Definice 2.1. **Posloupnost reálných čísel** je zobrazení s definičním oborem $\mathbb{N}$ a oborem hodnot $H \subset \mathbb{R}$, tj. každému indexu $n \in \mathbb{N}$ je přiřazen právě jeden člen $a_n \in \mathbb{R}$.
Možné zápisy pro posloupnost:

$$(a_n), \quad (a_n)_{n=1}^{+\infty}, \quad (a_1, a_2, a_3, \dots), \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Definice 2.2. Mějme dánu posloupnost (a_n) s oborem hodnot $H \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost (a_n) je **omezená zdola** (**omezená shora**, **omezená**), pokud je množina H omezená zdola (omezená shora, omezená).

Definice 2.3. Mějme dánu posloupnost (a_n) s oborem hodnot $H \subset \mathbb{R}$. **Minimem** (**maximem**, **infimem**, **supremem**) **posloupnosti** (a_n) rozumíme minimum (maximum, infimum, supremum) množiny H.

Věta 2.1. Mějme dánu posloupnost (a_n).

a) Posloupnost (a_n) je omezená zdola právě tehdy, když platí $\exists\, d \in \mathbb{R} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}:\; d \le a_n$.

b) Posloupnost (a_n) je omezená shora právě tehdy, když platí $\exists\, h \in \mathbb{R} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}:\; a_n \le h$.

c) Posloupnost (a_n) je omezená právě tehdy, když platí $\exists\, c > 0 \; \forall\, n \in \mathbb{N}:\; |a_n| \le c$.

Definice 2.4. Řekneme, že

a) posloupnost (a_n) je **rostoucí**, pokud $\forall\, n \in \mathbb{N}:\; a_n \le a_{n+1}$,

b) posloupnost (a_n) je **klesající**, pokud $\forall\, n \in \mathbb{N}:\; a_n \ge a_{n+1}$,

c) posloupnost (a_n) je **ostře rostoucí**, pokud $\forall\, n \in \mathbb{N}:\; a_n < a_{n+1}$,

d) posloupnost (a_n) je **ostře klesající**, pokud $\forall\, n \in \mathbb{N}:\; a_n > a_{n+1}$.

Řekneme, že posloupnost je **monotónní**, pokud je rostoucí nebo klesající.

Řekneme, že posloupnost je **ostře monotónní**, pokud je ostře rostoucí nebo ostře klesající.

Definice 2.5. Řekneme, že

a) posloupnost (a_n) má (**vlastní**) **limitu** $a \in \mathbb{R}$, pokud platí

$$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall\, n \in \mathbb{N}:\; n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{(píšeme } \lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad \text{nebo} \quad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\text{)},$$

b) posloupnost (a_n) má (**nevlastní**) **limitu** $+\infty$, pokud platí

$$\forall\, h > 0 \; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall\, n \in \mathbb{N}:\; n > n_0 \;\Rightarrow\; h < a_n \qquad \text{(píšeme } \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \text{nebo} \quad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty\text{)},$$

c) posloupnost (a_n) má (**nevlastní**) **limitu** $-\infty$, pokud platí

$$\forall\, d < 0 \; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall\, n \in \mathbb{N}:\; n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n < d \qquad \text{(píšeme } \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad \text{nebo} \quad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty\text{)}.$$

Definice 2.6. Řekneme, že

a) posloupnost (a_n) je **konvergetní** v $\mathbb{R}$, pokud posloupnost (a_n) má vlastní limitu $a \in \mathbb{R}$,

b) posloupnost (a_n) je **divergentní** v $\mathbb{R}$, pokud posloupnost (a_n) není konvergetní v $\mathbb{R}$,

c) posloupnost (a_n) **diverguje** k $+\infty$, pokud posloupnost (a_n) má nevlastní limitu $+\infty$,

d) posloupnost (a_n) **diverguje** k $-\infty$, pokud posloupnost (a_n) má nevlastní limitu $-\infty$.

Věta 2.2 (jednoznačnost limity). Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice 2.7. Na množině $\mathbb{R}^*$ je sčítání, násobení a dělení definováno takto:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}: \ -\infty + x = x + (-\infty) = -\infty,$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}: \ +\infty + x = x + (+\infty) = +\infty,$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ x > 0: \ x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,$

d) $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ x < 0: \ x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty,$

e) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \ \dfrac{x}{\pm\infty} = 0.$

Poznámka. Operace sčítání, násobení a dělení nejsou definovány pro všechny dvojice z $\mathbb{R}^*$:

a) $(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty),$

b) $0 \cdot (+\infty), \quad (+\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0,$

c) $\dfrac{+\infty}{+\infty}, \quad \dfrac{-\infty}{-\infty}, \quad \dfrac{+\infty}{-\infty}, \quad \dfrac{-\infty}{+\infty},$

d) $\dfrac{x}{0}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$

Věta 2.3 (algebra limit). Nechť $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b \in \mathbb{R}^*$. Potom platí

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = a + b,$ pokud je pravá strana definována,

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$ pokud je pravá strana definována,

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b},$ pokud $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pokud je pravá strana definována.

Věta 2.4 (o sevření). Mějme dány posloupnosti (a_n), (b_n) a (c_n) a předpokládejme, že platí

a) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n \leq b_n \leq c_n$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a \in \mathbb{R}^*$.

Potom *sevřená* posloupnost (b_n) má také limitu a platí $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$.

Věta 2.5. Jestliže je posloupnost (a_n) omezená a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, potom $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Věta 2.6. Mějme dánu posloupnost (a_n).

a) Jestliže je posloupnost (a_n) konvergetní v $\mathbb{R}$, potom je posloupnost (a_n) omezená.

b) Jestliže posloupnost (a_n) diverguje k $+\infty$, potom je posloupnost (a_n) omezená zdola.

c) Jestliže posloupnost (a_n) diverguje k $-\infty$, potom je posloupnost (a_n) omezená shora.

Věta 2.7. Jestliže je posloupnost (a_n) omezená a monotónní, potom je posloupnost (a_n) konvergetní v $\mathbb{R}$.

Definice 2.8 (Eulerovo číslo). **Eulerovo číslo** e definujeme jako limitu posloupnosti:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Poznámka (limity některých posloupností).

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } |q| < 1, \\ 1 & \text{pro } q = 1, \\ +\infty & \text{pro } q > 1, \\ \nexists & \text{pro } q \leq -1, \end{cases}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n!} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, tj. $\ln n \ll n \ll \mathrm{e}^n \ll n! \ll n^n$,

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ pro $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$, tj. $\log_a n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$,

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$.