2. týden — spočetné a nespočetné množiny, supremum a infimum číselných množin

---

Příklad 1. Rozhodněte, zda je množina A konečná, spočetná či nespočetná:

1) $A = (1, 5)$,
2) $A = (1, 5) \cap \mathbb{N}$,
3) $A = \mathbb{N}$,
4) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$,
5) $A = \mathbb{Z}$,
6) $A = (1, 5) \cap \mathbb{Z}$,
7) $A = (1, 5) \cap \mathbb{Q}$,
8) $A = (1, 5) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$,
9) $A = \mathbb{N} - (42, +\infty)$,
10) $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^{11} + x = 0\}$.

Příklad 2. Určete $\min A$, $\max A$, $\inf A$, $\sup A$ a rozhodněte, zda je množina A omezená:

1) $A = (8, 11\rangle$,
2) $A = (-\infty, 1)$,
3) $A = \{5, 1, 2, 8, 11, 3\}$,
4) $A = \mathbb{N}$,
5) $A = \left\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$,
6) $A = \{0.8, 0.98, 0.998, 0.9998, \dots\}$,
7) $A = \left\{\frac{n}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\right\}$,
8) $A = \{1 - x^2 : \ x \in \mathbb{R}\}$,
9) $A = \left\{\frac{p}{p+q} : \ p, q \in \mathbb{N}\right\}$,
10) $A = \{x \in (0, +\infty) : \ \sin x = 1\}$.

Příklad 3. Určete $\min A$, $\max A$, $\inf A$, $\sup A$ a rozhodněte, zda je množina A omezená:

1) $A = \{x \in \mathbb{N} : x \geq -8 \land x < 12\}$,
2) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq -8 \land x < 12\}$,
3) $A = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x \geq -8 \land x < 12\}$,
4) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq -8 \lor x > 12\}$,
5) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq -8 \lor x < 12\}$,
6) $A = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x \geq -8 \lor x > 12\}$.

Příklad 4. Uveďte příklad množiny, pro kterou platí:

1) $\sup A = 3$ a A není omezená zdola,
2) $\inf A = -4$ a A není omezená zdola,
3) $\inf A = 8$ a $\min A$ neexistuje,
4) $\min A = 2$ a A je spočetná.

Příklad 5. Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) omezená, zda je omezená zdola, zda je omezená shora. Své rozhodnutí zdůvodněte. Dále se pokuste načrtnout graf (a_n).

1) $a_n = \dfrac{1}{n}$,

2) $a_n = 2^n$,

3) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$,

4) $a_n = n^2 - 7n + 6$,

5) $a_n = 2^{-n}$,

6) $a_n = 3 - (-1)^n$.