Zápočtová písemná práce z JMM.

Úspěšný řešitel je ten, kdo získá nejméně polovinu z maximálního počtu bodů.

Jméno: **Datum:**
Příjmení:

1. Příklad. Vytvořte pravdivostní tabulku pro formuli

$$(((\neg A \Rightarrow \neg B) \wedge B) \Rightarrow A) \qquad \text{(2b)}$$

2. Příklad. Upravte pomocí de Morganových a dalších pravidel pro logické spojky tak, aby formule neobsahovala spojky $\wedge$ a $\Rightarrow$.

$$(A \wedge (B \wedge \neg(C \Rightarrow (D \wedge E)))) \qquad \text{(2b)}$$

3. Příklad. Znegujte kvantifikovaný výrok.

$$\exists!\, x \in \mathbb{R} \forall y \colon x + y > 2 \qquad \text{(2b)}$$

4. Příklad. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Své rozhodnutí podložte matematickým důkazem.

$$\exists! x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} \colon x + y > 0 \quad \text{(2b)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y! \in \mathbb{R} \colon x \cdot y < 2 \quad \text{(2b)}$$
$$\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} \colon x \cdot y < 1 \quad \text{(2b)}$$

5. Příklad. Rozhodněte o typu důkazu (přímý, nepřímý, sporem, matematickou indukcí). (3b)
Věta *Prvočísel je nekonečně mnoho.*

Důkaz. Nechť existuje jen konečně mnoho prvočísel. Můžeme je tedy všechna vypsat do seznamu konečné délky n uspořádaného podle velikosti. Označme tato prvočísla p_1, p_2,…, p_n. Potom číslo $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ není dělitelné žádným z těchto prvočísel, jelikož při dělení dostaneme vždy zbytek 1. Tím pádem číslo x musí být buď prvočíslo, které v seznamu není ($x > p_n$), nebo musí být dělitelné nějakým jiným prvočíslem, které také v seznamu není. To ale znamená, že seznam prvočísel z počátku důkazu nebyla úplná. Konec důkazu.