Písemná práce z matematické analýzy 5

V následujících příkladech můžete využít věty, že pokud existuje Riemannův integrál, existuje i integrál Lebesgueův a tyto integrály se rovnají. U neomezených funkcí (nebo neomezených integračních oborů) budete muset funkci modifikovat a provést vhodný limitní přechod.

1. Rozhodněte, zda existuje Lebesgueův integrál
   (a) (2 body)
   $$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x\,.$$
   (b) (2 body)
   $$\int_{[-1,1]} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x\,.$$
2. Vypočtěte:
   (a) (2 body)
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,2\pi]} \frac{\operatorname{arctg}(n \sin x)}{\sqrt{|x-\pi|}} \mathrm{d}x$$
   (b) (2 body)
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty]} \sin x \exp(-x^{2n}) \mathrm{d}x$$
3. Vypočtěte integrál pomocí Fubiniovy věty nebo Tonelliovy věty (ověřte všechny předpoklady), případně rozhodněte, že daný integrál neexistuje (např. Tonelliův - Hobsonův test, Fubiniova věta):
   (a) (2 body)
   $$\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{(x+y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
   (b) (2 body)
   $$\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
4. Rozhodněte o definičním oboru **reálné (konečné)** funkce definované pomocí Lebesgueva integrálu (tj. rozhodněte, pro jaké hodnoty parametru a je integrál definován a **je konečný**) a vypočtěte (jednostranné) limity v krajních bodech definičního oboru.
   (a) (2 body)
   $$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \exp(-x) \mathrm{d}x$$
   (b) (2 body)
   $$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^a} \mathrm{d}x$$