Definice 3.1. Mějme dánu posloupnost (a_n) reálných čísel.

Nekonečná řada je symbol $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, kterým označujeme výraz $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.

Posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je posloupnost (s_n), kde

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Čísla a_n jsou **členy řady**, čísla s_n jsou **částečné součty řady**. Pokud existuje limita $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}^*$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ má **součet** s a tuto skutečnost zapisujeme jako $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = s$.

Definice 3.2. Mějme dánu řadu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ a nechť (s_n) je její posloupnost částečných součtů. Řekneme, že

a) řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je **konvergentní**, pokud posloupnost (s_n) konverguje,

b) řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je **divergentní**, pokud posloupnost (s_n) diverguje,

c) řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ **diverguje k** $+\infty$ $(-\infty)$, pokud posloupnost (s_n) diverguje k $+\infty$ $(-\infty)$.

Poznámka (geometrická řada). Pro geometrickou řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{pro } q \neq 1, \\ n & \text{pro } q = 1, \end{cases} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} \begin{cases} = \dfrac{1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1, \\ = +\infty & \text{pro } q \geq 1, \\ \text{diverguje} & \text{pro } q \leq -1. \end{cases}$$

Věta 3.1. Je-li $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c, d \in \mathbb{R}$, potom platí

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (c \cdot a_n + d \cdot b_n) = c \cdot a + d \cdot b,$$

pokud je výraz $(c \cdot a + d \cdot b)$ definován v $\mathbb{R}^*$ (tj. pokud není neurčitým výrazem).

Věta 3.2 (nutná podmínka konvergence řady). Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní, potom $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.$

Poznámka. Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1.$

Pro přehlednost budeme v následujících kritériích používat zkracený zápis $\sum a_n$ pro $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum b_n$ pro $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Věta 3.3 (srovnávací kritérium). Mějme dány dvě řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ takové, že $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ 0 \leq a_n \leq b_n$.

a) Jestliže řada $\sum b_n$ konverguje, potom konverguje také řada $\sum a_n$.

b) Jestliže řada $\sum a_n$ diverguje, potom diverguje také řada $\sum b_n$.

Věta 3.4 (limitní srovnávací kritérium). Mějme dánu řadu $\sum a_n$ s nezápornými členy a řadu $\sum b_n$ s kladnými členy. Pokud existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0,$ potom platí:

a) Řada $\sum a_n$ konverguje právě tehdy, když řada $\sum b_n$ konverguje.

b) Řada $\sum a_n$ diverguje právě tehdy, když řada $\sum b_n$ diverguje.

Věta 3.5 (limitní d'Alembertovo kritérium).

Mějme dánu řadu $\sum a_n$ s kladnými členy a nechť existuje limita $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

a) Jestliže $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$ potom řada $\sum a_n$ konverguje.

b) Jestliže $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$ potom řada $\sum a_n$ diverguje.

Věta 3.6 (limitní Cauchyovo kritérium).

Mějme dánu řadu $\sum a_n$ s nezápornými členy a nechť existuje limita $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

a) Jestliže $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.

b) Jestliže $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom řada $\sum a_n$ diverguje.

Věta 3.7. Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konverguje, potom konverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Definice 3.3. Řekneme, že

a) řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konverguje,

b) řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je **relativně konvergentní**, pokud řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverguje.

Definice 3.4. Mějme dánu posloupnost (b_n) kladných čísel.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \dots$ se nazývá **alternující řada**.

Věta 3.8 (Leibnizovo kritérium). Mějme dánu posloupnost (b_n) takovou, že

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \; b_n > 0 \quad \text{a} \quad b_{n+1} \leq b_n.$$

Jestliže $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, potom alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n$ konverguje.