FAKULTA STROJNÍ
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA
ENERGETICKÝCH STROJŮ A ZAŘÍZENÍ

Termomechanika – cvičení

5. cvičení

Ing. Michal Volf / 23.03.2020

Obsah

- **Přehled vratných změn stavu**
- **Příklady**

Přehled vratných změn stavu

Přehled vratných změn stavu - předpoklady

- **Mějme na paměti, že u vratných změn stavu uvažujeme:**

1) Uvažujeme vratný děj

- idealizovaný děj, při kterém soustava prochází jenom přes rovnovážné stavy
- aby děj byl vratný, musí probíhat pomalu, tj. sled jeho stavů musí být nekonečně blízký rovnovážnému stavu
- vratný děj tedy není reálný děj, probíhá kvazistaticky – tak pomalu, že po každé nekonečně malé změně systém dosáhne rovnovážného stavu

2) Uvažujeme, že pracovní látkou je ideální plyn

- v celém rozsahu tlaků a teplot zůstává v plynném skupenství
- nevazký (bez vnitřního tření)
- měrné tepelné kapacity (c_p, c_v, c_n) nejsou funkcí teploty
- platí pro něj stavová rovnice ideálního plynu: $\boldsymbol{pv = rT}$ či $\boldsymbol{pV = mrT}$, dále platí Mayerova rovnice

Přehled vratných změn stavu – vratné změny

Isobarická změna (Gay-Lussacův zákon)

Isochorická změna (Charlesův zákon)

ROVNICE POLYTROPICKÉ ZMĚNY STAVU

$$pv^n = konst.$$

Isotermická změna (Boyleův-Mariotteův zákon)

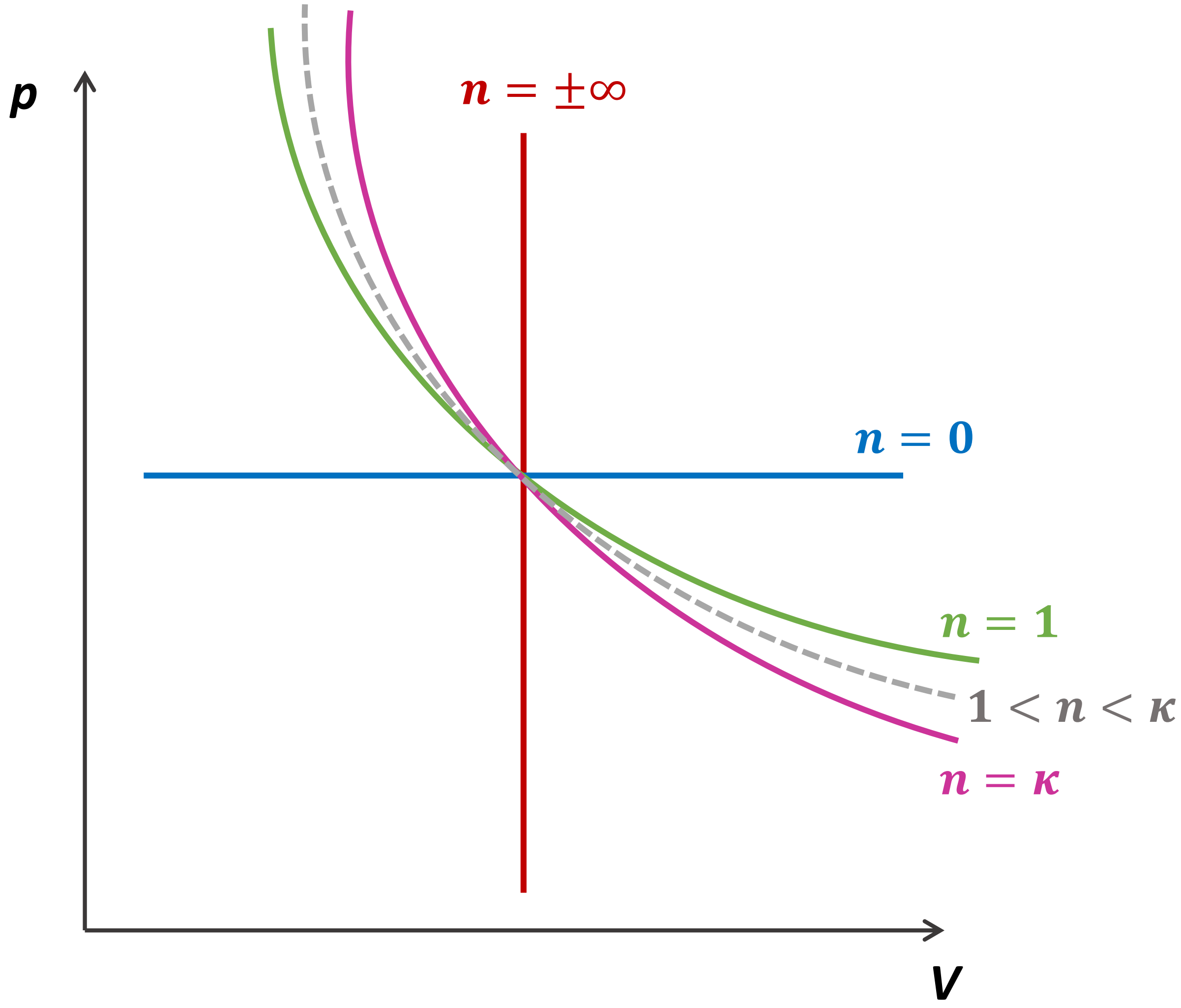
Adiabatická změna

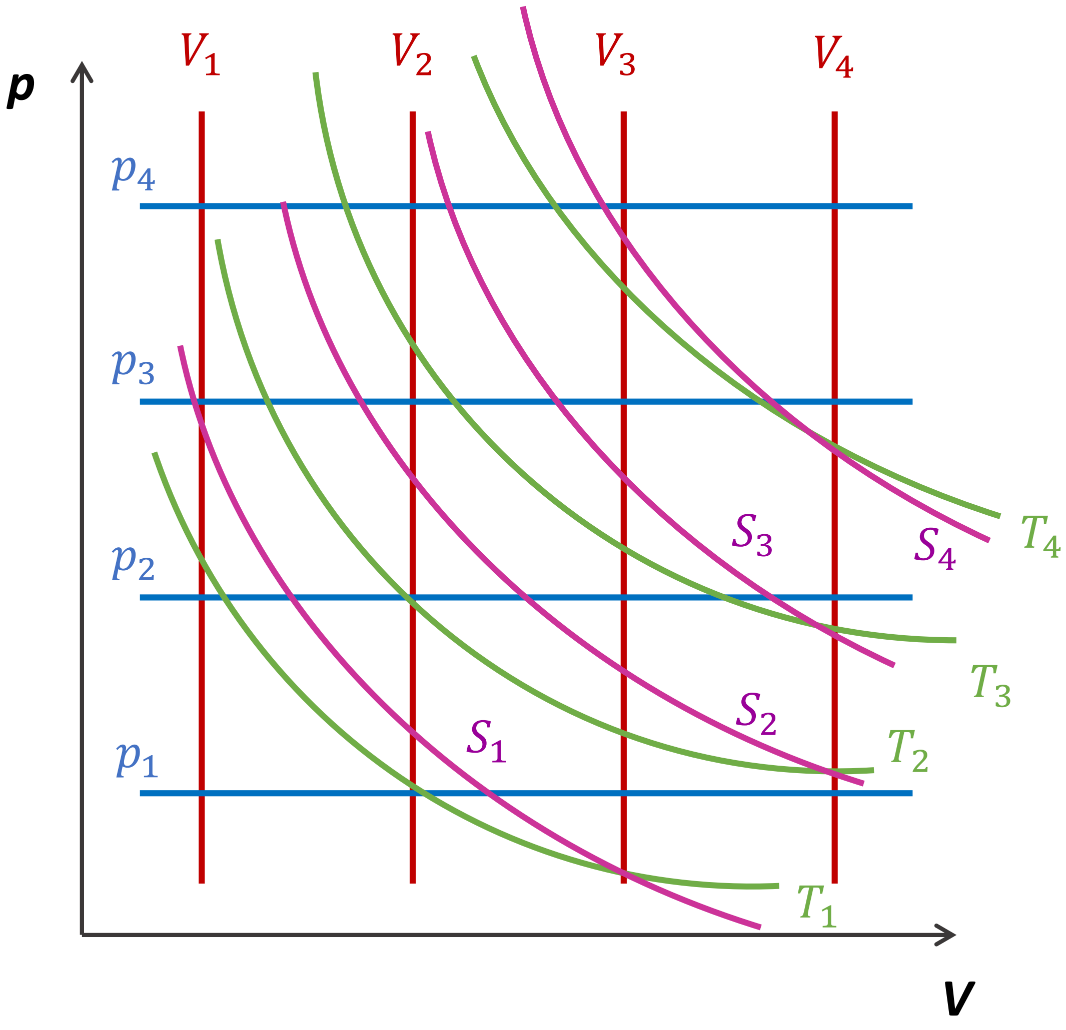
Polytropická změna

… správnou hodnotou polytropického exponentu se lze dopracovat k jednotlivým křivkám změny stavu, které byly doposud uvedené

Přehled vratných změn stavu – *p-V diagram*

$$pv^n = konst.$$





$$pro\ indexy\ platí: \ 1 < 2 < 3 < 4$$

Přehled vratných změn stavu – Isochorická změna stavu

- **Isochorická změna stavu**
  - Soustava při isochorickém ději není tepelně izolována od okolí. Aby došlo ke zvýšení/snížení tlaku, je zapotřebí přívod/odvod tepla do/z okolí.
  - Isochorická komprese = zvyšování tlaku
  - Pro isochorickou změnu lze ze stavové rovnice odvodit, že:

$$\frac{p}{T} = konst.$$

  - Isochora v p-V diagramu je přímka rovnoběžná s osou tlaku
  - Isochoru z rovnice polytropy dostaneme, pokud budeme uvažovat, že $n \to \pm\infty$

$$pv^n = konst \leftrightarrow p^{\frac{1}{n}}v = \widetilde{konst}.$$

$$\boldsymbol{p^{\frac{1}{n}}\Big|_{n\to\pm\infty} v = v = \widetilde{konst}.}$$

  - Absolutní (objemová) práce je u isochorické změny stavu nulová
  - Technická práce je u isochorické změny stavu nenulová

Přehled vratných změn stavu – Isobarická změna stavu

- **Isobarická změna stavu**
  - Soustava při isobarickém ději není tepelně izolována od okolí. Aby došlo ke zvýšení/snížení objemu, je zapotřebí přívod/odvod tepla do/z okolí.
  - Isobarická komprese = souvisí jen se změnou objemu, přesněji se zmenšováním objemu
  - Pro isochorickou změnu lze ze stavové rovnice odvodit, že:

$$\frac{V}{T} = konst.; \frac{v}{T} = konst.$$

  - Isobara v p-V diagramu je přímka rovnoběžná s osou objemu (příp. měrného objemu u p-v diagramu)
  - Isobaru z rovnice polytropy dostaneme, pokud budeme uvažovat, že $n \to 0$

$$pv^n = konst.$$
$$\boldsymbol{pv^0 = p = konst.}$$

  - Absolutní (objemová) práce je u isobarické změny stavu nenulová
  - Technická práce je u isobarické změny stavu nulová

Přehled vratných změn stavu – Isotermická změna stavu

- **Isotermická změna stavu**
  - Soustava při isotermickém ději není tepelně izolována od okolí. Pro udržení isotermické změny (teploty TS) v celém rozsahu děje je potřebný přívod/odvod tepla z/do okolí.
  - Isotermická komprese = dochází při ní ke zvyšování tlaku a zmenšování objemu
    - Lze také očekávat, že při zvyšování tlaku poroste i teplota. Aby se ale vyhovělo podmínce, že teplota musí zůstat konstantní, musí se ze systému odebírat teplo. Typickým příkladem využití jsou tepelná čerpadla.
  - Pro isotermickou změnu lze ze stavové rovnice odvodit, že:

$$pV = konst.; pv = konst.$$

  - Isoterma v p-V diagramu je rovnoosá hyperbola
  - Isotermu z rovnice polytropy dostaneme, pokud budeme uvažovat, že $n \rightarrow 1$

$$pv^n = konst.$$
$$\boldsymbol{pv^1 = pv = konst.}$$

  - Absolutní (objemová) práce je u isotermické změny stavu nenulová a je rovna technické práci

Přehled vratných změn stavu – Adiabatická změna stavu

- **Adiabatická změna stavu**
  - Soustava při adiabatickém ději **je tepelně izolována** od okolí. Může se do ní dodávat nebo z ní odvádět práce, ale nedochází k tepelné interakci s okolím!
  - Adiabatická komprese = dochází při ní ke zvyšování tlaku, zmenšování objemu a zároveň zvyšování teploty
    - Tento děj je ale stále nereálný, protože není možné žádný systém ideálně tepelně izolovat. Využívá se hlavně při prvních výpočtech, kdy se zanedbávají ztráty.
  - Pro adiabatickou změnu platí, že:

$$pV^{\kappa} = konst.;\, pv^{\kappa} = konst.$$

  - Adiabata v p-V diagramu je hyperbola vyššího řádu
  - Adiabatu z rovnice polytropy dostaneme, pokud budeme uvažovat, že $n \to \kappa$

$$pv^{n} = konst.$$
$$\boldsymbol{pv^{\kappa} = konst.}$$

  - Absolutní (objemová) práce je u adiabatické změny stavu nenulová
  - Technická práce je u adiabatické změny stavu nenulová

Platí: $da_t = \kappa\, da$

Přehled vratných změn stavu – Polytropická změna stavu

- **Polytropická změna stavu**
  - Soustava při polytropickém ději **není tepelně izolována** od okolí.
  - Polytropická komprese = dochází při ní ke zvyšování tlaku, zmenšování objemu a zároveň zvyšování teploty
    - Zároveň se počítá i s interakcí s okolím. Tato křivka je nejblíž k realitě, ale je nutno podotknout, že stále nereprezentuje přesnou kompresní křivku. Přesná kompresní křivka má ve všech bodech různý exponent. U polytropického děje pracujeme s exponentem, který se zpravidla stanoví z hodnot na začátku a na konci komprese.
  - Pro polytropickou změnu platí, že:

$$pV^n = konst.; pv^n = konst.$$

  - Polytropa v p-V diagramu je obecná hyperbola
  - Pro polytropický exponent zpravidla uvažujeme, že:

$$\mathbf{1 < n < \kappa}$$

  - Absolutní (objemová) práce je u polytropické změny stavu nenulová
  - Technická práce je u polytropické změny stavu nenulová

Platí: $da_t = n\, da$

Přehled vratných změn stavu – Entropický diagram

- **V případě vykreslení jednotlivých změn do entropického T-s diagramu budeme vycházet z 2. věty termodynamiky a z ní vycházející matematické definice změny entropie:**

$$\boldsymbol{ds = \frac{dq}{T}}$$

- **Teplo je látce přiváděno, probíhá-li změna v T-s diagramu ve směru rostoucí entropie a je odváděno, probíhá-li změna ve směru klesající entropie. Plocha mezi křivkou jednorázové neuzavřené změny (z bodu 1-2) a osou entropie zobrazuje velikost přivedeného nebo odvedeného tepla.**

- **Abychom mohli vykreslovat jednotlivé křivky, vyjádříme si dq pro případ obecného polytropického děje:**

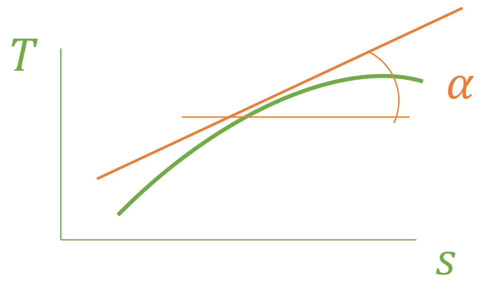
$$dq = c_n dT = c_v \frac{n-\kappa}{n-1} dT$$

dosadíme do rovnice

$$ds = \frac{dq}{T} = c_n \frac{dT}{T} \rightarrow \boldsymbol{\frac{dT}{ds}} = \frac{T}{c_n} = \boldsymbol{\frac{T}{c_v}\frac{n-1}{n-\kappa}}$$

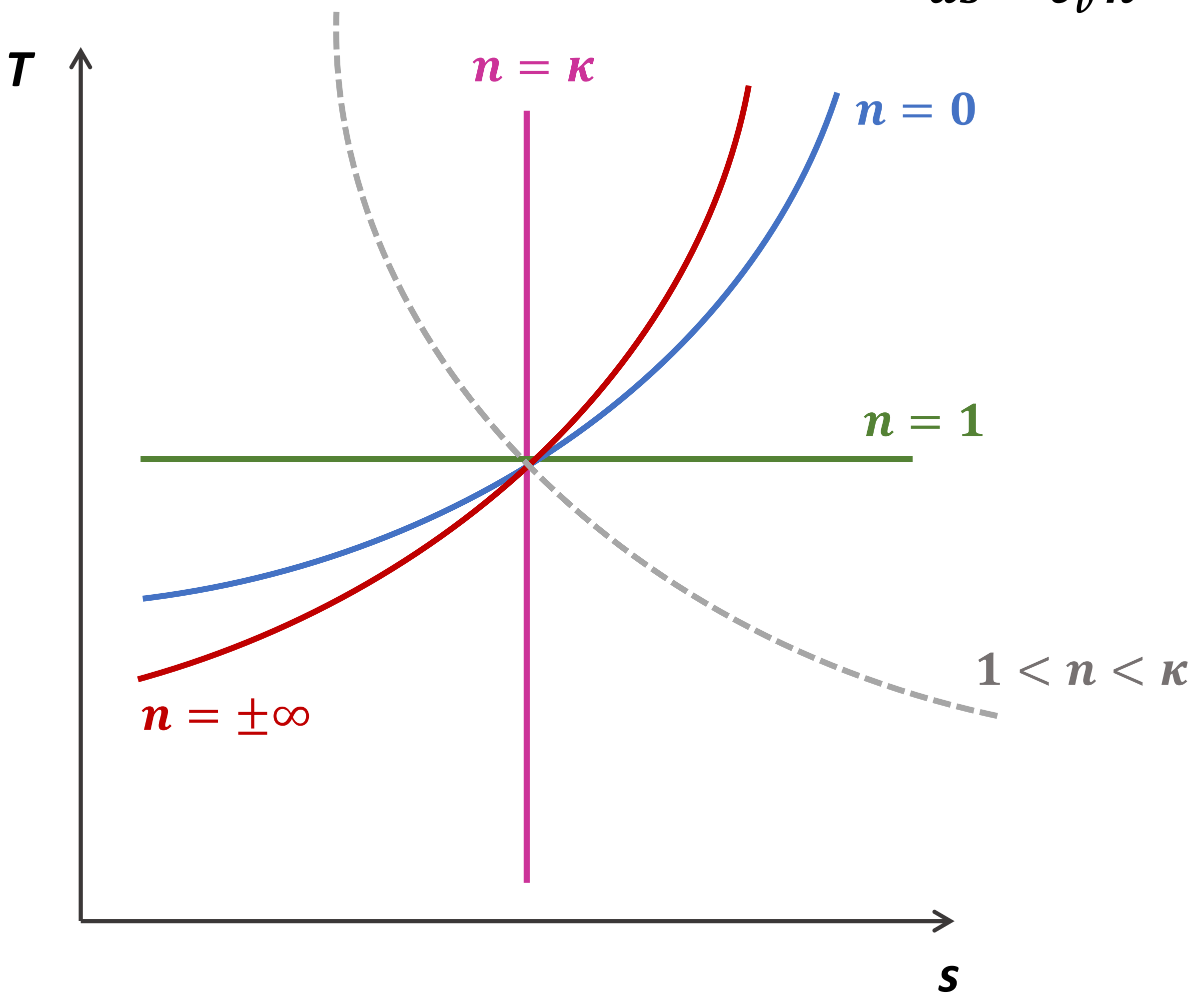
Proč vyjadřujeme zrovna derivaci teploty podle entropie?

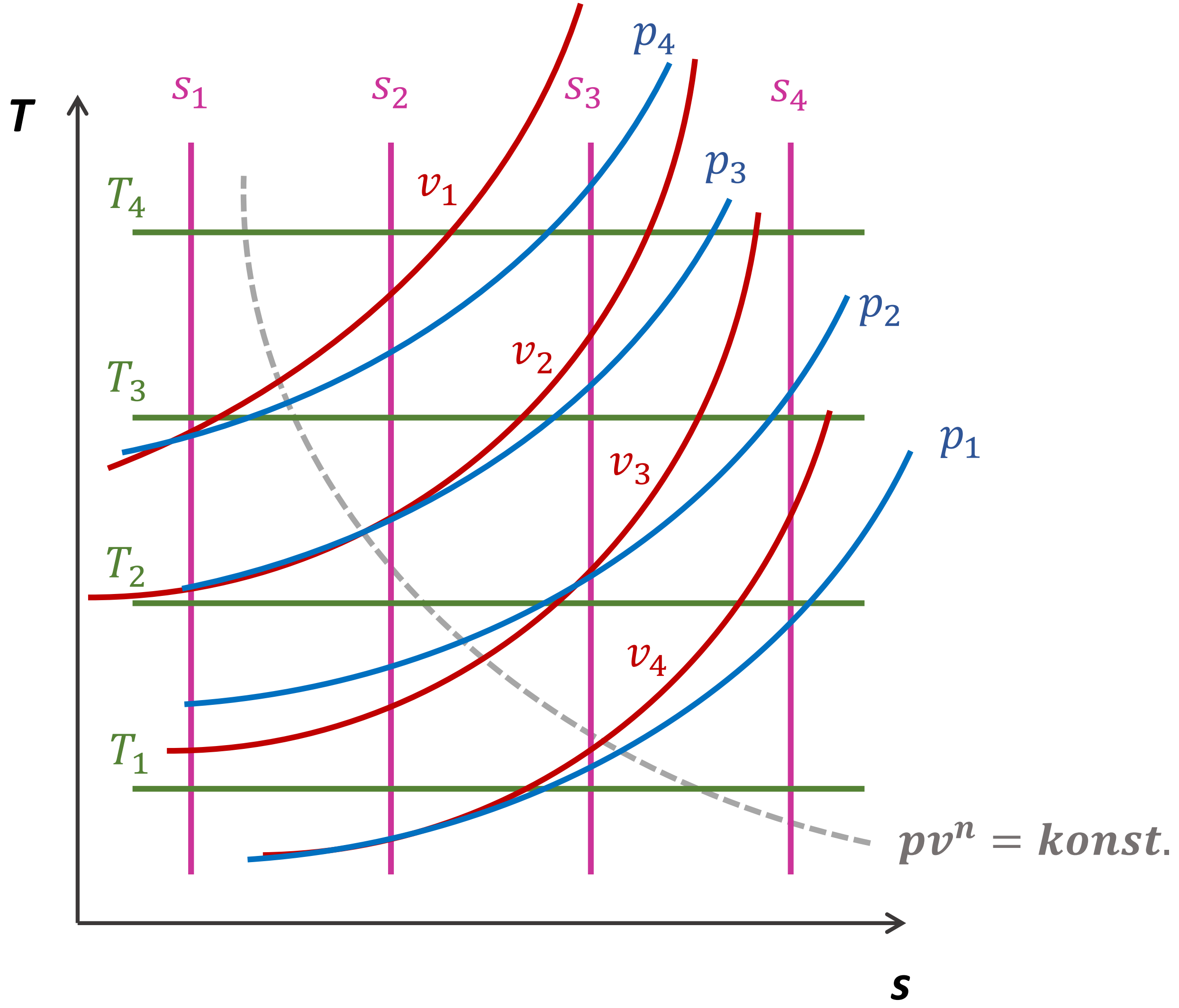
… protože geometrický význam derivace je takový, že udává směrnici tečny k dané funkci (tj. $tg\ \alpha$)



Přehled vratných změn stavu – *T-s diagram*

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_v}\frac{n-1}{n-\kappa}$$





$$pro\ indexy\ platí:\ 1 < 2 < 3 < 4$$

Přehled vratných změn stavu – *T-s diagram*

- **Isochorická změna stavu ($n \to \pm\infty$)**

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_v}\frac{n-1}{n-\kappa} = \frac{T}{c_v}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{\kappa}{n}\right)} = \frac{T}{c_v}\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{\kappa}{n}}$$

$$\left.\frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{ds}}\right|_{n\to\pm\infty} = \lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{T}{c_v}\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{\kappa}{n}}\right) = \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{c_v}}$$

Platí: $c_p > c_v$

Takže: $\frac{T}{c_p} < \frac{T}{c_v} \to tg\left(\frac{T}{c_p}\right) < tg\left(\frac{T}{c_v}\right)$ a proto je **isochora v T-s diagramu strmější než isobara**!

- **Isochorická změna stavu ($n \to 0$)**

$$\left.\frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{ds}}\right|_{n\to 0} = \left.\frac{T}{c_v}\frac{n-1}{n-\kappa}\right|_{n\to 0} = \frac{T}{c_v}\frac{0-1}{0-\kappa} = \frac{T}{\kappa c_v} = \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{c_p}}$$

- **Isotermická změna stavu ($n \to 1$)**

$$\left.\frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{ds}}\right|_{n\to 1} = \left.\frac{T}{c_v}\frac{n-1}{n-\kappa}\right|_{n\to 1} = \frac{T}{c_v}\frac{1-1}{1-\kappa} = \boldsymbol{0}\ \ldots \textit{a proto je isoterma rovnoběžná s osou entropie}$$

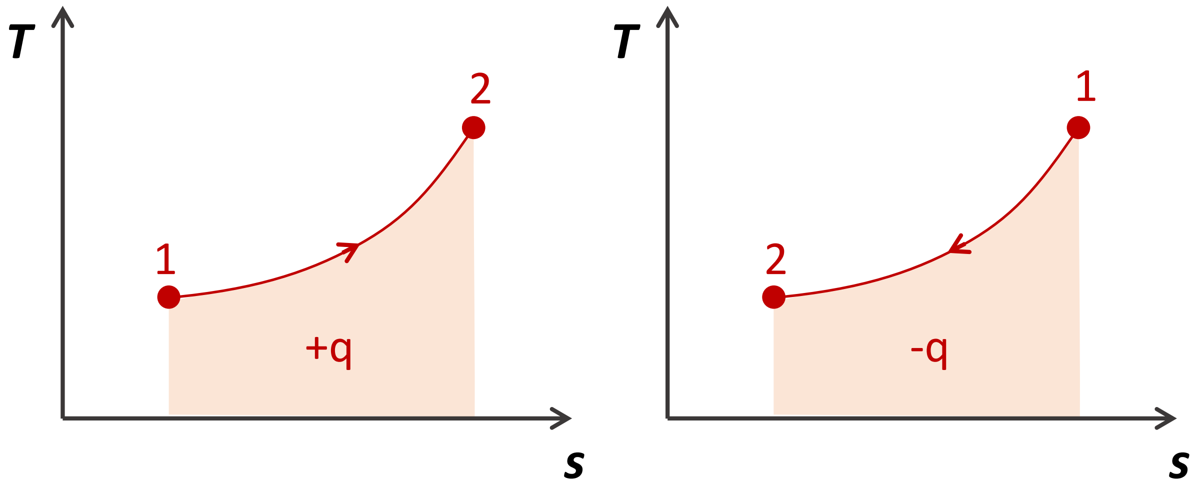
- **Adiabatická změna stavu ($n \to \kappa$)**

$$\left.\frac{dT}{ds}\right|_{n\to\kappa} = \left.\frac{T}{c_v}\frac{n-1}{n-\kappa}\right|_{n\to\kappa} = \frac{T}{c_v}\frac{\kappa-1}{\kappa-\kappa} = \left|\frac{1}{0}\right| \ldots \textit{není definováno}$$

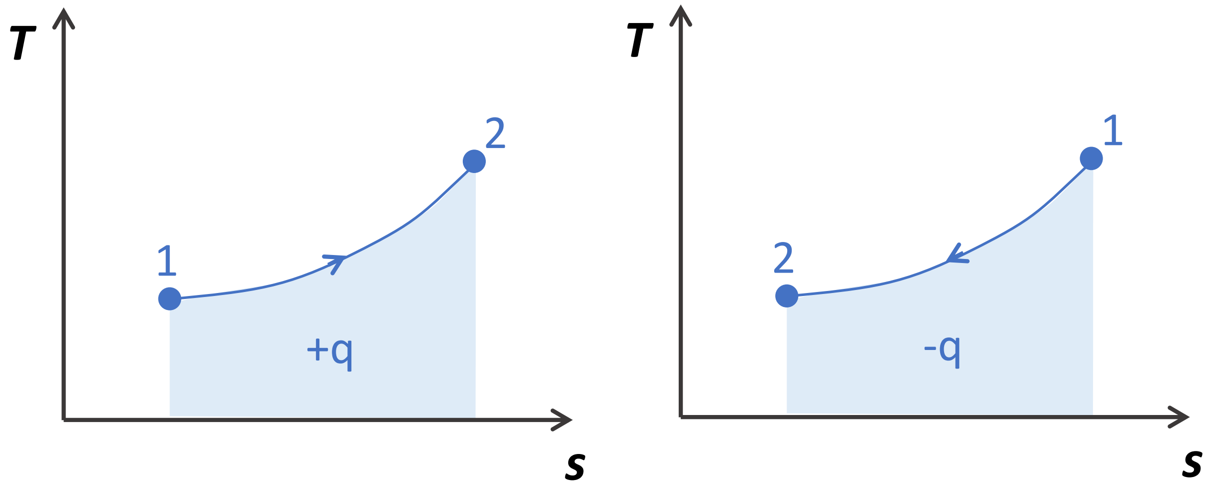
  - tan α není definován pro $\alpha = 90°$, a proto je adiabata kolmá k ose entropie, tj. rovnoběžná s osou termodynamické teploty

Přehled vratných změn stavu – *T-s diagram*

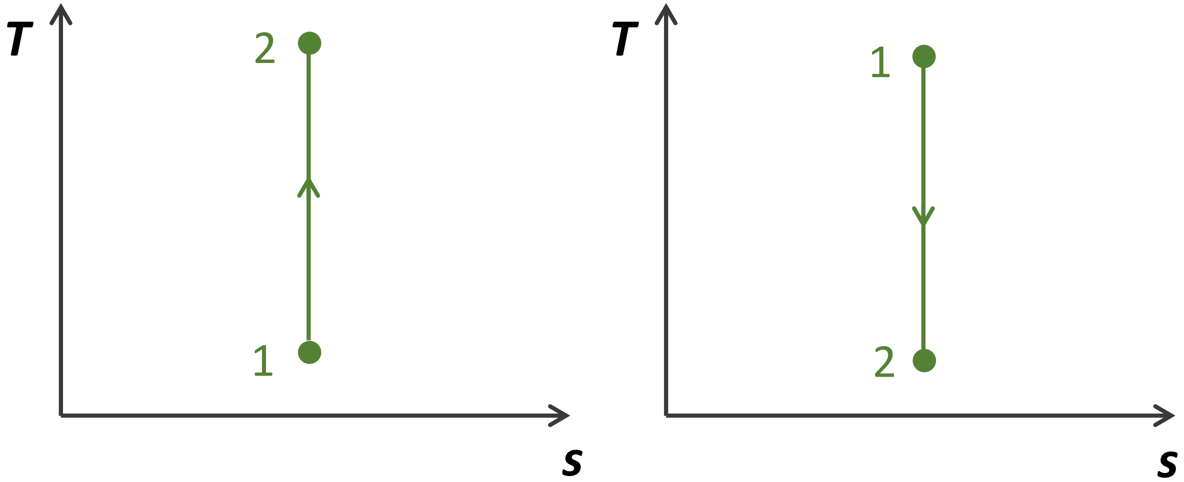
Isochorická změna stavu ($n \rightarrow \pm\infty$)



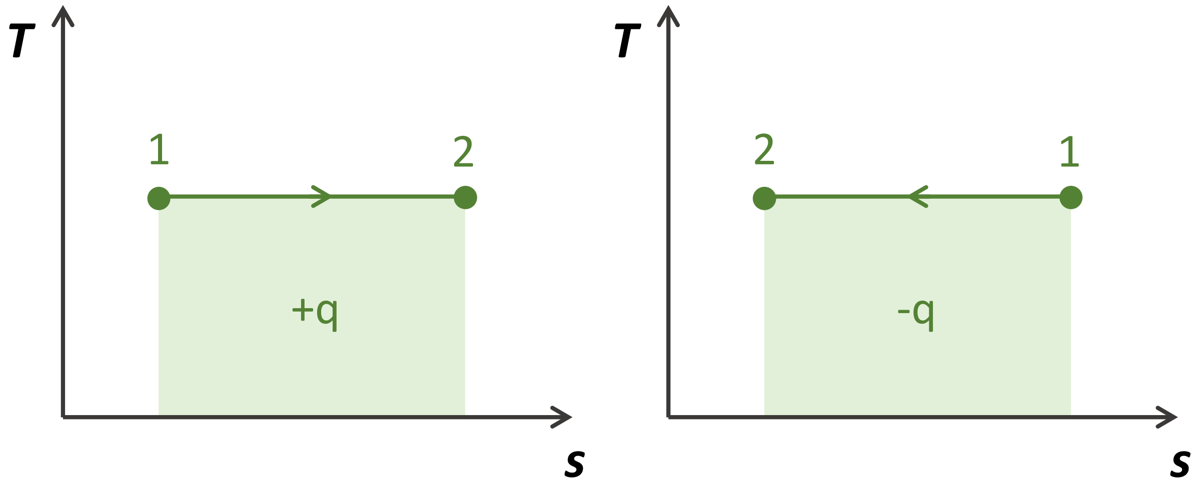
Isobarická změna stavu ($n \rightarrow 0$)



Adiabatická změna stavu ($n \rightarrow \kappa$) – bez výměny tepla s okolím

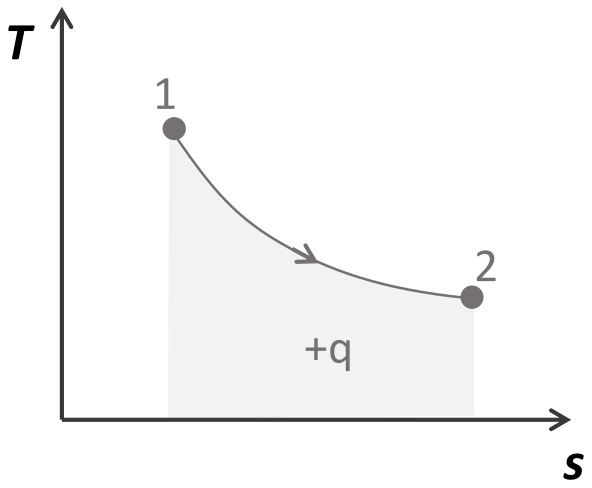


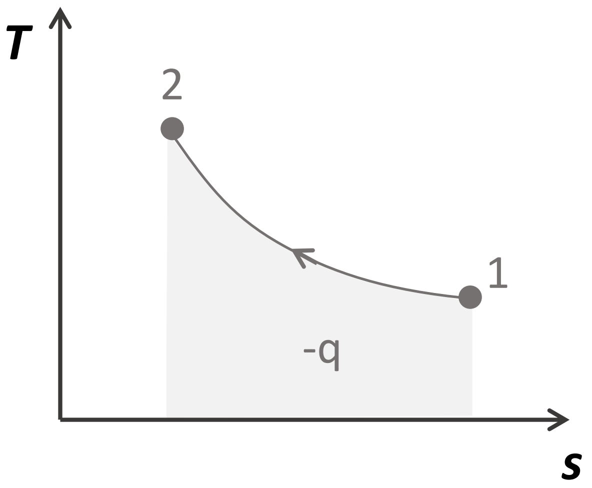
Isotermická změna stavu ($n \rightarrow 1$)



Přehled vratných změn stavu – *T-s diagram*

Polytropická změna stavu ($1 < n < \kappa$)

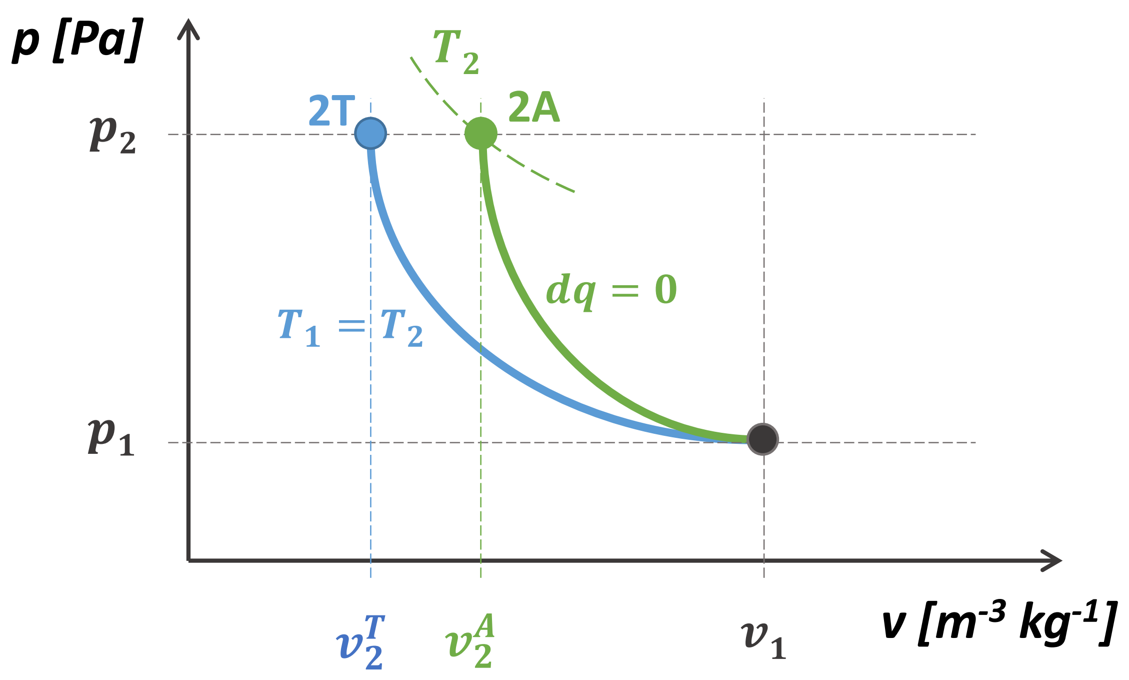


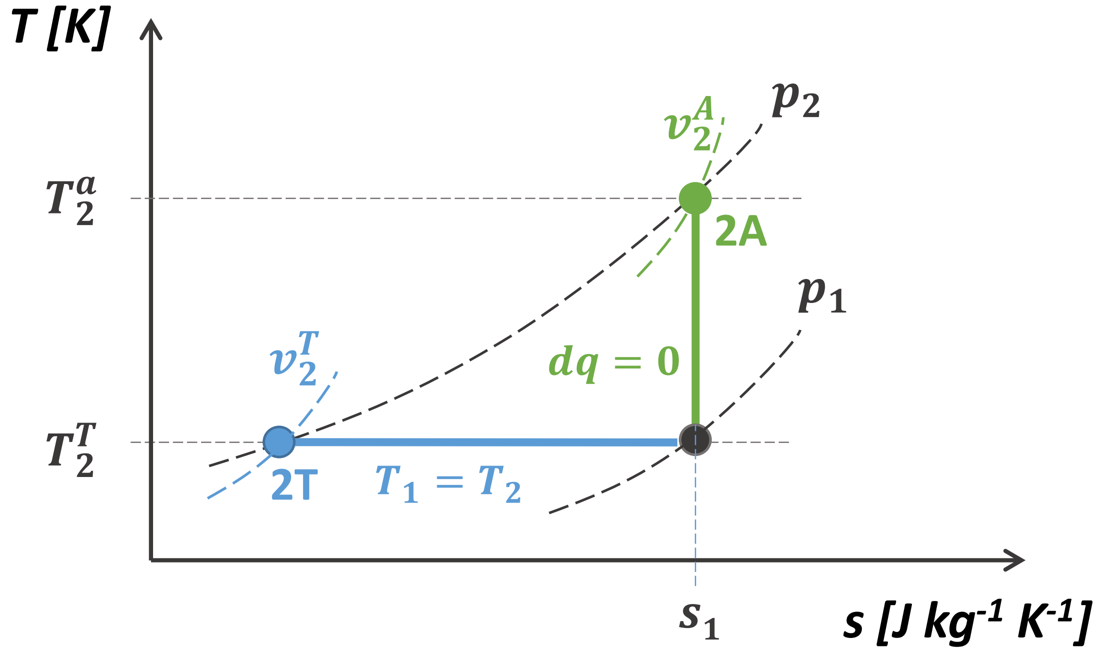


Příklady

Příklad č. 1

- **Př.: V kompresoru je kontinuálně stlačován objemový tok vzduchu 1 [m³ s⁻¹] o teplotě 20 [°C] a tlaku 0.1 [MPa] na tlak 0.7 [MPa]. Vypočtěte objemový tok vzduchu vystupujícího z kompresoru, jeho teplotu a příkon kompresoru, když komprese je: a) izotermická, b) adiabatická. Zakreslete změny v *p-v* a *T-s* diagramech.**
- **Dáno:** $\dot{V}_1 = 1\ [m^3\ s^{-1}],\ t_1 = 20\ [°C],\ p_1 = 0.1\ [MPa],\ p_2 = 0.7\ [MPa]$
- **Určit:** $\dot{V}_2 = ?\ [m^3 s^{-1}],\ t_2 = ?\ [K],\ P = ?\ [W]$





Příklad č. 1

- **Před samotným výpočtem proveďme nejprve následující úvahy na základě *p-v* a *T-s* diagramů:**
  - **objem na konci adiabatické komprese bude vyšší než u komprese izotermické (bod 2A leží víc vpravo od bodu 2T) – očekáváme tedy vyšší hodnotu objemového průtoku na výstupu při adiabatickém ději ($\dot{V}_2^T < \dot{V}_2^A$).**
  - **při adiabatickém ději bude teplota na konci komprese vyšší než u komprese izotermické (bod 2A leží víc vpravo od bodu 2T), tedy se očekává výsledek, pro který bude platit $T_2^A > T_2^T$**
  - **velikost práce se očekává v záporných hodnotách (kompresoru se dodává práce) u obou případů komprese**
  - **velikost dodávané práce v případě adiabatické komprese bude vyšší než v případě izotermické komprese (velikost plochy mezi modrou křivkou (izotermická komprese) a osou tlaku je menší než velikost plochy mezi zelenou křivkou (adiabatická komprese) a osou tlaku), tj. $|P^a| > |P^T|$**
    - **Pozor: výsledky se očekávají v záporných hodnotách, proto je nutné porovnávat v absolutních hodnotách!**

Příklad č. 1 – Isotermická komprese

A) IZOTERMICKÁ ZMĚNA

- Pro výpočet velikosti objemového toku vystupujícího z kompresoru využijeme stavovou rovnici, kterou si ovšem upravíme. Nám již dobře známý tvar stavové rovnice je následující:

$$\boldsymbol{pv = rT}$$

- Uvažujme nyní, že přes kompresor proudí kontinuálně stálé množství vzduchu (jinak řečeno v čase se nemění množství vzduchu, které protéká kompresorem). Můžeme tedy uvažovat, že hmotnostní tok kompresorem je v čase neměnný. Můžeme tedy psát stavovou rovnici pro proudící médium následovně:

$$pv\dot{m} = rT\dot{m}$$

$$\boldsymbol{p\dot{V} = \dot{m}rT}$$

- Stavová rovnice se změnila v podstatě jen formálně… lze říci, že dostala časový rozměr.
- Pro izotermický děj můžeme tedy mezi stavy 1 a 2T odvodit, že:

$$p_1\dot{V}_1 = p_2\dot{V}_2 \rightarrow \dot{V}_2 = \frac{p_1\dot{V}_1}{p_2}$$

$$\dot{V}_2 = \frac{0.1 * 10^6 * 1}{0.7 * 10^6} = \boldsymbol{0.143}\ [\boldsymbol{m^3 s^{-1}}] \equiv \dot{V}_2^T$$

- Teplota při izotermickém ději je na počátku děje stejná jako na jeho konci, tj.:

$$\boldsymbol{T_1 = T_2 = 293.15}\ [K] \leftrightarrow \boldsymbol{t_1 = t_2 = 20}\ [°C]$$

Příklad č. 1 – Příkon

- **Příkon kompresoru = velikost technické práce, která se musí dodat kompresoru za jednotku času**

$$\boxed{P = \dot{m}\, a_t}$$

příkon [W = J s⁻¹]

měrná technická práce [J kg⁻¹]

hmotnostní tok [kg s⁻¹]

- **Dosaďme do uvedeného vztahu za měrnou technickou práci její definiční vztah**

$$P = \dot{m} \int_1^2 (-1)\, v\, dp = -\int_1^2 \underbrace{\dot{m} v}\, dp = -\int_1^2 \dot{V} dp \equiv \dot{A}_{t12}$$

$$Pozn.: \dot{m}\,[kg\, s^{-1}] * v\,[m^3\, kg^{-1}] = \dot{V}\,[m^3 s^{-1}]$$

hmotnostní tok je zde uvažován konstantní, a tudíž jej můžeme vložit do integrálu

- **příkon lze tedy vypočítat i přímo použitím této upravené rovnice pro technickou práci**

Příklad č. 1 – Isotermická komprese

- **Pro výpočet příkonu kompresoru využijeme vztahu z předcházejícího slidu:**

$$P = -\int_1^2 \dot{V}\,dp = -\int_1^2 \frac{\dot{m}rT}{p}\,dp = -\dot{m}rT\int_1^2 \frac{dp}{p} = -\dot{m}rT\ln\frac{p_2}{p_1} = \dot{m}rT\ln\frac{p_1}{p_2} = p_1\dot{V}_1\ln\frac{p_1}{p_2}$$

Pozn.: $pv = rT$ $\;\ldots pokud\ tento\ tvar\ stavové\ rovnice\ vynásobíme\ hmotnostním\ tokem\ \dot{m}, dostaneme:$

$$pv\dot{m} = \dot{m}rT \;\rightarrow \boldsymbol{p\dot{V} = \dot{m}rT} \;\rightarrow\; \boldsymbol{\dot{V} = \frac{\dot{m}rT}{p}}$$

$$\boldsymbol{P} = 0.1 * 10^6 * 1 \;* \ln\frac{0.1 * 10^6}{0.7 * 10^6} \cong \boldsymbol{-194.6\ [kW]} \equiv \boldsymbol{P^T}$$

Příklad č. 1 – Adiabatická komprese

A) ADIABATICKÁ ZMĚNA

- **Pro výpočet velikosti objemového toku vystupujícího z kompresoru využijeme definiční vztah adiabaty, který opět formálně upravíme tak, abychom do něj vnesli časový rozměr:**

$$pv^{\kappa} = konst. \text{ ... rovnici vynásobíme } \dot{m}^{\kappa}$$
$$pv^{\kappa}\dot{m}^{\kappa} = \boldsymbol{p\dot{V}^{\kappa}} = \overline{\boldsymbol{konst}}.$$

- **Mezi stavy 1 a 2 tedy můžeme psát:**

$$p_1\dot{V}_1^{\kappa} = p_2\dot{V}_2^{\kappa} \rightarrow \dot{V}_2 = \dot{V}_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\boldsymbol{\dot{V}_2} = 1 * \left(\frac{0.1 * 10^6}{0.7 * 10^6}\right)^{\frac{1}{1.4}} \cong \boldsymbol{0.249\left[m^3\ s^{-1}\right]} \equiv \boldsymbol{\dot{V}_2^A}$$

- **Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem (viz úvaha na slidu 16), tj.** $\boldsymbol{\dot{V}_2^T < \dot{V}_2^A}$
- **Teplotu na konci adiabatické komprese vypočteme ze vztahu, který jsme si odvodili na minulém cvičení:**

$$\frac{T_2^A}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow T_2^A = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$T_2^A = (20 + 273.15) * \left(\frac{0.7}{0.1}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} \cong 511.15\ K \rightarrow \boldsymbol{t_2^A = 238\ °C}$$

- **Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem (viz úvaha na slidu 16), tj.** $\boldsymbol{T_2^T < T_2^A}$

Příklad č. 1 – Adiabatická komprese

- **V případě adiabatické změny není nutné odvozovat vztah pro výpočet práce z definičního vztahu, ale můžeme využít 1. zákona termodynamiky:**

$$dq = dh + da_t; \quad dq = 0 \ \dots adiabatická\ změna$$

$$da_t = -dh = -c_p dT = -\frac{\kappa r}{\kappa - 1} dT$$

$$a_{t12} = -\frac{\kappa r}{\kappa - 1}(T_2 - T_1)$$

$$\boldsymbol{P} \equiv \dot{A}_{t12} = -\frac{\dot{m}\kappa r}{\kappa - 1}(T_2 - T_1) = -\frac{\kappa\, \dot{m} r T_1}{\kappa - 1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = -\frac{\boldsymbol{\kappa\, p_1 \dot{V}_1}}{\boldsymbol{\kappa - 1}}\left(\frac{\boldsymbol{T_2}}{\boldsymbol{T_1}} - \boldsymbol{1}\right)$$

$$\boldsymbol{P = -\frac{1.4 * 0.1 * 10^6 * 1}{1.4 - 1}\left(\frac{511.15}{20 + 273.15} - 1\right) = -260.3\ [kW] \equiv P^A}$$

- **Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem (viz úvaha na slidu 16), tj.** $|\boldsymbol{P^T}| < |\boldsymbol{P^A}|$

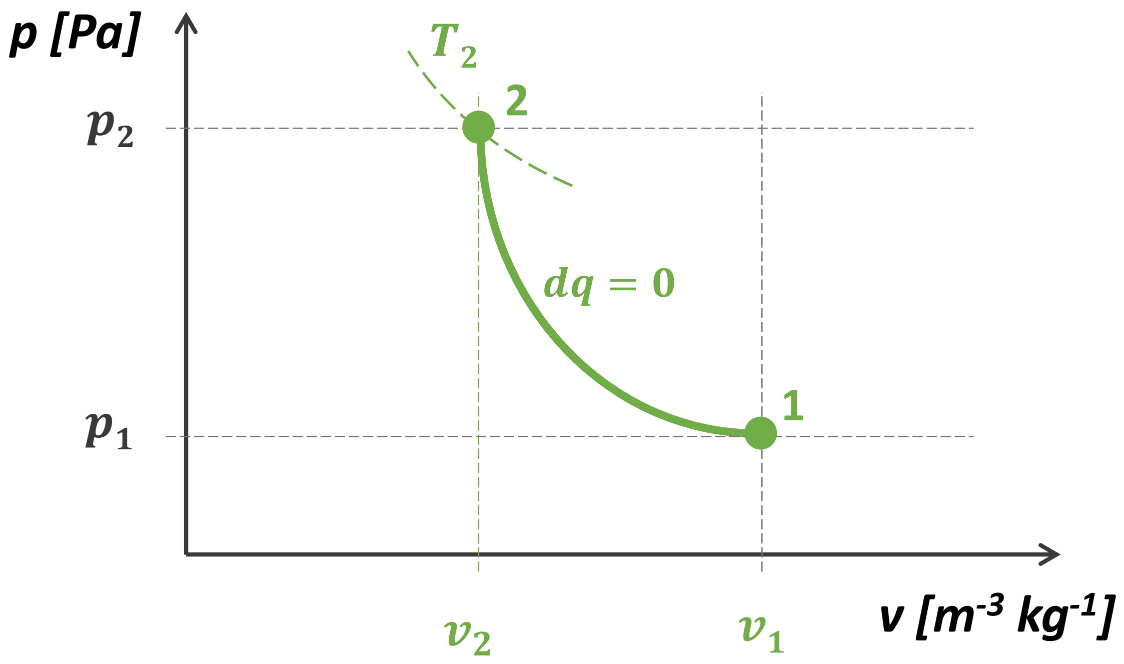
Příklad č. 2

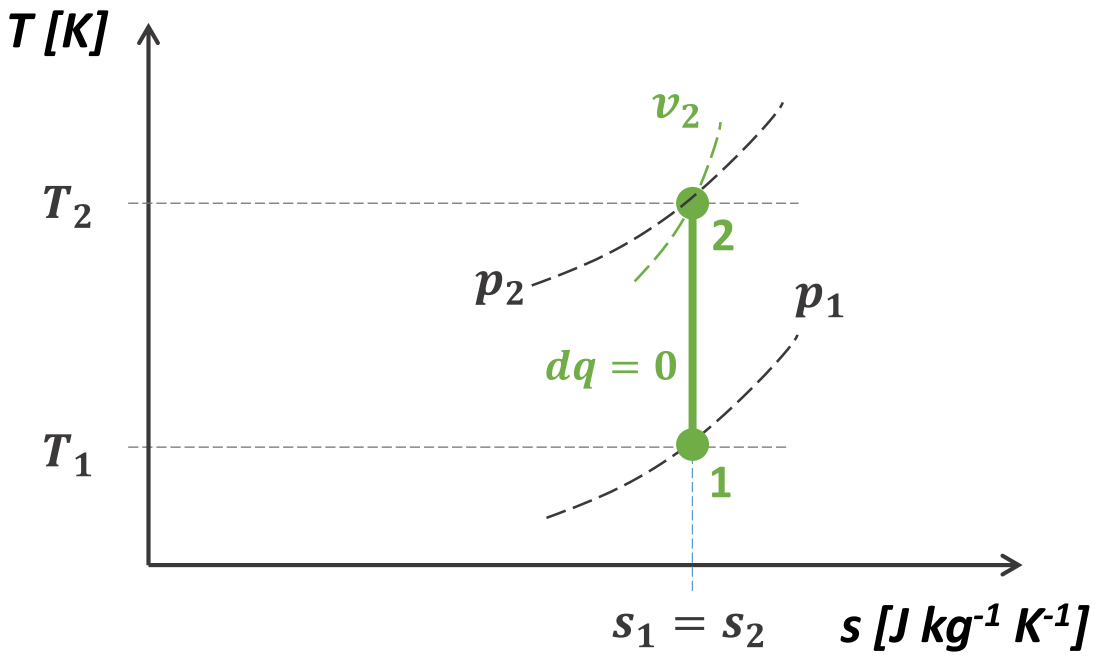
- **Př.: Ve válci je vzduch o hmotnosti 0,25 [kg] při tlaku 1 [bar] a teplotě 15 [°C]. Vzduch je adiabaticky stlačen na tlak 0,8 [MPa].**

- **Dáno:** $\boldsymbol{m = 0.25\ [kg],\ p_1 = 1\ [bar],\ t_1 = 15\ [°C],\ p_2 = 0.8\ [MPa],\ r_{vzduch} = 287.04\ [J\ kg^{-1} K^{-1}]}$

- **Určit:**
  1) **absolutní práci**
  2) **technickou práci**
  3) **koncový objem**
  4) **koncovou teplotu**
  5) **změnu vnitřní energie**
  6) **změnu entalpie**
  7) **změnu entropie**

Příklad č. 2





- **z grafu vyplývá, že:**
  - velikost technické i absolutní práce se očekává z záporných hodnotách (kompresoru se dodává práce)
  - objem na konci děje bude nižší než na začátku $V_2 < V_1$
  - teplota na konci děje bude vyšší než na začátku děje $T_2 > T_1$

Příklad č. 2

1) **Absolutní práce**

- **Vztah pro výpočet absolutní práce lze získat integrací definiční vztahu absolutní práce ($da = pdv$), či můžeme v případě adiabatické změny využít i 1. zákona termodynamiky – vše bylo podrobně odvozeno na předchozím cvičení, proto zde již bez dalšího komentáře tyto vztahy použijeme:**

$$a_{12} = \frac{rT_1}{1-\kappa}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = \frac{rT_1}{1-\kappa}\left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right) = \frac{287.04 * (15 + 273.15)}{1 - 1.4}\left(\left(\frac{0.8 * 10^6}{1 * 10^5}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1\right) \cong -167.8\ [kJ\ kg^{-1}]$$

- **Výsledek je záporný, což se dalo očekávat. Vypočetli jsme ovšem měrnou absolutní práci, tudíž musíme výsledek ještě vynásobit hmotností:**

$$\boldsymbol{A_{12}} = m * a_{12} = 0.25 * (-167.8) \cong \boldsymbol{-41.95\ [kJ]}$$

2) **Technická práce**

- **Velikost technické práce je možné také odvodit a vypočítat klasickým způsobem (tj. integrací z definičního vztahu $da_t = -vdp$), ale můžeme také využít vztahu mezi absolutní a technickou prací:**

$$\boldsymbol{A_{t12} = \kappa A_{12}}$$

$$\boldsymbol{A_{t12} = 1.4 * (-41.95) \cong -58.7\ [kJ]}$$

Příklad č. 2

3) Koncový objem

- **Pro výpočet koncového objemu je nutnost znát velikost objemu na začátku, nebo znát dostatečné množství parametrů, aby se mohl koncový objem vypočítat v jednom kroku. V tomto případě je ale zapotřebí nejprve vypočítat velikost objemu na počátku, což je možné za pomoci stavové rovnice:**

$$p_1 V_1 = m r T_1 \rightarrow V_1 = \frac{m r T_1}{p_1} = \frac{0.25 * 287.04 * (15 + 273.15)}{1 * 10^5} \cong 0.21\ [m^3]$$

- **Následně je možné za využití rovnic adiabaty a jejich úprav (viz předchozí cvičení) odvodit vztah pro koncový objem:**

$$\boldsymbol{V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 0.21 * \left(\frac{1 * 10^5}{0.8 * 10^6}\right)^{\frac{1}{1.4}} \cong 0.048\ [m^3]}$$

- **Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem $\boldsymbol{V_2 < V_1}$**

4) Koncová teplota

- **Za pomoci rovnic adiabaty a jejich úprav (viz předchozí cvičení) lze vypočítat koncovou teplotu:**

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$\boldsymbol{T_2} = (15 + 273.15) * \left(\frac{0.8 * 10^6}{1 * 10^5}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} \cong \boldsymbol{521.97\ [K] \rightarrow t_2 = 248.82\ [°C]}$$

- **Výsledek koresponduje s očekávaným výsledkem $\boldsymbol{T_2 > T_1}$**

Příklad č. 2

5) **Změna vnitřní energie**

- **Při výpočtu „změny velikosti“ se myslí číslo, které je dáno rozdílem mezi koncovým a počátečním stavem. V případě adiabatické změny stavu je tady ještě podmínka, která musí býti splněna, aby výsledek korespondoval s prvním zákonem termodynamiky. První rovnicí pro výpočet velikosti změny vnitřní energie, je:**

$$dU = mc_v dT$$

- **Podmínka, která plyne z 1. věty termodynamické má tvar:**

$$dU = -dA$$

- Tedy velikost změny vnitřní energie, musí mít opačné znaménko jako velikost změny absolutní práce. Dle předchozího jsme si určili, že velikost dodávané práce kompresoru značíme záporným znaménkem, tedy změna vnitřní energie při kompresi bude mít znaménko kladné. Velikost změny vnitřní energie tak závisí pouze na rozdílu teplot:

$$\boldsymbol{\Delta U = m\frac{r}{\kappa - 1}(T_2 - T_1) = 0.25 * \frac{287.04}{1.4 - 1} * (521.97 - 288.15) \cong 41.95\ [kJ]}$$

6) **Změna entalpie**

- **Při výpočtu velikosti změny entalpie jsme omezeni stejnými podmínkami jako v případě výpočtu velikosti změny vnitřní energie. Tedy rovnice pro výpočet velikosti změny entalpie:**

$$dH = mc_p dT$$

- **Podmínka, která plyne z 1. věty termodynamické má tvar:**

$$dH = -dA_t$$

Příklad č. 2

- **Tedy velikost změny entalpie bude dána rovnicí:**

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{mc_p}(\boldsymbol{T_2} - \boldsymbol{T_1}) = m\frac{\kappa r}{\kappa - 1}(T_2 - T_1) = 0.25 * \frac{1.4 * 287.04}{1.4 - 1} * (521.97 - 288.15) \cong \mathbf{58.73}\ [\boldsymbol{kJ}]$$

7) <u>Změna entropie</u>

- **V případě změny velikosti entropie je odpověď jasná. U vratné adiabatické komprese, která probíhá s ideálním plynem, nedochází k výměně tepla s okolím a ani se neprodukuje žádné teplo uvnitř systému, tedy velikost změny entropie je rovna nule.**

$$\boldsymbol{dS} = \frac{\boldsymbol{dQ}}{\boldsymbol{T}}\bigg|_{\boldsymbol{dQ=0}} \rightarrow \boldsymbol{dS} = \mathbf{0}$$

Příklad č. 3

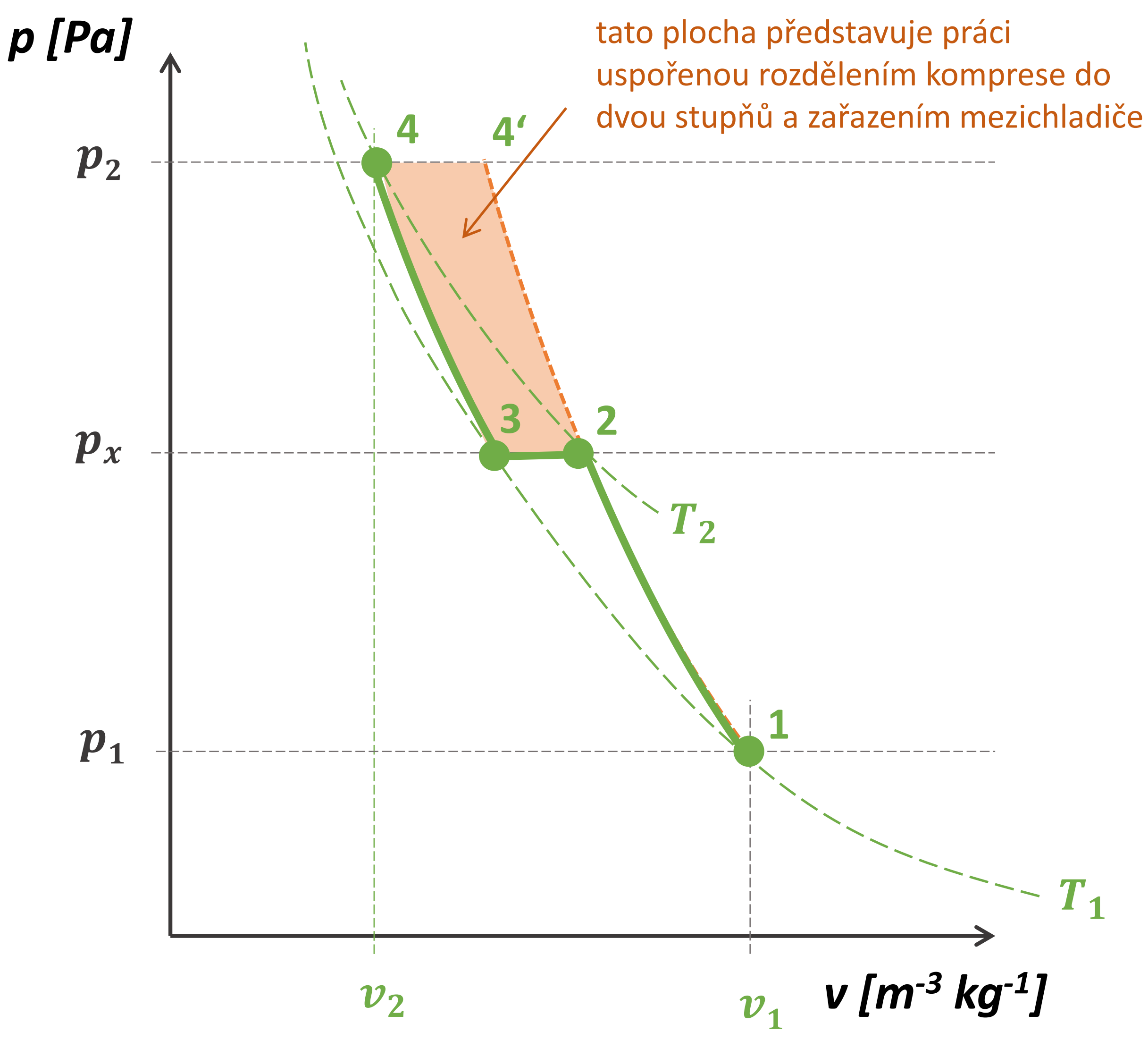
- **Př.: Dvoustupňový kompresor nasává vzduch o teplotě 20 [°C] a tlaku 98 [kPa] stlačuje ho na 6 [MPa]. Vypočítejte výkon motoru, je-li mechanická účinnost 85%, množství chladící vody pro chlazení válců kompresoru a pro mezichladič. Teplota chladící vody se zvýší o 15 [K]. Komprese je v obou stupních polytropická s exponentem 1,3. Sací výkon kompresoru je 0,14 [m³ s⁻¹].**

- **Dáno:** $t_1 = 20\ [°C],\ p_1 = 98\ [kPa],\ p_2 = 6\ [MPa],\ \eta_M = 85\ [\%],\ \Delta T = 15\ [K],\ n = 1.3$

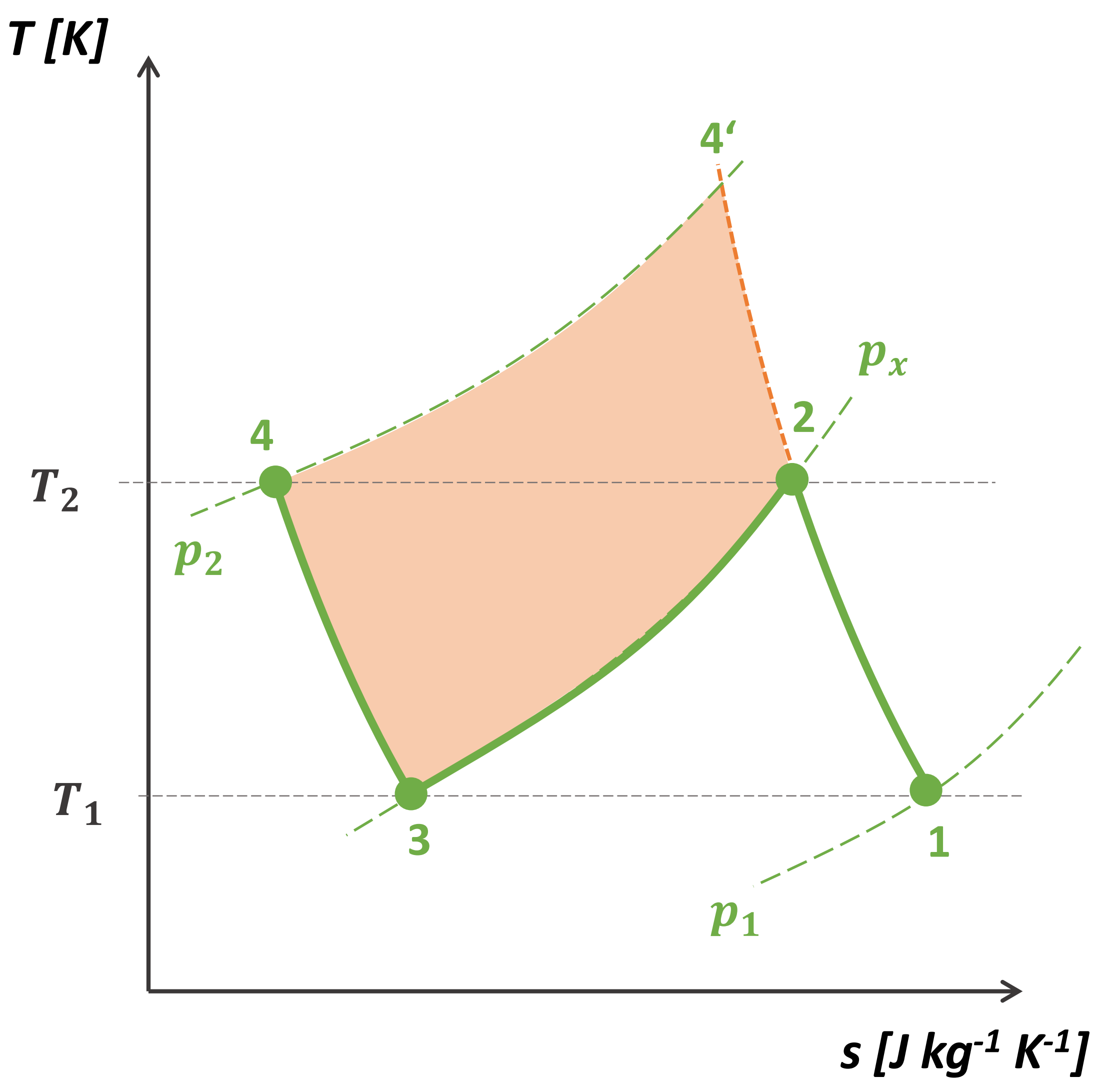
  $\dot{V}_1 = 0.14\ [m^3 s^{-1}];\ c_{voda} = 4187\ [J\ kg^{-1} K^{-1}]$

- **Určit:** $P = ?\ [W];\ \dot{Q}_{voda} = ?\ [kg\ s^{-1}];$

Příklad č. 3



tato plocha představuje práci uspořenou rozdělením komprese do dvou stupňů a zařazením mezichladiče
p [Pa]
p_2
p_x
p_1
4
4‘
3
2
1
T_2
T_1
v_2
v_1
v [m-3 kg-1]



T [K]
T_2
T_1
4‘
4
2
3
1
p_x
p_2
p_1
s [J kg-1 K-1]

Příklad č. 3

- **Na začátku příkladu je nutné jsi uvědomit pár skutečností, které plynou z úlohy:**
  - Při klasické polytropické kompresi jednostupňovým kompresorem je nutno vynaložit veliké množství technické práce pro zvýšení tlaku z tlaku p_1 na p_2 (viz polytropa 1-4´). Při použití dvou stupňů a mezichladiče (děj 1-2-3-4) je vidět, že se snižuje velikost dodávané technické práce kompresoru. Ušetřená technická práce je zobrazena oranžovou plochou.
  - Chlazení mezi body 2-3 je izobarické. Jelikož se bavíme o ideálním ději a chceme získat maximální množství ušetřené energie, tak k odvodu tepla musí docházet izobaricky.
  - Dělící tlak ($\mathrm{p_x}$) rozděluje celý děj komprese tak, aby velikost technické práce prvního stupně odpovídala velikosti technické práce druhého stupně. Výpočet technické práce pro polytropický děj vychází z rozdílů tlaků (viz minulé cvičení). Porovnáním dvou rovnic dostáváme tvar rovnice korespondující s obrázkem výše:

$$\frac{p_x}{p_1} = \frac{p_2}{p_x} \leftrightarrow p_1 p_2 = p_x^2$$

  - K tomu, aby byla zachována rovnost dodávané technické práce v každém stupni, musí být i poměr teplot stejný jako v případě tlaků. To znamená, že musí býti zachovány stejné teploty v bodech $\mathrm{T_1 = T_3}$ a $\mathrm{T_2 = T_4}$
  - K tomu aby byla zachována rovnost dodávané technické práce v každém stupni, musí být i poměr objemů stejný jako v případě tlaků. Tedy: $\frac{\mathrm{v_2}}{\mathrm{v_1}} = \frac{\mathrm{v_4}}{\mathrm{v_3}}$

Příklad č. 3 – výkon motoru

- **Nejprve si vypočítáme dělící tlak p_x**

$$p_1 p_2 = p_x^2 \rightarrow \boldsymbol{p_x} = \sqrt{p_1 p_2} = \sqrt{98 * 10^3 * 6 * 10^6} \cong \mathbf{0.767}\ [\boldsymbol{MPa}]$$

- **Jak je vidět, tak dělící tlak není přesně ve středu mezi 98 [kPa] a 6 [MPa] – tomu by odpovídala hodnota 3,49 [MPa]. Dělící tlak slouží k zachování rovnosti velikosti dodávané technické práce. Zároveň platí, že tlakový poměr v obou stupních kompresoru bude stejný (zvýšení tlaku v prvním stupni se bude rovnat zvýšení tlaku v druhém stupni):**

$$\frac{\boldsymbol{p_x}}{\boldsymbol{p_1}} = \frac{\boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{p_x}} = \mathbf{7.82}$$

- **Výkon kompresoru se počítá dle vztahu:**

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\dot{m}}\ \boldsymbol{a_t}$$

- **Člen a_t udává celkovou měrnou technickou práci. Ta je součtem měrné technické práce prvního stupně a měrné technické práce druhého stupně kompresoru. Jelikož velikosti prací v prvním i druhém stupni se rovnají, tak nám stačí vypočítat práci jen jednoho stupně a tu následně vynásobit dvěma.**

$$\boldsymbol{a_t = a_{t1} + a_{t2} = 2 * \frac{n}{n-1} r T_1 \left(1 - \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right)}$$

- **Práci systému dodáváme, tedy předpokládáme, že výsledek bude záporný. Násobení rovnice pro technickou práci hmotnostním tokem $\dot{m}$ dostáváme rovnici, která nám určuje velikost výkonu, který je během komprese kompresoru dodáván.**

Příklad č. 3 – výkon motoru

$$P_k = \dot{m}\, a_t = \dot{m} * 2 * \frac{n}{n-1} r T_1 \left(1 - \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right) = 2 * \frac{n}{n-1} p_1 \dot{V}_1 \left(1 - \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

$$\boldsymbol{P_k} = 2 * \frac{1.3}{1.3-1} * 98 * 10^3 * 0.14 * \left(1 - \left(\frac{0.767 * 10^6}{98 * 10^3}\right)^{\frac{1.3-1}{1.3}}\right) \cong \boldsymbol{-72.26\ [kW]}$$

- **Kompresoru se však musí tento výkon dodávat. Dodává se z motoru. Samozřejmě motor pracuje s určitými mechanickými ztrátami a velikost těchto ztrát je reprezentována účinností. V tomto případě se jedná o mechanickou účinnost $\eta_M = 85\ [\%]$. Toto číslo nám říká, že z celkového výkonu, který motor vyprodukuje, se využije 85%, neboli že z celkového výkonu, který motor vyprodukuje, se 15% ztratí. Z toho logicky plyne, že motor, který má pohánět tento kompresor, musí být schopen produkovat a dodávat o 15% vyšší výkon. Z toho je patrné, že velikost potřebného dodávaného výkonu bude:**

$$\boldsymbol{P_M} = \frac{\boldsymbol{P_k}}{\boldsymbol{\eta_M}} = \frac{\boldsymbol{-72.26}}{\boldsymbol{0.85}} \cong \boldsymbol{-85\ [kW]}$$

- **Pozor, v tomto případě, jsme vypočetli množství potřebného dodávaného výkonu od motoru na pohon kompresoru. Z toho tedy plyne, že výkon motoru s 85% účinností, který bude pohánět tento kompresor, bude:**

$$\boldsymbol{P} = |\boldsymbol{P_M}| = \boldsymbol{85\ [kW]}$$

Příklad č. 3 – odvedené teplo

- **Při polytropickém ději dochází k výměně tepla s okolím a zároveň se teplo u mezistupňového kompresoru odvádí pomocí chladiče, ve kterém cirkuluje voda. <u>Celkové množství odvedeného tepla</u> bude určeno rovnicí:**

$$\dot{Q} = \dot{Q}_v + \dot{Q}_{ch}$$

- **Tepelné toky lze vypočítat i z kalorimetrické rovnice, ale je nezbytné brát v úvahu charakter děje. Množství tepla odváděného stěnami válců je dáno rovnicí polytropy a komprese probíhá polytropicky (proto se v rovnicích vyskytuje měrná tepelná kapacita při polytropickém ději c_n). Je nutno vzít v úvahu i to, že kompresor je dvoustupňový, takže máme dva válce (proto násobíme odvedené teplo 2 – POZOR - to platí jen v tomto případě, nikoliv obecně). <u>Množství odvedeného tepla stěnami válců</u> je dáno rovnicí:**

$$\dot{Q}_v = 2\, c_n \dot{m}\,(T_2 - T_1) = 2\, c_v \frac{n-\kappa}{n-1}\frac{p_1\dot{V}_1}{r\,T_1}(T_2 - T_1) = 2\frac{r}{\kappa-1}\frac{n-\kappa}{n-1}\frac{p_1\dot{V}_1}{r\,T_1}(T_2 - T_1)$$

$$p_1\dot{V}_1 = \dot{m} r T_1$$

$$\dot{m} = \frac{p_1\dot{V}_1}{rT_1}$$

$$c_v = \frac{r}{\kappa-1}$$

- **Ve výše uvedeném vztahu neznáme teplotu T_2, proto si jí dopočteme z rovnice polytropy:**

$$T_2 = T_1\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

- **Množství tepla odvedeného stěnami válců je tedy následující:**

$$\dot{Q}_v = 2 * \frac{287.04}{1.4-1} * \frac{1.3-1.4}{1.3-1} * \frac{98*10^3*0.14}{287.04*(20+273.15)}(471.21-293.15) \cong -13\,889.3\ [W]$$

Příklad č. 3 – odvedené teplo a množství chladicí vody

- **Nyní vypočítáme <u>množství tepla odváděného stěnami mezichladiče</u> (tj. při isobarickém ději – proto do rovnice dosazujeme měrnou tepelnou kapacitu při konstantním objemu):**

$$\dot{Q}_{ch} = \dot{m}c_p(T_3 - T_2) = \frac{p_1\dot{V}_1}{r\,T_1}\frac{\kappa r}{\kappa - 1}(T_3 - T_2)$$

$$p_1\dot{V}_1 = \dot{m}rT_1$$

$$\dot{m} = \frac{p_1\dot{V}_1}{rT_1}$$

$$\dot{Q}_{ch} = \frac{98 * 10^3 * 0.14}{287.04 * (20 + 273.15)}\frac{1.4 * 287.04}{1.4 - 1}(293.15 - 471.21) \cong -29\,167.5\ [W]$$

- **<u>Celkové odvedené teplo</u> je tedy:**

$$\dot{Q} = \dot{Q}_v + \dot{Q}_{ch} \cong -13889.3 + (-29167.5) = -43056.8\ [W]$$

- **Množství chladící vody vypočteme také z kalorimetrické rovnice. Voda musí absorbovat stejné množství tepla, které je z válců a výměníků předáváno a zároveň se její teplota zvýší jen o 15 [K]. Bude tedy platit:**

$$|\dot{Q}| = \dot{m}c_{voda}\Delta T \rightarrow \dot{m} = \frac{|\dot{Q}|}{c_{voda}\Delta T}$$

zde budeme psát absolutní hodnotu, neboť zde řešíme chlazení, které je odděleno od procesu, jež se odehrává uvnitř kompresoru – tj. do vody se má teplo z kompresoru přivést a dle znaménkové konvence je tedy kladné

$$\dot{m} = \frac{|-43056.8|}{4187 * 15} \cong 0.686\ [kg\ s^{-1}]$$

Děkuji za pozornost