

# MPO TRIO

Název projektu:

Výzkum a vývoj pokročilé kolaborativní robotické platformy a její aplikace ve výrobě  
elektronických komponent  
(FV 10044)

Výzkumná zpráva

Bezpečnostní subsystém kolaborativního robotu  
(Detekce kolizí prostřednictvím F/T senzorů)

Martin Švejda (ZČU)

27. 11. 2018



MINISTERSTVO  
PRŮMYSLU A OBCHODU

**Identifikátor účastníka:**

ZČU: Západočeská univerzita v Plzni, IMI: Integrated Micro-Electronics Czech Republic s.r.o.,  
SM: SmartMotion s.r.o.

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2 Využití FT pro detekci kolizních stavů robotu</b>	<b>4</b>
2.1 FT senzor mezi výstupní stranou převodovky a ramenem robotu . . . . .	4
2.2 FT senzor v základně robotu . . . . .	5
<b>3 Závěr, shrnutí výsledků</b>	<b>9</b>
<b>A Inverzní dynamický model robotu</b>	<b>15</b>

# 1 Úvod

V rámci výzkumu a vývoje kolaborativního robotu je brán zásadní zřetel na bezpečnost celého systému. V současné době jsou v běžné průmyslové praxi tyto požadavky zabezpečeny především mechanickými zábranami (ploty, mříže, atd.) a hlídáním pohybu v rizikových prostorech (zónové skenery atd.). Za pokročilejší technologie lze pak chápat například zpracování digitalizovaného obrazu za účelem lokalizace předmětů a lidí v rizikových prostorech pracovního prostoru robotu. Ve všech případech se však jedná o systémy vzdáleného hlídání rizikových prostorů, které z principu své činnosti neumožňují přímou bezpečnou interakci člověk-robot. Zabývejme se tedy dále bezpečnostními systémy, které korespondují s myšlenkou přímé interakce člověk-robot ve smyslu klíčové výhody kolaborativní robotiky.

Uvažujme dále možné kolizní stavy robotického systému ve smyslu externího silového/momentového působení na robot samotný a předpokládejme následující technické možnosti detekce kolizí, které připadají v úvahu:

## „Slepá“ detekce nadproudů v motorech dílčích aktuátorů

Standardní přístup k detekci kolizních stavů. Založen pouze na hlídání definovaného limitu proudu v motorech robotu, kdy v případě jeho překročení dojde k havarijnímu zastavení robotu. Tento přístup je technicky nejjednodušší a hojně využívaný především v průmyslové robotice. Zásadním problémem je však citlivost takto řešeného bezpečnostního systému vyplývající z nepřesného měření proudu a apriorní neznalosti dynamického chování robotického systému (proudový limit je většinou nastavený na konstantní hodnotu bez ohledu na statické/dynamické chování robotu).

## Využití statického/dynamického modelu robotu

V případě znalosti statického/dynamického modelu robotu lze předchozí metodu zdokonalit a proudové limity jednotlivých motorů robotu dynamicky měnit dle pohybu robotu. I v případě, že budeme předpokládat dobrou znalost kinematického a zejména pak dynamického modelu robotu, zásadním problémem je v takovém případě nejen případná nepřesnost v měření proudu, ale především nelinearity v mechanice aktuátorů (sestava motor + převodovka), kdy lze obtížně stanovit skutečný přenos mezi měřeným proudem a generovaným momentem na výstupní straně převodovky. Možným řešením je tak externí odměřování sil/momentů, a to v následujících konfiguracích:

- *Force/Torque senzor (dále jen FT senzor) umístěný na koncovém efektoru robotu*
  - Nutnost kalibrace senzoru dle neseného břemena (v případě rychlých pohybů nutnost identifikovat kompletní dynamický model břemena)
  - Možná detekce kolizních stavů jen za FT senzorem (kolize koncového efektoru/nástroje robotu)
  - Kolizní stavy ramen robotu nejsou pozorovatelná
  - Technika implementována v navrženém řídicím systému vyvíjeného robotu [4].
- *FT senzor mezi výstupní stranou převodovky a ramenem robotu*
  - Nutnost znát dynamický model robotu včetně zátěže s dostatečnou přesností
  - Možnost použití jednoosého FT senzoru
  - Možnost detekce kolize koncového efektoru/nástroje i dílčích ramen robotu
  - Existují izolované polohy robotu, kdy jsou kolizní stavy koncového efektoru/nástroje či dílčích ramen robotu nepozorovatelné (viz kinetostatická dualita robotu [3, 2, 5, 6])
- *FT senzor v základně robotu*

- Nutnost znát dynamický model robotu s dostatečnou přesností
- Možnost detekce kolize koncového efektoru/nástroje i dílčích ramen robotu
- A to i v případě, kdy předchozí metoda selhává, neboť jakékoliv externí silové/momentové působení na robot je vždy přenášeno do základny robotu (viz zákon „akce a reakce“) bez ohledu na aktuální polohu robotu

## 2 Využití FT pro detekci kolizních stavů robotu

Právě využitím FT senzoru pro detekci kolizních stavů robotu se zabývá předložená technická zpráva. Za účelem vytvoření virtuálního simulačního modelu byly využity informace o řešení přímé a inverzní kinematické úlohy pro robot SCHUNK LWA 4D, viz technická zpráva [8]. Poznamenejme, že kinematika robotu SCHUNK LWA 4D je shodná s navrženou kinematickou architekturou vyvíjeného robotu. Dále byl třeba vytvořit dynamický model robotu, konkrétně pak inverzní dynamický model (IDM), prostřednictvím kterého jsou pro známý pohyb robotu ve smyslu známé polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic vypočítány požadované síly/momenty v kloubech robotu. Algoritmus řešení IDM je popsán v Kapitole A.

Popsaný algoritmus výpočtu IDM zahrnuje i působení externích silových/momentových interakcí

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e^b \\ \boldsymbol{\mu}_e^b \end{bmatrix} \quad (1)$$

na koncový efektor robotu.

Předpokládejme dále, že externí silové/momentové působení na koncový efektor je dáno výlučně externím působením na koncový efektor robotu (tento předpoklad genericky neomezuje navrženou metodiku). Je dobře známo, že externí síla/moment působící na koncový efektor manipulátoru (viz kinetostatická dualita) lze vyjádřit pro každou polohu robotu vztahem:

$$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \mathbf{J}(\mathbf{Q})^T \cdot \mathbf{F} \quad (2)$$

kde  $\mathbf{Q}$  jsou polohy kloubových souřadnic v dané poloze robotu a  $\mathbf{J}$  je kinematický jakobián robotu.

### 2.1 FT senzor mezi výstupní stranou převodovky a ramenem robotu

Mechanismus indikace kolize robotu vychází z myšlenky *přímého využití inverzního dynamického modelu*, tak jak je definován v Kapitole A, kdy je pro probíhající pohyb robotu vypočítávána aktuální požadované hodnota sil / momentů na kloubech robotu a tato hodnota je odečítána od měřené hodnoty FT senzorem v kloubech robotu. Takový přístup vyžaduje umístění jednoosých FT senzorů v každém kloubu robotu mezi výstupní stranou převodovky a ramenem. Metoda je schématicky znázorněna na Obrázku 2.

Jednotlivé bloky jsou charakterizovány následovně:

- **Generátor trajektorie pohybu a externí interakce robotu**

Blok generuje pohyb robotu v podobě poloh, rychlostí a zrychlení kloubových souřadnic. Kloubový pohyb je generován typicky z požadovaného pohybu koncového efektoru robotu (prostřednictvím inverzní kinematické úlohy, viz[8]). V uvedeném případě je kloubový pohyb generován obecně pro každý kloub jako sinusový signál s různou frekvencí, fázovým posunutím a amplitudou. Analogickým způsobem je generován i signál (1) reprezentující externí silové/momentové působení na koncový efektor robotu.

- **Virtuální dynamický model robotu včetně měření FT senzory**

Virtuální simulační model robotu (SCHUNK LWA4D - kinematickou architekturou shodný s vyvíjeným robotem). Simulační model ve smyslu přístupu *Model Based Design* nahrazuje skutečný robot včetně generování skutečných měřených hodnot FT senzory (umístěných v kloubech či v základně).

- **Výpočet inverzní dynamiky**

Výpočetní blok, který je součástí řídicího systému robotu (bezpečnostní subsystém) a vypočítává očekávané hodnoty sil/silových momentů, které by měly být měřeny FT senzory v případě, že robot není vystaven žádným externím kolizním stavům (ve výpočetním matematickém modelu IDM není zahrnuto silové/momentové působení na koncový efektor  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , IDM tak počítá pouze s předpokladem, že veškeré nároky na síly/momenty vznikají pouze v důsledku pohybu manipulátoru = vliv gravitace + dynamika).

- **Vyhodnocení měření a verifikace metody**

Blok počítá rozdíl mezi vypočtenými (virtuální simulační model jako součást řídicího systému robotu) a měřeními (modelované potažmo skutečné měření FT senzory) silovými/momentovými požadavky (vyznačeno na Obrázku 2 modrou barvou). V případě, že je rozdíl nenulový, lze předpokládat, že tento nenulový rozdíl nastává výhradně v důsledku externího silového/momentového působení vlivem kolizního stavu. V našem případě se jedná o interakci koncového efektoru robotu s okolním prostředím, obecně však je získaný nenulový rozdíl způsoben jako důsledek jakékoliv kolize robotu či jeho části (pokud je tato interakce pozorovatelná) s okolním prostředím.

Blok současně verifikuje získané výsledky na základě známého přenosu interakce na měření FT senzory, viz vztahy (5, 6).

## 2.2 FT senzor v základně robotu

Nový přístup k indikaci kolizních stavů robotu vychází z myšlenky využití jednoho 6-ti osého FT senzoru (měření sil a momentů ve všech osách) umístěného do základny robotu. Indikace kolizních stavů je analogická k předchozí metodě, nicméně IDM robotu (jak v bloku *Virtuální dynamický model robotu včetně měření FT senzory*, tak v bloku *Výpočet inverzní dynamiky*) musí být pozměněn takovým způsobem, aby byly vráceny nikoliv hodnoty sil/momentů v kloubech robotu, ale reakční síly/momenty v základně robotu, kde je umístěn FT senzor. Situace je demonstrována na Obrázku 1.

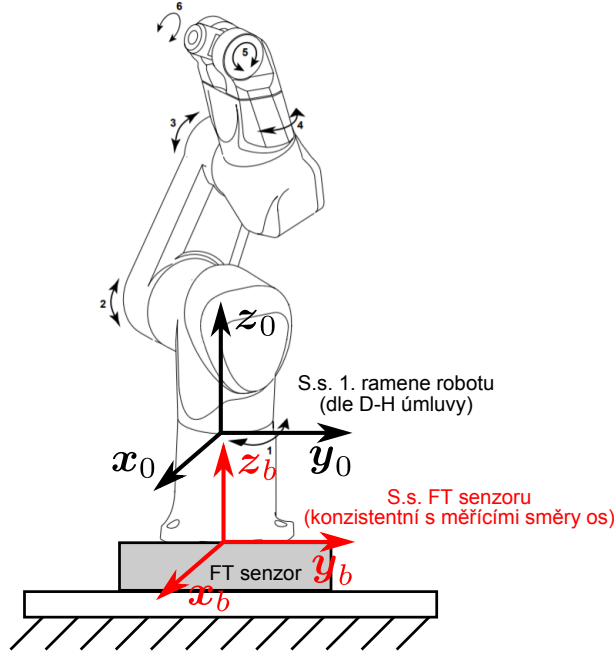
Umístění FT senzoru v základně robotu lze popsat tzv. kompenzací polohy základny robotu, viz [6]. Předpokládejme, že FT senzor má svůj lokální vztažný souřadný systém (s.s.) shodný se s.s. základny robotu, tzn. měření FT senzoru jsou dána vzhledem k s.s.  $F_b$ . S.s.  $F_0$  pak reprezentuje první s.s. robotu, tak jak jej definuje Denavit-Hartenbergova úmluva [1].

IDM v Kapitole A ve svém výpočetním jádře, viz (12), počítá síly  $\mathbf{f}_i^i$  a momenty  $\mathbf{u}_i^i$ , kterými mezi sebou vzájemně působí ramena robotu, viz Obrázek 7, a které jsou vyjádřeny vždy k vztažnému s.s. ramena manipulátoru<sup>1</sup>. Reakční sílu/moment do základny robotu (s působištěm v počátku s.s.  $F_b$  vyjádřené v totožném s.s.), a tedy hodnoty sil/momentu měřené FT senzorem v základně robotu lze vyjádřit jako (pro  $i = 1$ ):

$$\mathbf{f}_b^b = -\mathbf{R}_0^b \cdot \mathbf{f}_1^0 \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_b^b = -\mathbf{R}_0^b \cdot \left( \mathbf{u}_1^0 + \left( (\mathbf{R}_0^b)^T \cdot \mathbf{r}_{b,0}^b \right) \times \mathbf{f}_1^0 \right) \quad (4)$$

<sup>1</sup>Zápis  $\mathbf{f}_i^i$  reprezentuje vektor působící síly na  $i$ -té rameno vyjádřený v s.s.  $F_i$   $i$ -tého ramene.



Obrázek 1: Konfigurace robotu s umístěním FT senzoru do jeho základny.

kde síla  $\mathbf{f}_1^0$  resp. moment  $\mathbf{u}_1^0$  působící na první rameno robotu vzhledem k s.s.  $F_0$  je dán jako:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1^0 &= \mathbf{R}_1^0 \cdot \mathbf{f}_1^1 \\ \mathbf{u}_1^0 &= \mathbf{R}_1^0 \cdot \mathbf{u}_1^1\end{aligned}$$

a  $\mathbf{R}_0^b$  resp.  $\mathbf{r}_{b,0}^b$  je matice rotace resp. vektor posunutí, viz (9), vyjádřený jako konstantní transformace kompenzace polohy základny robotu (definující umístění FT senzoru v základně robotu),  $\mathbf{R}_1^0$  je matice rotace závislá na první kloubové souřadnici  $q_1$  robotu a definovaná v rámci řešení přímé kinematické úlohy.

Poznamenejme, že výše uvedený výpočet využívá blok *Virtuální dynamický model robotu včetně měření FT senzory* pro generování měření FT senzorem v základně robotu i blok *Výpočet inverzní dynamiky* jako součást vlastního řídicího systému robotu pro generování předpokládaného silového/momentového působení v základně robotu, viz Obrázek 2.

Přímý výpočet přenosu silových/momentových interakcí na koncový efektor do měření v kloubech  $\boldsymbol{\tau}_{ext}$  resp. v základně  $\mathbf{F}_{ext}$  a reprezentovaný v bloku *Vyhodnocení a verifikace metody*, viz Obrázek 2, subsystémy `extEndEffFT2jointsReactionFT` resp. `extEndEffFT2baseReactionFT` je dán jako:

*Přenos interakce konc. efektoru robotu do kloubů (kinetostatická dualita):*

$$\boldsymbol{\tau}_{ext} = -\mathbf{J}^T(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{F} \quad (5)$$

kde  $\mathbf{F}$  je generovaná interakce v bloku *Generátor trajektorie robotu a externí interakce*, viz Obrázek 2, reprezentovaný signálem `EndEffFT` a  $\mathbf{J}$  je kinematický jakobián robotu.

*Přenos interakce konc. efektoru robotu do kloubů (kinetostatická dualita):*

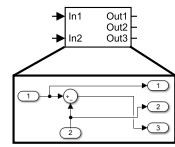
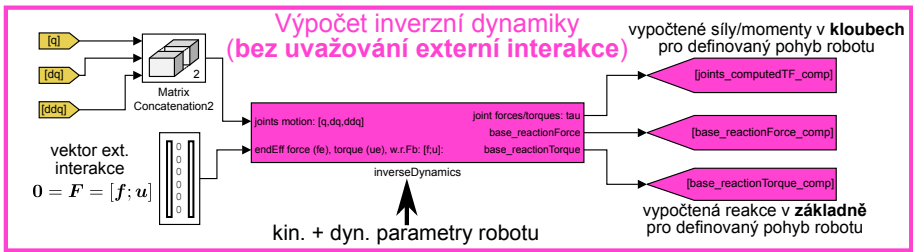
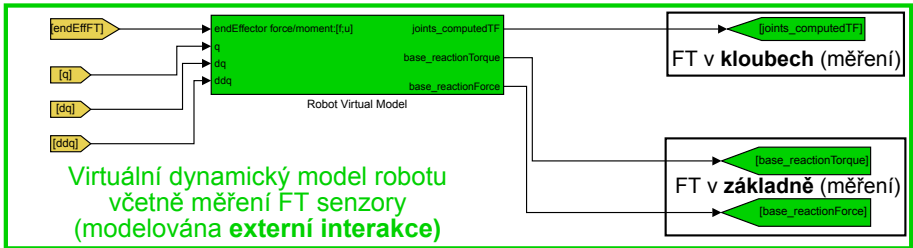
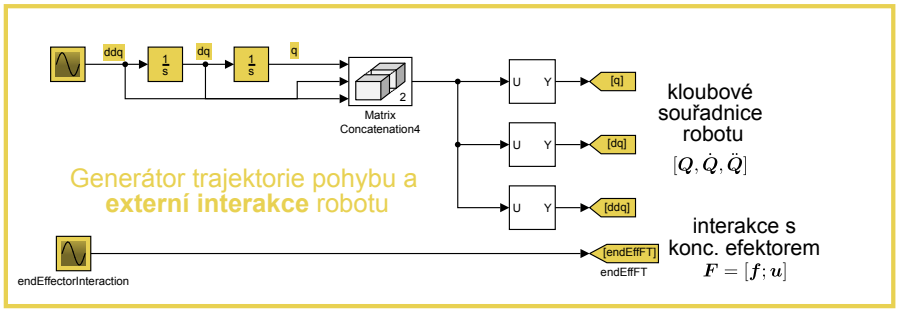
$$\mathbf{F}_{ext} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(1:3) \\ \mathbf{F}(4:6) + \mathbf{O}_e^b \times \mathbf{F}(1:3) \end{bmatrix} \quad (6)$$

kde  $\mathbf{F}$  je generovaná interakce<sup>2</sup> v bloku *Generátor trajektorie robotu a externí interakce*, viz Obrázek 2, reprezentovaný signálem `EndEffFT` a  $\mathbf{O}_e^b$  je umístění počátku s.s.  $F_e$  koncového efektoru robotu získané z řešení dopředné kinematické úlohy robotu vyjádřené vzhledem k s.s. základny  $F_b$ .

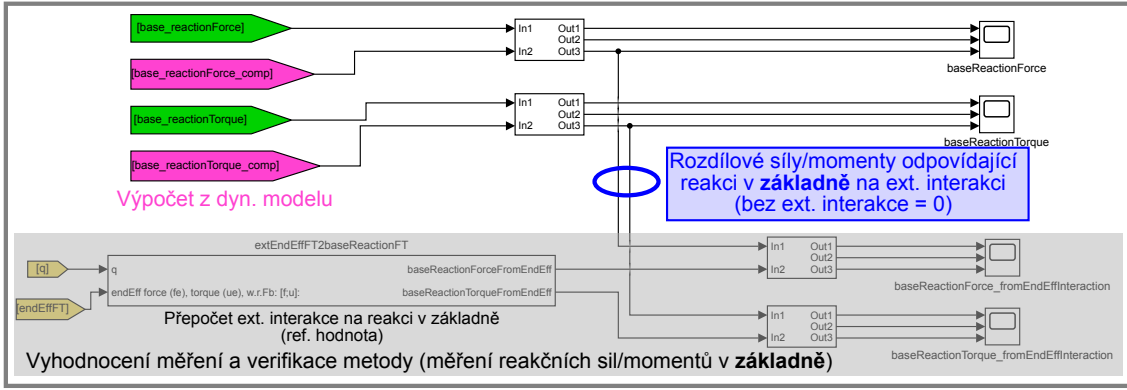
Poznamenejme, že oba bloky `extEndEffFT2jointsReactionFT` resp. `extEndEffFT2baseReactionFT` slouží k verifikaci metodiky, tedy porovnání rozdílu mezi a) přímým výpočtem silového/momentového působení a b) rozdílem mezi měřením FT senzory a předpokládaným silovým/momentovým působením. Tento rozdíl byl v simulacích roven nule (resp. vlivem numerických chyb v řádu  $10^{-9}$ ).

---

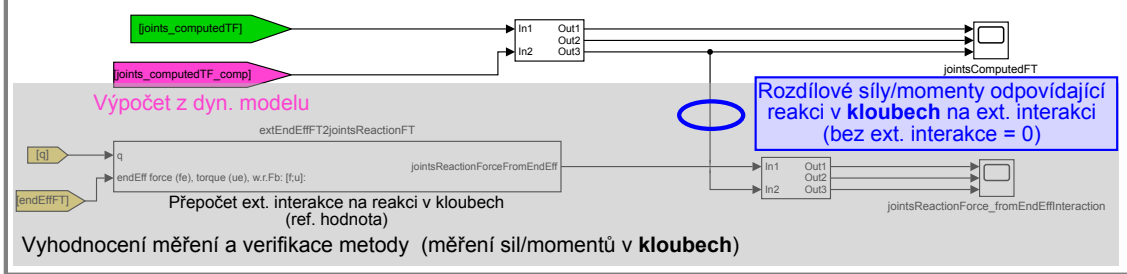
<sup>2</sup>Zápis  $\mathbf{F}(i : j)$  vyjadřuje výběr  $i$ -tého až  $j$ -tého prvku vektoru  $\mathbf{F}$ . V našem případě se jedná o výběr složek reprezentující externí sílu a moment na koncový efektor.



Měření z FT senzoru v základně



Měření z FT senzorů v kloubech



Obrázek 2: Schéma měření pomocí FT senzoru



### 3 Závěr, shrnutí výsledků

Předložená metodika detekce kolizních stavů robotu byla simulována v prostředí Matlab / Simulink / SimMechanics s využitím knihovny *robotLib* [7].

Externí silové/momentové působení na koncový efektor je generováno průběhy viz Obrázek 3.

#### FT senzor v kloubech robotu

Obrázek 4 ilustruje měřené průběhy sil a momentů FT senzory umístěnými v kloubech robotu a počítané předpokládané hodnoty. Indikovaná reakce do kloubů robotu způsobená externím silovým/momentovým působením na koncový efektor je dána rozdílem

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{meas} - \boldsymbol{\tau}_{comp} \quad (7)$$

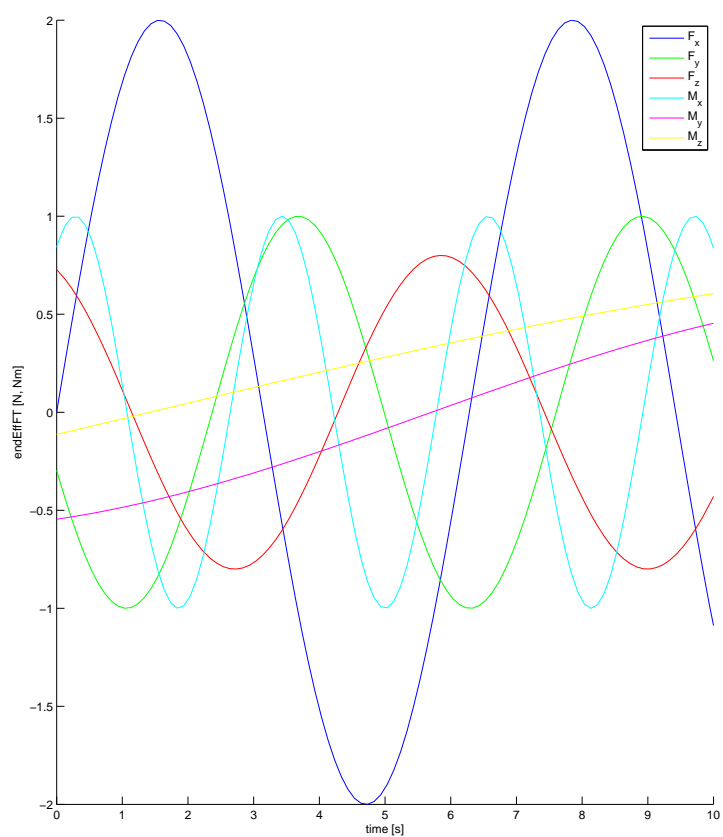
kde  $\boldsymbol{\tau}_{meas}$  jsou měřené momenty FT senzory v kloubech robotu a  $\boldsymbol{\tau}_{comp}$  jsou počítané momenty z inverzního dynamického modelu (v rámci řídicího systému robotu), viz Kapitola A).

#### FT senzor v základně robotu

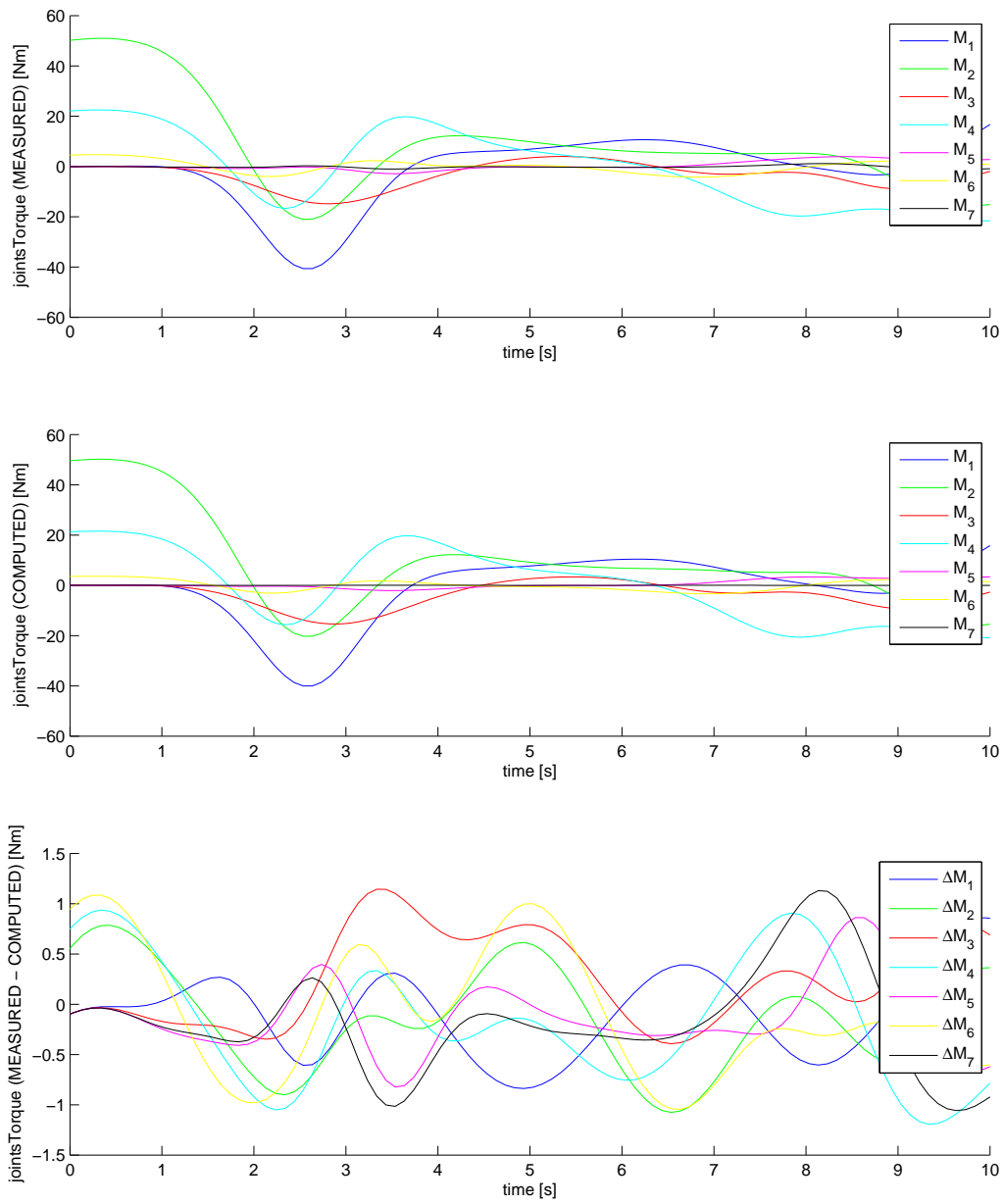
Obrázek 5, 6 ilustruje měřené průběhy sil a momentů FT senzorem umístěným v základně robotu a počítané předpokládané hodnoty. Indikovaná reakce do základny způsobená externím silovým/momentovým působením na koncový efektor je dána rozdílem

$$\Delta\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{meas} - \boldsymbol{F}_{comp}, \quad \Delta\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_{meas} - \boldsymbol{M}_{comp} \quad (8)$$

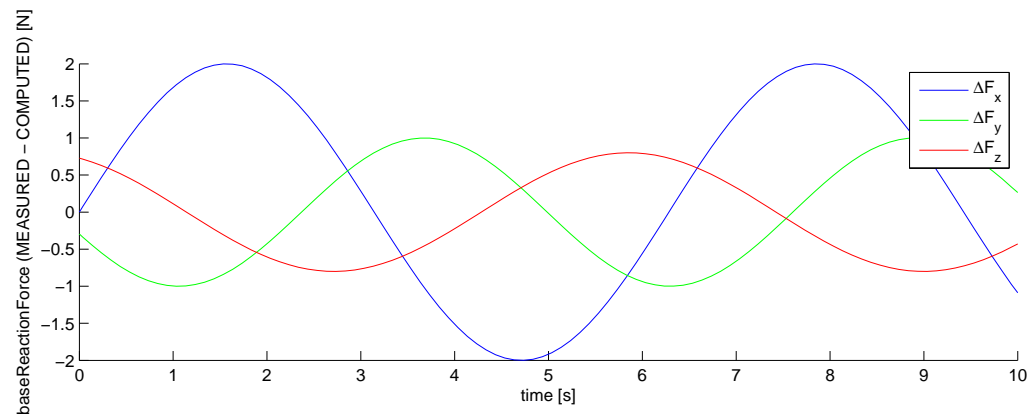
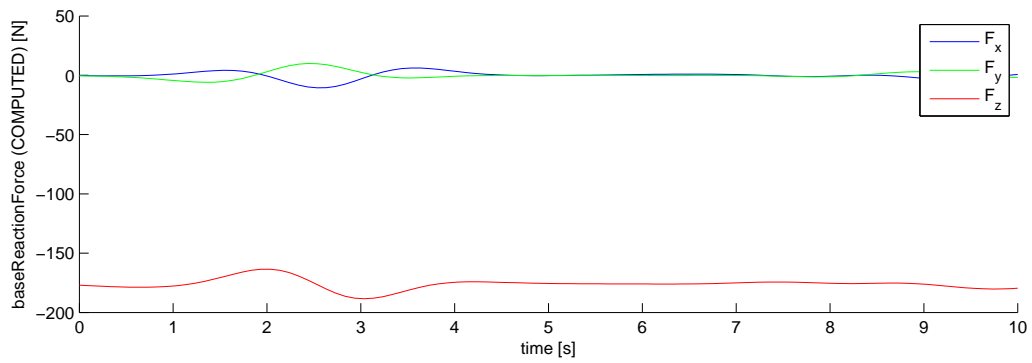
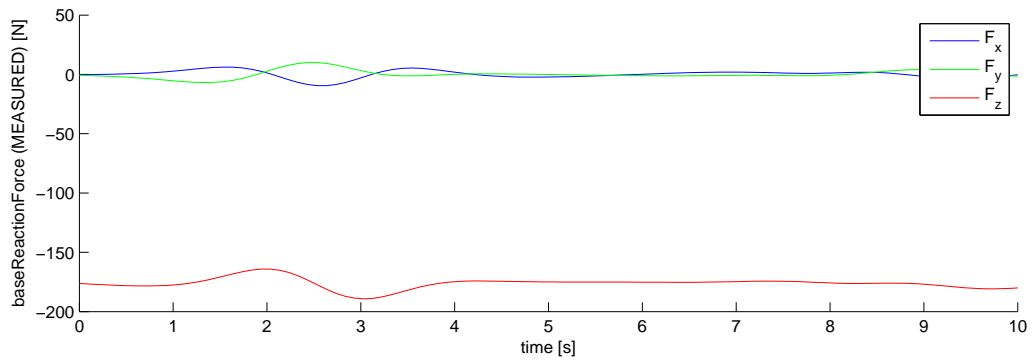
kde  $\boldsymbol{F}_{meas}$  resp.  $\boldsymbol{M}_{meas}$  jsou měřené síly resp. momenty FT senzorem a  $\boldsymbol{F}_{comp}$  resp.  $\boldsymbol{M}_{comp}$  jsou počítané síly resp. momenty z modifikovaného inverzního dynamického modelu (v rámci řídicího systému robotu), viz (3, 4).



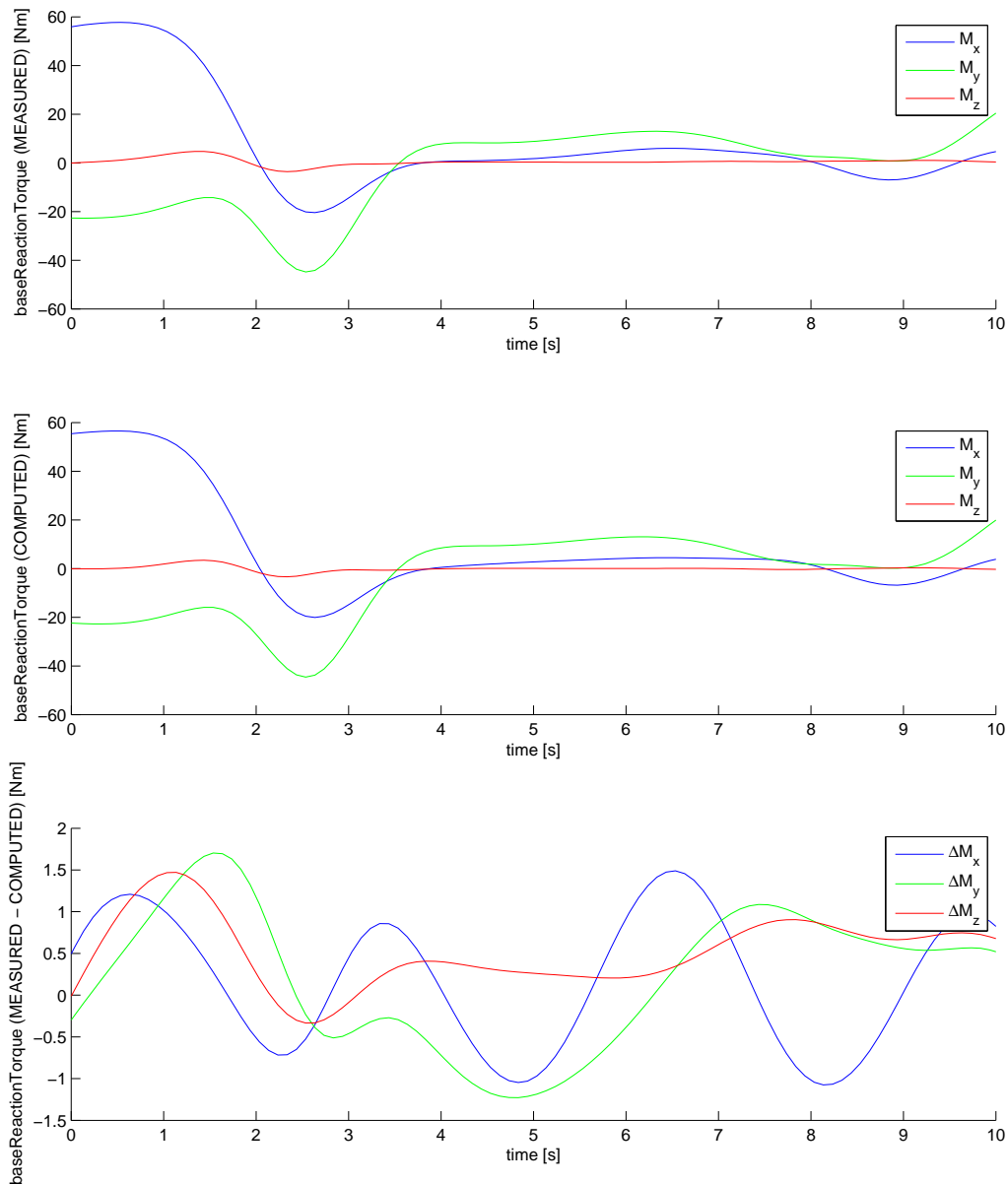
Obrázek 3: Externí síly/momenty působící na koncový efektor robotu



Obrázek 4: Měřené a předpokládané (počítané) momenty v kloubech robotu



Obrázek 5: Síly působící na FT senzor v základně robotu



Obrázek 6: Momenty působící na FT senzor v základně robotu

## Shrnutí získaných poznatků

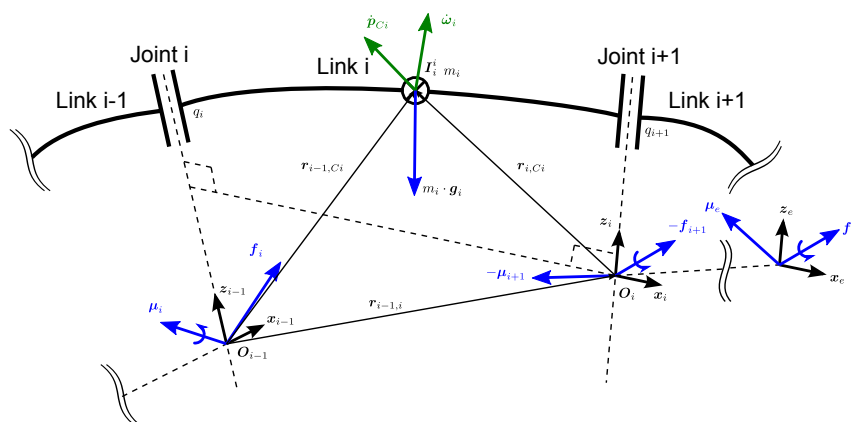
Následující body shrnují vlastnosti navržené metodiky detekce kolizí robotu založené především na umístění jediného FT senzoru do základny robotu:

- Nutnost znát přesný dynamický model robotu. Dynamický model bude nutno experimentálně identifikovat (předpokládána další práce).
- V případě variabilní zátěže robotu (např. různá břemena) bude nutno před zahájením detekce kolizních stavů vždy tato břemena identifikovat.

- Potenciální problém s šumem měření a citlivostí FT senzoru. Vzhledem k hmotnosti samotného robotu bude hlavní část reakčních sil/momentů do základny způsobena vlastním pohybem robotu (statika + dynamika). Generovaný příspěvek z externí silové/momentové interakce robotu s překážkou nemusí být v důsledku poruch měření (šum, drift, citlivost senzoru, atd.) pozorovatelný v dostatečné kvalitě.

## A Inverzní dynamický model robotu

Algoritmus inverzního dynamického modelu (IDM) robotu lze zapsat následovně, další detaily viz [6].



Obrázek 7: Vzájemná interakce ramen manipulátoru

**Vstupy:**

- Polohy, rychlosti a zrychlení kloubových souřadnic (např. z řešení inverzního kinematické úlohy pro uvažovaný manipulátor, viz technická zpráva [8]):

$$\mathbf{Q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T, \quad \dot{\mathbf{Q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T, \quad \ddot{\mathbf{Q}} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T$$

- Kinematické parametry manipulátoru, např:  
Denavit Hartenbergovy (D-H) parametry, viz [1]:

$$\begin{bmatrix} d_1 & \theta_1 & a_1 & \alpha_1 \\ d_2 & \theta_2 & a_2 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_n & \theta_n & a_n & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (\text{vyjma těch, reprezentující polohu aktuátorů})$$

Typy kloubů:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 0 \quad \text{pokud } Joint\ i \text{ je typu rotační - } \mathbf{R} \ (q_i = \theta_i) \\ \sigma_i &= 1 \quad \text{pokud } Joint\ i \text{ je typu prismatický - } \mathbf{P} \ (q_i = d_i) \\ \bar{\sigma}_i &= 1 - \sigma_i \end{aligned}$$

Kompensace polohy základny a koncového efektoru, v podobě homogenních transformačních matic:

$$\mathbf{T}_0^b = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^b & \mathbf{r}_{b,0}^b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_e^n = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_e^n & \mathbf{r}_{n,e}^n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

- Dynamické parametry manipulátoru:  
Hmotnosti  $m_i$  ramen *Link i* a umístění  $\mathbf{r}_{i,C_i}^i$  těžiště vzhledem k souřadnému systému (s.s.) ramene  $F_i$ .  
Matice momentu setrvačnosti  $\mathbf{I}_i^i$  ramen *Link i* v těžišti vyjádřené v s.s. ramene  $F_i$ .  
Vektor gravitačního zrychlení  $\mathbf{g}_0$  (vzhledem k s.s.  $F_0$ ).

- Externí síly/momenty působící na koncový efektor:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e^b \\ \boldsymbol{\mu}_e^b \end{bmatrix}$$

**Výstupy:**

- Síly resp. momenty  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \dots \ \tau_n]^T$  v jednotlivých aktuátorech, které realizují požadovaný pohyb manipulátoru zadaný prostřednictvím kloubových poloh  $\mathbf{Q}$ , rychlostí  $\dot{\mathbf{Q}}$  a zrychleních  $\ddot{\mathbf{Q}}$  (potažmo požadovaným pohybem koncového efektoru) za současného působení externích sil/momentů  $\mathbf{F}$  na koncový efektor.
- Zkráceně označme IDM jako (s vynecháním závislosti na konstantních kinematických a dynamických parametrech):

$$\boldsymbol{\tau} = \text{IDM}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, \ddot{\mathbf{Q}}, \mathbf{F}) \quad (10)$$

**Algoritmus:**

1. Dopředná rekurze (výpočet distribuce rychlostí a zrychleních  $\boldsymbol{\omega}_i^i$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i$ ,  $\ddot{\mathbf{p}}_{Ci}^i$  těžiště ramen vzhledem k s.s. ramene):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_i^i &= \mathbf{R}_{i-1}^i (\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} + [0 \ 0 \ 1]^T \bar{\sigma}_i \dot{q}_i) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i &= \mathbf{R}_{i-1}^i (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}^{i-1} + \bar{\sigma}_i (\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \dot{q}_i \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_i)) \\ \ddot{\mathbf{O}}_i^i &= \mathbf{R}_{i-1}^i (\ddot{\mathbf{O}}_{i-1}^{i-1} + \sigma_i (\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{q}_i)) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i-1,i}^i) + \\ &+ \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{R}_{i-1}^i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_i \dot{q}_i \\ \ddot{\mathbf{p}}_{Ci}^i &= \ddot{\mathbf{O}}_i^i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \times \mathbf{r}_{i,Ci}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times (\boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{r}_{i,Ci}^i) \end{aligned} \quad (11)$$

pro  $i = 0, 1, \dots, n$ , kde počáteční podmínky  $\boldsymbol{\omega}_0^0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^0 = \ddot{\mathbf{O}}_0^0 = \mathbf{0}$ .

2. Zpětná rekurze (výpočet distribuce sil/momentů):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^i &= \mathbf{R}_{i+1}^i \cdot \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} + m_i (\ddot{\mathbf{p}}_{Ci}^i - (\mathbf{R}_i^0)^T \mathbf{g}_0) \\ \boldsymbol{\mu}_i^i &= \mathbf{R}_{i+1}^i \cdot \boldsymbol{\mu}_{i+1}^{i+1} - \mathbf{f}_i^i \times \underbrace{\mathbf{r}_{i-1,Ci}^i}_{\mathbf{r}_{i-1,i}^i + \mathbf{r}_{i,Ci}^i} + \mathbf{R}_{i+1}^i \cdot \mathbf{f}_{i+1}^{i+1} \times \mathbf{r}_{i,Ci}^i + \boldsymbol{\omega}_i^i \times \mathbf{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i^i + \mathbf{I}_i \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^i \end{aligned} \quad (12)$$

pro  $i = n, n-1, \dots, 1$ , kde koncové podmínky jsou dány:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{n+1}^n \cdot \mathbf{f}_{n+1}^{n+1} &= \mathbf{f}_{n+1}^n = \mathbf{R}_0^n \cdot \mathbf{f}_{n+1}^0 = -\mathbf{R}_0^n \cdot (\mathbf{R}_0^b)^T \cdot \mathbf{f}_e^b \\ \mathbf{R}_{n+1}^n \cdot \boldsymbol{\mu}_{n+1}^{n+1} &= \boldsymbol{\mu}_{n+1}^n = \mathbf{R}_0^n \cdot \boldsymbol{\mu}_{n+1}^0 = -\mathbf{R}_0^n \cdot (\mathbf{R}_0^b)^T \cdot (\boldsymbol{\mu}_e^b + \mathbf{R}_0^b \cdot \mathbf{R}_n^0 \cdot \mathbf{r}_{n,e}^n \times \mathbf{f}_e^b) \end{aligned}$$

3. Výsledné průměty  $\tau_i$  (síly resp. momenty v aktuátorech) reakčních sil  $\mathbf{f}_i^i$  resp. momentů  $\boldsymbol{\mu}_i^i$  do odpovídajících pohybových os kloubů jsou dány jako:

$$\tau_i = (\mathbf{f}_i^i)^T \cdot \mathbf{z}_{i-1}^i \cdot \sigma_i + (\boldsymbol{\mu}_i^i)^T \cdot \mathbf{z}_{i-1}^i \cdot \bar{\sigma}_i \quad (13)$$

pro  $i = 1, 2, \dots, n$ , kde  $\mathbf{z}_{i-1}^i = (\mathbf{R}_i^{i-1})^T [1 : 3, 3]$ .

Vektor  $\mathbf{r}_{i-1,i}^i$  a matice rotace  $\mathbf{R}_i^*$  jsou známé proměnné pro známé hodnoty poloh kloubových souřadnic  $\mathbf{Q}$  (viz řešení dopředné kinematické úlohy dle D-H úmluvy, viz [8]).



## Poděkování

Tento výzkum byl podpořen z projektu č. FV 10044 v programu TRIO Ministerstva průmyslu a obchodu.

## Reference

- [1] Denavit, J.; Hartenberg, R. S.: A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, ročník 22, 1955: s. 215–221.  
URL <http://ci.nii.ac.jp/naid/10008019314/en/>
- [2] Khalil, W.; Dombre, E.: *Modeling, Identification and Control of Robots*. Kogan Page Science paper edition, Elsevier Science, 2004, ISBN 9780080536613.  
URL <http://books.google.cz/books?id=nyrY0Pu5kl0C>
- [3] Sciavicco, L.; Siciliano, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer London, 2000, ISBN 9781852332211.  
URL <http://books.google.fr/books?id=v9PLbcYd9aUC>
- [4] Čechura, T.; Švejda, M.: Řídicí software kolaborativního robotu. Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2018.
- [5] Švejda, M.: Kinematika robotických architektur. Katedra Kybernetiky, ZČU v Plzni (online: [http://home.zcu.cz/~msvejda/\\_publications/2011/rigo.pdf](http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2011/rigo.pdf)), 2011.
- [6] Švejda, M.: *Optimalizace robotických architektur*. Dizertační práce, Západočeská univerzita v Plzni, 2016.  
URL [http://home.zcu.cz/~msvejda/\\_publications/2016/4\\_SvejdaMartin\\_thesis\\_2016\\_06\\_14.pdf](http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2016/4_SvejdaMartin_thesis_2016_06_14.pdf)
- [7] Švejda, M.: *robotLib* (knihovna předimplementovaných funkcí a funkčních bloků). 2016.  
URL [http://home.zcu.cz/~msvejda/PhD\\_disertace/Algoritmy/robotLib/](http://home.zcu.cz/~msvejda/PhD_disertace/Algoritmy/robotLib/)
- [8] Švejda, M.: Návrh, modelování a optimalizace a řízení pohybu robotického ramena (SCHUNK). Technická zpráva, Západočeská univerzita v Plzni, 2017.  
URL [http://home.zcu.cz/~msvejda/\\_publications/2018/01\\_rizeniSCHUNK.pdf](http://home.zcu.cz/~msvejda/_publications/2018/01_rizeniSCHUNK.pdf)