Definice 4.1. **Reálná funkce jedné reálné proměnné** je zobrazení f s definičním oborem $D \subset \mathbb{R}$ a oborem hodnot $H \subset \mathbb{R}$, tj. každému argumentu $x \in D$ je přiřazena právě jedna funkční hodnota $y = f(x) \in \mathbb{R}$.
Možné zápisy:

$f: \ D \to \mathbb{R}$ nebo $f: \ x \mapsto f(x), \ x \in D$ nebo $f: \ y = f(x), \ x \in D$ nebo $f = f(x)$.

Definice 4.2. Mějme dány dvě funkce f a g. Řekneme, že

a) funkce f a g jsou si **rovny**, pokud $D(f) = D(g)$ a pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$,

b) funkce f je **zúžením** (**restrikcí**) funkce g, pokud $D(f) \subset D(g)$ a pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$.

Definice 4.3. Mějme dány dvě funkce f a g se stejným definičním oborem D.

a) **Součtem funkcí** f a g rozumíme funkci $f + g$ definovanou jako $y = f(x) + g(x)$, $x \in D$.

b) **Rozdílem funkcí** f a g rozumíme funkci $f - g$ definovanou jako $y = f(x) - g(x)$, $x \in D$.

c) **Součinem funkcí** f a g rozumíme funkci $f \cdot g$ definovanou jako $y = f(x) \cdot g(x)$, $x \in D$.

d) **Podílem funkcí** f a g rozumíme funkci $\dfrac{f}{g}$ definovanou jako $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x \in D$, pokud $g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in D$.

Definice 4.4. Mějme dánu funkci f a množinu $M \subset D(f)$. Funkce f se nazývá

a) **rostoucí** na M, pokud $\forall\, x_1, x_2 \in M: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2)$,
b) **klesající** na M, pokud $\forall\, x_1, x_2 \in M: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \geq f(x_2)$,
c) **monotónní** na M, pokud je na M rostoucí nebo klesající,

d) **ostře rostoucí** na M, pokud $\forall\, x_1, x_2 \in M: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2)$,
e) **ostře klesající** na M, pokud $\forall\, x_1, x_2 \in M: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2)$,
f) **ostře monotónní** na M, pokud je na M ostře rostoucí nebo ostře klesající,

g) **sudá** na M, pokud $\forall\, x \in M: \ (-x) \in M$ a $\forall\, x \in M: \ f(-x) = f(x)$,
h) **lichá** na M, pokud $\forall\, x \in M: \ (-x) \in M$ a $\forall\, x \in M: \ f(-x) = -f(x)$,

i) **omezená zdola** na M, pokud $\exists\, d \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in M: \ d \leq f(x)$,
j) **omezená shora** na M, pokud $\exists\, h \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in M: \ f(x) \leq h$,
k) **omezená** na M, pokud $\exists\, c > 0\ \forall\, x \in M: \ |f(x)| \leq c$,

l) **prostá** na M, pokud $\forall\, x_1, x_2 \in M: \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)$,

m) **periodická** na M, pokud existuje $T > 0$ takové, že platí

$$(\ \forall\, x \in M: \ (x+T) \in M \ \wedge \ (x-T) \in M\ ) \quad \wedge \quad (\ \forall\, x \in M: \ f(x+T) = f(x)\ ).$$

Definice 4.5. Mějme dánu funkci f a interval $I \subset D(f)$. Funkce f se nazývá

a) **konvexní** na I, pokud $\forall\, x_1, x_2 \in I\ \forall\, \alpha \in \langle 0,1\rangle :\ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$,

b) **konkávní** na I, pokud $\forall\, x_1, x_2 \in I\ \forall\, \alpha \in \langle 0,1\rangle :\ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$,

c) **ostře konvexní** na I, pokud

$$\forall\, x_1, x_2 \in I\ \forall\, \alpha \in (0,1) :\ x_1 \ne x_2 \ \Rightarrow\ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),$$

d) **ostře konkávní** na I, pokud

$$\forall\, x_1, x_2 \in I\ \forall\, \alpha \in (0,1) :\ x_1 \ne x_2 \ \Rightarrow\ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Věta 4.1. Je-li funkce f ostře monotónní, potom je prostá.

Definice 4.6. Mějme dánu funkci f a reálné číslo b.

Úloha najít $x_0 \in D(f)$ takové, že $f(x_0) = b$, se nazývá **rovnice o jedné neznámé** a zapisuje se $f(x) = b$. Číslo x_0 je **řešení** (či **kořen**) rovnice.

Věta 4.2. Mějme dánu rovnici $f(x) = b$.

a) Jestliže $b \in H(f)$, potom má rovnice $f(x) = b$ alespoň jedno řešení.

b) Jestliže funkce f je prostá, potom má rovnice $f(x) = b$ nejvýše jedno řešení.

c) Jestliže $b \in H(f)$ a funkce f je prostá, potom má rovnice $f(x) = b$ právě jedno řešení.

Definice 4.7. Mějme dánu prostou funkci $f : D(f) \to H(f)$.

Inverzní funkce k funkci f je taková funkce, která každému $y \in H(f)$ přiřazuje to jediné $x \in D(f)$, pro které platí $f(x) = y$. Inverzní funkci značíme $f^{-1} :\ H(f) \to D(f)$.

Věta 4.3. Je-li funkce f ostře monotónní, potom existuje inverzní funkce f^{-1}.

Definice 4.8. Mějme dány funkce f a g, pro které platí $H(g) \subset D(f)$.

Složená funkce z funkcí f a g je funkce $h :\ y = f(g(x)),\ x \in D(g)$, a píšeme $h = f \circ g$.