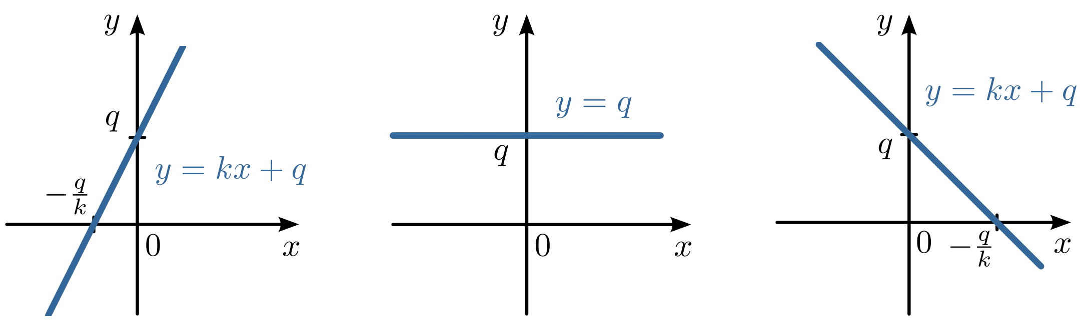
Kapitola 1

Základní soubor funkcí v $\mathbb{R}$

Lineární funkce

$$f: y = kx + q, \qquad k, q \in \mathbb{R}, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } k \neq 0, \\ \{q\} & \text{pro } k = 0. \end{cases}$$



Obr. 1.1: Grafy lineárních funkcí

Vlastnosti:

i) grafem lineární funkce je *přímka*,

ii) lineární funkce je *konvexní*, *konkávní* a *monotónní*,

iii) lineární funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,

iv) pro $k > 0$ je f *prostá* a *ostře rostoucí*,

v) pro $k < 0$ je f *prostá* a *ostře klesající*,

vi) pro $k = 0$ je f **konstantní funkce** (**konstanta**),

vii) pro $k = 0$ je f *rostoucí* i *klesající*, *omezená* a *periodická* s libovolnou periodou,

viii) pro $q = 0$ a $k \neq 0$ se f říká **přímá úměrnost**,

ix) pro $q = 0$ je f *lichá*,

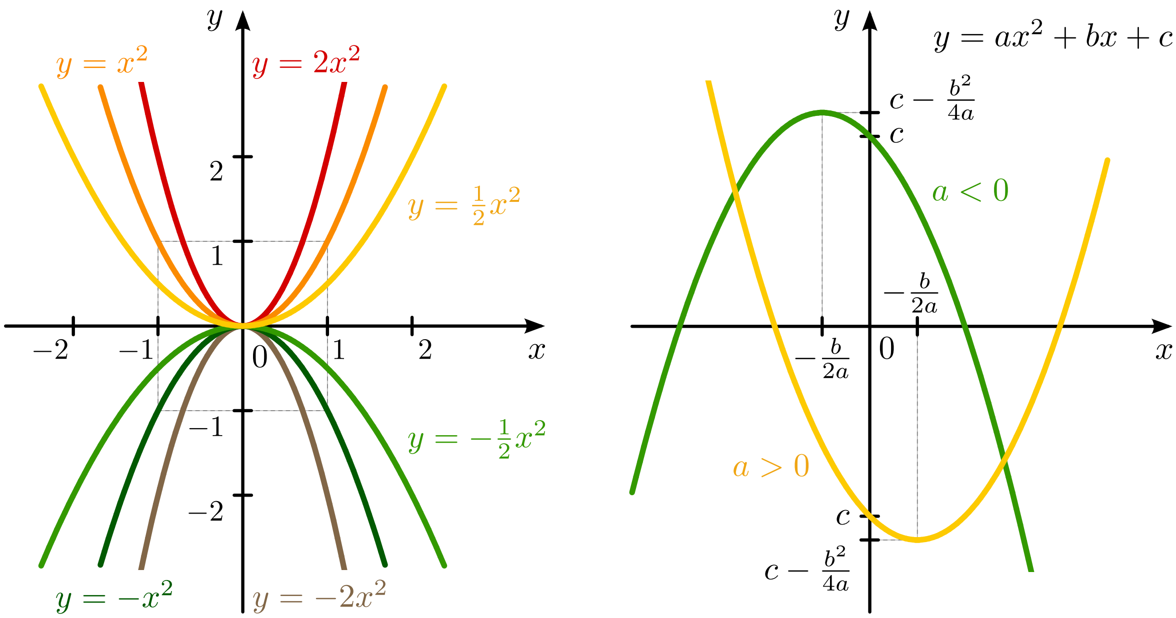
x) pro $q = k = 0$ je f *lichá* i *sudá*.

Odkazy: Polák [8].

Kvadratická funkce

$$f: y = ax^2 + bx + c = a(x-x_0)^2 + y_0, \qquad a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \quad x_0 = -\tfrac{b}{2a},\ y_0 = c - \tfrac{b^2}{4a},$$

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \begin{cases} \langle y_0, +\infty) & \text{pro } a > 0, \\ (-\infty, y_0\rangle & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



Obr. 1.2: Grafy kvadratických funkcí

Vlastnosti:

i) grafem kvadratické funkce je *parabola*,

ii) kvadratická funkce není omezená,

iii) kvadratická funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,

iv) pro $a > 0$ je f *ostře konvexní*, *omezená zdola* a není omezená shora,

v) pro $a < 0$ je f *ostře konkávní* a *omezená shora* a není omezená zdola,

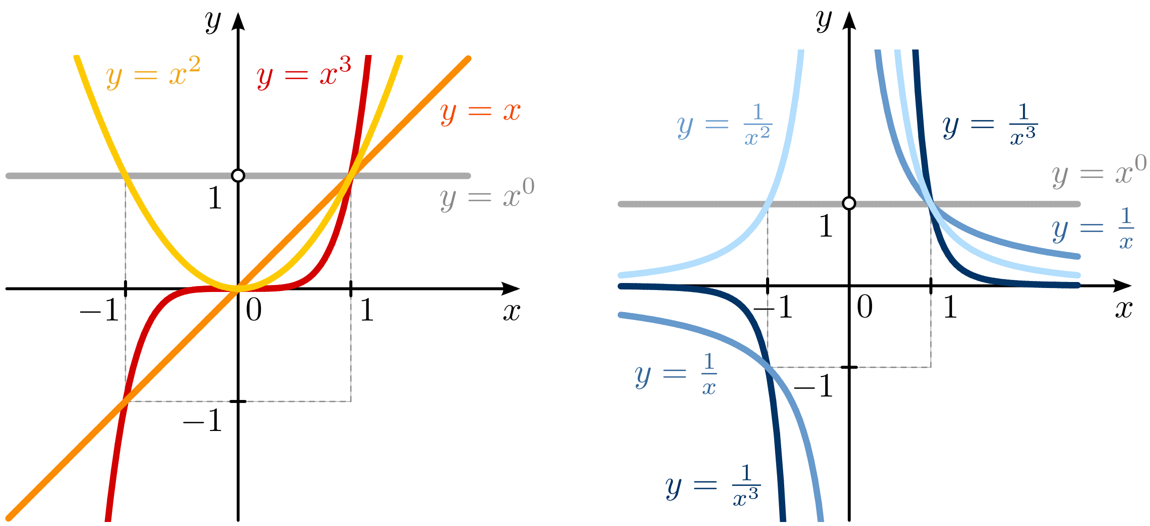
vi) pro $b = 0$ je f *sudá*.

Odkazy: Polák [8].

Mocninná funkce s celým exponentem

$$f : y = x^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$D(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n \geq 1, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } n \leq 0, \end{cases} \quad H(f) = \begin{cases} \{1\} & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{R} & \text{pro } n > 0 \text{ liché}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } n < 0 \text{ liché}, \\ \langle 0, +\infty) & \text{pro } n > 0 \text{ sudé}, \\ (0, +\infty) & \text{pro } n < 0 \text{ sudé}. \end{cases}$$



Obr. 1.3: Grafy mocninných funkcí s celým exponentem

Vlastnosti:

i) grafem mocninné funkce je pro $n = 1$ *přímka*, pro $n \geq 2$ *parabola* n-tého stupně, pro $n = 0$ část *přímky* a pro $n \leq -1$ *hyperbola* stupně $-n + 1$,

ii) mocninná funkce je *lichá* pro n liché a *sudá* pro n sudé,

iii) mocninná funkce je *spojitá* a *diferencovatelná* na $D(f)$,

iv) pro n liché f není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum, je *ostře rostoucí* pro $n \geq 1$ liché a *ostře klesající* na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$ pro $n \leq -1$ liché,

v) pro $n \geq 2$ sudé je f *zdola omezená*, není omezená shora, nemá maximum, je *ostře rostoucí* na $\langle 0, +\infty)$ a *ostře klesající* na $(-\infty, 0\rangle$, má *ostré minimum* v bodě $x = 0$,

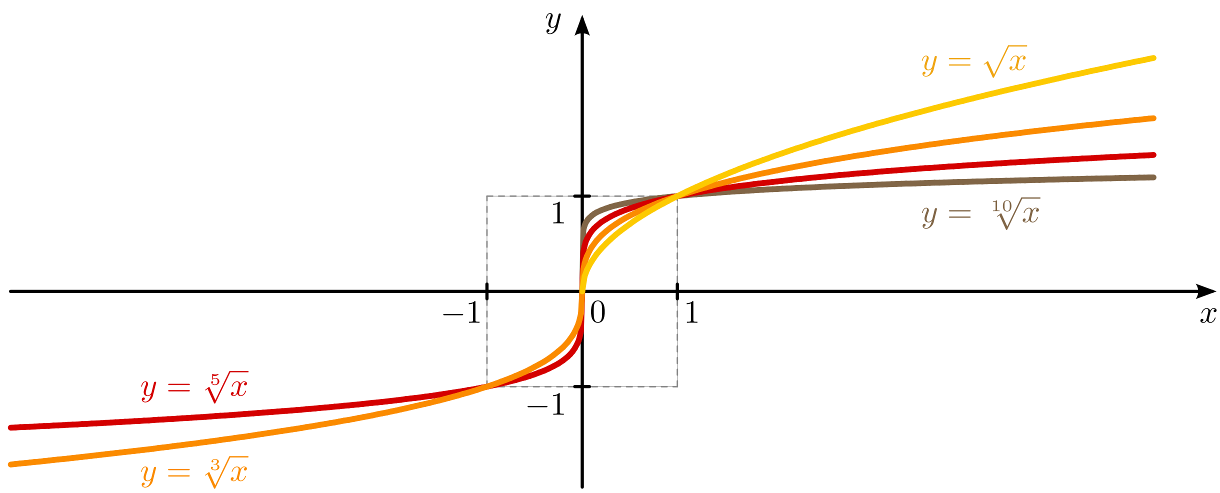
vi) pro $n \leq -2$ sudé je f *zdola omezená*, není omezená shora, nemá maximum ani minimum, je *ostře rostoucí* na $(-\infty, 0)$ a *ostře klesající* na $(0, +\infty)$.

Odkazy: Polák [8].

Funkce n-tá odmocnina

je funkce *inverzní* k části mocninné funkce s přirozeným mocnitelem

$$f : y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad D(f) = H(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \langle 0, +\infty) & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$



Obr. 1.4: Graf druhé, třetí, páté a desáté odmocniny

Vlastnosti:

i) n-tá odmocnina je *prostá*, *ostře rostoucí* a není omezená,

ii) n-tá odmocnina je *spojitá* na $D(f)$ a *diferencovatelná* na $D(f) \setminus \{0\}$,

iii) pro n liché je f *lichá*, není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum,

iv) pro n sudé je f *omezená zdola*, není omezená shora, nemá maximum a má *ostré minimum* v bodě $x = 0$,

v) f není lipschitzovsky spojitá na okolí bodu 0.

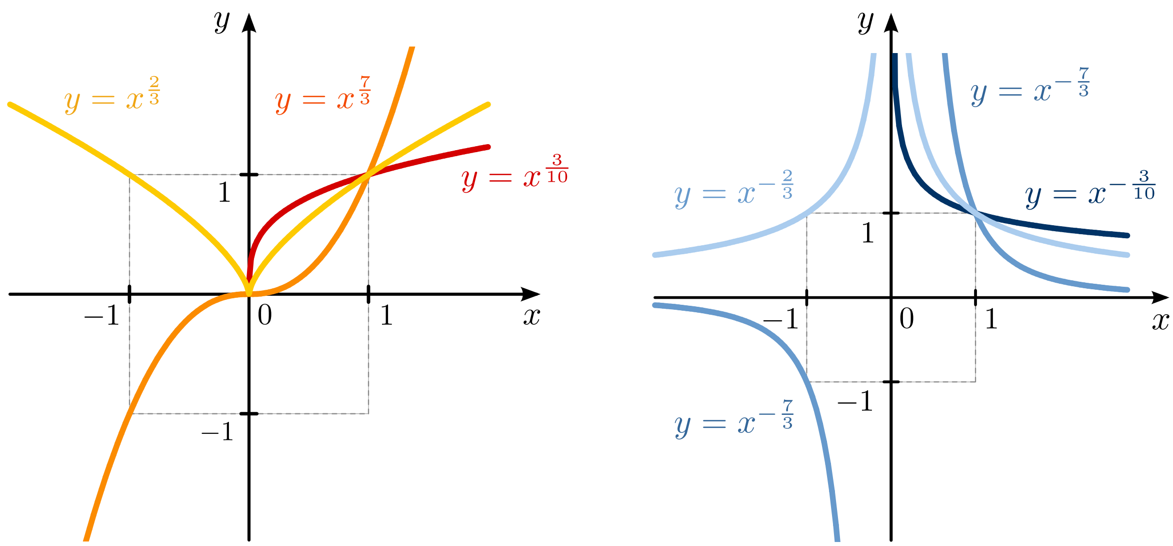
Vztahy:

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})^n &= \sqrt[n]{x^n} = x && \text{pro } x \in \mathbb{R} \text{ a } n \text{ liché}, \\ (\sqrt[n]{x})^n &= \sqrt[n]{x^n} = x && \text{pro } x \in \langle 0, +\infty) \text{ a } n \text{ sudé}. \end{aligned}$$

Odkazy: Polák [8].

Mocninná funkce s racionálním exponentem

$$f : y = x^{\frac{m}{n}}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad D(f) = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } \frac{m}{n} > 0,\ n \text{ sudé}, \\ \mathbb{R} & \text{pro } \frac{m}{n} > 0,\ n \text{ liché}, \\ (0, +\infty) & \text{pro } \frac{m}{n} < 0,\ n \text{ sudé}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } \frac{m}{n} < 0,\ n \text{ liché}. \end{cases}$$



Obr. 1.5: Grafy mocninných funkcí s racionálním exponentem

Vlastnosti:

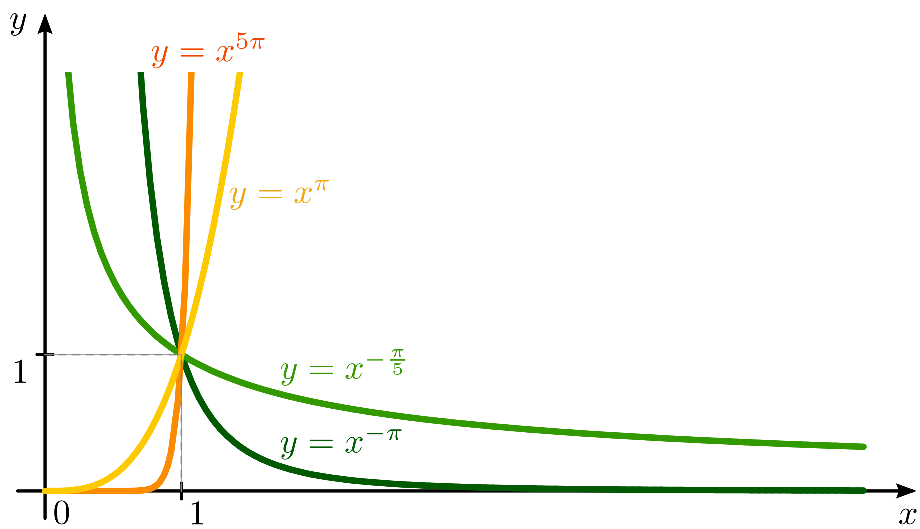
i) mocninná funkce je *lichá* pro m a n liché a je *sudá* pro m sudé a n liché,

ii) mocninná funkce je *spojitá* na $D(f)$ a *diferencovatelná* na $D(f) \setminus \{0\}$.

Odkazy: Spanier [7].

Mocninná funkce s obecným reálným exponentem

$$f : y = x^a, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \qquad D(f) = H(f) = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } a > 0, \\ (0, +\infty) & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



Obr. 1.6: Grafy mocninných funkcí s iracionálním exponentem

Vlastnosti:

i) mocninná funkce je *prostá* a *ostře monotónní*,

ii) mocninná funkce není omezená,

iii) mocninná funkce je *spojitá* na $D(f)$ a *diferencovatelná* na $(0, +\infty)$,

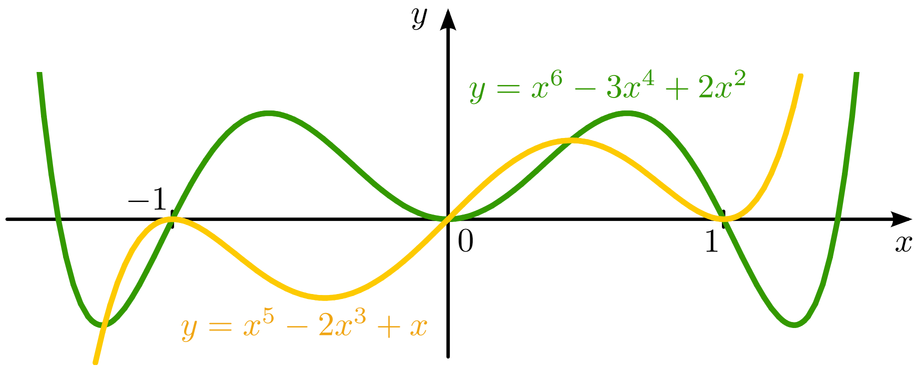
iv) f je *ostře rostoucí* pro $a > 0$ a *ostře klesající* pro $a < 0$,

v) f je *zdola omezená*, není shora omezená, nemá maximum, pro $a < 0$ nemá minimum a pro $a > 0$ má ostré minimum v bodě $x = 0$.

Odkazy: Spanier [7].

Polynomická funkce n-tého stupně

$$P: y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$



Obr. 1.7: Grafy polynomických funkcí

Vlastnosti:

i) polynomická funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,

ii) polynomická funkce stupně $n \geq 1$ není omezená,

iii) podle **základní věty algebry** má každá algebraická rovnice $P(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen,

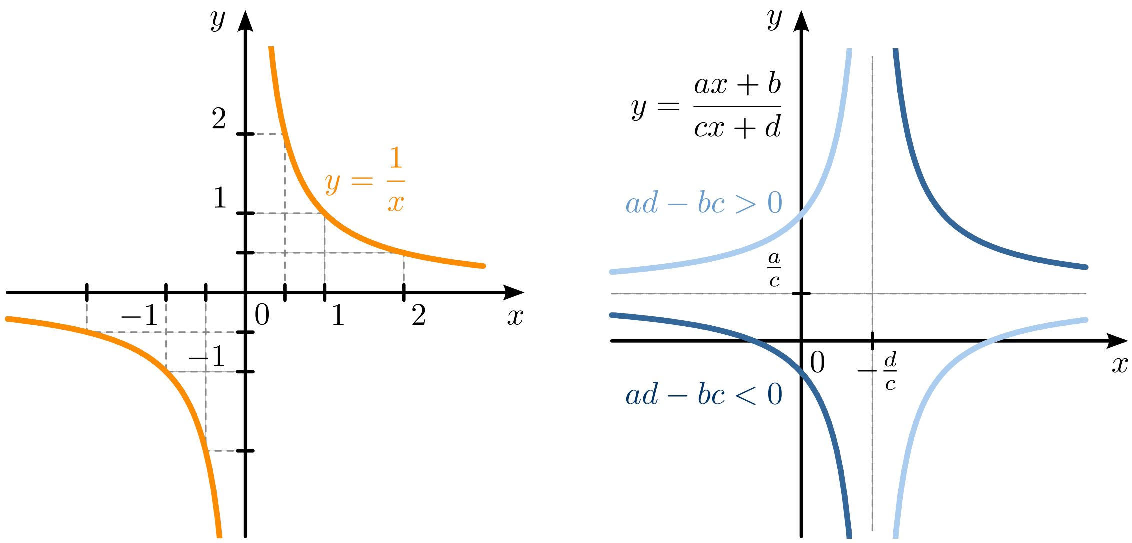
iv) každá algebraická rovnice $P(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ má v oboru komplexních čísel právě n kořenů (se započítáním násobnosti),

v) podle **Descartovy věty** je počet kladných kořenů algebraické rovnice $P(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ buď roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_0, a_1, \ldots, a_n$, nebo je o sudý počet menší.

Odkazy: Spanier [7].

Lineární lomená funkce

$$f: y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ c \neq 0,\ ad-bc \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{d}{c}\right\}, \quad H(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{a}{c}\right\}.$$



Obr. 1.8: Graf nepřímé úměrnosti (pro $k = 1$) a lineární lomené funkce

Vlastnosti:

i) grafem lineárně lomené funkce je *rovnoosá hyperbola* se středem v bodě $\left[-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right]$,

ii) lineárně lomená funkce je *prostá*,

iii) lineárně lomená funkce je *spojitá* a *diferencovatelná* na $D(f)$,

iv) f není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum,

v) pro $ad - bc < 0$ je f *ostře klesající* na $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ a na $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$,

vi) pro $ad - bc > 0$ je f *ostře rostoucí* na $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ a na $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$,

vii) f není monotónní na $D(f) = \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$,

viii) f není spojitá na $\mathbb{R}$, v bodě $x = -\frac{d}{c}$ má *bod nespojitosti 2. druhu*,

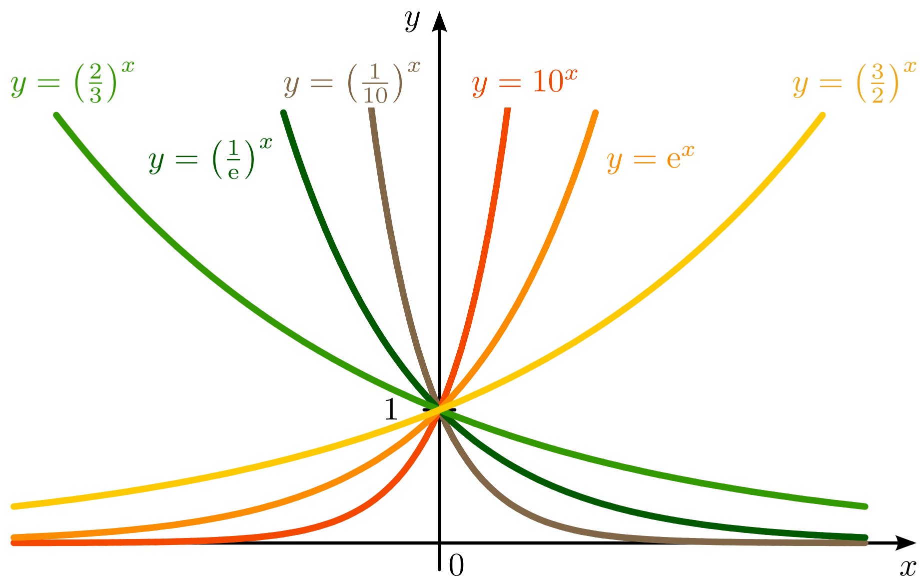
$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}^-} f(x) = \mp\infty \quad \text{pro } ad - bc \lesseqgtr 0, \qquad \lim_{x \to -\frac{d}{c}^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{pro } ad - bc \lesseqgtr 0,$$

ix) pro $a = d = 0$, $b \neq 0$, $k = \frac{b}{c}$ je $f: y = \frac{k}{x}$, jež se nazývá **nepřímá úměrnost**; je to *lichá funkce*.

Odkazy: Polák [8].

Exponenciální funkce

$$
\begin{array}{llll}
f:\ y = a^x, & a>0,\ a\neq 1, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=(0,+\infty),\\
f:\ y = \mathrm{e}^x, & \mathrm{e}\ \text{je Eulerovo číslo}, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=(0,+\infty).
\end{array}
$$



Obr. 1.9: Grafy exponenciálních funkcí

Vlastnosti:

i) graf exponenciální funkce je *exponenciála*,

ii) exponenciální funkce je *prostá*,

iii) exponenciální funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,

iv) f je *ostře rostoucí* pro $a > 0$ a *ostře klesající* pro $a < 0$,

v) f je *zdola omezená* a není omezená shora, nemá maximum ani minimum,

vi) e je **Eulerovo číslo**:

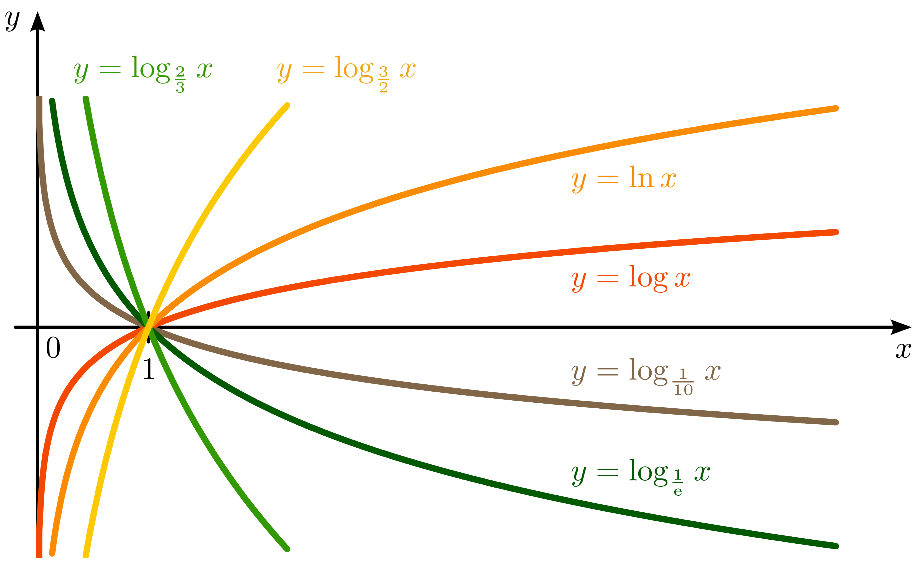
$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = 2.71828182845904523536028747135266249775724709\ldots$$

Odkazy: Polák [8].

Logaritmická funkce

je funkce *inverzní* k exponenciální funkci

$$
\begin{array}{llll}
f:\ y = \log_a x, & a > 0,\ a \neq 1, & D(f) = (0, +\infty), & H(f) = \mathbb{R}, \\
f:\ y = \log x = \log_{10} x, & & D(f) = (0, +\infty), & H(f) = \mathbb{R}, \\
f:\ y = \ln x = \log_{\mathrm{e}} x, & \mathrm{e} = 2.71828182\ldots & D(f) = (0, +\infty), & H(f) = \mathbb{R}.
\end{array}
$$



Obr. 1.10: Grafy logaritmických funkcí

Vlastnosti:

i) graf logaritmické funkce je *logaritmická křivka*,

ii) logaritmická funkce je *prostá*,

iii) logaritmická funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,

iv) f je *ostře rostoucí* pro $a > 1$ a *ostře klesající* pro $0 < a < 1$,

v) f není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum.

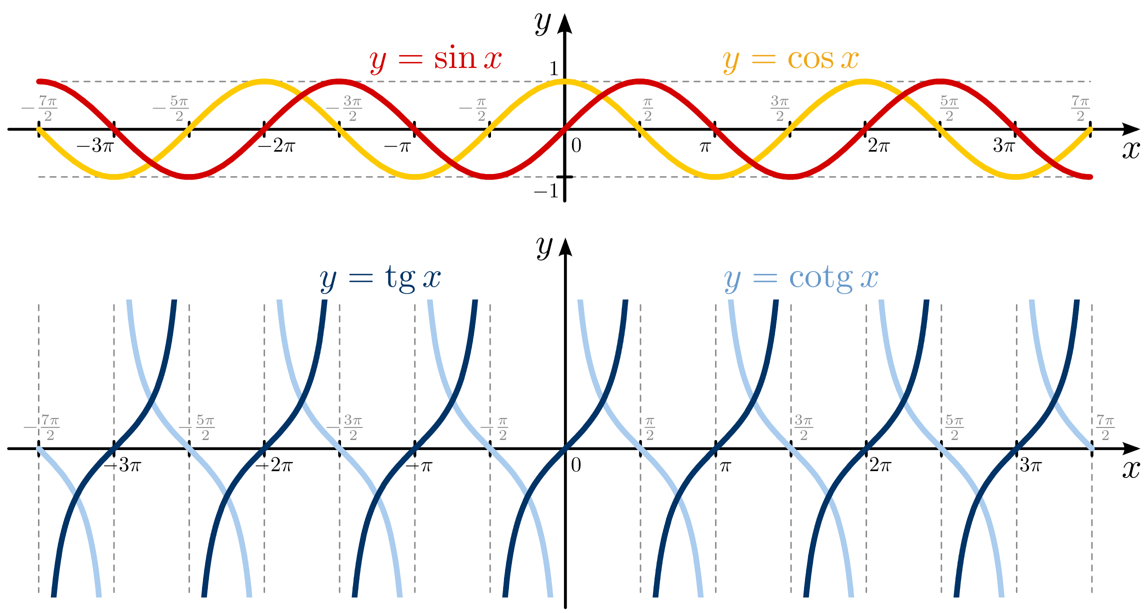
Vztahy:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{pro } x > 0, \qquad \log_a a^x = x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Odkazy: Polák [8].

Goniometrické funkce

$$
\begin{array}{llll}
f: \ y = \sin x, & & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = \langle -1, 1 \rangle, \\
f: \ y = \cos x, & & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = \langle -1, 1 \rangle, \\
f: \ y = \operatorname{tg} x & = \dfrac{\sin x}{\cos x}, & D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}, & H(f) = \mathbb{R}, \\
f: \ y = \operatorname{cotg} x & = \dfrac{\cos x}{\sin x}, & D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, & H(f) = \mathbb{R}.
\end{array}
$$



Obr. 1.11: Grafy goniometrických funkcí

Vlastnosti:

i) funkce sinus, tangens a kotangens jsou *liché* funkce, kosinus je funkce *sudá*,

ii) funkce sinus a kosinus jsou *omezené* 2π–*periodické* funkce,
funkce tangens a kotangens jsou *neomezené* π–*periodické* funkce,

iii) všechny goniometrické funkce jsou *spojité* na $D(f)$.

Vztahy pro $x, y \in \mathbb{R}$:

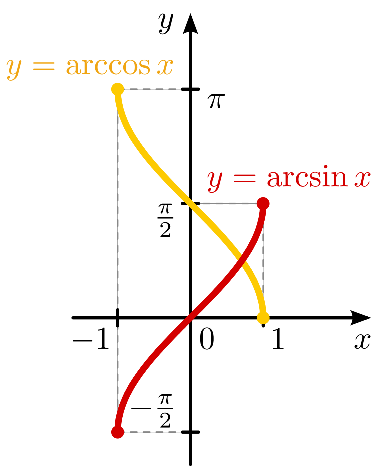
$$
\begin{array}{rcl}
\sin(2x) & = & 2 \sin x \cos x, \\
\cos(2x) & = & \cos^2 x - \sin^2 x, \\
\sin(x \pm y) & = & \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\
\cos(x \pm y) & = & \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\sin x + \sin y & = & 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\
\sin x - \sin y & = & 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \\
\cos x + \cos y & = & 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\
\cos x - \cos y & = & -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.
\end{array}
$$

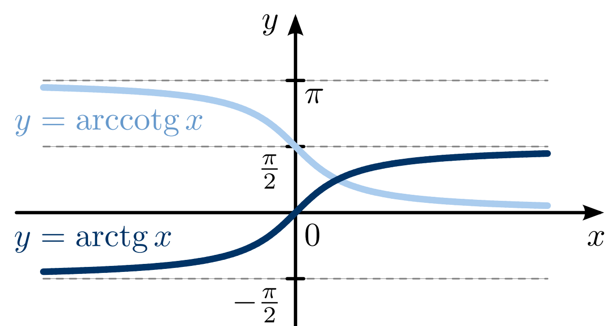
Odkazy: Polák [8].

Cyklometrické funkce

jsou funkce *inverzní* k částem goniometrických funkcí

$$
\begin{array}{lll}
f:\ y=\arcsin x, & D(f)=\langle -1,1\rangle, & H(f)=\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle,\\
f:\ y=\arccos x, & D(f)=\langle -1,1\rangle, & H(f)=\langle 0,\pi\rangle,\\
f:\ y=\operatorname{arctg} x, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\\
f:\ y=\operatorname{arccotg} x, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=(0,\pi).
\end{array}
$$





Obr. 1.12: Grafy cyklometrických funkcí

Vlastnosti:

i) funkce arkussinus a arkustangens jsou *liché* funkce,

$$
\begin{array}{rcl}
\arcsin(-x) &=& -\arcsin x \quad \text{a} \quad \arccos(-x) = \pi-\arccos x \quad \text{pro } x\in\langle -1,1\rangle,\\
\operatorname{arctg}(-x) &=& -\operatorname{arctg} x \quad \text{a} \quad \operatorname{arccotg}(-x) = \pi-\operatorname{arccotg} x \quad \text{pro } x\in\mathbb{R},
\end{array}
$$

ii) všechny cyklometrické funkce jsou *spojité* na $D(f)$.

Vztahy:

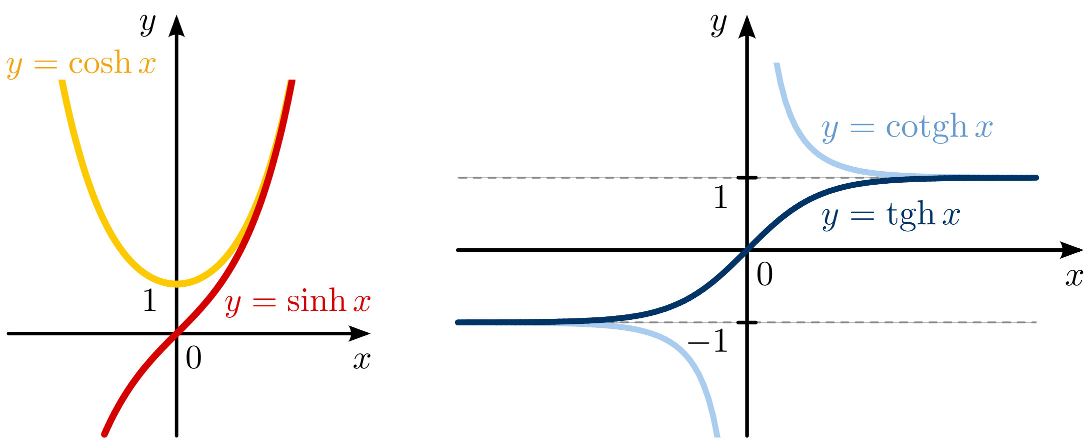
$$
\begin{array}{rcll rcll}
\sin(\arcsin x) &=& x & \text{pro } x\in\langle -1,1\rangle, & \cos(\arccos x) &=& x & \text{pro } x\in\langle -1,1\rangle,\\
\arcsin(\sin x) &=& x & \text{pro } x\in\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle, & \arccos(\cos x) &=& x & \text{pro } x\in\langle 0,\pi\rangle,\\
\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &=& x & \text{pro } x\in\mathbb{R}, & \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) &=& x & \text{pro } x\in\mathbb{R},\\
\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) &=& x & \text{pro } x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), & \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) &=& x & \text{pro } x\in(0,\pi),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll rcll}
\arcsin x+\arccos x &=& \frac{\pi}{2} & \text{pro } x\in\langle -1,1\rangle, & \operatorname{arctg} x &=& \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} & \text{pro } x>0,\\
\operatorname{arctg} x+\operatorname{arccotg} x &=& \frac{\pi}{2} & \text{pro } x\in\mathbb{R}. & & & &
\end{array}
$$

Odkazy: Polák [8].

Hyperbolické funkce

$$
\begin{aligned}
&f:\ y=\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, && D(f)=\mathbb{R}, && H(f)=\mathbb{R},\\
&f:\ y=\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, && D(f)=\mathbb{R}, && H(f)=\langle 1,+\infty),\\
&f:\ y=\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, && D(f)=\mathbb{R}, && H(f)=(-1,1),\\
&f:\ y=\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, && D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}, && H(f)=\mathbb{R}\setminus\langle -1,1\rangle.
\end{aligned}
$$



Obr. 1.13: Grafy hyperbolických funkcí

Vlastnosti:

i) funkce hyperbolický sinus, hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens jsou *liché* funkce, hyperbolický kosinus je funkce *sudá*,

ii) všechny hyperbolické funkce jsou *spojité* na $D(f)$,

Vztahy pro $x, y \in \mathbb{R}$:

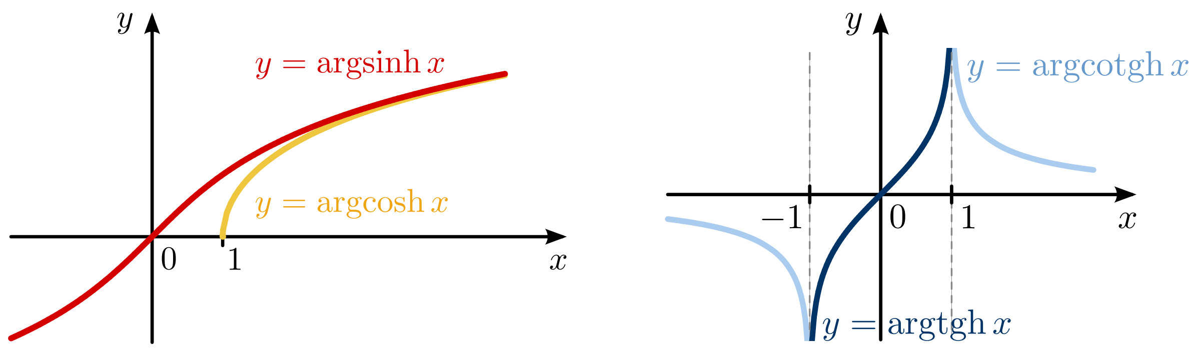
$$
\begin{aligned}
\sinh(2x) &= 2\sinh x\cosh x, & \sinh x+\sinh y &= 2\sinh\tfrac{x+y}{2}\cosh\tfrac{x-y}{2},\\
\cosh(2x) &= \cosh^2 x+\sinh^2 x, & \sinh x-\sinh y &= 2\cosh\tfrac{x+y}{2}\sinh\tfrac{x-y}{2},\\
\sinh(x\pm y) &= \sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y, & \cosh x+\cosh y &= 2\cosh\tfrac{x+y}{2}\cosh\tfrac{x-y}{2},\\
\cosh(x\pm y) &= \cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y, & \cosh x-\cosh y &= 2\sinh\tfrac{x+y}{2}\sinh\tfrac{x-y}{2}.
\end{aligned}
$$

Odkazy: Polák [8].

Hyperbolometrické funkce

jsou funkce *inverzní* k částem hyperbolických funkcí

$$
\begin{array}{lll}
f:\ y = \operatorname{argsinh} x, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = \mathbb{R}, \\
f:\ y = \operatorname{argcosh} x, & D(f) = \langle 1, +\infty), & H(f) = \langle 0, +\infty), \\
f:\ y = \operatorname{argtgh} x, & D(f) = (-1, 1), & H(f) = \mathbb{R}, \\
f:\ y = \operatorname{argcotgh} x, & D(f) = \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle, & H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.
\end{array}
$$



Obr. 1.14: Grafy hyperbolometrických funkcí

Vlastnosti:

i) funkce argument hyperbolického sinu, argument hyperbolického tangens a argument hyperbolického kotangens jsou *liché* funkce,

ii) všechny hyperbolometrické funkce jsou *spojité* na $D(f)$.

Vztahy:

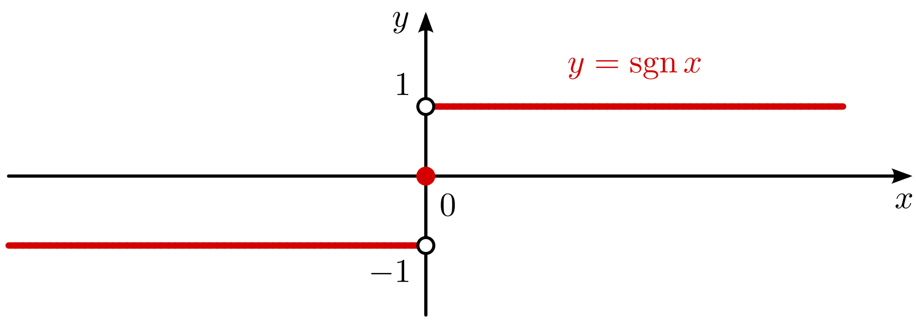
$$
\begin{array}{rll@{\qquad}rll}
\sinh(\operatorname{argsinh} x) = x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, & & \cosh(\operatorname{argcosh} x) = x & \text{pro } x \geq 1, \\
\operatorname{argsinh}(\sinh x) = x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, & & \operatorname{argcosh}(\cosh x) = x & \text{pro } x \geq 0, \\
\operatorname{tgh}(\operatorname{argtgh} x) = x & \text{pro } x \in (-1, 1), & & \operatorname{cotgh}(\operatorname{argcotgh} x) = x & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle, \\
\operatorname{argtgh}(\operatorname{tgh} x) = x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, & & \operatorname{argcotgh}(\operatorname{cotgh} x) = x & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
\operatorname{argsinh} x & = & \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) & \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{argcosh} x & = & \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & \text{pro } x \geq 1, \\
\operatorname{argtgh} x & = & \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} & \text{pro } x \in (-1, 1), \\
\operatorname{argcotgh} x & = & \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle, \\
\operatorname{argtgh} x & = & \operatorname{argcotgh} \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (-1, 0) \cup (0, 1).
\end{array}
$$

Odkazy: Spanier [7].

Funkce signum (znaménková funkce)

$$f : y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \{-1, 0, 1\}.$$



Obr. 1.15: Graf znaménkové funkce

Vlastnosti:

i) funkce signum je *lichá* funkce,

ii) funkce signum je *rostoucí* funkce,

iii) funkce signum je *spojitá* v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

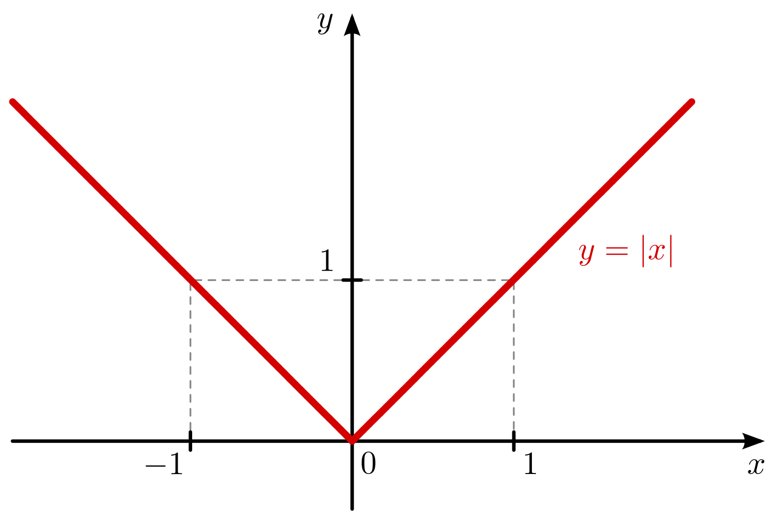
iv) funkce signum není spojitá v bodě $x = 0$, v tomto bodě má *bod nespojitosti 1. druhu* se skokem 2

$$\begin{aligned} f(0-) &= \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1, \\ f(0+) &= \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1. \end{aligned}$$

Odkazy: Polák [8].

Funkce absolutní hodnota

$$f : y = |x| = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ x & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$



Obr. 1.16: Graf funkce absolutní hodnota

Vlastnosti:

i) funkce absolutní hodnota je *sudá* funkce,

ii) funkce absolutní hodnota je *konvexní* funkce,

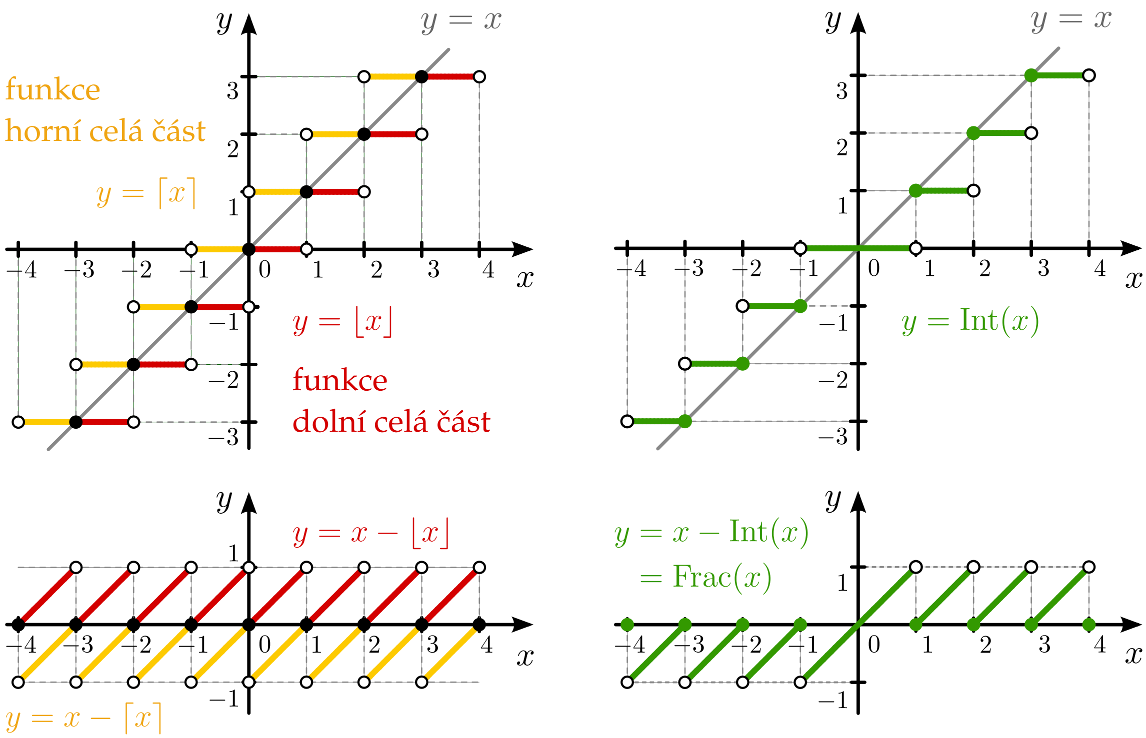
iii) funkce absolutní hodnota je *spojitá* na $D(f)$,

iv) funkce absolutní hodnota nemá derivaci v bodě $x = 0$ (není diferencovatelná v bodě $x = 0$), jelikož má v tomto bodě různé jednostranné derivace

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1, \\ f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1. \end{aligned}$$

Funkce horní a dolní celá část

$$f: y = \mathrm{Int}(x) = \begin{cases} \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z},\ k \geq x\} & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z},\ k \leq x\} & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \mathbb{Z}.$$



Obr. 1.17: Grafy funkcí horní a dolní celá část, funkce Int a jejich zbytků

Vlastnosti a poznámky:

i) funkce horní a dolní celá část a funkce Int jsou funkce *rostoucí*,

ii) funkce Int a Frac : $y = x - \mathrm{Int}(x)$ jsou funkce *liché*,

iii) funkce dolní celá část $y = \lfloor x \rfloor$ bývá často uváděna jako celá část a značena $y = [x]$.

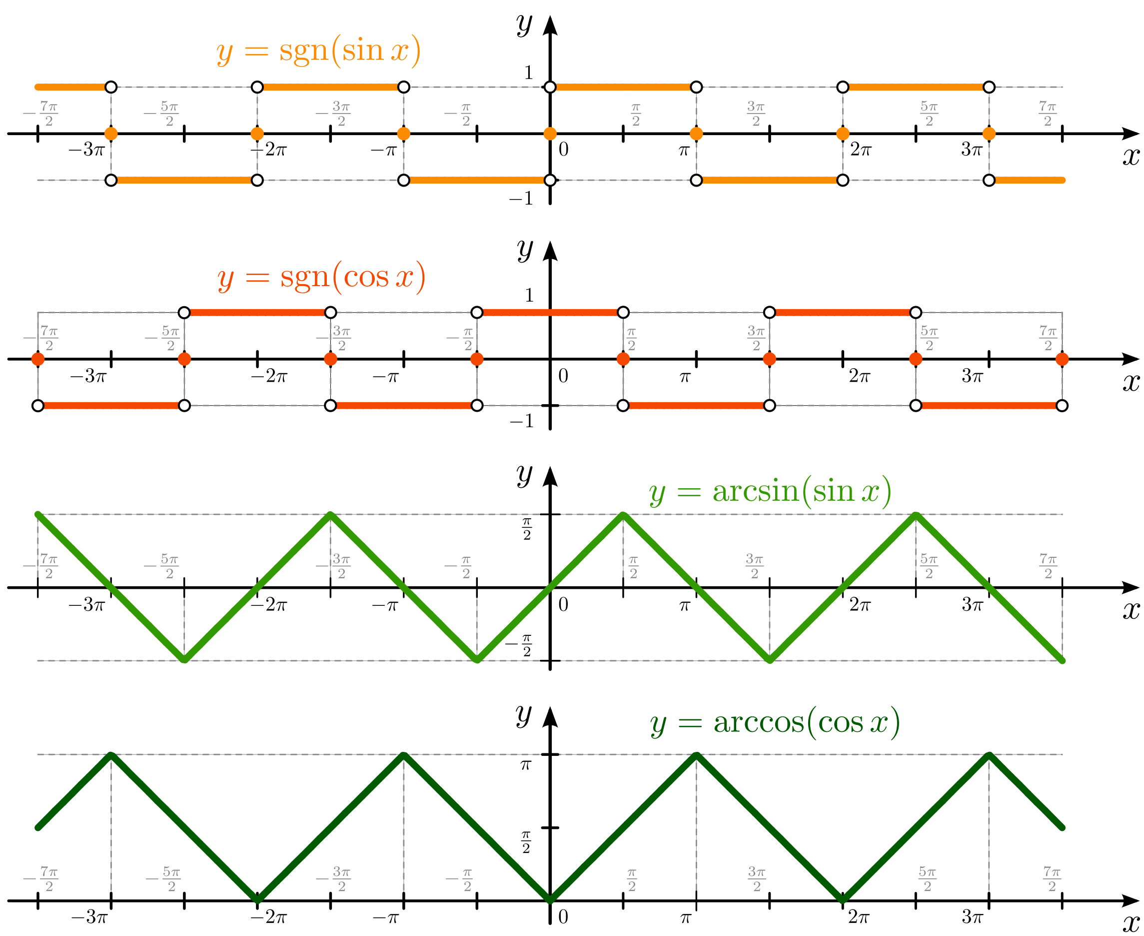
Vztahy:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{Z}: \quad \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor = \mathrm{Int}(x) &= x, \\ \forall x \in \mathbb{R}: \quad \mathrm{Int}(x) + \mathrm{Frac}(x) &= x. \end{aligned}$$

Odkazy: Polák [8], Spanier [7], Knuth [5].

Některé periodické funkce

$$
\begin{aligned}
&f_1:\ y=\operatorname{sgn}(\sin x), && D(f_1)=\mathbb{R}, && H(f_1)=\{-1,0,1\},\\
&f_2:\ y=\operatorname{sgn}(\cos x), && D(f_2)=\mathbb{R}, && H(f_2)=\{-1,0,1\},\\
&f_3:\ y=\arcsin(\sin x), && D(f_3)=\mathbb{R}, && H(f_3)=\langle-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\rangle,\\
&f_4:\ y=\arccos(\cos x), && D(f_4)=\mathbb{R}, && H(f_4)=\langle 0,\pi\rangle.
\end{aligned}
$$



Obr. 1.18: Grafy periodických funkcí f_1, f_2, f_3 a f_4

Vlastnosti:

i) funkce f_1, f_2, f_3 a f_4 jsou *omezené* 2π*-periodické* funkce,

ii) funkce f_1 a f_2 jsou *po částech spojité* a *po částech hladké* funkce,

iii) funkce f_3 a f_4 jsou *spojité* a *po částech hladké* funkce.