

3. týden — omezenost, monotonie a limita posloupnosti

Příklad 1. Ukažte, že posloupnost (a_n) je monotónní:

1) $a_n = \sqrt{n+3},$

4) $a_n = 8^n + 4,$

2) $a_n = \frac{-6}{5n+1},$

5) $a_n = (n+9)!,$

3) $a_n = \frac{n+9}{n+7},$

6) $a_n = \frac{3^n}{20n}.$

Příklad 2. Z definice limity ukažte, že platí:

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} = 1,$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{8} = 1,$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty,$

4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty.$

Příklad 3. Vypočtěte limitu

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{2+n} - \frac{n^2}{8+n} \right),$

4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! - (n+3)!}{8(n+2)!},$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{7n-1}),$

5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + (-1)^n}{n+2},$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+2} - 7^{n+2}}{2^{n+3} + 7^{n+3}},$

6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2 + \sin n}.$

Příklad 4. Rozhodněte, zda je posloupnost (a_n) omezená a zda je monotónní. Určete její limitu, minimum, maximum, infimum a supremum. Všechna svá rozhodnutí a odpovědi pečlivě zdůvodněte. Nakonec načrtněte graf posloupnosti (a_n) .

1) $a_n = \frac{-9n}{3n+7},$

3) $a_n = 5^n - 60n,$

2) $a_n = -n^2 + 20n - 6,$

4) $a_n = \frac{5^n}{5n}.$

Příklad 5. Uveďte příklad posloupnosti (a_n) (napište předpis pro n -tý člen a načrtněte graf), pro kterou platí

- 1) (a_n) je rostoucí a $\sup(a_n) = 11$,
- 2) (a_n) není klesající a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf(a_n)$,
- 3) $\inf(a_n) = -\infty$ a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 5$,
- 4) $\sup(a_n) = +\infty$ a (a_n) není divergentní k $+\infty$.