lehkou“ (ramena vyrobená ze slitiny hliníku) variantu manipulátoru pro dvě hodnoty zrychlení koncového efektoru a_{nom} . V případě „těžké varianty“ je zřejmé, že použití MM místo PM je výhodné až pro hmotnost použitého neseného pohonu převyšující hodnotu 50 kg (pro malé požadavky na zrychlení koncového efektoru) a hodnotu 30 kg (pro velké požadavky na zrychlení koncového efektoru). V případě „lehké varianty“ je zřejmé, že **použití MM místo PM je výhodné vždy**, a to i za předpokladu, že nesený pohon by nic nevážil!



Obrázek 5: Maximální hodnoty normy silových momentů aktuátorů $\|\tau\|_{\max}$ přes uvažovaný pracovní prostor \mathbf{X}_{opt} (omezení splněna) pro různé hmotnosti neseného aktuátoru M_{mot} . Plná čára: PM, čárkovaná čára: MM

3.2 V oblasti optimálního řízení redundantních manipulátorů

Zejména lokální charakter optimalizace pohybu redundantních manipulátorů prostřednictvím standardně používaných výše zmíněných přístupů přináší problémy (globální optimalita hraje majoritní význam). V drtivé většině případů požadujeme totiž optimální pohyb manipulátoru podél celé požadované trajektorie, tzn. od času $t_0 = 0$ do nějakého času t_f . Lokální charakter optimalizace, který sice podmínky optimality splňuje, ale negarantuje „rozumný“ průběh sledovaného kritéria v celém časovém horizontu, je nežádoucí. V předložené práci byl proto formulován nový přístup k řízení pohybu redundantního manipulátoru s ohledem na globální optimalizaci podél celé uvažované trajektorie pohybu založený na úloze optimálního řízení následovně:

Inverzní geometrický model (IGM, tedy závislosti poloh) a inverzní kinematická úloha (IIK, tedy závislosti rychlosti, zrychlení) lze pro redundantní manipulátor stupně redundance $r = n - m$ s kloubovými souřadnicemi $\mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}_{\text{par}}, \mathbf{Q}_{\text{orig}}\}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Q}_{\text{par}} \in \mathbb{R}^r$ (kl. souřadnice parametrizující řešení IGM, IIK, výběr \mathbf{Q}_{par} z \mathbf{Q} je volitelný), $\mathbf{Q}_{\text{orig}} \in \mathbb{R}^{n-r}$ (původní kl. souřadnice) a zobecněnými souřadnicemi $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ zapsat jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{orig}} &= \text{IGM}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_{\text{par}}), & \dot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} &= \text{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}) \\ \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{orig}} &= \text{IIK}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \mathbf{Q}_{\text{par}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}, \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}) \end{aligned} \quad (11)$$

V případě řízení pohybu redundantního manipulátoru nutně platí, že existuje nekonečně mnoho řešení IGM, IIK, které je parametrizováno právě kl. souřadnicemi \mathbf{Q}_{par} (parametrizující volný „vnitřní“ pohyb manipulátoru pro známý (daný) pohyb koncového efektoru $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$). Vztah mezi polohami, rychlostmi a zrychleními kl. souřadnic \mathbf{Q}_{par} lze tak z fyzikální podstaty realizovatelnosti vyjádřit lineárním dynamickým systémem

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{q}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t)}_{\mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t))}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2r, 2r}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2r, r} \quad (12)$$

se stavem $\mathbf{q}(t)$ a řízením $\mathbf{u}(t)$ ve tvaru¹:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{par}}[1](t) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}[1](t) \\ \mathbf{Q}_{\text{par}}[2](t) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}[2](t) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{\text{par}}[r](t) \\ \dot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}[r](t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}(t), \quad \begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

¹ $\mathbf{Q}[i]$ vyjadřuje i -tý prvek vektoru, $\mathbf{Q}[i : j]$ vyjadřuje i -tý až j -tý prvek vektoru.

Optimalizační úlohu s globálním kritériem optimality $J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f})$, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0)$

$$J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (14)$$

kde $g(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}) = g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)$ je časově variantní váhová funkce (závislá na okamžitém bodu trajektorie koncového efektoru, neboť $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$),

lze poté definovat ve smyslu nalezení optimálního řízení (zrychlení parametrizujících kloubových souřadnic) dynamického systému jako:

$$\mathbf{u}_{t_0}^{*t_f} = \underset{\mathbf{u}_{t_0}^{t_f}}{\operatorname{argmin}} \left(J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f}) \right) \quad (15)$$

Váhová funkce $g(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t)$ byla volena za účelem minimalizace kvadrátu normy **kloubových rychlostí** a normy **sil/silových momentů** v aktuátorech. Lze snadno ukázat, že její tvar je dán jako:

- **Minimalizace rychlostí:**

$$g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) = \dot{\mathbf{Q}}^T(\mathbf{q}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}(t), t) + \mathbf{u}^T(t) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (16)$$

kde \mathbf{R} je volená váhová matice řízení.

Praktický význam kritéria: Výsledná hodnota kritéria J je úměrná celkové dráze najeté všemi kloubovými souřadnicemi, tedy v podstatě se jedná o hodnotu udávající celkové provozní opotřebení manipulátoru najetou vzdáleností všemi klouby (opotřebení motorů, převodovek, atd.).

- **Minimalizace sil/silových momentů:**

$$g(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) = \boldsymbol{\tau}^T(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (17)$$

kde $\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}(t), t)$ resp. $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)$ je vektor kloubových rychlostí resp. sil/ silových momentů (získaný z výpočetního tvaru řešení inverzního kinematického resp. dynamického modelu v knihovně **robotLib**).

Praktický význam kritéria: Minimalizace celkové spotřebované energie pro požadovaný pohyb manipulátoru.

Je známo, že optimalizační úlohu definovanou kritériem (14) s vazební podmínkou (12) je možné řešit dvěma odlišnými přístupy, a to metodami založené na Bellmanově optimalizační rekurzi (dynamické programování, v diskretizované podobě) a metodami založenými na Hamiltonovu přístupu (variační počet). V předložené práci byly oba přístupy analyzovány a nakonec zvolen Hamiltonův přístup z následujících důvodů: Bez omezujících diskretizačních chyb (např. interpolace diskretizovaných hodnot stavu/řízení při opt. rekurzi a související problém s nalezením přípustných řešení), výpočetně menší náročnost (oproti prohledávání stavového prostoru), znalost konkrétní jedné opt. trajektorie z daných počátečních podmínek je dostačující.

Dle Hamiltonova principu musí optimální řízení $\ddot{\mathbf{Q}}_{\text{par}}^*(t) = \mathbf{u}^*(t) \in \mathbf{u}_{t_0}^{*t_f}$ splňovat soustavu algebro-diferenciálních rovnic:

$$\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{A}\mathbf{q}^* + \mathbf{B}\mathbf{u}^* \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^* = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{p}^* - \frac{g(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{q}} \quad (19)$$

$$0 = -\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{p}^* - \frac{g(\mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, t)}{\partial \mathbf{u}} \quad (20)$$

Současně s okrajovými podmínkami:

$$\mathbf{q}^*(t_0) = \mathbf{q}_0 \quad (21)$$

$$\mathbf{p}^*(t_f) = \mathbf{0} \quad (22)$$

kde \mathbf{p} je vektor kostavu (stejné dimenze jako stav \mathbf{q}).

V předložené práci bylo ukázáno, že je možná analyticky a algoritmizovatelně (prostřednictvím předimplementovaných funkcí knihovny **robotLib**) vyřešit nutnou algebraickou podmínku (20) ve tvaru $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, a to nejen pro optimalizaci rychlostí (triviální problém):

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{p} \quad (23)$$

Ale zejména pro optimalizaci sil/silových momentů - důkaz je založen na algoritmizovatelném řešení inverzních okamžitých kinematických úloh (včetně nalezení příslušných jakobiánů), dopředného/zpětného dynamického modelu a vhodném přeuspořádání získaných závislostí dle volby původních a parametrizujících kloubových souřadnic. Vzhledem k rozsahu odvození jej zde dále nebudeme uvádět.

Vyřešením algebraické nutné podmínky $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ tak lze původní problém řešení soustavy algobro-diferenciálních rovnic (18 - 22) redukovat na řešení dvoubodového problému (*Boundary Value Problem - BVP*, soustava obyčejných diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami) ve tvaru:

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{S}(t), t), \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \\ -\mathbf{A}^T\mathbf{p} - \frac{g(\mathbf{q}, \mathbf{u}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), t)}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

kde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2r}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2r}$, s okrajovými podmínkami:

$$\mathbf{S}(t_0)[1 : 2r] = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{S}(t_f)[2r + 1 : 4r] = \mathbf{0}$$

BVP byl v předložené práci řešen ve dvou fázích, neboť se jedná z principu o řešení silně nelineární soustavy diferenciálních rovnic s polovinou počátečních podmínek definovaných na počátku a polovinou na konci zkoumaného času. Fáze řešení byly následující:

- **Polynomiální odhad řešení optimalizační úlohy:** Cílem je nalézt takovou aproximaci optimální trajektorie $\hat{\mathbf{S}}(t)$, která se blíží co nejvíce optimálnímu řešení $\mathbf{S}^*(t)$ a zároveň je odhad dostatečně výpočetně nenáročný a rychlý. Pro nalezení odhadu bylo využito polynomiální aproximace trajektorie reprezentující polohu parametrizujících kloubových souřadnic \mathbf{Q}_{par} polynomem 5. řádu s parametry $\Theta \in \mathbb{R}^{4r}$ na celém uvažovaném časovém intervalu $t \in \langle t_0, t_f \rangle$ (z nulové poč. rychlosti a def. polohy $\mathbf{Q}_{\text{par}0} = \mathbf{Q}_{\text{par}}(t_0)$). Vzhledem ke tvaru kritéria J je zřejmé, že nalezením parametrů polynomů Θ (jednoznačně definujících průběh odhadu stavu $\hat{\mathbf{q}}$ a řízení $\hat{\mathbf{u}}$), které minimalizuje hodnotu kritéria, dostáváme nejlepší možný odhad optimální trajektorie stavu \mathbf{q}^* a řízení \mathbf{u}^* v rámci uvažovaného omezení na tvar trajektorií daný polynomiálními funkcemi 5. řádu. Řešená podružná optimalizační úloha vedoucí na nalezení parametrů Θ

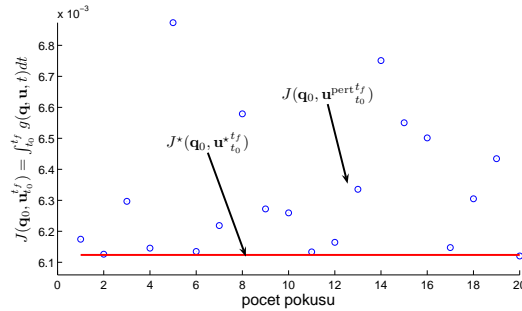
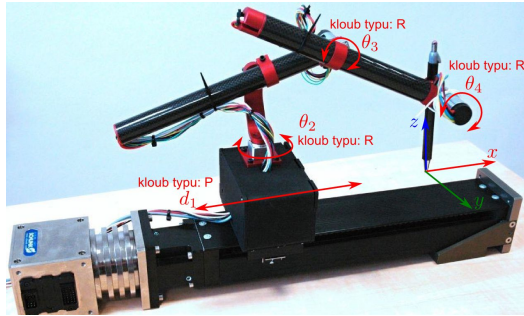
$$\hat{J}(\mathbf{Q}_{\text{par}0}, \Theta) = \int_{t_0}^{t_f} g(\hat{\mathbf{q}}(\Theta, t), \hat{\mathbf{u}}(\Theta, t), t) dt \quad (25)$$

$$\Theta^* = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} \left(\hat{J}(\mathbf{Q}_{\text{par}0}, \Theta) \right)$$

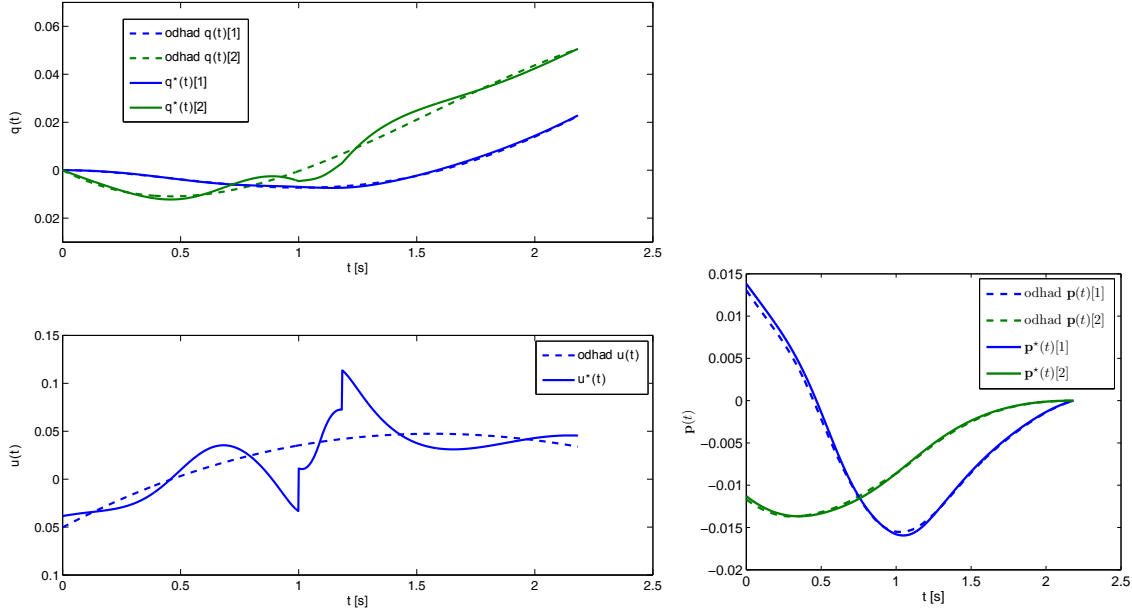
byla řešena simplexovým algoritmem [14] a příslušný odhad kostavu $\hat{\mathbf{p}}(\Theta, t)$ potom numerickým řešením diferenciální rovnice (19) inverzně v čase.

- **Vlastní řešení BVP:** Řešení soustavy diferenciálních rovnic (24) se známým (polynomiálním) počátečním odhadem $\hat{\mathbf{S}}(t)$ hledaného řešení $\mathbf{S}^*(t)$ bylo realizováno prostřednictvím *collocation* metody `bvp4c` [25, 36] implementované v Matlabu.

Jako demonstrační příklad je uvedena optimalizace pohybu redundantního manipulátoru „Alice“ (4 DoF manipulátor typu **PRRR** pro polohování v prostoru, viz Obrázek 6), kde redundantní kloubovou souřadnicí je uvažována poloha lineárního pojezdu (stupeň redundance $r = 1$). Optimalizovaným kritériem je síla/silový moment v aktuátorech. Odhady a optimální průběhy stavu (polohy a rychlosti lineárního pojezdu), řízení (zrychlení lineárního pojezdu) a kostavu jsou znázorněny na Obrázku 7.



Obrázek 6: Manipulátor „Alice“ (vlevo) a výsledná hodnoty kritéria $J(\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_{t_0}^{t_f})$ pro optimální nalezené řízení $\mathbf{u}_{t_0}^{t_f}$ (červeně) a náhodně perturbované hodnoty optimálního řízení (modře) - experimentální ověření algoritmu.



Obrázek 7: Polynomiální odhad a optimální průběh stavu $\mathbf{q}^*(t)$ (vlevo nahoře) a řízení $\mathbf{u}^*(t)$ (vlevo dole), polynomiální odhad a optimální průběh kostavu $\mathbf{p}^*(t)$ (vpravo).

3.3 Využití optimálního řízení redundantních manipulátorů

Vztah mezi statickou optimalizací a optimalizací pohybu redundantních manipulátorů je v podstatě jen formální záležitostí v okamžiku, kdy začneme uvažovat, že jsou některé jinak konstantní

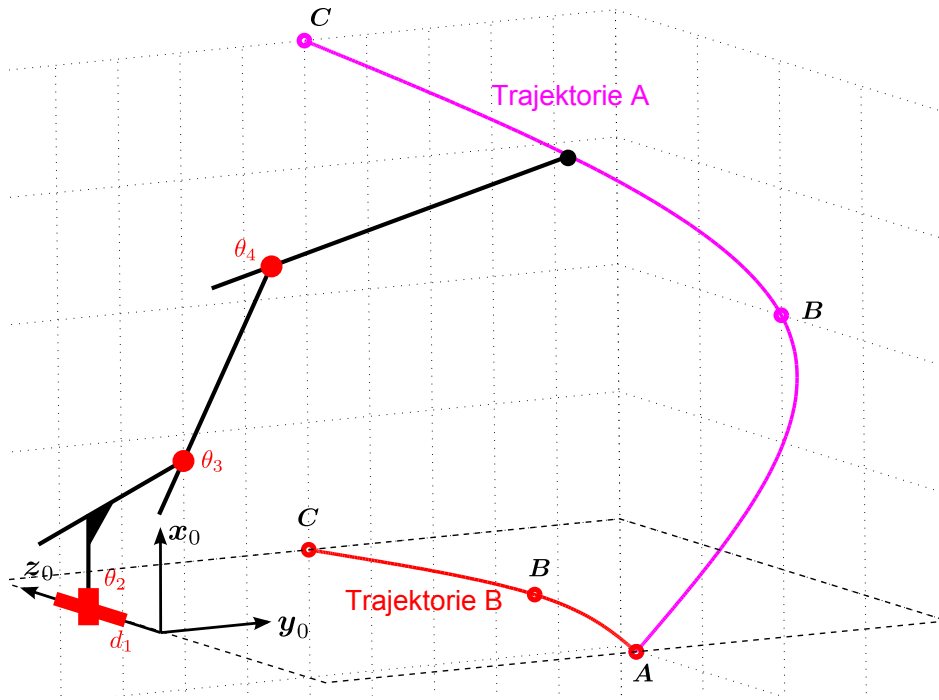
kinematické návrhové parametry uvolněny a předpokládá se jejich fluktuace podél požadované trajektorie pohybu koncového efektoru manipulátoru. Nabízí se tak otázka, zda-li není možné využít právě přístup optimalizace pohybu redundantních manipulátorů k syntéze robotických architektur v obecném pojetí, a to zejména ve dvou rovinách:

- **Jako nástroj statické parametrické optimalizace:** Základní myšlenka je taková, že je kinematická struktura manipulátoru teoreticky rozvolněna (ve smyslu uvažování (některých) kinematických návrhových parametrů jako kloubových souřadnic), dostáváme tak redundantní manipulátor pro který bude řešena příslušná optimalizační úloha a vhodnými iteračními algoritmy bude následně dosaženo minimální možné fluktuace (ideálně nulové) těch kinematických parametrů, které nereprezentují skutečné kloubové souřadnice (jsou z konstrukční podstaty dány jako konstantní návrhové parametry robotu).
- **Jako nástroj strukturální optimalizace:** Nedílnou součástí strukturální optimalizace je i návrh vhodného umístění a typů dílčích aktuátorů manipulátoru. Ponecháme-li stranou technologické aspekty jednotlivých typů aktuátorů s ohledem na jejich konstrukční realizaci a možnosti nasazení, vzniká v takovém případě přirozená otázka.

Jaké typy aktuátorů (prizmatický, rotační či některý ze složených typů) a na jakém místě v kinematickém řetězci manipulátoru je vhodné osadit, aby byly tyto aktuátory co možná nejefektivněji využívány a přispívaly tak k dosažení požadovaného optimálního pohybu manipulátoru?

Z fluktuace pohybu rozvolněných kloubových souřadnic (získané opět nalezením optimálního pohybu redundantního manipulátoru) lze usuzovat právě na vhodnost výběru a umístění aktuátorů.

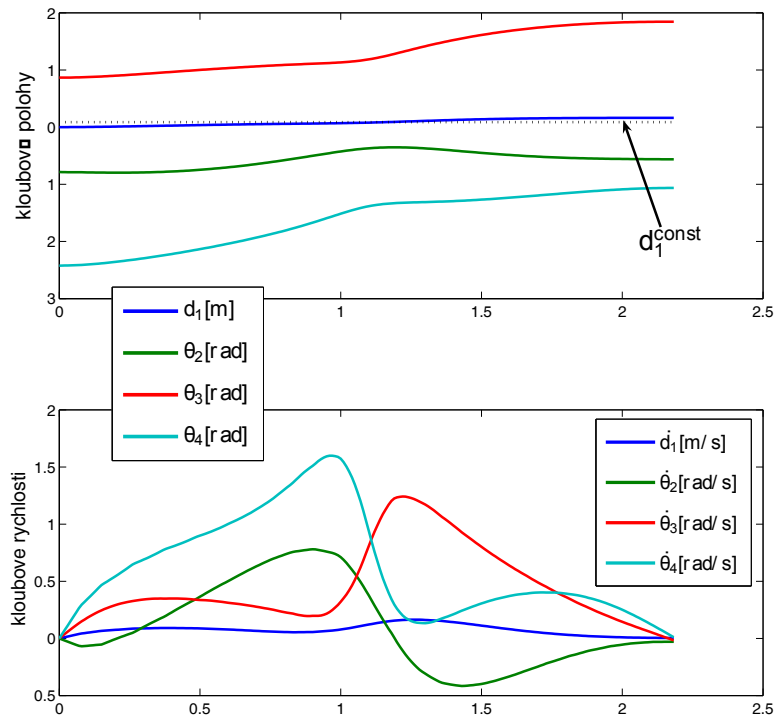
Demonstračním příkladem může být manipulátor „Alice“ a jeho pohyb po dvou různých uvažovaných trajektoriích koncového efektoru na Obrázku 8. Předpokládejme, že původně manipulátor obsahoval pouze rotační klouby \mathbf{R} ($\theta_{2..4}$) a poloha základny (d_1 , lineární pojezd \mathbf{P}) je pevně určena (reprezentuje původně konstantní kin. návrhový parametr manipulátoru). Uvažujme nyní, že právě parametr d_1 je rozvolněn a provedme optimalizaci pohybu takto získaného redundantního manipulátoru. Z nalezených optimálních průběhů polohy (rychlosti a zrychlení) kloubových souřadnic d_1 , $\theta_{2..4}$ lze dojít ke dvěma klíčovým závěrům, viz Obrázek 9, 10:



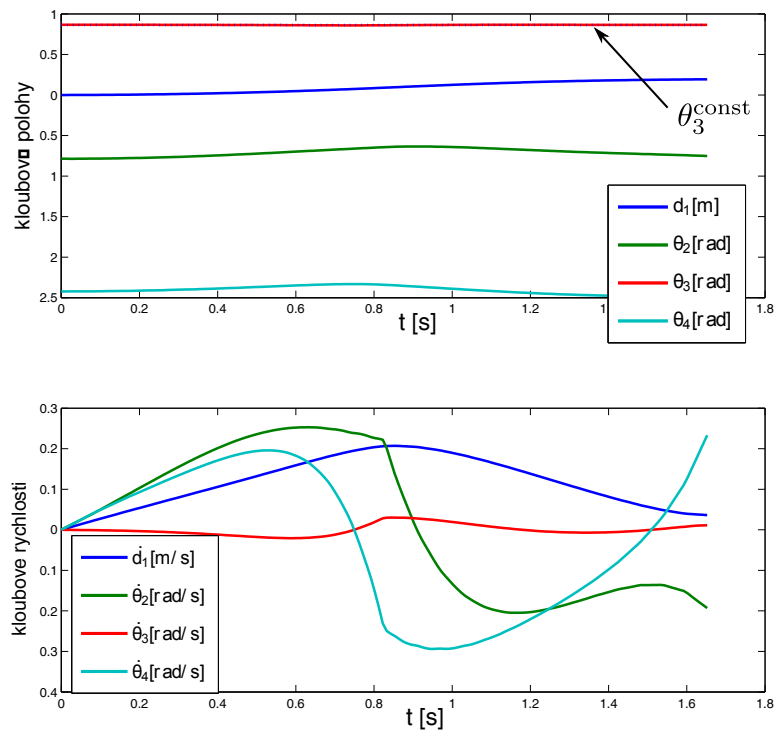
Obrázek 8: Dvě různé uvažované trajektorie koncového efektoru manipulátoru.

Pro Trajektorii A: Z fluktuace (ekvivalentně z rychlostí) kloubových souřadnic je zřejmé, že kloubová souřadnice d_1 je nejvhodnějším kandidátem na zafixování $d_1(t) \rightarrow d_1^{\text{const}}$, neboť se v čase mění nejméně (relativně k ostatním kloubovým souřadnicím). Uvažujme, že zafixování kloubové souřadnice provedeme např. na její průměrné hodnotě. Z redundantního manipulátoru se tak stává opět manipulátor neredundantní s kloubovými souřadnicemi $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ a původními parametry za předpokladu $d_1 = d_1^{\text{const}}$. Prostřednictvím optimalizace pohybu redundantního manipulátoru byla tak vyřešena úloha statické optimalizace s nalezeným optimalizovaným kinematickým návrhovým parametrem d_1 .

Pro Trajektorii B: V tomto případě dostáváme výsledky odlišné. Souřadnicí vykazující nejmenší fluktuaci (rychlost) je θ_3 , a je tedy nejvhodnějším kandidátem na zafixování $\theta_3 \rightarrow \theta_3^{\text{const}}$. Z redundantního manipulátoru se tak stává opět neredundantní, tentokrát s kloubovými souřadnicemi d_1, θ_2, θ_4 a původními parametry za předpokladu $\theta_3 = \theta_3^{\text{const}}$. Z pohledu strukturální optimalizace se nyní zdá rozumné vypustit původní rotační aktuátor θ_3 a místo toho použít prismatický aktuátor d_1 . Tím jsme jednoznačně definovali strukturu manipulátoru s ohledem na optimální typ a umístění aktuátorů.



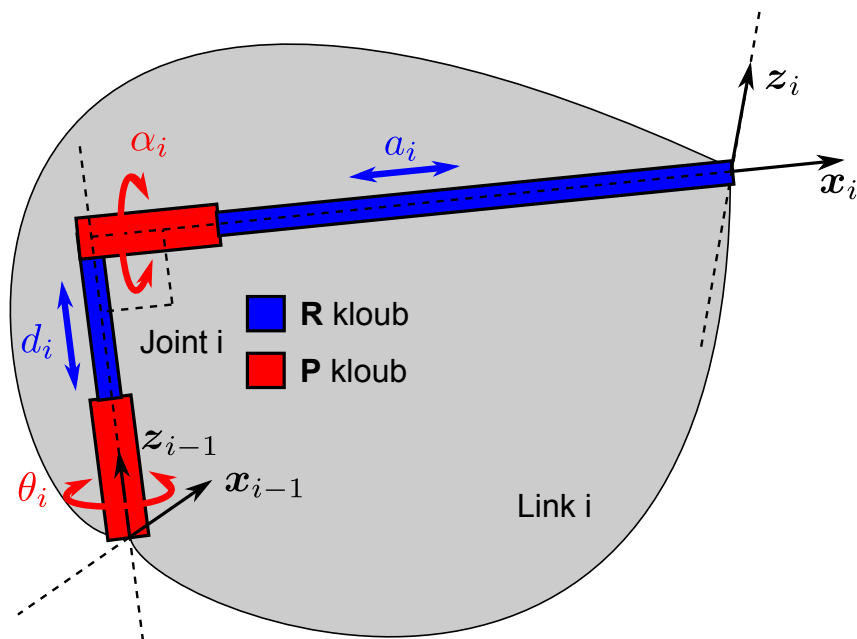
Obrázek 9: Optimální průběhy kloubových souřadnic pro Trajektorii A.



Obrázek 10: Optimální průběhy kloubových souřadnic pro Trajektorii B.

Nová idea optimalizace obecného manipulátoru vychází právě z myšlenky rozvolnění některých (či dokonce všech) kinematických návrhových parametrů, tzn. předpokládá se, že každé rameno může obsahovat najednou až 4 aktuátory (dle standardního popisu Denavit-Hartenbergovou úmluvou), a to: dva **P** aktuátory reprezentované kloubovými souřadnicemi d_i , a_i a dva **R** aktuátory reprezentované kloubovými souřadnicemi θ_i , α_i , viz Obrázek 11. Za účelem vytváření virtuálních modelů redundantních manipulátorů založených na zobecněném ramenu byly příslušně rozšířeny standardní algoritmy řešení kinematických a dynamických úloh manipulátoru (v rámci knihovny **robotLib**).

Mezi výhody předloženého přístupu patří zejména: Možnost libovolně volit komplexnost optimalizačního problému (rozvolněním D-H parametrů), náhled do vnitřního „optimálního“ pohybu manipulátoru, možnost přehodnotit umístění a typ aktuátorů (přesah do strukturální syntézy), vhodnost pro návrhy vysoce specializovaných manipulátorů.



Obrázek 11: Zobecněné rameno manip.

3.4 Knihovna „robotLib“

Knihovna předimplementovaných funkcí (funkce v *Matlabu*) a funkčních bloků (bloky v *SimMechanicsu*) je rozdělena do několika zájmových částí:

- **Standardní funkce a funkční bloky pro modelování sériových manipulátorů:** Standardní přístup k modelování kinematiky a dynamiky manipulátorů s jedním uvažovaným 1 DoF aktuátorem na každém ramenu.
- **Funkce a funkční bloky pro modelování zobecněných (redundantních) sériových manipulátorů:** Implementované funkce a funkční bloky jsou motivovány novým přístupem k optimalizaci manipulátorů na základě využití výsledků optimálního pohybu redundantních manipulátorů. V kinematickém popisu manipulátoru se předpokládá, že pro každé rameno mohou existovat současně až 4 nezávislé aktuátory, 2 typu **P** (reprezentované D-H parametry d_i , a_i) a dva typu **R** (reprezentované D-H parametry θ_i , α_i).
- **Funkce pro plánování trajektorie koncového efektoru:** Za účelem optimalizace kinematiky manipulátorů byly vyvinuty a implementovány některé algoritmy plánování trajektorie pohybu koncového efektoru.

4 Závěr

Přesto, že z obecného hlediska lze v souvislosti s optimalizací robotických architektur vymežit dvě zásadní oblasti, a to *strukturální* a *parametrickou* optimalizaci, byla předložená práce věnována zejména tématu *parametrické* optimalizace, a to z následujících důvodů:

- Strukturální optimalizace (syntéza) zahrnující topologickou syntézu manipulátoru ve smyslu volby počtu a typu kloubů či ramen a jejich vzájemného propojení do podoby otevřených či uzavřených kinematických řetězců je velmi komplexní a složitý problém (především z důvodu vlastní definice vhodného kritéria optimality a samotného řešení).
- Strukturální syntéza je často řešena intuitivně na základě zkušeností a „inženýrského“ citu návrháře pečlivě seznámeného s technickou oblastí nasazení manipulátoru.
- Vlastnosti i ne zcela optimálně zvolené kinematické struktury manipulátoru mohou být z velké části vylepšeny vhodnými přístupy parametrické optimalizace.

Hlavní výsledky předložené práce lze shrnout následovně:

- **Vývoj a implementace algoritmů statické optimalizace** s ohledem na nalezení robustního globálního algoritmu optimalizace s „rozumnou“ výpočetní náročností.
- **Optimální řízení redundantních manipulátorů** s ohledem na globální charakter optimalizace založený na integrálním kritériu optimality (založeno na principech optimálního řízení).
- **Využití přístupu optimálního řízení redundantních manipulátorů** s ohledem na intuitivní náhled do „vnitřního chování“ manipulátoru a jeho integrace do přístupu parametrické a strukturální optimalizace.
- **Vytvoření nástroje pro rychlé prototypování** při návrhu nestandardních architektur manipulátorů určených pro speciální aplikace, založené na předimplementovaných softwarových prerekvizitách (knihovna **robotLib**) pro modulární tvorbu simulačních modelů a návrh efektivních optimalizačních algoritmů.

Poděkování

Tento výzkum byl podpořen Technologickou agenturou České republiky z prostředků projektu Centra Kompetence CIDAM TE02000103.

Reference

- [1] *Mechanism design for global isotropy with applications to haptic interfaces*, 1997, cited By (since 1996): 5.
URL www.scopus.com
- [2] Alba, J.; Doblaré, M.; Gracia, L.: A simple method for the synthesis of 2D and 3D mechanisms with kinematic constraints. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 35, č. 5, 2000: s. 645 – 674, ISSN 0094-114X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(99\)00035-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(99)00035-X).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X9900035X>
- [3] Baillieul, J.; Hollerbach, J.; Brockett, R.: Programming and control of kinematically redundant manipulators. In *Decision and Control, 1984. The 23rd IEEE Conference on*, Dec 1984, s. 768–774, doi:10.1109/CDC.1984.272110.
- [4] Collard, J.-F.; Duysinx, P.; Fiset, P.: Optimal synthesis of planar mechanisms via an extensible-link approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, ročník 42, č. 3, 2010: s. 403–415, ISSN 1615-147X, doi:10.1007/s00158-010-0500-3.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-010-0500-3>
- [5] Doty, K. L.; Melchiorri, C.; Schwartz, E.; et al.: Robot manipulability. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, ročník 11, č. 3, 1995: s. 462–468, ISSN 1042-296X, doi:10.1109/70.388791.
- [6] Erdogmus, P.; Toz, M.: *Serial and Parallel Robot Manipulators - Kinematics, Dynamics, Control and Optimization*, kapitola Heuristic Optimization Algorithms in Robotics. InTech, 2012, doi:10.5772/30110.
- [7] J.-F. Collard, P. D., P. Fiset: Optimal synthesis of mechanisms using time-varying dimensions and natural coordinates. In *6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Rio de Janeiro, Brazil, June 2005.
- [8] Karnopp, D. C.: Random search techniques for optimization problems. *Automatica*, ročník 1, č. 2-3, 1963: s. 111 – 121, ISSN 0005-1098, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098\(63\)90018-9](http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098(63)90018-9).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109863900189>
- [9] Khalil, W.; Dombre, E.: *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science paper edition, Elsevier Science, 2004, ISBN 9780080536613.
URL <http://books.google.cz/books?id=nyrY0Pu5k10C>
- [10] Khatib, O.: Redundant Manipulators and Kinematic Singularities The Operational Space Approach. In *RoManSy 6*, editace A. Morecki; G. Bianchi; K. Kedzior, Springer US, 1987, ISBN 978-1-4684-6917-2, s. 131–138, doi:10.1007/978-1-4684-6915-8_12.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-6915-8_12
- [11] Kolda, T. G.; Lewis, R. M.; Torczon, V.: Optimization by direct search: New perspectives on some classical and modern methods. *SIAM Review*, ročník 45, 2003: s. 385–482.
- [12] Kroese, D. P.; Rubinstein, R. Y.: Monte Carlo methods. *WIREs Comp Stat*, ročník 4, 2012, doi:10.1002/wics.194.
- [13] Kucuk, S.; Bingul, Z.: Comparative study of performance indices for fundamental robot manipulators. *Robotics and Autonomous Systems*, ročník 54, č. 7, 2006: s. 567 – 573, ISSN 0921-8890, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.robot.2006.04.002>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921889006000546>

- [14] Lagarias, J. C.; Reeds, J. A.; Wright, M. H.; aj.: Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, ročník 9, 1998: s. 112–147.
- [15] Mansouri, I.; Ouali, M.: A new homogeneous manipulability measure of robot manipulators, based on power concept. *Mechatronics*, ročník 19, č. 6, 2009: s. 927 – 944, ISSN 0957-4158, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechatronics.2009.06.008>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957415809001202>
- [16] Mansouri, I.; Ouali, M.: The power manipulability ? A new homogeneous performance index of robot manipulators. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, ročník 27, č. 2, 2011: s. 434 – 449, ISSN 0736-5845, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.rcim.2010.09.004>, <ce:title>Translational Research ? Where Engineering Meets Medicine</ce:title>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0736584510001225>
- [17] Mark W. Spong, M. V., Seth Hutchinson: *Robot Modeling and Control*. Wiley, 2005.
- [18] Merlet, J. P.: *Parallel Robots*. Springer Publishing Company, Incorporated, druhé vydání, 2010, ISBN 9048170532, 9789048170531.
- [19] Moore, B.; Schicho, J.; Gosselin, C. M.: Determination of the complete set of shaking force and shaking moment balanced planar four-bar linkages. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 44, č. 7, 2009: s. 1338 – 1347, ISSN 0094-114X, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2008.10.004>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X08002139>
- [20] Nocedal, J.; Wright, S. J.: *Numerical Optimization*. Springer New York, 2006, ISBN 978-0-387-40065-5.
- [21] Price, W. L.: A controlled random search procedure for global optimisation. *The Computer Journal*, ročník 20, č. 4, 1977: s. 367–370, doi:10.1093/comjnl/20.4.367, <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/20/4/367.full.pdf+html>.
URL <http://comjnl.oxfordjournals.org/content/20/4/367.abstract>
- [22] Reklaitis, G.; Ravindran, A.; Ragsdell, K.: *Engineering Optimization: Methods and Applications*. A Wiley-Interscience Publication, Wiley, 1983, ISBN 9780471055792.
URL <https://books.google.cz/books?id=Tj6NJGvk7b4C>
- [23] Robert, C. P.; Casella, G.: *Introducing Monte Carlo Methods with R*, kapitola Monte Carlo Optimization. New York, NY: Springer New York, 2010, ISBN 978-1-4419-1576-4, s. 125–165, doi:10.1007/978-1-4419-1576-4_5.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-1576-4_5
- [24] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer London, 2000, ISBN 9781852332211.
URL <http://books.google.fr/books?id=v9PLbcYd9aUC>
- [25] Champine, L. F.; Kierzenka, J.; Reichelt, M. W.: Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in Matlab with bvp4c. October 2006.
URL http://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/che512/bvp_paper.pdf
- [26] Snyman, J.: A new and dynamic method for unconstrained minimization. *Applied Mathematical Modelling*, ročník 6, č. 6, 1982: s. 449 – 462, ISSN 0307-904X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X\(82\)80007-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X(82)80007-3).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X82800073>

- [27] Snyman, J.: The {LFOPC} leap-frog algorithm for constrained optimization. *Computers & Mathematics with Applications*, ročník 40, č. 8-9, 2000: s. 1085 – 1096, ISSN 0898-1221, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221\(00\)85018-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221(00)85018-X).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089812210085018X>
- [28] Snyman, J.: *Practical Mathematical Optimization: An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms*. Applied Optimization, Springer, 2005, ISBN 9780387243481.
URL http://books.google.cz/books?id=0tFmf_UK17oC
- [29] Snyman, J.: On non-assembly in the optimal synthesis of serial manipulators performing prescribed tasks. In *Advances in Robot Kinematics*, editace J. Lennarčič; B. Roth, Springer Netherlands, 2006, ISBN 978-1-4020-4940-8, s. 349–356, doi:10.1007/978-1-4020-4941-5_38.
URL http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-4941-5_38
- [30] Snyman, J.; Hay, A.: The spherical quadratic steepest descent (SQSD) method for unconstrained minimization with no explicit line searches. *Computers & Mathematics with Applications*, ročník 42, č. 1-2, 2001: s. 169 – 178, ISSN 0898-1221, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221\(01\)00141-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00141-9).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122101001419>
- [31] Snyman, J.; Stander, N.; Roux, W.: A dynamic penalty function method for the solution of structural optimization problems. *Applied Mathematical Modelling*, ročník 18, č. 8, 1994: s. 453 – 460, ISSN 0307-904X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/0307-904X\(94\)90307-7](http://dx.doi.org/10.1016/0307-904X(94)90307-7).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X94903077>
- [32] Stocco, L.; Salcudean, S. E.; Sassani, F.: Fast Constrained Global Minimax Optimization of Robot Parameters. *Robotica*, ročník 16, č. 6, Listopad 1998: s. 595–605, ISSN 0263-5747, doi:10.1017/S0263574798000435.
URL <http://dx.doi.org/10.1017/S0263574798000435>
- [33] Stocco, L.; Salcudean, S. E.; Sassani, F.: Matrix normalization for optimal robot design. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1998, s. 434–439.
- [34] Wang, J.; Gosselin, C. M.: Static balancing of spatial three-degree-of-freedom parallel mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 34, č. 3, 1999: s. 437 – 452, ISSN 0094-114X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(98\)00031-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(98)00031-7).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X98000317>
- [35] Wang, J.; Gosselin, C. M.: Static balancing of spatial four-degree-of-freedom parallel mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, ročník 35, č. 4, 2000: s. 563 – 592, ISSN 0094-114X, doi:[http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X\(99\)00029-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0094-114X(99)00029-4).
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094114X99000294>
- [36] Wang, X.: Solving optimal control problems with MATLAB - Indirect methods.
URL <http://www4.ncsu.edu/~xwang10/document/Solving%20optimal%20control%20problems%20with%20MATLAB.pdf>
- [37] Zargarbashi, S.; Khan, W.; Angeles, J.: The Jacobian condition number as a dexterity index in 6R machining robots. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, ročník 28, č. 6, 2012: s. 694 – 699, ISSN 0736-5845, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.rcim.2012.04.004>.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0736584512000427>